A psicogênese do conceito de superfície unilateral *

LÉA DA CRUZ FAGUNDES **

1. Introdução; 2. Características da superfície; 3. Método; 4. Discussão e conclusões.

1. Introdução

Uma formação pedagógica exclusivamente euclidiana conferiu um privilégio injustificável ao estudo apenas das superfícies planas.

Mesmo nos estudos dos colaboradores de Piaget, a teoria matemática das superfícies não tem sido suficientemente analisada. Battro (1976) considera fundamental que se estude a psicogênese desses conceitos, pois ainda se ignora como se desenvolvem os processos perceptivos ou cognitivos no caso das geometrias não-euclidianas, como, por exemplo, no da geometria intrínseca a superfícies não-planas.

Se, como afirma Piaget (1948), "a análise abstrata dos geômetras tende a demonstrar que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas – são topológicas", e se "os estudos psicogenéticos sobre o desenvolvimento da noção de espaço confirmam que a representação espacial começa por reconstruir as relações topológicas elementares, das quais a própria percepção participa", que papel desempenham a percepção e a dedução operatória na construção de um conceito de espaço cujas propriedades são topológicas.

Quais são os processos cognitivos subjacentes à compreensão de uma forma não-aprendida na escola e incomum no meio natural? Gréco (1971) utilizou a "cinta de Möebius" para estudar a natureza das representações por imagens com conteúdo espacial. Este objeto apresenta um fenômeno muito interessante e rico em perspectivas.

* Dissertação de mestrado, curso de pós-graduação em educação da UFRGS/1977.

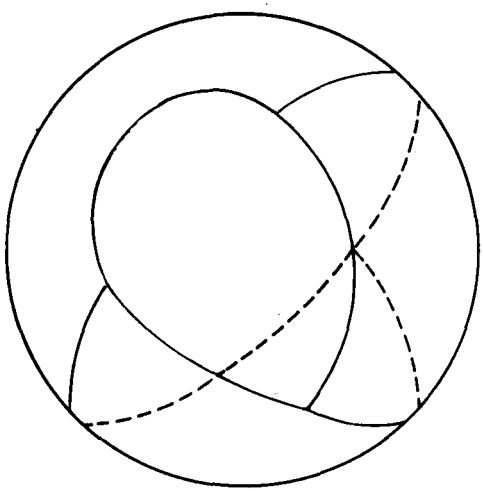
** Do Departamento de Psicologia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

2. Características da superfície

Se deformarmos um poliedro simples, explicam Fréchet e Ky Fan (1959, p. 29-32), "transformando-o na superfície de uma esfera, obteremos uma divisão da superfície da esfera por meio dos lados curvilíneos do polígono correspondentes às faces do poliedro. Inversamente, se dividirmos a superfície de uma esfera em número finito de polígonos curvilíneos, de maneira que, para toda aresta curvilínea, existam dois, e somente dois, polígonos curvilíneos que tenham aresta em comum, poderemos deformá-la, transformando-a em um poliedro simples cujas faces provenham dos polígonos curvilíneos traçados sobre a mesma.

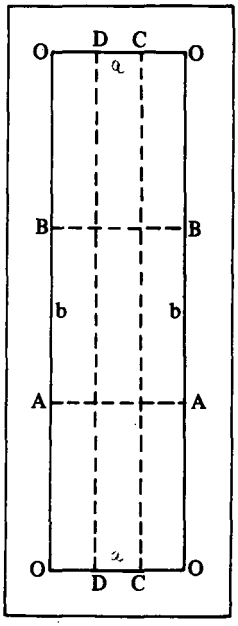
Resulta, assim, que o teorema de Descartes, freqüentemente atribuído a Euler, subsiste para toda divisão da superfície de uma esfera em polígonos curvilíneos, tal que a divisão verifique a condição supracitada. Na figura 1 vê-se uma divisão da esfera em quatro triângulos curvilíneos correspondente a tetraedros e chama-se divisão tetraédrica.

Figura 1



Assim, para cada divisão da esfera em polígonos curvilíneos, tem-se sempre $V = A + F \neq 2$, (sendo V = vértices, A = arestas e F = faces). O número 2 é atribuído de modo intrínseco, independente da natureza da divisão poligonal, possuindo a esfera a característica 2.

Figura 2



Tomemos, agora, o toro. Como já sabemos, a divisão do toro em polígonos curvilíneos pode ser representada sobre um retângulo, tendo-se em conta os vértices equivalentes (isto é, provenientes do mesmo vértice sobre o toro) e as arestas também equivalentes. Desta maneira, na figura 2 representamos uma divisão do toro em nove retângulos curvilíneos. Para tal divisão tem-se:

$$V = 9 \quad A = 18 \quad F = 9$$

$$V - A + F = 0$$

isto é, a fórmula de Descartes não se aplica ao toro. Mas pode-se demonstrar que quando dividimos o toro em um número finito de polígonos curvilíneos, de maneira que para toda aresta (curvilínea) haja dois polígonos curvilíneos (e somente dois) que tenham esta aresta em comum, tem-se sempre:

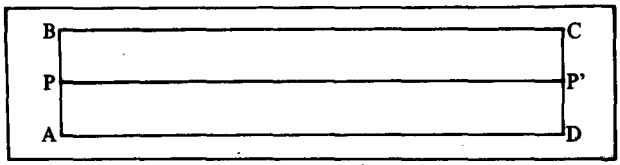
$$V - A + F$$

O número 0 é, assim, atribuído ao toro, independentemente da maneira como tenha sido dividido: diz-se, então, que a característica do toro é 0.

Em geral, pode-se definir a característica para toda superfície e veremos que a mesma é invariante topológico, isto é, que duas superfícies homeomorfas têm sempre a mesma característica.

Quando uma formiga se move na superfície de uma esfera, não pode passar do interior ao exterior, seguindo um caminho sobre a mesma, sem transpassá-la. Também uma formiga que se move na superfície de uma semi-esfera não pode passar de um lado a outro da mesma sem atravessar o seu bordo. Uma superfície que goza desta propriedade chama-se bilateral.

Figura 3



Das superfícies que não possuem tal propriedade, a cinta de Möebius (August Ferdinand Möebius, 1790-1868) nos proporciona um exemplo dos mais simples: tomemos um pedaço de papel retangular *ABCD* (figura 3) cuja base *AD* seja suficientemente larga com respeito à altura *AB*. Após torcer esta folha em um ângulo de 180°, unimos os lados *AB* e *CD* de modo que o ponto *A* coincida com *C* e o ponto *B* coincida com *D* (figura 4). A superfície assim obtida é chamada cinta de Möebius.

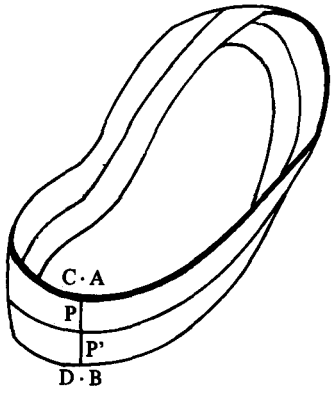
Vê-se que o bordo da cinta é formado por uma só linha fechada. Uma formiga pode passar de um lado a outro marcando uma linha fechada; poderá, pois, marcar uma linha sobre a cinta de Möebius, sem atravessar seu bordo. Consideremos, por exemplo, o segmento *PP'*, do retângulo. Na cinta, ele se converterá na curva fechada *PP'* (*P* e *P'* sao dois pontos superpostos, um sobre cada lado da cinta, cf. figura 4).

Assim, a cinta de Möebius não tem, como a semi-esfera, as faces separadas pelo bordo. É, pois, no espaço da geometria elementar, uma superfície unilateral.

As superfícies unilaterais, no espaço da geometria elementar, podem ser caracterizadas por propriedades topológicas. Imaginemos que marcamos ao redor de cada ponto da superfície (salvo aqueles que se encontram no bordo) uma pequena circunferência. Tratemos, agora, de dar a cada uma destas circunferências um sentido determinado de percurso cíclico, de modo que duas circunferências de centros muito próximos recebam o mesmo sentido. Se isto for possível, diremos que a superfície é *orientável*; em caso contrário, denominá-la-emos *não-orientável*.

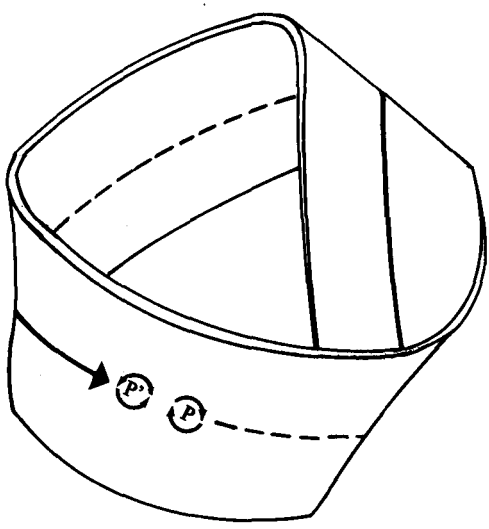
Uma superfície unilateral não pode ser orientável. Com efeito, em toda superfície unilateral existe pelo menos uma linha fechada (que não corta os bordos) segundo a qual uma formiga pode passar de um lado da superfície a um ponto

Figura 4



superposto do outro lado. Se um ponto móvel desliza ao longo da linha, de P a P', e duas circunferências traçadas ao redor de duas posições muito próximas do ponto móvel se orientam no mesmo sentido, o sentido da circunferência traçada ao redor de P' é, necessariamente, oposto a P da circunferência de outro P (figura 5). Todavia, estando P e P' superpostos, constituem um mesmo ponto. A superfície de Möebius é, pois, não-orientável. Esta singularidade deve-se unicamente ao fato de que a superfície em questão é unilateral.

Figura 5



Se cortarmos a cinta ao longo da curva fechada *PP'*, a mesma não se dividirá em duas partes. Esta curva fechada *PP'* possui, sobretudo, a seguinte propriedade notável: se um ponto móvel deslizar ao longo da curva *PP'*, então ele passará de um lado a outro da mesma, sem atravessá-la. De sorte que, se a superfície de um terreno tivesse a forma de uma destas cintas, e fosse atravessado por um rio segundo a curva *PP'* poderíamos passar a pé de uma margem do rio à margem oposta sem cortá-lo; o que se poderia expressar através da constatação de uma única margem para tal rio. Pode-se, também, dizer que a curva fechada *PP'* da cinta de Möebius não tem mais que um bordo. A existência em uma superfície de pelo menos uma curva fechada que não tenha mais que um bordo, é condição necessária e suficiente para que a superfície seja unilateral."

3. Método

3.1 *Sujeitos*

Foram entrevistadas individualmente 90 crianças, de 6 a 12 anos, em seis faixas de idade, e 15 professores que ensinam matemática, sem controle de sua titulação.

3.2 *Técnica e materiais*

Foram utilizadas fitas de cartolina com as dimensões de 60cm de comprimento por 5cm de largura, em cor branca ou bege, pincéis atômicos no mínimo de quatro cores diferentes, tesoura e fita adesiva ou cola plástica.

O experimentador realizou as entrevistas que foram registradas de forma inteiramente descritiva por um observador. As entrevistas individuais foram realizadas numa dependência da escola funcionando no momento como laboratório.

Cada entrevista era iniciada por uma conversa informal em que o experimentador convidava o sujeito para uma conversa ou para um jogo, dependendo da idade. A seguir lhe oferecia uma das fitas que estavam à sua disposição junto com todo o material sobre a mesa e pedia que a examinasse.

O interrogatório começava por uma exploração espontânea do material, em que se pretendia também levantar a linguagem disponível do sujeito: "De que é esta fita?" "Passe a mão sobre sua superfície", ou "Que parte da fita é esta em que está tocando?" "Quantos lados ela tem?" "Mostre-me o bordo", ou "Quantas beiradas ela tem?" "Como você chama esta parte da fita?" "Onde você pode escrever sobre ela?"

Quando o sujeito era adulto, perguntava-se apenas: "Quantos lados tem a superfície desta fita?" "Quantos bordos ela tem?"

Depois de combinar com o sujeito o que seria chamado *lado* e o que seria chamado *beirada ou bordo*, pedia-se a primeira tarefa:

"Você quer pintar cada lado de uma cor? Pode usar estes pincéis à vontade."

O diálogo experimentador-sujeito previu contínua revisão, as informações do sujeito servindo como *feedback* para modificação das perguntas subseqüentes.

Analisava-se a seguir o resultado da tarefa: "Quantas cores você utilizou? Por quê?" ou "Não pintou tudo? Mas podia ter pintado? Até onde?" "Onde começou? Onde terminou?"

Na segunda tarefa (figura 6), convidava-se o sujeito a unir as duas extremidades da fita e explorava-se o novo objeto obtido; formulava-se especificamente uma pergunta sobre o número de *lados* e outra sobre o número de *bordos*.

Pedia-se ao sujeito, a seguir, uma hipótese sobre o número de cores de que necessitaria se tivesse que pintar cada lado de uma cor, e também agora, cada beirada de uma cor diferente.

Figura 6

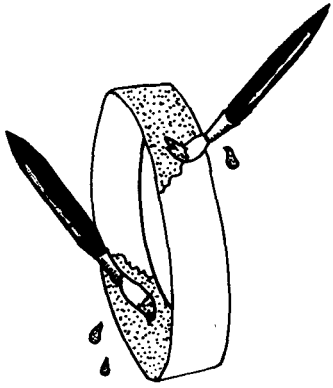
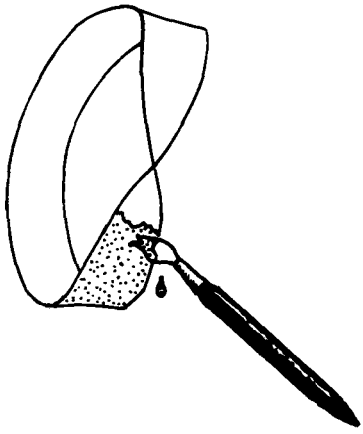


Figura 7



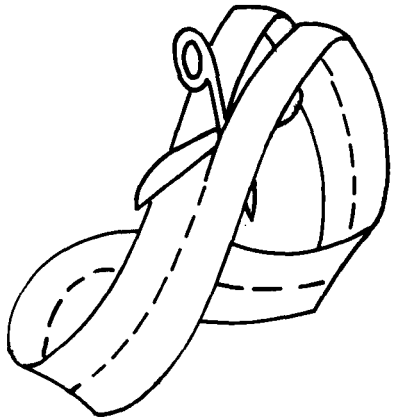
O sujeito constatava sua estimativa pintando a fita.

Na terceira tarefa (figura 7), o experimentador fazia, à vista do sujeito, uma transformação em outra das fitas sobre a mesa tendo o cuidado de que o sujeito se certificasse, antes, de que elas eram semelhantes.

A transformação consistia em unir as extremidades fazendo uma inversão, de 180°.

Entregava-se ao sujeito a fita transformada e repetia-se uma série de perguntas que estimulassem a exploração do sujeito. Pediam-se, então, hipóteses sobre o número de cores necessárias para pintar cada lado e cada bordo de uma mesma cor diferente das outras. Entregavam-se os pincéis para que o sujeito executasse e constatasse. Analisava-se após, dialogando com o sujeito, o resultado da tarefa. Interrogava-se o sujeito sobre sua interpretação do objeto e solicitava-se ao sujeito que tentasse explicá-lo.

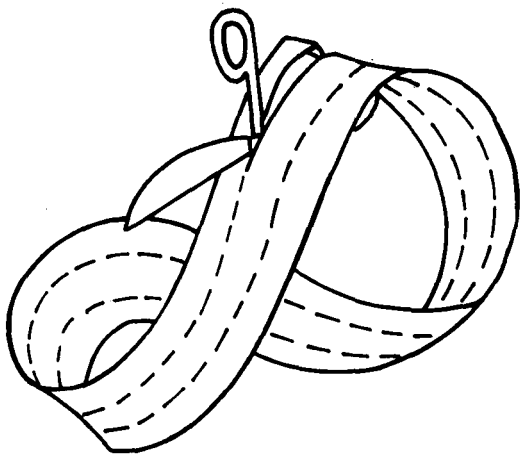
Figura 8



Uma quarta tarefa (figura 8) era então proposta: cortar a fita transformada, pelo meio, no sentido de seu comprimento. Pedia-se, antes, a estimativa do sujeito sobre o que ele pensava que ia acontecer. Depois da constatação, fazia-se a exploração do novo objeto, através do interrogatório verbal.

Na quinta tarefa (figura 9) entregava-se ao sujeito uma outra fita transformada por uma inversão de 180° e pedia-se que cortasse 1/3 da largura, no sentido de seu comprimento, pedindo-se antes suas hipóteses.

Figura 9



Após a execução, fazia-se novamente a exploração dos dois objetos quanto ao número de cores, ao número de lados e ao de bordos.

Pedia-se ao sujeito uma comparação entre os dois últimos objetos e o que ele havia constatado nos dois primeiros (agora já ausentes) e suas explicações.

A contra-argumentação era oferecida tanto verbalmente como mediante a última comparação executada.

No caso particular do conceito cuja psicogênese se estuda neste experimento – o conceito de superfície unilateral – o objeto do conhecimento resulta, ele mesmo, de transformações, apresentando propriedades ainda bastante incomuns no mundo físico.

Quais são essas propriedades relevantes na formação do conceito?

Se as extremidades de uma fita de papel, por exemplo, forem unidas, se formará uma superfície cilíndrica com duas faces e dois bordos. Mas se for aplicada uma rotação de 180° numa das extremidades, antes que ela seja unida à outra, a superfície resultante terá só um lado e um bordo.

Sempre será possível ligar qualquer ponto da fita a qualquer outro ponto na fita por uma curva que se estenderá completamente sobre a superfície, sem cruzar o bordo. Isto não acontece com as superfícies comuns, de dois lados.

Se a extremidade sofrer uma rotação de 360° para depois ser unida a outra, a resultante será uma faixa de Möebius de segunda ordem, bilateral e com dois bordos.

Generalizando, com n meias voltas antes de unir, obtém-se uma fita de ordem n. Se n é ímpar, a superfície é unilateral e possui uma única fronteira curva que é enlaçada para $n \geqslant 3$; se n é par, ela é bilateral e tem duas fronteiras.

A fita pode ser cortada em várias ordens por uma linha central. Se n é par, resultam duas fitas semelhantes à original, ligadas, com as fronteiras curvas. Se n é ímpar resulta só uma fita semelhante ao bordo curvo, isto é, para $n \geqslant 3$ ele é enlaçado. Tem $2n + 2$ meias voltas: n para cada circuito do original e 2 extras ganhos quando as espirais são abertas.

Se as fitas são trisseccionadas, a fita do centro lembra a original, mas as mais de fora poderão ser únicas ou pares, conforme o resultado da bissecção, e poderão estar ligadas ao anel central.

3.3 *Resultados*

As condutas dos sujeitos evidenciaram desenvolvimento em diferentes níveis, e pelas regularidades apresentadas tornaram possível a classificação também em subníveis.

3.3.1 Condutas de nível I

O nível I-A – Essas condutas revelam que o pensamento da criança se prende a estados, não conseguindo acompanhar as transformações realizadas sobre a fita. O sujeito centra sua atividade em determinadas regiões do campo perceptivo. Não compõe deslocamentos sobre a fita e não chega a expressar conflitos cognitivos ante as contradições que expressa na explicação das soluções que ele apresenta para as tarefas propostas, pois impõe modificações ao real para que este se ajuste à sua percepção e ao egocentrismo de sua atividade.

Observem-se os seguintes exemplos:

Car (6a 0m) (. . .) "Pinta todos os lados da tira de papel" (fita aberta). – Dá para pintar de amarelo?" "Sim." (Pinta um dos lados.) "Este aqui é amarelo." "Muito bem! Agora onde dá para pintar ainda?" "Sim." (Vira o papel.) "Tu queres pintar com o outro pincel?" "Quero. Começo aqui em baixo?" "Onde quiseres, desde que pintes o lado todo." "Este aqui muda de cor?" "Tu gostas de mudar de cor?" "Sim." (Continua pintando.) "Quantos lados pintaste deste papel?" "*Dois.*" "Agora, se eu fizer assim (une em cilindro outra fita) quantos lados tem esta tira?" (Não responde.) "Como se chama esta figura?" "Bola." "Então pinta os lados desta bola usando uma cor diferente para cada lado." (Pinta.) "Quantos lados ela tem?" "Um amarelo e um rosa." "Como eu posso chamar o lado amarelo?" "Amarelo." "Em vez de dizer lado rosa, como eu posso chamá-lo?" "Não sei." (Transforma-se outra fita e apresenta-se-lhe invertida.) "Tu és capaz de pintar este lado sem levantar o pincel? Experimenta." (Começa a pintar – na primeira curva levanta o pincel e muda de cor.) "Como pintaste?" "Fazendo uma estradinha." "Em quantos lados fizeste a estradinha?" "Em dois." "Por que levantaste o pincel aqui?" "Não dava para continuar. Era o outro lado . . ."

Mar (7a 1m) (. . .) (Apresentando a cilíndrica.) "Quantos lados tem esta fita?" "*Dois*" "De quantas cores precisaste?" "*Duas.*" Agora vou fazer outra transformação (apresenta a fita invertida). "Quantos lados tu achas que tem esta fita?" (Olha de diferentes ângulos, deslocando-se em volta da mesa.) "*Quatro* lados, "Então pinta cada lado de uma cor diferente." "Por fora primeiro?" (silêncio) (pinta). "Quantos lados tem esta fita?" "*Quatro.*" "De quantas cores precisaste?" "Uma!" (Põe a mão no rosto, como se tivesse feito algo errado!) "Então quantos lados tem?" "Quatro." "Uma menina que esteve aqui nos disse que tinha só um lado porque ela pintara tudo com uma só cor! Ela estava certa ou errada?" *"Tá errada, porque tem quatro. Não estás vendo?"*

Ter (8a 5m) "Quantos lados tem essa fita?" "*Quatro.*" "Então mostra." "*Um, dois, três, quatro*" (apontando). "Ah! Tu chamas isto de lado?" "É." "E isto aqui onde a gente escreve?" "Acho que é meio. "Vamos combinar: aqui é lado e aqui é beirada. Sim?" (Acena que sim.) Se eu te pedir para pintares cada lado de uma

cor, de quantas cores vais precisar?" "*Duas.*" "Se eu colar a fita aqui (mostra a fita cilíndrica), com quantos lados ela fica?" "*Dois.*" "E com quantas beiradas?" "Duas também." (Passa o dedinho, contornando a fita.) "Agora, presta bem atenção: se colar assim?" (Faz a inversão.) "Ficou um oito." "Ficou quase um oito, não é?" (Sorri.) "Quantos lados tem?" "Três!" "Olha bem: é como uma pista de corrida. Se fosses pintar um lado todo de uma cor só . . ." (Desliza o dedinho sobre a face da fita.) "Mas quando a gente vai passando aqui, vai prá dentro . . ." "Então pinta como se fosse o rastro que o carro deixou." "Mas quando a gente faz assim (mostra a inversão) sai dos dois lados . . ." "Quais dois?" "O de dentro e o de fora." (Passa o dedinho imitando um carro.) "Levantaste o carro alguma vez?" "Não, ele sai daqui e vai pra dentro." "Quantas cores usaste?" "Uma." "E quantos lados tem esta fita?" "*Dois.*" "Quantas beiradas?" "*Duas* também."

Aparecem reações em que se nota uma possibilidade de esquematização motora pela repetição das ações de deslocar e apalpar, entretanto, por ausência de composições, a percepção atual obstrui, ou suprime, a presença da transformação. A motricidade mostra-se subordinada à percepção em lugar de prolongá-la em antecipação a outras percepções possíveis.

O nível I-B – Dadas as características específicas encontradas na psicogênese deste conceito, classificamos neste nível as condutas que, mesmo expressando o conflito, não evidenciam nenhuma tentativa de elaborar inferências necessárias a partir das constatações empíricas.

Nelas há centração da representação intuitiva sobre a percepção dada, e não ainda descentração no sentido das modificações que a ação poderia introduzir, embora se possa notar nos argumentos dos sujeitos deste nível a presença de esquemas operatórios. Veja-se, por exemplo, alguns dos protocolos de entrevista:

Deb (8a 10m) (. . .) "Pinta uma face só." (Pinta tudo.) *"Pintei duas faces."* "Quantas cores usaste?" "Usei uma cor." "Quantas faces achas que ela tem?" "Tem uma. Uma, não! Ela tem duas faces, mas pintando parece uma." "E quantas beiradas ela tem?" "*Duas.*" "Então pinta só uma beirada." (Pinta tudo.) "E aí?" "Tem duas beiradas." "Mas quantas cores usaste?" "Uma cor. A gente rodeando fica parecido com uma coisa só, mas tem duas." "Se cortarmos esta fita assim (1/3), quantas fitas achas que vai ficar?" "Vão ficar duas fitas, porque a gente cortando vão ficar duas fitas assim . . . Não! É, eu acho que é sim." "Então corta." (Corta.) *"Oh, ficou assim"* (mostra como ficou na emenda). "O que aconteceu?" "Ficou um círculo dentro do outro." "Este menor (invertida), quantas faces e quantas beiradas tem?" "*Duas* faces e *duas* beiradas." "Pinta uma face." (Pinta tudo.) "Oh, já pintei." "Quantas cores usaste?" "*Uma* cor, mas ficaram pintadas as duas faces." "Agora pinta uma beirada." (Pinta tudo.) "Ficaram pintadas as duas beiradas, mas eu usei só uma cor." "Este maior (dupla inversão), quantos lados e quantas beiradas tem?" "*Dois* lados e *duas* beiradas."

Car (8a 9m) (. . .) "Pintei uma só, mas saiu as duas. É como se fosse mimeógrafo. Mimeografa tudo." "Quantos lados tem?" "*Dois*." "E quantas bordas?" "*Duas*." "Agora vamos pegar outra fita e vamos cortá-la assim pelo cantinho (1/3)." (Começa a cortar.) "Tá me dando uma complicação dos diabos! Eu vou cortando e vai embirutando." "Quantas tiras vai dar?" "Acho que vai dar uma. Será que vai dar? Vai encontrar o começo." "Quantas deu?" "Deu duas fitas, mas por que esta está curta e esta está comprida? Isso eu queria saber." "Esta menor (invertida), quantos lados e quantas bordas tem?" "*Dois* lados e *duas* bordas." "Pinta um lado." "De novo! Acabei de fazer tudo! (Começa a pintar; canta.) Eu estou fazendo a volta e vai dar as duas. Pronto! Pintei! Pintei uma e saiu as *duas*. É como se fosse mimeógrafo!" "Quantas bordas tem?" "Duas."

Jos (10a 8m) (. . .) "*Três*. Aqui é um lado mais diferente, aqui é todo igual e aqui já é outra cor, porque é o lado de baixo." (Mostra.) "Pinta sempre o mesmo lado da mesma cor." (Começa a pintar, pára.) "Por que paraste?" "Porque aqui já é outra parte e se a gente continuar assim pega a parte de baixo." "Mas há algo que impeça de continuar o mesmo lado?" "Se a gente vai até aqui pega a parte de baixo." "Mas se fizer assim" (vira a fita). "Só até aqui mais ou menos, porque já começa a descer e é outra cor." "E quantas beiradas tem?" "Acho que deve ter umas duas." "Como se pode fazer para pintar só uma beirada?" "Até aqui, porque ela sobe." (Pinta.) "Enquanto estiveres pintando a mesma beirada continua sempre." Porque aqui tem que começar outra, não dá!"

Sil (11a 6m) (. . .) (Depois de cortar 1/3.) "Esta aqui (dupla inversão), quantos lados tem?" "*Dois*." "E quantas beiradas?" "*Duas*." "E esta?" (invertida). "Dois lados e duas beiradas." "Tens certeza?" "Tenho." "Por quê?" "Porque estou vendo." "Não precisas pintar?" "Não. Daí eu vou pintar tudo, porque ela está curva." "E esta?" (dupla inversão). "Também. Ela está enroscada." "Qual é a tua conclusão, comparando as tiras que já fizeste com estas duas?" "Que as tiras têm dois lados." "Qualquer tira?" "É. Não, depende." "Depende de quê?" "Se ela está redonda assim (circular) parece que tem os dois lados. Se ela está torcida não parece, mas são dois."

A constatação mais surpreendente neste experimento foi identificar entre os professores condutas de nível I, muitas vezes bem semelhantes às das crianças, seus alunos, como por exemplo:

Professora (2.ª série do 1.º grau). "Quantos lados e quantas beiradas tem esta fita?" (comprida). "*Dois* lados e quatro beiradas." "Se fizermos assim (cilíndrica), quantos lados e beiradas tem?" "Dois lados e duas beiradas." "De quantas cores precisarias para pintar cada lado de uma cor?" "Lado de dentro e lado de fora, precisaria de duas cores. Qual é a conclusão de vocês, hein? (refere-se à entrevistadora e à observadora). Agora vou fazer assim com a fita (invertida)." "Se tu

fosses pintar cada lado desta fita de uma cor, de quantas cores precisarias?" "Precisaria de *duas* cores. Continuam dois lados." "Pinta para ver." (Começa a rir ao pintar.) "Não dá para continuar. Não deu. Não é o mesmo lado. Modificou, aqui começa o outro. Se fosse contínua daria para pintar. Acaba na outra ponta. Passei de um lado para o outro." "Quantos lados tem?" "Tem que ter dois lados, mas ela está inteira." "Mas tu pintaste com uma cor só! (Hesita.) "Ela tem dois lados, mas forma uma só." "E quantas beiradas?" "Duas." "Então pinta cada beirada de uma cor." (Começa a pintar.) "Claro que eu vou e volto. Vou chegar no mesmo ponto de partida como se fosse uma coisa só. Mas continua tendo duas beiradas." "Se fosse cortar ao meio, o que acontecêria?" "Ficaria mais estreitinha." "Quantas tiras ficariam?" "Ficariam duas tiras." "Então corta." (Cantarola enquanto corta.) "Ficam duas. (Começa a rir ao ver que ficou uma.) "Que bacana!" "Ela ficou igual à anterior?" "Ele ficou torcida mais uma vez." (Dupla inversão.) "Quantos lados e quantas beiradas tem?" "Continuam dois lados e duas beiradas."

A continuação da entrevista evidenciou que o sujeito nem tentou descobrir hemeomorfismos, classificando as diferentes transformações do objeto (através da bi e da trissecção), pois sua operatividade foi totalmente bloqueada pela percepção imediata.

Entretanto, sujeitos como os dos protocolos seguintes chegam a tentar classificação, mas não conseguem construir um sistema de composições reversíveis que permita a conservação das propriedades invariantes do objeto:

Professora (1.ª série do 1.º grau) "Passa a mão pela superfície dessa fita. Quantos lados tem?" (Passa a mão.) "Dois lados" (mostra). "E quantas beiradas?" "Quatro" (mostra). "Se juntarmos as pontas, quantos lados são?" "O de fora e o de dentro." "Se fores pintar cada lado de uma cor, de quantas cores precisarias?" "Duas cores." "Quantas beiradas?" "Duas." "Vou fazer uma transformação, colando assim. E agora? Quantas cores?" "Continuam duas cores, eu acho, lado de dentro e lado de fora." "Pinta só um lado com uma só cor." "Todo um lado? (pinta). Pintei todos!" "Por quê?" "Porque ficou torcidinha, torceu o lado que era de dentro ficou pra fora e o de fora ficou pra dentro. Continuam os dois, mas a torcida transformou (mostra dentro e fora). Se eu colocar essa caneta aqui ela fica dentro." "Tem certeza?" (Coloca a caneta com uma parte para dentro e outra fora.) "Então tem um lado só . . ." "Por quê?" "Porque não tem dentro nem fora, se está dentro está fora . . ." "E beiradas, quantas?" "Continuam. Tá igual à história do ovo e da galinha . . . complicou . . . continuam duas beiradas." "E pintando?" "Pintando dá a mesma coisa, uso só uma cor, mas tem duas beiradas. Pinto todas as beiradas de uma cor mas não deixa de ter duas". "Que achas que acontece se cortares pelo meio?" "Vão ficar duas faixas, não é?" "Com um lado ou com dois?" "A mesma coisa dessa que estou cortando (corta)." (Ri) "Ficou uma só! Ah! ela tá torta . . . se continuar cortando vai ficar uma só. Quero ver se desdobra." "Quantos lados são agora?" "Continuo achando que tem dois, embora

torcido . . . dentro e fora." (Faz outra faixa de uma inversão e pede para cortar na beirada.) "O que será que acontece?" (Corta.) "Só cortando prá ver. Não pára mais de cortar . . . Deu. Nossa Senhora, ficaram duas rodinhas! Uma grande e outra pequena." "São do mesmo tipo? Que semelhanças e diferenças?" "As duas estão em forma de círculo. A menor tá torcida. Mais grossa e mais fina." "E quanto ao número de lados? Podes pintar." "Essa grande, vou encontrar, como a outra. Não, está torcida duas vezes." (Pinta). "Encontrou e ficaram dois lados. Um eu pintei e o outro não. Voltou a ter dois lados. Agora vou ver a de dentro (pequena). A de dentro eu pintei toda. Essa tem um lado só pintado. Considerando a pintura elas são diferentes. Mas sem pintar, elas têm dois lados." "E beiradas?" "Também duas, embora em certas situações o lado de dentro fique fora."

Professora (5.ª e 6.ª séries) – "Conhece essa fita, essa brincadeira?" "Não . . ." "Quantas faces tem essa fita?" "Duas." "Se eu colar aqui quantas faces?" "Duas." "Quantas beiradas?" "Duas." "Como chamarias as faces?" "Internas e externas." "Atenção, agora faço uma transformação aqui, quantas faces?" "Duas." "E beiradas?" "Duas." "Pinta só uma das faces." (Fica pensando.) "*Agora me enroscou*!" "Por quê?" "Porque essa externa vai virar interna (mostra) quando vira . . ." "Pinta só uma face." "Mas é para pintar só a externa?" "Pinta só uma face." "Então tenho que pintar tudo." "Por quê?" "Pra mim eram duas, uma interna e outra externa. Mas agora que virou, ficou uma só." "Nessa torsão, o que acontece?" "Ora fica interna, ora fica externa . . ." "Quantas beiradas tem?" (Pinta, faz gestos com as mãos.) "Vai ficando uma aqui. Mas pra mim continuam duas . . . se é não sei . . . mesmo que eu continue, não consigo pintar uma só . . ." "Por quê?" "Porque está numa forma de espiral." "Quantas superfícies?" "Duas, a interna e a externa." "E beiradas?" "Também duas." "Se cortares, o que vai acontecer?" "Fico com duas fitas, não é? Posso atravessar essa colagem? (corta) Ficou o mesmo . . ." "Com o mesmo tipo de volta?" "Não. É uma espiral. Vai dar a mesma coisa, por causa do nozinho . . ." "Pinta para experimentar." (Examina primeiro. Pinta.) "Quando pinto um lado, pinto o outro, porque um lado entra no outro . . . É o mesmo problema de antes." "Pinta de outra cor, para não te atrapalhar." "Mas é a mesma coisa . . . Tá, pintei uma só, mas como não sei . . . Essa espiral vai deixando mais reta, depois encontro no nó . . ." "Quantas faces?" "*Essa pergunta de quantas faces está me amolando* . . . tem duas!" "E se cortar a fita, no que vai dar?" "Deixa eu cortar primeiro. Acho que vai dar uma de novo. (Corta.) Dá uma corrente. Olha que interessante! Por que da primeira vez não fica assim, não é? Essas coisas de face . . . isso tá tudo embrulhado . . . prá mim são duas."

Professor (7.ª série) – "É fisicamente impossível uma superfície não ter dois lados, só ter um lado." "Mas precisas de duas cores para pintá-la?" "Posso percorrer saindo de um ponto no lado de fora, passar pelo de dentro, percorrê-lo todo e novamente passar pelo de fora, voltando ao ponto de origem de forma contínua. Mas se há um automóvel aqui nada impede que haja outro simétrico, e esteja do

outro lado. Se a superfície for de metal e eu apertar contra ela dois fios da lâmpada, posso escolher dois pontos no lado oposto e colar um pedaço de madeira, fisicamente o fenômeno resultante não é o mesmo. Não dá para pintar um lado só, com uma cor contínua. Há um trecho crítico que toma direções diferentes de dentro e de fora, é torcido no espaço. Mas certamente após o trecho crítico chegarei à parte de dentro. Não afirmo que o de fora continue sempre de fora, mas afirmo que tem dois lados."

"Parto do princípio de que para tudo há os opostos. Na zona crítica tem-se que deixar sem pintar. Assim como uma função pode ser descontínua e ainda assim existir. "E quantas bordas ela tem?" "*Duas* também, fora de dúvidas."

Neste caso o sujeito elabora uma série de inferências, não a partir de constatações sobre o real, mas buscando coerência com seus próprios esquemas cuja ausência de flexibilidade parece revelar assimilação de paradigmas bem rígidos. Em realidade, tenta elaborar uma teoria buscando compensar a perturbação, mas não consegue conceber o objeto como um todo e permanece centrado sobre partes isoladas no todo.

3.3.2 Condutas de nível II

As reações iniciais, do nível I, só admitem o que é perceptível, embora as características do objeto perturbem a própria percepção. No nível II esse comportamento estático inicial é complementado por uma articulação progressiva da intuição, devido às antecipações da ação, num princípio de revanche da motricidade sobre a percepção atual.

Confirmando estudos anteriores de Piaget (1947) sobre a psicogênese de outras noções topológicas, também em nosso experimento "as articulações da intuição aparecem inicialmente, devidas à motricidade que permite às ações antecipar um pouco sua realização e de constituir, pela sua repetição, o esquema de seus sucessos anteriores. A acomodação motora, por outro lado se prolonga em imitações exteriores e interiorizadas, constituindo imagens que servem de expressão simbólica às ações e conferem assim uma dimensão representativa ou intuitiva às antecipações e reconstituições inicialmente motoras."

Entretanto, estas antecipações não encontram ainda a este nível II seu ponto de equilíbrio. Ao contrário, introduzem perturbações nos esquemas perceptivos, provocando a desequilibração cognitiva.

A composição do todo ainda não alcança com tranqüilidade um *continuum* intuitivo na superfície da fita e os sujeitos apenas descobrem contradições; não conseguem ultrapassá-las por falta de mecanismos inferenciais suficientemente organizados.

Surgem as primeiras inferências válidas a partir das constatações empíricas, mas sem qualquer estabilidade estrutural. As respostas dos sujeitos flutuam constantemente.

A descoberta da contradição aparece ligada às propriedades dos lados ou dos bordos, sem que os sujeitos alcancem as formas fundamentais de composições inferenciais, tais como a transitividade.

O nível II-A – A coordenação motora refere-se a uma das propriedades, por exemplo, número de lados, mas não se estende à exploração do número de bordos, ou, depois de tentar algumas inferências, volta a centrar na percepção.

Eli (7a 0m) – "O que pintaste?" "O de fora de azul e o de dentro de vermelho." "Quantos lados tem?" "*Dois.*" "E agora esta (invertida) quantos lados tem?" "*Dois* também: o de dentro e o de fora." "Então pinta os lados." (Pinta, mas vai precedendo à pintura com os dedinhos sobre a fita.) "Quantos lados tem?" "Tem um, eu pintei tudo reto." (Mostra com o dedo.) "Quantas cores usaste?" "Eu pintei tudo de vermelho." "Tens certeza de que tem um lado só?" "Tem dois." "Um menino que esteve aqui falou que só tinha um lado. Ele estava certo ou errado?" "O menino estava certo, tem um lado só, porque é da mesma cor." "E quantas beiradas tem?" (Experimenta passando os dedos de uma das mãos várias vezes sobre a beirada, enquanto a outra mão segura a fita.) "Acho que tem duas. É uma em baixo e a outra em cima." "E quantos lados ela tem?" "Acho que é um lado." "Então pinta uma beirada só de uma cor só." (Pinta e observa, mexendo com a fita.) "Epa! Tô em baixo! Chi! Já tou na outra beirada . . ." "Pinta sempre toda uma beirada." "Quantas pintaste?" "Duas, ó, aqui tá entortado é um e dois em baixo." "Quantos lados são?" "*Um.*" "Tens certeza?" "É *um.*" "E beiradas?" "Duas porque tem em cima."

Ale (9a 7m) – "Pinta um lado só." "Pintar um lado? Fazer todo o lado? Espera aí, deixa eu pensar." (Vai pintando e passando a mão. Pinta todo o lado.) "Tem *dois.*" "E agora esta fita? (invertida) Quantos lados tem?" (Passa o dedo.) "*Dois.*" "E quantas beiradas?" (Passa o dedo.) "*Duas.*" "Pinta só um lado." (Começa a pintar.) "Ah! Um está errado. Ah! Não, eu errei aqui, agora. Pôxa vida! Me confundi agora. Pintei dois eu acho. Mas não tem . . . para continuar pintando sai fora . . ." "Assim como está quantos lados ela tem?" (Observa e fica murmurando: "não, é dois . . .") "Pintaste um lado?" "Não, porque eu não consigo, porque não dá para pintar um só." "Quantos lados tem?" "*Dois.*" "E quantas beiradas?" "Também *duas.*" "Então pinta só um." "Só um?" (Vai pintando, movendo a cabeça imitando o movimento da fita.) "Eu acho que não vai dar." "Por quê?" "Porque não." (Hesita, olha e vai pintando). "Tá, eu estou pintando todas as beiradas. Está errado, eu me confundi. Não dá para pintar uma beirada, porque vai para baixo e depois sobe de novo. Quer dizer que só tem uma beirada!" "Quantas beiradas tem?" "Tem uma beirada." "E quantos lados?" "*Dois*", não sei." "Não queres pintar?" (Olha e não diz nada.)

Na continuação das tarefas, Ale compara sempre fitas diferentes colocando-as juntas e olhando para uma e para outra. Na bissecção torna a afirmar que a pequena (invertida) tem um lado e duas beiradas, mas ao final afirma que se fosse pintar os lados de qualquer uma das fitas, da grande ou da pequena, sempre precisaria de duas cores.

Mer (10a 1m) – Depois de inferir, durante a execução das tarefas que: "Tem só um lado porque eu peguei a cor verde e consegui passar em toda sem terminar." "Na beirada deu no mesmo. Continuei usando a mesma cor, então tem uma beirada." Mer chegou a resistir a contra-argumentação: "Um menino disse que não poderia existir uma fita com uma só beirada. Achas que ele estava certo ou errado?" "Ele estava errado, porque eu consegui com uma cor e pintei toda! Se a senhora deixasse como antes (a cilíndrica) sem essa virada, sim teria duas. Mas na bissecção, quando retoma a fita invertida, Mer exclama: "Agora sim, nas beiradas continua ficando duas. O lado também ficaram dois". "Como podes saber?" (Segura com os dois dedos, desliza entre as mãos e mostra.) "Aqui, olha! Dois lados e duas beiradas. Posso saber contando. "E se tu pintasses . . ." "Talvez . . . Mas agora eu percebi que ficou a mesma coisa, por mais que a gente mexeu . . . Tenho certeza que tem dois lados e duas beiradas." Estas condutas também aparecem entre os adultos:

Professora (1.ª série) – "Esta fita (comprida), quantos lados tem? E beiradas?" "*Dois* lados e *quatro* beiradas." "Se eu fechar assim (circular), quantos lados e beiradas tem?" "*Dois* lados e *duas* beiradas: lado interno e externo, beirada superior e inferior." "Se fosses pintar cada lado de uma cor, de quantas cores precisarias?" "*Duas* cores." "Pinta um lado." (Pinta.) "Agora vou fazer uma torção nesta fita. Quantos lados e beiradas tem esta fita?" "Tem os mesmos dois lados e duas beiradas." "Para pintar cada lado de uma cor, de quantas cores precisas?" "Preciso de duas cores." "Então pinta." (Começa a pintar.) "Mas como? Pela lógica tinha que dar certo! Que gozado ficou um lado só." "Quantas beiradas tem?" "Para saber quantas beiradas tem . . . tem duas: externa e interna. Pára um pouquinho aí." (Observa, fazendo movimento com os olhos.) "Aí vai ter uma beirada só, mas deixa eu tirar a dúvida." (Pinta.) "Tem uma beirada só." "Se cortássemos ao meio, o que aconteceria?" "Vão ficar duas fitas, é lógico." "Então corta." (Corta.) "Aí, ficou uma só! (ri) Eu disse claro que iam ficar duas e ficou uma só." "Quantos lados e beiradas tem?" "Dois lados e duas beiradas." "Vamos agora cortar assim (1/3). O que acontecerá?" "O que vai acontecer . . . se naquela ficou uma, nesta vai ficar umas seis vezes maior que aquela." "Então corta." (Começa a cortar.) "Viu como ficou seis . . . Pô, ficaram dois só! "Esta pequena (invertida) quantos lados e beiradas tem?" "*Dois* lados e duas beiradas." "É igual à anterior?" "É." "E esta maior, quantos lados e beiradas tem?" (Dupla inversão.) "Dois lados e duas beiradas. É igualzinha só que está torcida."

O nível II-B – A coordenação das ações se mostra efetiva sofre um único objeto. Parece haver uma aplicação da transitividade na inferência, mas na verdade é só um esboço, porque os sujeitos não vencem o conflito quando tentam dicotomizar os tipos de superfície.

Ros (10a 11m) – "O que estás olhando?" "Acho que só tem um lado, porque este aqui vai para cá e depois volta." "E se a gente pintar as beiradas quantas tem?" "*Uma* só também." (Passa o dedo.) "É só uma. Se a gente virar como estava antes vai ter duas, mas assim tem uma só." "Gostas de matemática?" "Um pouco." "Já tinhas visto isto aqui?" "Não." "Se eu cortar esta fita pelo meio, o que vai acontecer?" "Vai ficar duas." "Então corta." (Corta.) "O que aconteceu?" "*Ficou uma só*." "Quantos lados tem?" "Um só." "Então pinta." (Olha, pinta.) "Qual é a conclusão?" "Pintei só por fora." "E quantos lados esta fita tem?" "Só um, *dois*." "Ela é igual ou diferente da outra?" "É igual." "Quantos lados a outra tinha?" "Um." "E esta?" "Também tem que ter um." "Mas quantos lados ela tem?" "Acho que tem *dois*." "Por quê?" "Porque este lado aqui não está pintado." "Será que tu descobres a diferença?" "Eu cortei ao meio, por isso não é igual." "Agora, em vez de cortar ao meio, corta assim (1/3). O que achas que vai acontecer?" "Vai ficar em três partes." "Então corta." (Corta.) "Na outra o que aconteceu?" "Ficou uma." "O que aconteceu agora?" "Ficou em duas partes." "Quantos lados tem esta fita?" (Pequena, invertida.) "*Um* lado." "E esta?" "São, mas o tamanho não." "Quantos lados e beiradas cada uma tem?" "*Um* lado e *duas* beiradas." "Quantos lados tem esta fita anterior?" "Dois." "E esta?" (pequena) "Um lado e duas beiradas." "E esta?" (grande) "*Um* lado e *duas* beiradas." "Tem alguma relação entre os lados e as beiradas?" "Acho que não".

Professora (1.ª série) – "Quantos lados e beiradas tem esta fita?" "Agora ela tem um lado só, porque ela está virada, né? O que estava dentro ficou virado no de fora." "E beiradas?" "Beirada a mesma coisa." "A senhora precisa pintar para ter uma certeza?" (Olha a fita.) "Não é preciso pintar." "Se cortarmos ao meio, quantas fitas ficarão?" "Vão ficar *duas* fitas. Uma fita dentro da outra, né?" "Então corte." (Corta) "Uma só." "Quantos lados e beiradas tem?" "Tem *dois* lados e . . . Não, mesma coisa que a outra, porque ela tem uma torção. Tem duas torções. Ela continua com dois lados e duas beiradas, apesar das torções." "Vamos cortar assim (1/3). O que acha que vai acontecer?" "A essa altura a mesma coisa que a outra. Vai ficar uma só." "Então corte." (Começa a cortar.) "Continuo cortando até ficar uma só?" "Esta pequena (invertida) quantos lados e beiradas tem?" "Continua tendo dois lados. Não, um lado só, por causa da torcida. Estando torcida vai-se reduzir a um bordo só." "Esta grande, quantos lados e beiradas tem?" "A grande também, tem só um lado." (Mas a grande tem dois lados, é o caso das duas torções).

Neste nível ainda transcrevemos alguns exemplos de argumentação de adultos muito significativos por evidenciarem na verbalização do conflito cognitivo insu-

ficiência de coordenações, produzindo incoerências de que o sujeito não consegue tomar consciência:

Professora (4.ª série) – "Pinta esta: só um lado." "Agora, vou descobrir que não são duas" (enquanto pinta, vai examinando). Será que pintei duas da mesma cor, ou ela só tem um lado?" (Examina, revirando entre as mãos.) "*Acho que pintei dois lados da mesma cor! Pela lógica, tem dois lados, mas passando a mão só tem um. A impressão visual tem dois lados, mas a tátil tem um só!* Depois de realizar todas as tarefas volta-se a examinar as duas fitas diferentes que resultam do corte em 1/3. "Quais as semelhanças e quais são as diferenças?" "A grande (dupla inversão) é curva fechada não-simples; a pequena (inversão) é curva fechada simples." "Quantos lados?" "As duas têm dois lados." "Pinta só um lado da pequena." (Começa a pintar e examina.) "Deixa ver se eu cheguei... Se continuo tenho um lado só, mas pelo bom-senso tenho dois. Mas nem pelo bom-senso deixou de ser o que era! Em realidade, é o que a gente vê ou o que a gente pensa? O que eu vejo é um lado, mas podia pensar que são dois." "Pinta a outra fita (dupla inversão)." "Engraçado! Esta tem dois lados evidentes, reais." "Reais como tu pensas?" "Real não é o que eu penso!"

Professora (7.ª série) – "Vamos colar invertida. E agora quantos lados tem?" (Observa demoradamente.) "*Um* só lado." "Por quê?" "Porque segue (mostra com o dedo). Externo fica interno." "E bordos?" (Passa o dedo.) "Um! Parto daqui, passo ali e chego aqui." ... Depois de cortar ao meio, em toda a extensão e produzir uma fita de dupla inversão: "Quantos lados?" (Passa o dedo.) "Saí daqui e fui para lá... dois lados." "E bordos?" "Me perdi na jogada aqui..." "Podes pintar." (Passa o dedo.) "Dois bordos." "Quantos lados mesmo?" "Sai interno e volta interno. Sai externo e volta externo. São dois." "E bordos?" (Começa a pintar.) "*São dois* bordos. Chega de mandingas!" "Tem alguma coisa que ver lado e bordos?" "Não me lembro mais de todas (foram só três: cilíndrica, uma inversão e dupla inversão!) as fitas..." "Vamos cortar só 1/3?" (Apresenta uma nova fita com uma inversão.) "Suponho que vai ficar uma só aqui também. Que é isso? Ficaram duas argolas! Será que recortei bem?" "Quais são as semelhanças e quais são as diferenças?" "A pequena é igual à primeira de antes." "Quantos lados?" "Um lado e dois bordos. E a grande dois lados e dois bordos."

3.3.3 Condutas de nível III

Neste nível o conflito é ultrapassado pela utilização de mecanismos inferenciais atuando como quadros assimiladores tirados da coordenação das ações por abstração reflexiva. Uma forma lógica, aceita como necessária pelo sujeito, é adaptada ao conteúdo material, corrigindo a intuição perceptiva e, finalmente, evidenciando a compreensão das propriedades do objeto real.

As reconstituições, inicialmente motoras (os sujeitos já no nível II, ao observarem a fita, tentavam reproduzir o movimento criado pela inversão de 180º com o olhar, com movimentos de pescoço, dos olhos e até do queixo, enquanto apalpavam a superfície ou deslizavam os dedos sobre ela), no nível III se prolongam em imitações interiorizadas quando o sujeito elabora a dedução lógica sem recorrer ao ato de pintar e consegue comparar superfícies que não estão presentes, conservando as propriedades invariantes dos objetos, através das diferentes transformações.

O nível III-A – A adaptação da forma lógica ao conteúdo dá-se por abstração das ações do sujeito sobre o concreto. O conflito só é ultrapassado quando é possível ao sujeito recorrer sobre o real à constatação das coordenações que engendra.

Ell (7a 9m) – "E agora vou fazer uma transformação." "Ora, tia, descola ligeiro que estás colando errado!" "Mas é assim mesmo. Quantos lados esta fita tem?" (Fica olhando e imitando o movimento com o olhar.) "*Um* só, porque começa aqui, vira para dentro e sai para fora, de novo. É um lado só." "Então pinta este lado." (Começa a pintar.) "Ah! Meu Deus! Tá." "Então, quantos lados tem?" "Ah! Já me esqueci de novo! Não, é assim: vem por aqui e continua por fora até aqui outra vez. Só tem *um* lado! . . ."

Tul (7a 10m) – "Continua tendo *dois* bordos." "E lados?" "Dois." "Então pinta um bordo." (Vai pintando.) "Mas que esquisito, oh, eu estava ali e estou aqui, mas continua tendo *dois*, acho, deixa eu ver . . . *um, dois, três, quatro.* Não sei, estou confuso." (Continua pintando.) "Hi, que confusão, não sei." "Quantos bordos achas que tem?" "Acho que tem *dois* ou *quatro*." (Percorre com o lápis.) "Tem dois." "E lados?" "Tem *dois*." "Pinta um lado só." (Começa a pintar.) "Coisa esquisita (pára). Tudo dentro dá um só. Não dá para pintar um só, ou dá? Ah, dá sim. Acho que fiz confusão." "E aí?" "Aí deu um só, eu acho. Isto aqui está tão esquisito. Este calombinho (mostra a emenda) é que me atrapalha." "Quantos lados tem?" "Acho que tem um só. Saio aqui e quando vou ver estou lá embaixo de novo. É um só." "E bordos?" "*Um* só (mostra com o lápis). Agora não sei se tem um bordo ou dois." "Pinta um bordo." (Pinta.) "Se eu chegar no mesmo lugar é porque tem um; se eu não chegar é porque tem *dois*." (Depois de pintar.) "Ah, ah, é um bordo só." "Se cortarmos assim" (1/2). "Aí vai ficar cortada ao meio." "Quantas tiras achas que vai ficar?" "Acho que *duas*. Vou ver se dá duas." (Corta.) "Ah, tudo uma só, que nem o outro troço, só que agora tem dois bordos e dois lados." "Pinta um lado." "Aqui tem dois lados. Eu acho, deixa eu ver." (Pinta um lado.) "Oh, pintei um lado. Descobri que tem dois lados. Acho que tem dois bordos, porque tem dois lados." "Pinta um bordo." "Tá (pinta). Eu pintei um mas tem dois." "Vamos cortar assim (1/3), o que vai acontecer?" "Acho que vai ficar uma só, porque a outra foi uma só." "Corta, então." (Enquanto corta.) "Ah, tá, estou começando a entender. Acho que vai ficar uma enor-

me (antes tinha passado os dedos, deslizado a tesoura pelo papel e dito que iam ficar duas). "Pronto!" "Ficou o número 8, não te disse? Ficou duas tiras, uma emendada na outra." "Esta aqui (tira menor) . . ." "Continua o mesmo de antes. Continua tendo um lado e . . . (hesita) beiras . . . também uma . . . tem um ou tem dois . . . agora não sei." "Quantas beiras tem?" "É mais provável que tenha uma beira, porque no fim tudo se junta, mas não tenho certeza." "Pinta uma beira." (Enquanto pinta.) "Tem uma só, agora estou indo para a parte de baixo. Sempre vai ter uma. Parece que tem duas mas tem uma. É como num viaduto, que tem duas partes mas é tudo uma coisa só." "Quantos lados tem a fita?" "Um lado só, pôrque tudo se junta, é tudo o mesmo." "E esta tira maior?" "Tem dois de cada coisa, porque isso aqui é reto (estica a fita), é como aquela primeira que tu já fez que tinha dois lados." "Pinta um lado só." (Pinta.) "Tem dois lados. Agora é para pintar uma beirada, né?" "É." "Viu como eu já sabia?" "Se fosses pintar cada lado desta tira (menor) de uma cor diferente, de quantas cores precisarias?" "Uma cor." "E cada beira de uma cor diferente?" "Uma cor." "E para esta tira maior?" "Duas cores para os lados e duas cores para os bordos."

Gio (7a 9m) – "De quantas cores precisas para pintar cada lado desta fita de uma cor?" "Acho que é de duas ou de uma, não sei!" (Olha cuidadosamente e imita com o dedo no ar o movimento.) "Então pinta." (Começa a pintar.) "Ih, saiu fora, nem reparei e saiu fora! Ah, não! está certo, estou continuando. Não sei se pintei errado. Não me dei conta, pintei toda a volta de verde." "Quantos lados tem?" "Tem um. Deve ter dois. Deixa eu pintar. (Começa a pintar.) Tem um! Não sei direito. Duas? ou uma? Não sei bem, mas tem uma beirada só. Ela não tem fora e dentro! . . . Mais adiante . . ." "Quantos lados e quantas beiradas tem esta fita maior?" "A maior tem dois lados e duas beiradas." "E quantos lados e beiradas tem esta menor?" "A menor tem um lado e também uma beirada. Quer dizer, eu não sei direito quantas beiradas, se é uma ou duas. Como eu me complico com as coisas, puxa! Mas deixa eu ver . . . Hum!" (Passa o dedinho na fita pequena e na beirada.) "Pronto! Já sei!" "O quê?" "Quando tem dois lados tem duas beiradas. Quando tem um lado tem uma beirada!"

Rai (8a 0m) – "A pequena, quantos lados tem?" (Examina.) "Agora eu vi bem, é um lado!" "E beiradas?" "É uma também." "Um menino menor que tu disse que esta fita tinha dois lados porque é impossível a fita ter um lado só. Achas que ele estava certo ou errado?" "Acho que estava errado, porque é um, porque vai assim (mostra com o dedo) e volta, ao mesmo lugar. Uma fita pode ter um lado, depende do modo que a fita está."

Mar (8a 4m) – "Por que esta fita ficou com dois lados e dois bordos?" "Porque cortamos ao meio." "Se cortarmos assim (1/3), o que vai acontecer?" "Deixa eu cortar." "Não queres arriscar um palpite?" "Não." (Vai cortando, pára na emenda.) "Epa, aqui!" "Podes continuar cortando?" (Corta até o fim.) "E aí? "Ficaram duas argolas." "Essa menor, quantos lados tem?" "Acho que tem dois (depois

de passar o dedo). Não, aliás, acho que tem um." "Por quê?" "Eu vou traçar aqui e ela vai dar só uma volta de azul, não vai ficar sobrando nada" (antes de pintar). "Então pinta." "Quantos lados?" (Pinta.) "Um." "E quantos bordos?" "Acho que tem um." "Por quê?" "Pela mesma coisa do lado." "Então pinta. O que aconteceu?" (Pinta). "Ficou um bordo." "E esta argola maior?" "Deixa eu ver . . . ficaria . . . (faz uma marca e começa a passar o dedo por toda a superfície). Acho que tem um lado . . . Não, acho que tem dois lados e dois bordos." "Por que achas isto?" "Não sei ainda, só pintando." "Então pinta um lado." (Pinta.) "Achas que esta argola maior é diferente da menor?" "Não sei, acho que são iguais (enquanto pinta). Não sei, acho que tem um lado . . . tem um lado sim . . . epa, não, tem dois lados." "Por quê?" "Porque pintei um e ficou sobrando outro." "E quantos bordos?" "Deve ter dois bordos também." "Então pinta um. E aí?" (Pinta.) "É, tem dois bordos." "Por quê?" "Pela mesma coisa dos lados. Pintei um e ficou sobrando outro."

Get (12a 6m) – "É para pintar os dois?" (Pinta, observa e ri.) "Como?" "Pois faz a volta e chega aqui de novo." "Então quantos lados tem?" "Só um." "Por quê?" "Se fossem dois, pintava um todo e outro ficava em branco." "E beiradas?" "Se tem um lado, tem uma beirada, mas se tem dois lados, tem que ter duas beiradas! . . ."

Rog (12a 2m) – "Não precisas pintar para ver?" "Não. Tenho a impressão que vai dar um só." "Então pinta." (Começa a pintar, vai examinando e pára.) "Tem um só. Eu já sei, porque a tração (torção) vai dar um traço contínuo." Quando se transformam as duas últimas fitas, ele as compara, examina e afirma: "A pequena é como aquela outra que tinha um lado e uma beirada, mas essa maior tem duas beiradas, então tem que ter dois lados também!"

Quando vai saindo da entrevista, fala: "A gente fica meio embatucado, mas depois é bacana."

Professora (1.ª série) – "Então pinta um lado todo da mesma cor." "Pois é (examina com o olhar) mas agora essa parte fica interna." "Dá para pintar?" "É um lado só?" "Por quê?" "Porque vai-se encontrar." "Tem certeza?" "Assim eu tenho, dessa forma é um lado, eu posso ligar aqui, eu não corto, não há separação." "E beiradas?" "Aí fica uma também, porque se eu sigo riscando, não se separam." "Tens certeza?" "Vou pintar, por via das dúvidas." (Pinta.) "Sim, fiça uma, não há interrupções." Na última tarefa, conclui: "Quando uso uma cor, tem um lado e então tem uma beirada, mas quando uso duas cores, tem dois lados. Já sei que vão ser duas beiradas!"

Professora (6.ª série) – "A minha generalização foi a seguinte: da primeira vez tinha um lado só e um bordo, cortando esta pelo meio deu uma fita com dois lados, logo vou precisar de duas cores, e vai ter também dois bordos."

O nível III-B – Na leitura dos observáveis, espera-se que condutas que se vêm desenvolvendo desde os níveis anteriores cheguem a expressar regulações, adaptando formas lógicas ao objeto-superfície unilateral, e, a partir das inferências iniciais, revelem a utilização de deduções operatórias.

A coordenação de dois sistemas de referência chegaria a relacionar diretamente o possível ao necessário, sem a indispensável mediação do concreto.

Condutas nesse subnível não foram encontradas em nenhum registro de protocolo dentro dos limites da amostra da população estudada. Note-se que não houve controle de níveis gerais de pensamento – pré-operatório, operatório concreto ou operatório formal – dos sujeitos a serem entrevistados. Tampouco foi controlada a formação acadêmica dos sujeitos-professores.

Parece, entretanto, legítima a formulação de um novo problema: A complexidade da figura espacial em estudo acrescenta dificuldades suplementares tais, para sua assimilação, que provocam regressões de condutas? Essa complexidade exige em maior grau a mediação do concreto na constatação da validade das inferências formuladas?

3.4 *Análise dos resultados*

O ponto de partida geral para a resolução do conflito – entre as leis do real (propriedades da superfície nova) e a insuficiência das coordenações internas das ações do sujeito em suas relações com o objeto – parece residir em que, uma vez estabelecidas as correspondências entre continuidade e lado da fita; entre continuidade e bordo, e entre lado e bordo, é possível conceber uma reciprocidade necessária: uma implica outro, e reciprocamente.

Qual é o mecanismo operatório que assegura tal necessidade lógica?

Chamemos p, q e r, respectivamente, aos enunciados:

p – precisa só de uma cor;
q – tem um lado;
r – tem um bordo.

e para suas negações, convencionemos:

$\overline{p}$ – precisa de duas cores;
$\overline{q}$ – tem dois lados, ou não tem só um lado;
$\overline{r}$ – tem dois bordos, ou não tem só um bordo.

Teremos à disposição um subsistema que poderá servir de modelo para analisar a lógica subjacente às condutas nos diferentes níveis.

Por exemplo, a implicação de q por p corresponde à disjunção das três conjunções $(p \wedge q)\ \mathrm{v}\ (\overline{p} \wedge q)\ \mathrm{v}\ (\overline{p} \wedge \overline{q})$; a implicação de p por q corresponde à disjunção das conjunções $(p \wedge q)\ \mathrm{v}\ (p \wedge \overline{q})\ \mathrm{v}\ (\overline{p} \wedge \overline{q})$; e a equivalência de p e q (ou im-

plicação recíproca) corresponde à disjunção das duas conjunções $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$. Mas, para afirmar a verdade de uma destas relações $p \rightarrow q$ (se p então q: se precisa só de uma cor, então tem só um lado) ou $q \rightarrow p$ (se q então p: se tem um lado só, então precisa só de uma cor), é necessário estabelecer, respectivamente, a falsidade de $(p \wedge \overline{q})$ para $p \rightarrow q$; e a de $(p \wedge \overline{q})$ assim como a de $(p \wedge q)$ para $p \leftrightarrow q$.

A implicação recíproca vai diferir da simples correspondência concreta enquanto for a resultante de um cálculo dos possíveis, não só das comprovações reais.

Assim, o raciocínio dos sujeitos em nível III-B seria mais ou menos o seguinte:

$p \leftrightarrow q$ porque $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ são verdadeiros e $(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$ são falsos, onde p e q são a comprovação do número de cores e do número de lados da mesma superfície.

Nas condutas de nível I encontra-se uma incoerência lógica, que não chega sequer a ser percebida pelo sujeito, pois a partir da premissa: para pintar cada lado de uma cor diferente, precisa-se de tantas cores quantos forem os lados, expressam a aceitação, e até a defesa de constatações como:

$p \rightarrow \overline{q}$

$p \rightarrow \overline{r}$ como no caso de Mar: "De quantas cores precisaste? "Uma!" (põe a mão no rosto como se tivesse feito algo errado!) "Então quantos lados tem (esta fita)?" "*Quatro.*"

Mar resiste, inclusive, à contra-argumentação.

"(A menina) tá errada, porque tem quatro. Não estás vendo?"

Ou então no de Ter: "Quantas cores usaste?" "Uma." "E quantos lados tem esta fita?" "Dois." "E quantas beiradas?" "Duas também." Ou no de Deb: "Quantas cores usaste?" "Uma cor, mas ficaram pintadas as duas faces", e: "Ficaram pintadas as duas beiradas, mas eu usei só uma cor." Ou ainda no da professora: "Pintando dá a mesma coisa (do que lados), uso só uma cor, mas tem duas beiradas. Pinto todas as beiradas de uma cor, mas não deixa de ter duas."

O conflito cognitivo não chega sequer a se instalar neste nível. As condutas de nível I revelam um equilíbrio que não desperta a necessidade de verificar a validade das relações lógicas estabelecidas nos argumentos.

A característica interessante das condutas de nível II é que, ante a complexidade do objeto resultante de transformações não-usuais, o sujeito dá-se conta da falta de validade de suas inferências, embora não consiga resolver o conflito. A partir das premissas, o sujeito busca alcançar implicações válidas, em idas e vindas simultâneas, mas não o consegue porque as implicações válidas conflitam com a percepção figurativa que ele ainda não consegue tornar operativa. Suas inferências flutuam:

de $p \rightarrow q$ voltam

para $p \rightarrow \overline{q}$, assim como também flutuam entre $p \rightarrow r$ e $p \rightarrow \overline{r}$, pois a disjunção das quatro conjunções, em cada caso, não constituem para o sujeito uma possibilidade, o que lhe impede sequer de notar o caso de valor falso.

De qualquer modo, vencida a flutuação, os sujeitos desse nível não conseguem ainda estabelecer a transitividade que possibilite uma dedução.

Esse modelo de flutuação entre o válido e o não-válido ajusta-se às condutas de Eli: "Quantos lados tem?" "Tem um, eu pintei tudo reto." (Ele quis dizer contínuo.) "Quantas cores usaste?" "Eu pintei tudo vermelho." E contra-argumenta: "O menino estava certo, tem um lado só, porque é da mesma cor." "Então pinta uma beirada só de uma cor. Quantas pintaste?" "Duas, ó, aqui tá entortado, é um, e dois em baixo." "Quantos lados são?" "Um." "E beiradas?" "Duas, porque tem em cima." Ou as condutas de Ale. Ora ele afirma que tem um lado e duas beiradas, ora que tem dois lados e uma beirada, e no final da entrevista afirma que se fosse pintar os lados de qualquer uma das fitas (da bilateral ou da unilateral) sempre precisaria de duas cores. Ou às de Mer: "Tem só um lado porque eu peguei a cor verde e consegui passar em toda (fita) sem terminar. Na beirada deu no mesmo. Continuei usando a mesma cor, então tem uma beirada." Entretanto, logo que um novo objeto com as mesmas propriedades do anterior é construído, Mer recusa-se a pintar, preferindo apoiar-se na percepção e argumenta: "Aqui, olha! Dois lados e duas beiradas. Posso saber contando." "E se tu pintasses?" "Talvez... Mas agora eu percebi que ficou a mesma coisa por mais que a gente mexeu... Tenho certeza que tem dois lados e duas beiradas." Ou à Ras, quando interrogada: "Têm alguma relação os lados e as beiradas?" "Acho que não."

Entretanto, nas condutas de nível III, como as de Tul: "Se fosses pintar cada lado de uma cor diferente, de quantas cores precisarias?" "*Uma* cor." "E cada beira de uma cor diferente?" "*Uma* cor." "E para esta tira (bilateral)?" "*Duas* cores para os lados e *duas* cores para os bordos." Tul já havia afirmado anteriormente: "Acho que tem *dois* lados, porque tem dois bordos." Ou as de Gio: "Pronto, já sei!" "O quê?" "Quando tem *dois* lados tem *duas* beiradas. Quando tem *um* lado, tem *uma* beirada!" Ou as de Mar: "Quantos lados tem?" Mar faz a previsão antes de constatar: "Eu vou traçar (pintar) aqui e ela vai dar só uma volta de azul, não vai ficar sobrando nada." "Então pinta. Quantos lados?" "Um." "E quantos bordos?" "Acho que tem um." "Por quê?" "Pela mesma coisa do lado." "E esta outra fita?" (bilateral). "... tem *dois* lados porque pintei um e ficou sobrando outro." "E quantos bordos?" "Deve ter dois também... pela mesma coisa dos lados. Pintei um e ficou sobrando outro." Ou as de Get: "Então quantos lados tem?" "Só *um*. Se fossem *dois*, pintava um todo e o outro ficava em branco. Se tem *um* lado, tem *uma* beirada, mas se tem *dois* lados, tem que ter *duas* beiradas." Ou da professora: "Quando uso *uma* cor tem um lado e então tem *uma* beirada, mas quando uso duas cores, tem *dois* lados. Já sei que vão ser *duas* beiradas!" Podemos observar que o conflito é totalmente resolvido por inferências válidas, inicialmente, e logo por deduções que parecem fluir da evidência.

A análise dos resultados do experimento em termos quantitativos conduz à rejeição da hipótese experimental, pois a resolução do conflito entre a percepção e a dedução operatória, no caso da transformação topológica de uma superfície

unilateral, não acompanha os diferentes estádios do desenvolvimento cognitivo geral.

Segundo a hipótese formulada, seria de se esperar que condutas de nível I fossem mais freqüentes em sujeitos do estádio pré-operatório e diminuíssem de freqüência à medida que sujeitos de mais idade apresentassem condutas gerais do estádio das operações concretas, diminuindo significativamente entre os sujeitos a partir dos 12 anos, onde se inicia, de modo amplo, uma transição para o estádio das operações formais, enquanto também era esperado que a curva de freqüência para as condutas de nível III percorresse o sentido inverso. Justamente porque "num primeiro subestádio o pensamento pré-operatório dispõe, como únicos mediadores entre o sujeito e o objeto, de pré-conceitos e pré-relações, e num segundo subestádio, por volta dos 5-6 a 7-8 anos, dá-se a passagem de um egocentrismo bastante radical, em relação à assimilação dos objetos com características das próprias ações do sujeito, a uma descentração gradativa por objetivação e espacialização". Mas ainda o sujeito pré-operatório "não pode prescindir da intuição direta, pois é incapaz de associar diferentes aspectos da realidade percebida e integrar num único ato do pensamento as sucessivas etapas de uma transformação." Como gradativamente, pelo desenvolvimento (produtor de fatores como maturação, aprendizagem e processo de equilibração), nos estádios que se sucedem, o sujeito alcança a capacidade de realizar coordenações que abrangem a totalidade do sistema pela construção de ligações interfigurais, além das conexões intrafigurais; e, finalmente, disponha, já no estádio das operações formais, "do poder de formar operações sobre operações, ultrapassando o real, e se apropriando da noção espacial de um *continuum* que ocupa o interior das superfícies e dos volumes", esperava-se que a resolução do conflito ocorresse com maior espontaneidade em estádios de maior desenvolvimento cognitivo (Piaget, 1948).

Entretanto, como se pode observar na tabela 1, condutas de nível III são as mais freqüentes na faixa de 7 a 8 anos, sendo a faixa de 11 a 12 anos a segunda de maior freqüência para essas condutas, enquanto as freqüências maiores para condutas de nível I aparecem em primeiro lugar para a faixa de 8 a 9 anos, e em segundo, para a de 9 a 10 anos. As condutas desse nível, surpreendentemente, continuam aparecendo em todas as idades, mesmo entre os adultos, professores que, aliás, são os sujeitos que apresentam maior freqüência para condutas de nível II.

A freqüência de condutas de nível I, entre os professores, é a mesma entre os alunos de 7 a 8 anos, e é mais alta do que entre os alunos de 11 a 12 anos, enquanto a freqüência de condutas de nível III entre os professores é ao mesmo tempo maior do que entre os alunos de 6 a 7 anos, de 8 a 9 anos e de 9 a 10 anos, e menor do que entre os alunos de 7 a 8 anos, de 10 a 11 anos e de 11 a 12 anos. Substancialmente, é preciso observar que condutas de todos os níveis aparecem tanto entre os alunos quanto entre os seus professores. Sobretudo a alta freqüência de condutas flutuantes, revelando a presença não-solucionada do conflito entre a percepção e a cognição entre os professores não nos permite estabelecer diferenças de níveis de desenvolvimento desses processos entre alunos e seus professores.

Tabela 1

Distribuição dos sujeitos por níveis de condutas e faixas de idade

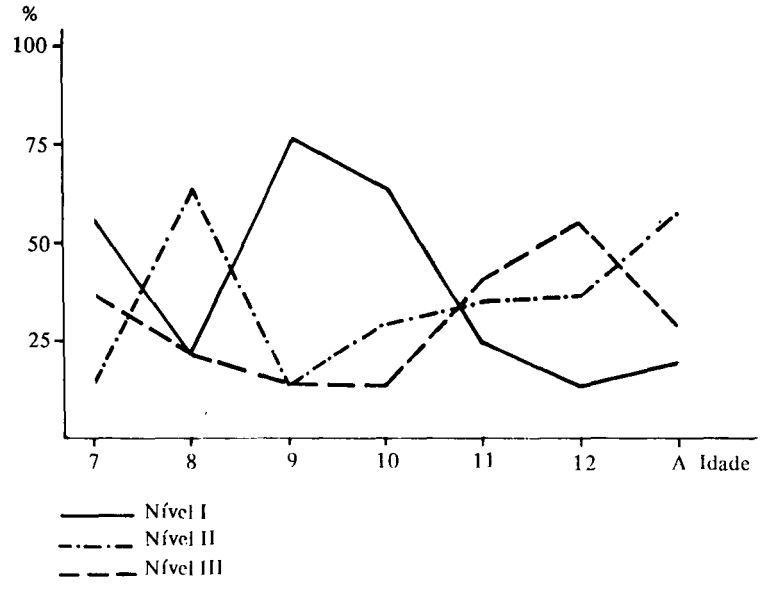
Idade	Níveis	I	II	III	Total
6a 6m	7a 6m	8	5	2	15
7a 6m	8a 6m	3	3	9	15
8a 6m	9a 6m	11	2	2	15
9a 6m	10a 6m	9	4	2	15
10a 6m	11a 6m	4	5	6	15
11a 6m	12a 6m	2	5	8	15
Adultos		3	8	4	15

$N = 105$

Na figura 10, o gráfico representa o desenvolvimento de cada um dos níveis de condutas encontradas nas diferentes faixas de idade. Note-se que os pontos da curva, que representa a distribuição das condutas de nível II, assinalam um aumento da dificuldade para solucionar o conflito, enquanto os da curva que representa o nível III evidenciam crescimento e decréscimo na capacidade de solucioná-lo, através dos anos de escolaridade dos sujeitos do experimento.

Figura 10

Percentagem dos níveis de conduta por faixas de idade



4. Discussão e conclusões

A classificação das condutas observadas em três níveis de desenvolvimento foi possível graças ao quadro teórico elaborado a partir dos experimentos piagetianos. Esse quadro nos deu os indicadores, não só para identificar as regularidades nas respostas dos sujeitos, como também para explicar as características de cada grupo de respostas semelhantes.

Os pressupostos explicativos para a conceitualização do espaço, elaborados a partir de experimentos realizados por Piaget e seus colaboradores sobre noções topológicas, projetivas e enclidianas, foram utilizados tanto para classificar as condutas dos sujeitos, quanto para analisar os resultados deste experimento.

No estudo da questão central investigada, verificou-se que a simples percepção de uma superfície unilateral pode falsear o raciocínio do sujeito, não favorecendo qualquer geometrização do objeto. O que é necessário é uma atividade perceptiva do sujeito coordenada pelos esquemas operatórios de seu pensamento. Quando os mecanismos interferenciais da capacidade operatória do sujeito foram insuficientes, ou inadequados, os dados sensíveis das propriedades da superfície unilateral ofereceram resistências perturbadoras a sua conceitualização. Evidenciou-se assim que a relativa adequação de qualquer percepção a um objeto espacial depende de um processo construtivo, e não de um contato imediato. E o sujeito só passa a integrá-la num sistema que corresponda o mais fielmente possível às propriedades do objeto por um processo que é simultaneamente cumulativo e corretivo.

Do ponto de vista da epistemologia geométrica, Piaget (1972) lembra que a opinião comum tendia a ver a intuição espacial essencialmente como uma leitura perceptiva, inicialmente do mundo exterior, e a seguir uma leitura de imagens que a percepção fornecia, ou poderia fornecer. Entre os matemáticos, têm-se instalado grandes divergências quando se tenta radicalmente dissociar o domínio intuitivo do domínio da axiomática, ou da lógica pura, pois tem-se oposto à intuição, como instrumento de percepção e de invenção, a demonstração, isto é, o próprio raciocínio geométrico, como *affaire* da lógica e da análise.

"A intuição do espaço não é apenas uma leitura das propriedades dos objetos. Muito ao contrário, ela resulta, desde o início, de uma coordenação de ações exercidas pelo sujeito sobre esses objetos. E é porque essas ações enriquecem a realidade física, em lugar de simplesmente extrair dela estruturas já prontas, que conseguem pouco a pouco ultrapassar essa realidade, até chegar a constituir esquemas operatórios suscetíveis de serem formalizados e de funcionar dedutivamente por si mesmos" (Piaget, 1958).

Um dado adicional, entretanto, foi acrescentado a essa visão genética pelos resultados deste estudo: crianças entre 7 a 8 anos evidenciaram maior facilidade de abstração a partir das coordenações de suas ações sobre a fita, suplantando a perturbação introduzida pela complexidade da transformação topológica sobre a superfície, do que crianças de mais idade, e mesmo do que os professores entrevistados.

Piaget reconstitui a história da intuição geométrica através do caminho que percorre a atividade do sujeito propriamente dita: começa na ação sensório-motora elementar para chegar à operação formal. Assim, através dos diferentes estádios de desenvolvimento, é desde a tomada de contato perceptivo, na experiência física, que a ação se manifesta sob a forma de atividade sensório-motora regulando as percepções. "Já neste nível, o objeto, elemento sensível, se limita em servir de significante, enquanto que a assimilação ativa e motora constrói as relações. A seguir, ao nível do nascimento da representação, a ação desenvolve seu papel formador: a imagem é, então, e sempre, a imitação interior e simbólica das ações primeiro anteriormente executadas, e depois simplesmente executáveis. Isto foi constatado na construção de formas, a partir das relações topológicas elementares de vizinhança, de ordem e de envolvimento, no período pré-operatório. Finalmente, é ao nível das operações concretas, e depois formais, que a ação entra em jogo sob a forma enriquecida e apurada de operação propriamente dita. As operações são mais ricas que as ações iniciais porque se tornam reversíveis e suscetíveis de composições indefinidas, e mais apuradas porque ultrapassam daí por diante os objetos sobre os quais se apóiam. Embora sem alcançar o nível das operações proposicionais hipotético-dedutivas, o sistema das operações concretas já ultrapassa em rigor o nível intuitivo elementar na medida em que as intuições perceptivas e práticas dos períodos iniciais de desenvolvimento se tornam coerentes e racionais." Haveria, então, condições para utilização de um sistema lógico-dedutivo tal como foi identificado na análise das condutas de nível III deste experimento (Piaget, 1958).

Seria, pois de supor, como foi feito na hipótese experimental, a evidência de uma seqüência ascendente correlata também na psicogênese do conceito de superfície unilateral.

Como os resultados apresentaram curvas com oscilações que parecem contrariar esse desenvolvimento seqüencial esperado, decidiu-se dobrar o número de sujeitos da amostra na faixa dos 7-8 anos. Os novos resultados mantiveram idêntica proporcionalidade e, por isso, foram considerados desnecessários.

A indagação levantada na sondagem inicial ainda permanece: "Pode a inteligência perder as condições de superar o conflito entre a percepção e a dedução operatória na construção de uma noção topológica, depois de tê-las alcançado?"

Na verdade, os resultados parecem suficientes para encaminhar novos experimentos que se tornam indispensáveis para um melhor conhecimento dos processos aqui investigados.

As condutas em nível III, observadas nas respostas de sujeitos de 11 a 12 anos, correspondem às condições freqüentemente presentes na transição do estádio das operações concretas para o estádio das operações hipotético-dedutivas, e comprovadas em grande número de experimentos feitos por Piaget e Inhelder (1972). Procedimentos operatórios permitiram não só a internalização das ações para construção das imagens da transformação topológica da superfície unilateral, como também asseguraram a memória dessas transformações, enquanto ação es-

quematizada, e a memória dos estados iniciais e finais, enquanto configuração, como pontos de partida e de chegada das transformações. Esta operatividade, sua presença em condutas de nível III, assim como sua ausência nos outros níveis, podem ser constatadas no momento da evocação que os sujeitos necessitam fazer ao generalizar as propriedades da superfície unilateral. Ao classificar as semelhanças e diferenças entre as fitas obtidas na bi ou na trissecção, havia necessidade de compará-las mentalmente com as fitas que haviam sido manipuladas e pintadas, mas que não estavam mais presentes. Esses procedimentos eram esperados nesse estádio de desenvolvimento. Mas por que não foi maior a freqüência dessas condutas ao redor de 11-12 anos? E por que essas condutas aparecem no início da escolaridade, que corresponderia ao início do estádio das operações concretas, para diminuir a seguir?

Duas alternativas deveriam ser investigadas:

a) seria necessário controlar, através de um novo experimento, o nível de desenvolvimento das estruturas topológicas dos sujeitos, já que as condutas poderiam estar relacionadas, na faixa dos 7-8 anos, com as propriedades do espaço topológico mais acessíveis às crianças de menos idade, do que as propriedades do espaço projetivo ou do euclidiano;*
b) seria, por outro lado, indicada uma investigação para avaliar os efeitos do currículo escolar na medida em que não considera a natureza da inteligência, nem os processos pelos quais ela se desenvolve e pelos quais constrói tanto o espaço físico quanto o espaço geométrico.

Faz-se necessário ainda considerar a alta freqüência de condutas flutuantes entre os professores, revelando não só a presença do conflito, como também uma dificuldade para resolvê-lo.

Estaria o desenvolvimento da capacidade operatória dos adultos prejudicado por uma formação acadêmica que não o favorece? Estarão tão precariamente constituídas suas estruturas que um objeto espacial mais complexo, desconhecido e incomum, apresentando resistência aos esquemas de assimilação disponíveis, é suficiente para desequilibrá-las a ponto de provocar condutas cognitivas regressivas? Ou um paradigma excessivamente euclidiano orientando tanto o pensamento quanto à atitude científica no ensino estaria restringido à flexibilidade adaptativa dos mecanismos da inteligência? E que efeitos estarão produzindo na educação matemática das crianças um ou outro desses aspectos, ou todos eles relacionados e subjacentes à atuação dos professores? É preciso ainda salientar que o estudo de um sistema operatório, utilizando-se a realização de tarefas sobre objetos concretos, tal como foi realizado neste experimento, apresenta resultados estritamente relativos ao contexto da experiência, o que complica a sua análise, mas tem a utilidade de abrir caminhos para estudos complementares.

* N.do A. Sugestão da Prof.ª Bärbel Inhelder, na Universidade de Genebra, 1976.

Na verdade, é indispensável que se determinem os pressupostos da construção genética real para tornar possíveis posteriores estudos reflexivos.

Summary

The Möebius band was chosen in order to study how the perceptive and cognitive processes develop in the specific case of a topological concept. This band, which is an unusual object in the environment, results from the transformation of a bilateral surface into a unilateral one by twisting (180°) and joining its opposite ends.

90 children, 6 to 12 years old, and 15 adults, teachers of mathematics, were asked to perform a sequence of tasks. In these tasks each subject could accomplish perceptive activities of exploration and to make correspondences, classifications, logical inferences, etc.

The analysis of the data revealed the possibility to classify the performances into different levels in correspondence to the levels found in the stages of cognitive development stated by Jean Piaget in his psychogenetic theory.

Bibliografia

Battro, A. M.; Fagundes, L. C. et alii. *Estudos sobre o desenvolvimento cognitivo de crianças.* Relatório de Pesquisa do Departamento de Psicologia. Convênio Inep/UFRGS, 1976.

Fréchet, M. & Ky Fan. *Introducción a la topología combinatoria.* Buenos Aires, Editorial Buenos Aires, 1959.

Gréco, P. & Piaget, J. *La Epistemología del espacio.* Buenos Aires, Ateneo, 1971, cap. 9.

Piaget, J. *Logique et perception.* Paris, PUF, 1958.

_____ & Inhelder, B. *La Représentation de l'espace chez l'enfant.* Paris, PUF, 1947.

_____ & _____. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires, Paidós, 1972.

_____; _____ & Szeminska, A. *La Geométrie spontanée de l'enfant.* Paris, PUF, 1948.