Qual a verdadeira função psicofísica: exponencial ou de potência?*

JOSÉ APARECIDO DA SILVA**

O objetivo principal desta comunicação foi realizar a distinção entre função-potência e função exponencial comumente confundidas por tradutores brasileiros. Para isso foram discutidas brevemente as propriedades fundamentais de cada uma dessas funções, bem como qual delas melhor descreve a relação entre os estímulos e as respostas no domínio da psicofísica da percepção.

O propósito desta pequena comunicação é fazer uma distinção entre função de potência e função exponencial e, por conseqüência, discutir a verdadeira lei pisofísica. Isto porque, invariavelmente, tenho observado que vários colegas em diversas obras por eles traduzidas e, mesmo em comunicações livres apresentadas em reuniões de psicologia, estão denominando erradamente a função de potência de função exponencial, talvez, acredito, pela forma quase semelhante em que as mesmas são expressas.

A função exponencial é expressa da seguinte maneira: $y = a^x$. Verifica-se que, fixada uma base e variando o expoente x no conjunto Z, obteremos uma função injetora, de domínio Z. Em geral, a equação exponencial é uma sentença numérica aberta, na variável real x, onde x figura em expoente; com a real não-negativo e n natural a equação tem solução real e, além disso, o gráfico dessa função possui o ponto (0,1). De fato, $f(o) = a^o = 1$, portanto, a curva intercepta o eixo dos y no ponto igual a 1.

Esta função, no que diz respeito à descrição da relação existente entre os estímulos e as respostas ou mesmo em relação à construção de escalas subjetivas, no domínio da psicofísica e da percepção, não tem sido considerada seriamente e com boas razões. Parece haver poucos dados que suportam a função exponencial em psicofísica, mesmo após a realização de grandes estudos nessa área. Na verdade, o que necessitamos é de estimativas de razão entre os estímulos, cuja diferença apenas perceptível (DAP) seja constante. Estes contínuos são raros, mas provavelmente incluem aqueles do tipo posição de pontos, inclinação visual e sons de baixa freqüência. Quando os métodos de estimação ou produção de categorias são aplicados a estes contínuos a função resultante é a linear. Quando estimação ou produção de magnitude ou razões são aplicadas, funções lineares também poderão ocorrer (exceto para freqüência), mas do que a função exponencial (Stevens e Galanter, 1957). Assim, raros são os contínuos físicos que, quando escalonados por métodos diretos baseados em julgamentos de intervalos ou de razões,

* Artigo apresentado à redação em 2.6.80.

** Do Laboratório de Psicofísica e Percepção – Campus da USP, Ribeirão Preto. O autor agradece ao Prof. Paul Stephaneck e ao Prof. Geraldo Garcia Duarte pelos comentários sobre a primeira redação deste artigo. (Endereço: Rua Itapioca, 13/11 – Ed. Bergamo – Jardim Paulista – 14.000 – Ribeirão Preto, SP.)

produzem função do tipo exponencial. Contudo, esta função admite uma função inversa, ou seja, a logarítmica, de modo que algumas das colocações acima não se aplicam a ela. De fato, quando $y = f(x) = a^x$, com base a positiva e diferente de 1, temos dois casos: um em que $a > 1$ e a função é monotônica estritamente crescente e outro em que $0 < a < 1$ e a função é monotônica estritamente decrescente e, por conseqüência, a função f é uma bijeção de R (números reais) em R_+^* (números reais e positivos) e, por isso, admite uma função inversa, $x_1 = f^{-1}(y)$, cujo domínio é R_+^* e cujo contradomínio é R. Esta função f^{-1} se denomina função logarítmica de base a e se indica pelo símbolo Log_a: $x = \log_a y \iff y = a^x, a > 0, \neq 1$. Normalmente, quando a ênfase é colocada sobre a função inversa, troca-se x por y e y por x, portanto, ela é expressa da seguinte maneira: $y = \text{Log}_a x \iff x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$.

No que tange à Psicofísica, observa-se que em estimação de categorias de estímulos, cujas DAPs seguem a Lei de Weber, pode-se encontrar a função logarítmica, porque esta lei é válida, na maioria dos casos, para valores intermediários dos estímulos. Na literatura, é prática comum encontrar os dados projetados em coordenadas semi-log, em que na abscissa são apresentadas as unidades físicas, em escala logarítmica, e na ordenada as estimações de categorias, em escala linear. Neste tipo de projeção, quando se obtém uma linha reta, podemos dizer que os dados satisfazem à uma função logarítmica. Quando esta função é obtida, os psicofísicos normalmente se referem a ela como Lei de Fechner. Contudo, em muitos experimentos, em que se utiliza o método de estimação de categorias, o número de categorias de respostas, além das instruções, tem se mostrado como um fator que dificulta a obtenção da função logarítmica. De fato, Gibson e Tomko (1972) mostraram que a função logarítmica torna-se menos provável quando o número de categorias de resposta excede a sete. De maneira semelhante, Stevens e Galanter (1957) e Marks (1974) têm mostrado que a projeção dos pontos em coordenadas semi-log algumas vezes não são lineares e, portanto, não satisfazem a uma função logarítmica. Porém, usando categorias numéricas de 1 a 5, para julgar a luminância de 13 intensidade de luz, Baird e Noma (1978) encontram uma linha reta, o que está em concordância com a função logarítmica. Vale apenas mencionar que a escala de categoria é uma escala de intervalo e tem uma constante arbitrária que deve ser estimada. Tomando esta constante, como o limiar absoluto, e adicionando-a ou subtraindo-a dos valores físicos dos estímulos, pode-se encontrar uma função de potência, cujo expoente obtido Stevens (1974) denomina virtual para diferenciá-lo do obtido através do método de estimação de magnitude, que governa o contínuo. (Veja a este respeito, o artigo de Marks, 1968).

De qualquer modo, tanto a função exponencial quanto a sua inversa – a função logarítmica – não produzem curvas que se assemelham à curva obtida através da função de potência, que descreveremos a seguir, visto que elas têm propriedades diferentes.

A função de potência (*power function*) é a mais consagrada de todas as leis psicofísicas, ainda que seja teoricamente limitada aos resultados obtidos pelos métodos de estimação ou produção de magnitudes – dentre estes, o mais comum é o método de estimação de magnitudes. Marks (1968), Stevens (1971) e Baird e Noma (1978) sugeriram que a função de potência também pode ser ajustada aos dados obtidos com os métodos de estimação ou produção de categorias (normalmente o expoente é inferior), mas levando-se em conta a constante arbitrária, como mencionamos anteriormente.

A função de potência descreve uma situação onde um aumento geométrico na escala física corresponde a um aumento na escala psicológica ou subjetiva. O expoente reflete o índice

de aumento relativo ao longo das duas escalas. Em outras palavras, razões iguais entre os estímulos produzem razões iguais entre as respostas. Isto é, se

$$R_i = K E_i^n \tag{1}$$

e

$$R_i = K E_j^n \tag{2}$$

então

$$\frac{R_i}{R_j} = \left(\frac{E_i}{E_j}\right)^n \tag{3}$$

Isto sem considerar os valores absolutos de E_i e E_j, o que importa é que a razão entre os estímulos permaneça igual e, por conseqüência, o mesmo acontece com a razão entre as respostas. Em adição, dividindo cada estímulo de uma série por uma intensidade padrão, a constante K pode ser eliminada (pelo menos teoricamente). Esta constante, pode ser concebida como um modo de mudar a unidade de medida. Assim, a função de potência pode ser expressa como

$$R = K E^n \tag{4}$$

onde n é o expoente, E são os estímulos e R são as respostas escalares. Nota-se que são respostas escolares, não respostas em intensidades físicas, visto que se assim fosse teríamos uma função relacionando E–E (estímulo-estímulo). Ela é uma função de potência porque afirma que a magnitude da resposta é proporcional à magnitude do estímulo elevada a uma potência. Deste modo, pelo menos em aparência, esta função assemelha-se à exponencial. Todavia, na função de potência a base é que varia, não o expoente como na exponencial. Esta equação (4) pode ser reescrita tomando os logarítmos dos termos, de modo que:

$$\log R = n \log E + \log K \tag{5}$$

Esta é uma equação linear do tipo $y = ax + b$, onde $y = \text{Log}\, R$; $x = \log E$; $a = n$ e $b = \log K$. Por essa razão é comum encontrar na literatura uma função linear adaptada aos pares de logaritmos E e R, para se determinar a inclinação (expoente) e y interseção ($\log K$). Além disso, é prática comum entre os psicofísicos projetar R em função de E em coordenadas logarítmicas (papel di-log) de modo que uma linha reta pode ser ajustada aos pontos e, conseqüentemente, a inclinação e a interseção podem ser encontradas diretamente. Algebricamente, podemos encontrar estes parâmetros pelo método dos mínimos quadrados (Silva e Rozestraten, 1979).

A função de potência foi e continua sendo verificada em centenas de experimentos e para uma ampla variedade de contínuos. Como um grande número de pesquisas foi conduzido ou inspirado por S. S. Stevens, a equação (4) também é denominada de Lei de Stevens ou ainda de Lei de Potência (*Power Law*). O expoente é o parâmetro-chave, haja vista que ele é sensível a mudanças no contínuo e a outras manipulações experimentais. O fato de que diferentes expo-

entes são obtidos para diferentes contínuos ou modalidades perceptivas foi atribuído por Stevens (1961) a diferenças na transdução sensorial. Deste modo, podemos dizer que o expoente desempenha o mesmo papel que a fração de Weber, ou seja, é um índice da sensibilidade perceptiva. Todavia, diferente da fração de Weber, o expoente pode ser interpretado apenas e somente se duas escalas são especificadas. Esta sensibilidade é diretamente relacionada com o tamanho do expoente. Um expoente igual a 1,0 significa que a função de potência se reduz a uma relação linear entre R e E, com uma inclinação igual a K; $R = K.E$ (6), e tomando os logaritmos, temos: $\log R = \log E + \log K$ (7). De outro lado, quanto menor o expoente menor a sensibilidade perceptiva, enquanto que expoente maior do que 1,0 indica o contrário. Em suma, o expoente reflete a sensibilidade relativa do sujeito e, por conseqüência, se denominarmos esta função de exponencial seria impossível obter esta sensibilidade, visto que nesta última o expoente é variável e a base é constante (para exemplos da função de potência, veja Silva e Macedo, 1980).

Reveste-se de importância considerar neste contexto, após termos descrito brevemente, as propriedades da função de potência e da logarítmica, as colocações de Ekman (1964) e de Fagot (1966). Para Ekman a função de potência é um caso especial da Lei de Fechner. Isto porque ele assume que esta lei descreve adequadamente a relação entre qualquer magnitude do estímulo, incluindo a magnitude número, e a correspondente magnitude subjetiva. Onde E representa qualquer magnitude do estímulo, N representa um estímulo particular, consistindo de números e Re e Rn as respostas subjetivas correspondentes. Logo, sob a suposição da Lei de Fechner, $Re = a + b \log E$ e $Rn = c + d \log N$. Ao sujeito são dadas instruções para dar estimativas numéricas, isto é, emparelhar um estímulo N ao estímulo E, de maneira que $Rn = Re$. Então, segue-se que: $\log N = a + n \log E$, isto é, a função de potência $N = bE^n$ é verificada. A propósito, este experimento é muito semelhante àqueles realizados por Stevens e colaboradores (1960, 1959, 1963), utilizando o emparelhamento intermodal, que é usualmente interpretado como uma forma de validação e predição do expoente da função de potência. De maneira análoga, os resultados desses experimentos podem ser interpretados como suporte à Lei de Fechner, para a relação entre R e E.

Para Fagot (1966), a função de potência pode ser considerada como semelhante a uma função log quando se toma expoentes de pequenos valores. Isto sugere que a função log é um caso especial de uma função de potência e, portanto, esta última pode adaptar tudo o que a primeira possa adaptar, mas o inverso não é verdadeiro. A nosso ver este resultado parece correto, mas complicado, porque as propriedades básicas das duas funções são diferentes.

Finalmente, podemos concluir que, quando entramos na literatura os termos função de potência, Lei de Stevens ou Lei de Potência, estão os autores dizendo a mesma coisa, mas, quando se denominam estas três de função exponencial (como vem acontecendo), isto não é correto. Os resultados experimentais obtidos com os métodos de estimação ou produção de categorias podem em sua maioria ser ajustado adequadamente por uma função logarítmica ou por uma função de potência, quando levamos em consideração a constante arbitrária de uma escala de intervalo. Esta escala admite uma função inversa. De outro lado, os resultados obtidos através do método de estimação ou produção de razão podem ser perfeitamente ajustados por uma função de potência e ela admite uma função recíproca. Stevens acredita que é através deste método que podemos obter a verdadeira função psicofísica.

Summary

The main purpose of this paper was to make a distinction betweem the power function and the exponential function, often mistaken by Brazilian translators. The fundamental properties of each of these functions as well as their adequacy to describe the relations between stimuli and responses in the Realm of Psychophisics and Perceptions are briefly discussed.

Referências bibliográficas

Baird, J. C. & Noma, E. *Fundamentals of scaling and psychophysics*, New York, John Wiley, 1978.

Ekman, G. Is the power law a special case of Fechner's law. *Perceptual and Motor Skills, 19*: 730, 1964.

Fagot, R. F. Alternative power laws for ratio scaling. *Psychometrika, 31*: 201-14, 1966.

Gibson, R. H. & Tomko, D. L. The relation between category and magnitude estimates of tactile intensity. *Perception and Psychophysics, 12*: 135-8, 1972.

Marks, L. E. *Sensory processes: the new psychophysics*. New York, Academic Press, 1974.

_____. Stimulus range, number of categories and form of the category scale. *American Journal of Psychology, 81*: 467-79, 1968.

Silva, J. A. & Rozestraten, R. J. A. Construção de escalas subjetivas de distância pelo método de fracionamento. *Psicologia*, São Paulo, 1980.

Silva, J. A. & Macedo, L. Análise do fenômeno da superconstância e suas implicações para a psicologia do desenvolvimento e da percepção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, Rio de Janeiro FGV, 33 (1-2): 5-31, jan./jun. 1981.

Stevens, S. S. & Galanter, E. H. Ratio scales and category scales for a dozen perceptual continua. *Journal Experimental of Psychology, 54*: 377-411, 1957.

Stevens, J. C.; Mack, J. D. & Stevens, S. S. Growth of sensation on seven continua as measured by force handgrip. *Journal Experimental of Psychology, 59*: 60-7, 1960.

Stevens, S. S. Cross-modality validation of subjective scales for loudness, vibration and electric shock. *Journal Experimental of Psychology, 57*: 201-9, 1959.

_____. To honor Fechner and repeal his law. *Science 133*: 80-6, 1961.

_____. Issues in psychophysical measurement. *Psychological Review, 78*: 426-50, 1971.

_____. Perceptual magnitude and its measurement. In: Carterette, E. C. & Friedman, M. P., ed. *Handbook of perception: psychophysical judgment and measurement*. New York, Academic Press, 1974. v. 2.

Stevens, S. S. & Guirao, M. Subjective scaling of lenght and area and matching of lenght to loudness and brightness. *Journal Experimental of Psychilogy, 66*: 177-86, 1963.