CURVAS DE FREQÜÊNCIA E DE APRENDIZAGEM (*)

ALFREDO DE OLIVEIRA PEREIRA

UNIDADE VII — CURVAS DE FREQÜÊNCIA E APRENDIZAGEM: — 1 — Curvas de freqüência. 2 — Curvas unimodais. 3 — Curvas amodais. 4 — Curvas multimodais. 5 — Curvas de aprendizagem. 6 — Curva normal de probabilidade; áreas e ordenadas.

1 — CURVAS DE FREQÜÊNCIA

Numa distribuição simétrica, verifica-se uma exata repartição de valores em tôrno da classe modal. Na prática, porém, isso raramente ocorre; os valores de freqüência mais se concentram de um lado e de outro da classe modal, formando, por assim dizer, dois campos distintos da variável. Dêsse fato decorrem diversos tipos de distribuição, e, em conseqüência, vários tipos de curvas de freqüência:

a) curvas unimodais;
b) curvas amodais;
c) curvas multimodais.

2 — CURVAS UNIMODAIS

Como o nome indica, *curva unimodal* é a que resulta de uma distribuição que apresenta sua freqüência máxima (modal) mais ou menos no centro da distribuição. As distribuições que acusam tendência central são, em geral, dêsse tipo.

Os principais tipos de curvas unimodais são:

a) curva de Gauss, em forma de sino, normal ou simétrica;

b) curva assimétrica positiva ou enviezada à direita;

c) curva assimétrica negativa ou enviezada à esquerda;

A *curva gaussiana* ou *normal* é o tipo ideal, mas de difícil obtenção na prática. Os pontos da curva correspondem a freqüências iguais ou muito próximas, simètricamente distribuídas em relação à freqüência máxima. As medidas de tendência central (média, mediana e moda) das distribuições dêsse tipo muito se aproximam, sendo exatamente iguais, se a distribuição fôr rigorosamente simétrica. Neste caso, as estatísticas de posição ou locação correspon-

(*) Súmula da 7.ª aula do Curso de Extensão Universitária para Técnicos de Educação e Orientadores Educacionais, organizado pelos Cursos "Magister", sob o patrocínio da Secretaria de Educação e Cultura de São Paulo.

dem ao ponto médio da classe modal, isto é, à *moda bruta*.

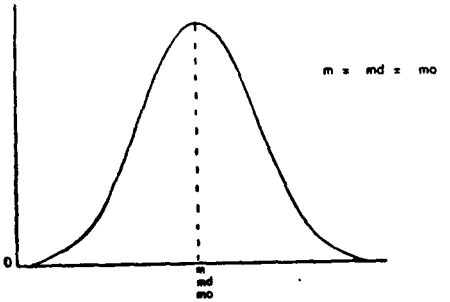

FIG. 6 — Curva simétrica ou normal.

A curva *assimétrica positiva*, como o nome indica, não admite eixo de simetria. Nesse tipo de curva, a cauda mais comprida fica à direita da ordenada máxima, correspondendo ao predomínio dos maiores valores da variável.

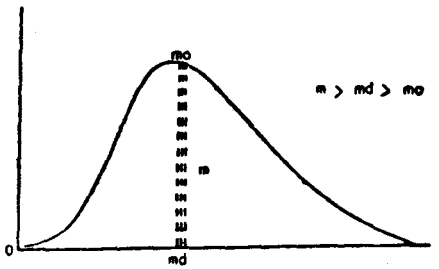

FIG. 7 — Curva assimétrica positiva ou enviezada à direita.

Conquanto conserve o aspecto geral da curva normal, a *curva assimétrica negativa* apresenta a cauda maior deslocada para a esquerda da ordenada máxima. Predominam nesse tipo os valores mais baixos da variável.

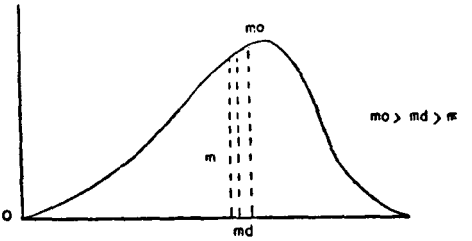

FIG. 8 — Curva assimétrica negativa ou enviezada à esquerda.

Cumpre observar que nos dois últimos tipos de curvas examinados, a média fica sempre situada do lado da cauda maior, comprovando êsse fato que é a média o promédio de maior sensibilidade numa distribuição de freqüências, grandemente influenciado pelo predomínio das freqüências; atente-se, outrossim, para o fato de se situar a mediana numa posição intermediária entre a média e a moda.

3 — CURVAS AMODAIS

As curvas amodais se caracterizam por não apresentarem tendência central; a freqüência máxima ocorre entre os valores extremos da distribuição. Subdividem-se em:

a) Curva em "i"
b) Curva em "i" invertido
c) Curva em "u"



FIG. 9 — Curva em "i".

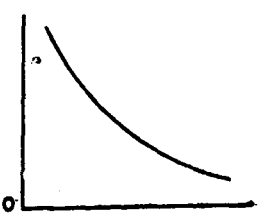

FIG. 10 — Curva em "i".

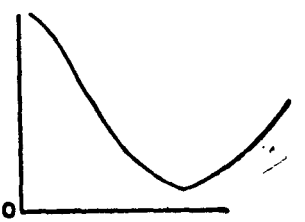

FIG. 11 — Curva em "u".

No primeiro caso, as freqüências vão descrescendo à medida que vão crescendo os valores da variável; no segundo caso, as freqüências crescem à medida que crescem os valores da variável; no terceiro caso, as freqüências vão decrescendo até a *freqüência mínima*, crescendo em seguida.

4 — CURVAS MULTIMODAIS

E' comum a obtenção de curvas dêsse tipo, que acusam irregularidade na distribuição das freqüências. Quando uma distribuição de freqüência acusa dois pontos máximos de freqüência, diz-se que a curva dela resultante é *bimodal*, como a da Fig. 12.

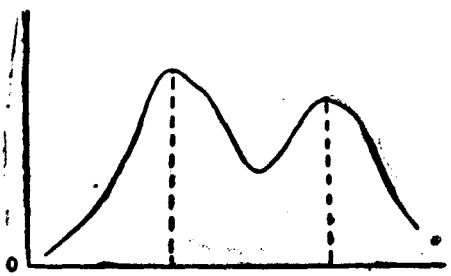

FIG. 12 — Curva Bimodal.

A bimodalidade ou multimodalidade de uma distribuição é, por vêzes, aparente, uma vez que pode ser devida ao fato de se encontrarem reunidas em classes distintas freqüências pertencentes à mesma classe, resultantes de duas causas perfeitamente removíveis: — a adoção de um intervalo de classe por demais pequeno ou insuficiência do número de observações. Cumpre observar que a bimodalidade dos resultados de um teste, quando real, indica que se trata de dois grupos distintos de examinandos, os quais diferem entre si:

a) pela aptidão ou conhecimentos que o teste procura medir; ou

b) pela conduta assumida na execução do teste .

A primeira causa é freqüentemente observada nas provas de seleção profissional ou escolar em que os candidatos das mais diversas aptidões e conhecimento se apresentam aos exames. A segunda deriva principalmente da má compreensão das instruções do teste, resultando dêsse fato que um grupo de candidatos se detém por longo tempo na leitura ou compreensão das questões formuladas, em detrimento do tempo destinado a sua execução.

5 — CURVAS DE APRENDIZAGEM

Ocupam papel saliente em Psicologia e Educação certos tipos de curvas que expressam o progresso na aprendizagem; por isso tais diagramas são conhecidos pela denominação genérica de *curvas de aprendizagem*. A exemplo do que ocorre com as marchas ou séries cronológicas dos fenômenos econômicos, tais curvas resultam do ajustamento da poligonal a que dá lugar o gráfico de curvas, em que o eixo das abscissas registra períodos determinados de tempo, consignando o eixo das ordenadas as unidades de produção de tarefa ou o número de erros verificados nas diversas experimentações.

Entre psicologistas e educadores admite-se hoje em dia que a aprendizagem se pode verificar de quatro maneiras, daí originando quatro tipos principais de curvas que definem seu desenvolvimento.

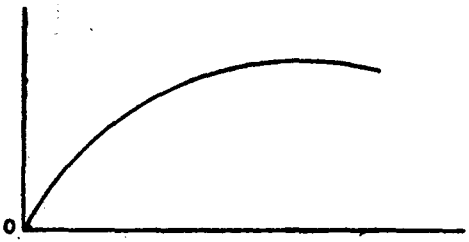

FIG. 13 — Curva de aceleração negativa.

Esta curva é chamada de *aceleração negativa* e tanto pode significar que o número de erros vai diminuindo à medida que aumenta o período de prática, como também que quanto mais se aprende tanto menos se progride no processo de aprendizagem. Em geral, ocorre êsse tipo de curva de aprendizagem quando:

a) a tarefa dada é relativamente fácil para quem aprende, havendo, neste caso, redução gradativa dos erros;

b) a tarefa aumenta de dificuldade à medida que o sujeito aprende, determinando, em conseqüência, redução gradativa nas unidades de produção, no rendimento;

c) a tarefa já é parcialmente conhecida pelo experimentando, resultando dêsse fato o desinterêsse por sua execução.

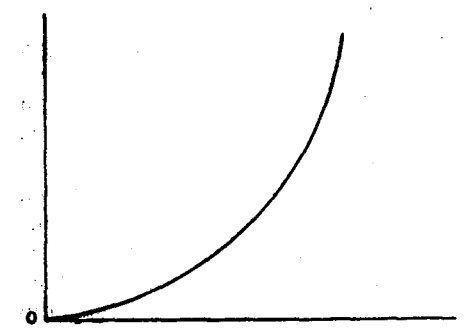

FIG. 14 — Curva de aceleração positiva.

A curva de aceleração positiva tem significado inverso da curva precedente, isto é, à medida que aumenta o período de prática, maior soma de aprendizagem se vai verificando, aumentando o número de acertos.

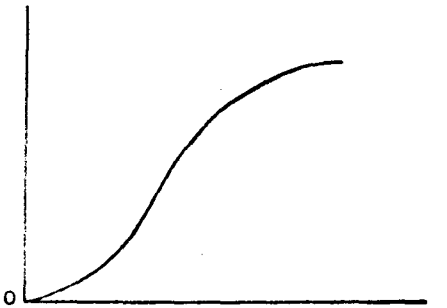

FIG. 15 — Curva em "s".

A curva em "s" é uma combinação dos dois tipos de curvas já descritos. Observa-se, de início, acentuado progresso na aprendizagem e, logo em seguida, uma tendência característica para a aceleração negativa. E' típica essa curva como expressão da fadiga física ou mental.

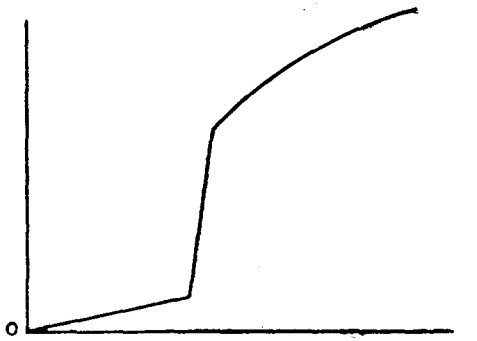

FIG. 16 — Curva de aceleração súbita.

Se a tarefa proposta ao experimentando tem uma "estrutura fundamental" compreensível, uma "forma" ou obedece a determina-

da "lei de formação", é bem possível que, ao descobrí-la, o experimentando assegure a plenitude de sua aprendizagem, determinando súbita e rápida ascensão da curva, logo seguida de aceleração negativa ou estacional, proveniente de declínio da motivação.

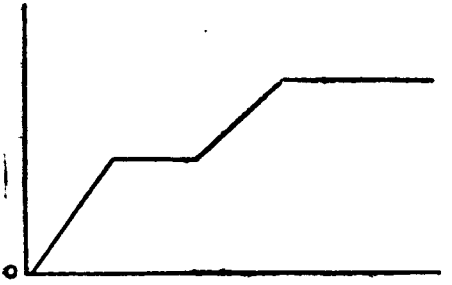

FIG. 17 — Curva de aprendizagem com patamares.

Ao traçar curvas de aprendizagem ou de trabalho, é muito comum encontrar-se a curva da Figura 17 interrompida por *patamares* ou "plateaux", de significação controversa entre os psicologistas.

6 — CURVA NORMAL DE PROBABILIDADES; ÁREAS E ORDENADAS

A curva normal, quando resultante de uma *distribuição binomial*, isto é, de uma distribuição cujas freqüências são proporcionais aos têrmos de *binômio de Newton*, denomina-se, particularmente, *curva normal de probabilidade* ou *curva de erros*. Assim, a distribuição de freqüência que apresentar para suas diversas classes as freqüências:

1 6 15 20 15 6 1

dará lugar a uma curva normal de probabilidade, atendendo a que essas freqüências correspondem exatamente aos coeficientes dos têrmos de desenvolvimento do binômio:

$$(p + q)^6$$

em que p é a *probabilidade favorável* e q, a *probabilidade contrária* a um dado acontecimento, sendo $n = 6$, o número de ensaios, provas ou tentativas em que se verificarão, provàvelmente, tais ocorrências.

Na lição anterior, ao tratarmos do desvio-padrão, acentuamos que, numa distribuição normal, a média adicionada algèbricamente ao desvio-padrão reunia cêrca de 68,26% dos valores centrais da distribuição, isto é, 34,13% de cada lado da ordenada máxima (média). Ora, a média é um ponto da escala das abscissas da curva normal, da mesma forma que nela estão situados os pontos correspondentes ao desvio-padrão e suas frações; logo, a um afastamento maior ou menor, a partir da média, corresponderá maior ou menor área da curva, cujo valor resultará da relação existente entre êsse afastamento e o desvio-padrão (desvio-reduzido):

$$z = \frac{x - m}{\sigma} \qquad (25)$$

Assim, quando essa relação é igual a 1, a área compreendida pelo afastamento corresponderá mais exatamente a 0,34134 ..... (34,134%) da freqüência total (vêde Fig. 5); será igual a 0,15542 (15,542%) se dita relação fôr igual a 0,40; se elevará a 0,49865 (49,865%) se o desvio reduzido fôr igual a 3, positivo ou negativo.

	s	y	z	s	y
0,00	0,00000	0,39894	1,50	0,43319	0,12952
0,05	01994	39844	1,55	43943	12001
0,10	03983	39695	1,60	44520	11092
0,15	05962	39448	1,65	45053	10226
0,20	07926	39104	1,70	45543	09405
0,25	0,09871	0,38667	1,75	0,45994	0,08628
0,30	11791	38139	1,80	46407	07895
0,35	13683	37524	1,85	46784	07206
0,40	15542	36827	1,90	47128	06562
0,45	17364	36053	1,95	47441	05959
0,50	0,19146	0,35207	2,00	0,47725	0,05399
0,55	20884	34294	2,05	47982	04879
0,60	22575	33322	2,10	48214	04398
0,65	24215	32297	2,15	48422	03955
0,70	25804	31225	2,20	48610	03547
0,75	0,27337	0,30114	2,25	0,48778	0,03174
0,80	28814	28969	2,30	48928	02833
0,85	30234	27798	2,35	49061	02522
0,90	31594	26609	2,40	49180	02239
0,95	32894	25406	2,45	49286	01984
1,00	0,34134	0,24197	2,50	0,49379	0,01753
1,05	35314	22988	2,55	49461	01545
1,10	36433	21785	2,60	49534	01358
1,15	37493	20594	2,65	49598	01191
1,20	38493	19419	2,70	49653	01042
1,25	0,39435	0,18265	2,75	0,49702	0,00909
1,30	40320	17137	2,80	49744	00792
1,35	41149	16038	2,85	49781	00687
1,40	41924	14973	2,90	49813	00595
1,45	42647	13943	2,95	49841	00514
			3,00	49865	00443