UMA CONCRETIZAÇÃO DE UM CONTRA-EXEMPLO DE MAS-COLLEL E ZAME

Paulo Klinger Monteiro*

Resumo

A existência de equilíbrio em economias de mercados incompletos com um contínuo de estados da natureza foi recentemente demonstrada por Hellwig, Mas-Collel, Monteiro e Zame. Nestes trabalhos há sempre uma hipótese de não-negatividade das dotações ex-post (isto é incluindo o retorno de ativos reais). Esta hipótese é muito restritiva. No entanto Mas-Collel e Zame demonstraram por meio de um contra-exemplo a sua indispensabilidade. Nesta nota apresento um novo contra-exemplo. Em particular, eu explicito funções utilidade que satisfazem as condições abstratas de Mas-Collel e Zame (que são difíceis de verificar).

Abstract

The incomplete markets equilibrium existence for economies with a continuum of states of nature has been proven by Hellwig, Mas-Collel, Monteiro and Zame. But a hypotheses of non-negative ex-post endowments is always made. This is very restrictive. However Mas-Collel and Zame proved by means of a counter-example its indispensability. In this note I present a new counter-example. In particular I give utility functions which satisfy the difficulty
and Zame.

Palavras-Chave: Existência de equilíbrio, mercados incompletos

Código JEL: C62, D52

* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

R. de Econometria Rio de Janeiro v. 15, nº 1, pp.65–75 Abril/Outubro 1995

1. Introdução.

O estudo da existência de equilíbrio em economias de mercados incompletos, iniciado por Radner (1972), foi recentemente extendido para economias com um contínuo de estados da natureza, por vários autores. Entre eles, devo mencionar, Hellwig, Mas-Collel, Monteiro e Zame (ver referências no final do artigo). Nestes artigos adicionalmente à hipótese de Radner de limite inferior para vendas à descoberto, a seguinte hipótese é feita:

$$\text{para todo } \theta \geq v_i, \quad W_s^i + \theta A_s \geq 0 \ \text{ para quase todo } \ s \in S, \tag{1}$$

onde S é o conjunto de estados, $v_i \in -\mathcal{R}_{++}^J$ é a cota inferior nas vendas à descoberto, W^i é a dotação inicial do consumidor i, $1 \leq i \leq I$, $\theta \in \mathcal{R}^J$ é o portfólio. Finalmente $A = (A^1, \cdots, A^J)$, é a matriz de retornos reais, sendo para $1 \leq j \leq J$, $A^j : S \rightarrow \mathcal{R}_+^G$ um vetor aleatório. Esta hipótese é muito forte. Por exemplo ela é equivalente a supormos que para todo portfólio e para todo preço, o consumidor tenha renda em quase todos estados mesmo fora de equilíbrio. Outro defeito de (1) é o de nunca ser válida sem restrições nas vendas à descoberto.

No contra-exemplo de Mas-Collel e Zame (1991) eles demonstraram a indispensabilidade de (1). Na construção do contra-exemplo supõe-se a existência de funções utilidade com várias propriedades. Nesta nota eu obtenho explicitamente funções utilidade que praticamente satisfazem todas as condições impostas por Mas-Collel e Zame.

Recentemente Magill e Quinzii (1994) demonstraram a existência de equilíbrio numa economia de mercados incompletos com horizonte infinito e portanto com um número infinito de estados sem supor (1). O contra-exemplo de Mas-Collel e Zame vale para qualquer conjunto infinito de estados. Temos assim uma contradição aparente. A contradição se desfaz ao lembrarmos que nos modelos de horizonte infinito, os portfólios são recontratados em cada período da economia e nesses há apenas um número finito de estados da natureza.

2. A Economia.

Primeiramente escolhamos números $\bar{x}$, a, β, ϕ, v_1, v_2, w^1, w^2:

1. $0 < \bar{x} < a < 1$.
2. $a\beta > a + 1$, $\phi(a - \bar{x})(1 + \bar{x}) = a + 1$, $\beta = \phi$.
3. $\frac{\beta}{\phi} + \frac{1-\beta(1+\bar{x})}{1+\bar{x}}(a - \bar{x}) = 0$.
4. $\phi(a - \bar{x})e^{(\phi+\beta)\bar{x}-\phi} > \beta(1 + \bar{x})$.
5. $\beta(1 + \bar{x}) > 2$.
6. $v_2 = v_1 < -w^2 e^{\beta\bar{x}}\beta^{-1} < -1$, $w^1 > 0$.

Por exemplo $\bar{x} = 3/4$, $a = 7/8$, $\beta = \phi = 60/7$, $w^2 = 2e^{\beta\bar{x}}\beta^{-1}$, $v_2 = v_1 = -3$.

O espaço de estados é $S = [0, 1]$. A função utilidade do consumidor i é separável entre estados:

$$U^i(x_0, x, y) = x_0 + \int_0^1 u^i(x_s, y_s)ds, \qquad i = 1, 2,$$

definidas para $x_0 \in \mathcal{R}_+$ e $x, y \in L^\infty_+[0, 1]$. Finalmente definamos $u^1(x, y) = -e^{-\beta x} + g(y)$ e $u^2(x, y) = w(x) - e^{-\phi y}$ onde:

$$g(y) = \begin{cases} \beta \int_0^y e^{-\beta s} \frac{1+s}{a-s} ds & 0 \leq y \leq \bar{x} \\ \beta \int_0^{\bar{x}} e^{-\beta s} \frac{1+s}{a-s} ds + \beta e^{-\beta\bar{x}} \frac{1+\bar{x}}{a-\bar{x}}(y - \bar{x}) & \bar{x} \leq y \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} \phi \int_0^{1-\bar{x}} \left(e^{-\phi s} \frac{a-1+s}{2-s} \right) ds + \phi e^{-\phi(1-\bar{x})} \frac{a-\bar{x}}{1+\bar{x}} (x - 1 + \bar{x}) \\ \qquad 0 \le x \le 1 - \bar{x} \\ \phi \int_0^{x} e^{-\phi s} \frac{a-1+s}{2-s} ds \\ \qquad 1 - \bar{x} \le x \le 1 \\ \phi \int_0^{1} e^{-\phi s} \frac{a-1+s}{2-s} ds + \phi e^{-\phi} a(x-1) \\ \qquad 1 \le x. \end{cases}$$

A monotonicidade estrita de U^i decorre da positividade de g' e w'. Com efeito:

$$g'(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} \frac{1+y}{a-y} & 0 \le y \le \bar{x} \\ \beta e^{-\beta \bar{x}} \frac{1+\bar{x}}{a-\bar{x}} & \bar{x} \le y \end{cases}$$

$$w'(x) = \begin{cases} \phi e^{-\phi(1-\bar{x})} \frac{a-\bar{x}}{1+\bar{x}} & 0 \le x \le 1 - \bar{x} \\ \phi e^{-\phi x} \frac{a-1+x}{2-x} & 1 - \bar{x} \le x \le 1 \\ \phi e^{-\phi} a & 1 \le x. \end{cases}$$

Para mostrar que U^i é côncava basta verificar que g e w o são. Assim calculemos g'' e w''. Obviamente $g''(y) = 0$ se $y \ge \bar{x}$. Para $0 \le y \le \bar{x}$ temos

$$g''(y) = \frac{\beta e^{-\beta y}}{(a-y)^2} \left\{ -\beta(1+y)(a-y) + 1 + a \right\} \le$$
$$\le \frac{\beta e^{-\beta y}}{(a-y)^2} \left\{ -\beta(1+\bar{x})(a-\bar{x}) + 1 + a \right\} = 0.$$

Logo g é côncava. Na primeira igualdade acima, usamos que $-\beta(1+y)(a-y)$ é crescente se $y \ge 0$. Para x

Se $x \in [1$

$$w''(x) = \frac{\phi e}{(2-x)^2} \{1 + a$$
$$\leq \frac{\phi e}{(2-x)^2} \{1 + a - \phi$$

demonstrando que w é côncava. Usei acima que $-\phi$
$x)$ é decrescente se $x \leq 1$. As dotações são $W_s^1 = (s, a)$
$(1-s, 1-a)$, $W^1 + W^2 = (1,$

Definimos então a economia $\mathcal{E} = (U^i, w^i, W^i, A, v_i)_{i=1,2}$. Um equilíbrio de $\mathcal{E}$ é um vetor $(\bar{x}_0^i, \bar{x}^i, \bar{y}$

1.
   todo s.

2. $\bar{\theta}^1$

3. $\pi \in \mathcal{R}$, $q: S \longrightarrow \mathcal{R}_+$ é mensurável.

4. $(\bar{x}_0^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i)$ resolve

$$\max U^i(x_0, x, y), \quad x_0 \in \mathcal{R}_+, \quad x, y, \in L_+^\infty[0,1],$$

   sujeito a

$$x_0 + \pi\theta \leq w^i, \quad \theta \geq v_i \quad \text{e} \quad x_s + q_s y_s \leq (1,$$

   para quase todo s.

Demonstrarei o seguinte:

Teorema 1. *A economia $\mathcal{E}$ não possui equilíbrio.*

A demonstração do teorema 1 está dividida em lemas. Defina $\nu_s^i(q,\theta) = \max\{u^i(x,y); (x,y) \in \mathcal{R}_+^2, x + qy \leq R_s^i(q,\theta)\}$ onde $R_s^i(q,\theta) = (1, q_s)(W_s^i + \theta A)$.

Lema 1. *Existe equilíbrio para $\mathcal{E}$ se e somente se existe $(q, \pi, \bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)$ tal que:*

i) $\theta^i \geq v_i$, $i = 1, 2$ *e* $\bar{\theta}^1 + \bar{\theta}^2 = 0$.

ii) $q : S \longrightarrow \mathcal{R}_+$ *é mensurável.*

iii) $\bar{\theta}^i$ *é solução de*

$$\max -\pi\theta + \int_0^1 \nu_s^i(q_s, \theta)\, ds$$

sujeito a

$$\theta \geq v_i, \quad w^i - \pi\theta \geq 0 \;\text{ e }\; R_s^i(q,\theta) \geq 0 \;\text{ para quase todo } s. \qquad (2)$$

Demonstração: Se (x_0, x, y) satisfaz a (4) então $0 \leq x_0 \leq w^i - \pi\theta$, $R_s^i(q,\theta) \geq x_s + q_s y_s \geq 0$. Além disso $u^i(x_s, y_s) \leq \nu_s^i(q_s, \theta)$. Reciprocamente se θ satisfaz a (2), definindo $x_0 = w^i - \pi\theta$, $x_s = y_s = R_s^i(q,\theta)/(1 + q_s) \geq 0$ segue-se que (x_0, x, y, θ) satisfaz as restrições de (4). Se $X^i(q, R)$ é a demanda Marshalliana de u^i a preços $(1, q)$ e renda R então as soluções de (4) e (iii) estão em correspondência:

1. $(\bar{x}_0^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i, \pi, q) \leftrightarrow (w^i - \pi\bar{\theta}^i, X^i(q_s, R_s^i(q,\theta)), \bar{\theta}^i, \pi, q)$.

2. $(1, q_s)$ é um equilíbrio de $\mathcal{E}_s(\bar{\theta}) = (u^i, W_s^i + \bar{\theta}^i A)_{i=1,2}$. □

O lema acima mostra em particular que $(\bar{x}_s^i, \bar{y}_s^i)$ é um ótimo de Pareto de (u^1, u^2) e $(1, q_s)$ sustenta $(\bar{x}_s^i, \bar{y}_s^i)$, $i = 1, 2$. No próximo lema determinarei os ótimos de Pareto de (u^1, u^2).

Lema 2. *O conjunto dos ótimos de Pareto de (u^1, u^2) com total de dotações $(1, 1)$, A, é a diagonal da caixa de Edgeworth. Isto é, $A = \{(x, x);\ 0 \leq x \leq 1\}$.*

Demonstração: A concavidade de u^1 e u^2 implica que os ótimos de Pareto são as soluções de

$$\max_{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1} \lambda(-e^{-\beta x} + g(y)) + (1 + \lambda)(w(1 - x) - e^{-\phi(1-y)}).$$

Definamos $\phi(x) = -\lambda e^{-\beta x} + (1 - \lambda)w(1 - x)$ e $\psi(y) = \lambda g(y) -$ (1
analogamente $\psi''(y) < 0$, ϕ e ψ são estritamente côncavas. Seja α a solução de $\max_{0 \leq x \leq 1} \phi(x)$. Vale o seguinte:

$$\alpha \leq \bar{x} \leftrightarrow \phi'(\bar{u}) \leq 0 \iff \frac{\lambda\beta}{(1 - \lambda)\phi} \leq \frac{a - \bar{x}}{1 + \bar{x}} e^{(\beta+\phi)\bar{x} - \phi}.$$

A condição de primeira ordem é a mesma para ϕ e ψ se $\frac{\lambda\beta}{(1-\lambda)\phi} \leq \frac{a - \bar{x}}{1 + \bar{x}} e^{(\beta+\phi)\bar{x}-\phi}$. Portanto neste caso ϕ e ψ tem o mesmo maximizante $\alpha \leq \bar{x}$. Se $\frac{\lambda\beta}{(1-\lambda)\phi} \geq e^{(\beta+\phi)\bar{x}-\phi} \frac{a-\bar{x}}{1+\bar{x}}$ então sendo u o maximizante de ϕ e v o maximizante de ψ. A condição de primeira ordem implica:

$$\lambda\beta e^{-\beta u} = (1 - \lambda)\phi e^{-\phi(1-\bar{x})} \frac{a - \bar{x}}{1 + \bar{x}}$$

e

$$\beta\lambda e^{-\beta\bar{x}} \frac{1 + \bar{x}}{a - \bar{x}} = \phi(1 - \lambda)e^{-\phi(1-v)}.$$

Multiplicando membro a membro da desigualdade acima, simplificando e tomando logaritmos obtemos $u = v$. □

Definimos a restrição orçamentária determinada pelo ótimo de Pareto (x, x) como o conjunto $\{(u, v) \in \mathcal{R}^2;\ u + q_x v = (1 + q_x)x\}$ onde $(1, q_x)$ é o preço que sustenta a alocação (x, x). Note que (u, v) pode ter uma coordenada negativa.

Lema 3. *Nenhum vetor (z, a) com $z < -1$ pertence a alguma restrição orçamentária determinada por algum ótimo de Pareto.*

Demonstração: O preço que sustenta a alocação (x, x), $x \in [0, \bar{x}]$ é $q(x) = \frac{1+x}{a-x}$. Para $x \geq \bar{x}$, $q(x) = e^{\beta(x-\bar{x})}\ \frac{1+\bar{x}}{a-\bar{x}}$. Definamos para $x \in [0, 1]$ como $z(x)$ o ponto de encontro da restrição orçamentária determinada por (x, x) com a reta $y = a$. Se $0 \leq x \leq \bar{x}$ é imediato que $z(x) = -1$. Podemos nos restringir então a $x \in [\bar{x}, 1]$. De $z(x) + q_x a = x(1 + q_x)$ obtemos a expressão:

$$z(x) = x + e^{\beta(x-\bar{x})}(x - a)\ \frac{1 + \bar{x}}{a - \bar{x}}$$

Calculemos $z'(x)$ e $z''(x)$.

$$\begin{aligned} z'(x) &= 1 + e^{\beta(x-\bar{x})}\ \frac{1 + \bar{x}}{a - \bar{x}}\ \{1 + (x - a)\beta\} \\ z''(x) &= e^{\beta(x-\bar{x})}\ \frac{\beta(1 + \bar{x})}{a - \bar{x}}\ \{\beta(x - a) + 2\} \\ &\geq e^{\beta(x-\bar{x})}\ \frac{\beta(1 + \bar{x})}{a - \bar{x}}\ \{\beta(\bar{x} - a) + 2\} > 0. \end{aligned}$$

Portanto como $z'(\bar{x}) = 0$ temos que $z(x) > -1$ se $x > \bar{x}$. □

Podemos finalmente demonstrar o teorema 1.

Demonstração do teorema 1: Suponhamos $(\bar{x}_0^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i, \pi, q_s)$ é um equilíbrio.

É claro que $\bar\theta^1 + \bar\theta^2 = 0$, $\bar x_0 = w^i - \pi\bar\theta^i$, $(1, q_s)(\bar x^i_s, \bar y^i_s) = (1, q_s)$ $(W^i_s + \bar\theta^i A)$ para quase todo s. Temos também que $u^i(\bar x^i_s, \bar y^i_s) = \nu^i_s(R^i_s(q,\theta))$ e $q_s = \frac{\partial u^i/\partial y}{\partial u^i/\partial x}(\bar x^i_s, \bar y^i_s)$. Pelo lema 3, $W^1_{1s} + \bar\theta^1 > -1$ para quase todo s. Portanto $\bar\theta^1 \geq -1$, $\bar x^i_s > \bar x$ e $\bar y^i_s > \bar x_i$ para quase todo s. Defina

$$h^i(\theta) = -\pi\theta + \int \nu^i_s((1, q_s)(W^i_s + \theta A))\, ds.$$

Temos que $Dh^i(\theta) = -\pi + \int \frac{\partial \nu^i_s}{\partial R}\, ds$ e $Dh^i(\bar\theta^i) = -\pi + \int \frac{\partial u^i}{\partial x}(\bar x^i_s) ds$. No ótimo:

$$\begin{aligned} Dh^1(\bar\theta^1) &= -\pi + \int_0^1 \beta e^{-\beta \bar x^1_s} ds \leq -\pi + \int_0^1 \beta e^{-\beta\bar x} ds \\ &= -\pi + \beta e^{-\beta\bar x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Dh^2(\bar\theta^2) &= -\pi + \int_0^1 w'(\bar x^2_s) ds \\ &= -\pi + \phi e^{-\phi(1-\bar x)}\, \frac{a - \bar x}{1 + \bar x} > Dh^1(\bar\theta^1). \end{aligned}$$

A demonstração agora será dividida em dois casos:

a) $\bar\theta^1 \geq 0$.

Então $Dh^1(\bar\theta^1) = 0$ ou $Dh^1(\bar\theta^1) \geq 0$ e $w^1 - \pi\bar\theta^1 = 0$. Em qualquer caso isto implica $Dh^2(\bar\theta^2) > 0$. Assim o consumidor 2 quer aumentar $\bar\theta^2$. Isto é possível se $\bar\theta^2 \leq 0$. Uma contradição.

b) $\bar\theta^1 < 0$.

O consumidor 1 pode reduzir θ pois $R^i_s(q, \bar\theta^1 \geq \bar x) \geq \bar x$. A desigualdade $w^1 - \pi\theta \geq 0$ é sempre válida se $\theta \leq 0$. Portanto

$Dh^1(\bar{\theta}^1) = 0$. Logo $\pi = \beta e^{-\beta \bar{x}}$. Também $Dh^2(\bar{\theta}^2) > 0$. Assim $w^2 - \pi\bar{\theta}^2 = 0$, então $\bar{\theta}^1 = -w^2/(\beta e^{-\beta \bar{x}})$. Agora como $v_1 < \frac{-w^2}{\beta e^{-\beta \bar{x}}} < -1$ obtemos uma contradição com $\bar{\theta}^1 \geq -1$.

3. Conclusão.

O que faz o exemplo de Mas-Collel e Zame funcionar? Vimos na demonstração acima que foi a conjugação de dois fatores. Um de que à esquerda de -1 na reta $y = a$ não há preços suporte e o outro fator de que à direita desse mesmo ponto a renda dada por $W_s^1 + \bar{\theta}^1 A$ tem limite inferior positivo. Essa conjugação de fatores não acontece se o número de estados é finito. Pois nesse caso a probabilidade do estado $s = 0$ seria positiva e $q_0 = 1/a$ dá renda zero ao ponto $(-1, a)$. O exemplo de Mas-Collel e Zame não é genérico nas dotações ou nas utilidades pois no ponto $(-1, a)$ há um contínuo de preços suporte. A possibilidade de existência genérica é um possível tópico de pesquisa futura. Uma outra alternativa é a inclusão de bancarrota e penalidades. Nesse contexto sempre existe eqüilíbrio sem supormos (1). Ver Aloisio, Monteiro e Páscoa (1994).

Submetido em Março de 1994. Revisado em Abril de 1995.

Referências

Aloisio, A., P.K. Monteiro & M.R. Páscoa 1994. "Existence of equilibria with infinitely many goods, incomplete markets and bankruptcy." Informes de Matemática, Série B-086, Junho/94, IMPA.

Hellwig, M. 1991. "Rational expectations equilibria in sequence economies with symmetric information: two periods case". *Journal of Mathematical Economics.* (a ser publicado).

Magill, M. & M. Quinzii 1994. "Infinite horizon incomplete markets". *Econometrica*, **62**: 853–900.

Mas-Collel, A. & P.K. Monteiro 1991. "Self-fulfilling equilibria: an existence theorem for a general state space". *Journal of Mathematical Economics.* (a ser publicado).

Mas-Collel, A. & W. Zame 1991. "The existence of security markets equilibria with a non-atomic state space". *Journal of Mathematical Economics.* (a ser publicado).

Monteiro, P.K. 1991. "A new proof of the existence of equilibrium in incomplete markets economies". *Journal of Mathematical Economics.* (a ser publicado).