METODOLOGIAS PARA A ANÁLISE E PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS UNIVARIADAS E MULTIVARIADAS

R. C. Souza *

1 – INTRODUÇÃO

O desenvolvimento, na área de modelagem de séries temporais a partir dos anos sessenta é incontestável. O processo, apesar de lento no seu início, experimentou um crescimento rápido e acentuado a partir de 1970, graças à divulgação dos trabalhos de Box & Jenkins. A elegante e ao mesmo tempo altamente acadêmica formulação proposta por estes autores despertou o interesse de pesquisadores teóricos e práticos, que a partir daí iniciaram um processo verdadeiramente revolucionário em termos de proposições de novos métodos, melhorias dos já existentes, aplicações a diversas áreas, etc. . . Como resultado, com o transcorrer dos anos, métodos altamente sofisticados eram propostos ao mesmo tempo que a área em si ia ganhando uma identidade bem própria dentro da Estatística. Já existem hoje várias Sociedades, Encontros e Reuniões de pesquisadores em séries temporais, inclusive periódicos específicos que vão sendo introduzidos no mundo científico. Este é o caso, por exemplo, do "Journal of Forecasting", "Journal of Time Series", recentemente criados.

Neste artigo fazemos uma apresentação destes métodos para a análise e previsão de séries temporais, procurando seguir a ordem cronológica em que os mesmos foram formulados. Deve o leitor estar ciente que o nosso objetivo é uma apresentação breve, porém clara dos diversos métodos, sendo que, para cada um deles, procuramos incluir uma lista de referências bibliográficas atualizada que complementa a descrição de cada método.

O artigo está organizado em três partes distintas. Na primeira apresentamos as definições e notações relevantes assim como a classificação adotada no trabalho para a apresentação dos métodos. Na segunda mostramos aqueles métodos classificados como univariados, i. e., aqueles baseados numa única série temporal. Finalmente, na última parte discutimos aqueles métodos que envolvem variáveis causais, ou seja, os modelos multivariados.

* Grupo de Sistemas, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC / RJ.

2 – DEFINIÇÕES BÁSICAS

2.1 – Séries Temporais

Existe uma grande classe de fenômenos (naturais, econômicos, etc.), cuja observação e conseqüentemente quantificação numérica, produz uma seqüência de dados distribuídos no tempo. A esta seqüência de dados ordenados segundo o parâmetro tempo, denominamos série temporal. A forma mais simples de conceituar uma série temporal é aquela que interpreta Z_t; $t = 1, 2, \ldots$ como sendo um conjunto de observações discretas observadas em tempos equidistantes, apresentando uma dependência serial entre as mesmas. O conceito acima, apesar de simples, evidencia de certa forma, a Análise de Séries Temporais como uma área bem definida dentro da Estatística, visto que estamos claramente descartando aqueles dados "i. i. d." (independentes e identicamente distribuídos), comumente utilizados nos diversos modelos estatísticos.

Em se tratando de uma definição mais rigorosa para séries temporais ficamos com a interpretação dada para uma série temporal como sendo uma realização qualquer de um processo estocástico. Tal interpretação é essencial e fornece uma espécie de fundamentação teórica na formulação das diversas metodologias para a análise e previsão de séries temporais que discutiremos adiante.

2.2 – Análise e previsão de Séries Temporais

Fazendo uso da notação introduzida na seção anterior, suponhamos a série temporal Z_t, $t = 1, 2, \ldots$; e seja $Z^T = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_T)$ o vetor representando as T realizações passadas do processo Z_t, conhecido também como série **histórica** ou **dados**. Estamos interessados na determinação das relações de dependência temporal da série Z_t, através de uma análise estatística de sua série histórica Z^T. A este estudo dá-se o nome de **análise de séries temporais**. Uma vez determinadas as relações de dependência em Z_t (**Modelo Matemático**) podemos então partir para a previsão da série temporal, ou seja, a determinação dos prováveis valores que assumirão as variáveis aleatórias futuras $Z_{T+1}, Z_{T+2}, \ldots Z_{T+\ell}$; sendo "$\ell$" o horizonte de previsão. Para a previsão de Z_{T+j} feita no instante T usaremos a notação: $Z_T(j)$; $j = 1, 2, \ldots, \ell$.

Conforme veremos adiante, dependendo da interpretação assumida para a série temporal, $Z_T(j)$ será um valor pontual desconhecido (**previsão pontual**), ou uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida (**previsão distribucional**). Neste último caso, um valor pontual mais provável para $Z_T(j)$ pode ser facilmente obtido, dependendo da "Loss Function" adotada. Em outras palavras, obtida a distribuição de $Z_T(j)$ passamos a um problema simples de Teoria da Decisão que permitirá escolhermos prováveis valores futuros de $Z_T(j)$ com dadas probabilidades.

Com relação ao horizonte de previsão "ℓ",
valor, podemos ter previsões a curto, médio e longo prazos. Os diversos métodos que apresentamos neste artigo se referem a previsões a curto prazo, ou seja, aqueles métodos que permitem uma razoável visão do futuro através de extrapolação direta do ocorrido no passado. Por outro lado, para métodos que produzam previsões a médio e longo prazos a literatura existente é praticamente nula. É interessante também lembrar que mesmo para as previsões a curto prazo, não existe um número fixo que caracteriza o horizonte "ℓ".
(1981a) o valor "ℓ" dependerá do grau de previsibilidade da série, que por sua vez está intimamente relacionado ao erro de previsão 1— passo a frente.

2.3 — Modelos para a análise e previsão de Séries Temporais

A determinação das diversas relações de dependência serial existentes numa série, ou seja, a análise da série discutida na seção anterior nos leva à definição de um modelo matemático com o qual obtemos as previsões de Z_t. Apresentamos neste artigo um resumo dos mais conhecidos métodos para previsão de séries temporais. Conforme veremos, com raríssimas excessões, tais metodologias partem do pressuposto que o "sistema gerador da série" pode ser razoavelmente aproximado por um modelo linear. Esta suposição é sem dúvida um tanto restritiva, principalmente se levarmos em conta a não-linearidade da grande maioria dos sistemas reais.

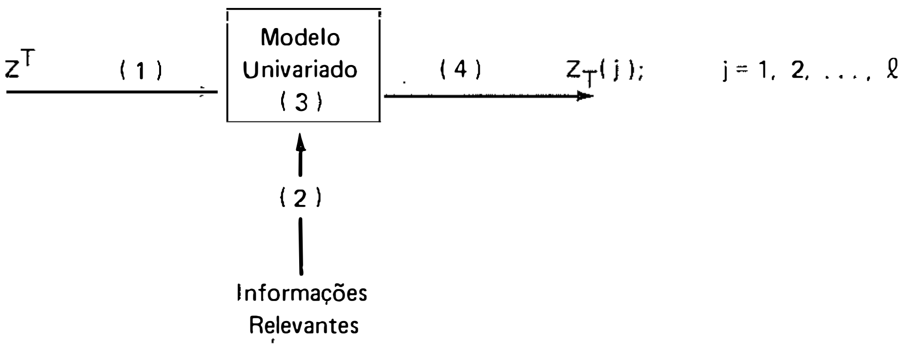
Os métodos que discutiremos neste artigo são apresentados em ordem aproximadamente cronológica e classificados em dois grupos distintos:

— Univariados: baseados numa única série histórica;

— Multivariados: aqueles que envolvem mais de uma série histórica.

3 — MODELOS UNIVARIADOS

Os métodos aqui considerados são aqueles que baseiam-se somente na informação referente à série temporal em estudo no estabelecimento do modelo de previsão. Dentre estes métodos, destacaremos aqueles que levam em consideração unicamente a informação contida na série histórica Z^T (Métodos Baseados em Estatística Clássica), e aqueles que, além de Z^T permitem a inclusão de informações não contidas na série histórica (métodos baseados em Estatística Bayesiana), conforme ilustrado abaixo:



onde:

(1) e (2): entradas (série histórica e outras informações)
(3) modelo matemático representativo do fenômeno em estudo
(4) saída do modelo (previsões, etc. . .)

3.1 Método de Decomposição

Este vem a ser o pioneiro dos métodos univariados e se baseia na hipótese que qualquer série temporal Z_t é composta de 4 componentes distintas: T_t (tendência), S_t (sazonalidade), C_t (variação cíclica) e e_t (componente aleatória); ou seja, assume o seguinte modelo geral para Z_t:

$$Z_t = Z_t\,(T_t,\ S_t,\ C_t,\ e_t) \qquad (3.1)$$

Basicamente, a análise dos dados históricos Z^T é feita com o objetivo de modelar convenientemente as componentes de Tendência, Sazonalidade e Cíclica. A adequabilidade do modelo assim obtido é testada através dos resíduos ou erros estimados.

Entre os diversos modelos de decomposição que podemos obter de 3.1 destacamos:

- Modelo Aditivo:

$$Z_t = T_t + S_t + C_t + e_t$$

— Modelo Multiplicativo:

$$Z_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot e_t$$

— Modelo Misto:

$$Z_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t + e_t$$

Evidentemente, o modelo multiplicativo acima recai no modelo aditivo via aplicação de uma transformação logarítmica.

Uma formulação mais simples, conforme sugestão de Granger & Newbold, (1977), consiste na omissão da componente cíclica C_t nas equações acima, visto que o efeito de tal componente é relativamente insignificante no comportamento da maioria das séries.

Tais métodos, bastante usados até o início dos anos 60's, são hoje considerados obsoletos e praticamente abandonados pelos usuários.

REFERÊNCIAS:

Souza, (1981a); Morettin & Toloi, (1981a) e Granger & Newbold, (1977).

3.2 — Métodos Automáticos

Classificamos como automáticos todos aqueles métodos do tipo "caixa preta", ou seja, aquelas metodologias que podem ser diretamente programadas no computador e que requerem mínima intervenção humana. Estes métodos são também baseados numa análise exaustiva da série histórica Z^T e produzem, na maioria dos casos, previsões pontuais com razoável precisão e baixo custo.

O desenvolvimento de grande parte destes métodos data do início do anos 60, sendo que alguns deles estão em pleno uso nos dias de hoje.

São vários os métodos classificados como automáticos na literatura. Os mais usados dentre eles são:

— Médias móveis;
— Métodos de amortecimento exponencial de Brown;
— Autoregressão "stepwise";
— Método de Holt—Winters;
— Amortecimento harmônico de Harrison;
— Método Census II, X—11, etc...

O leitor interessado deve se referir a Pereira, (1980) e Morettin & Toloi, (1981a) para uma discussão detalhada a respeito destes métodos. Outras referências de interesse são apresentadas a seguir:

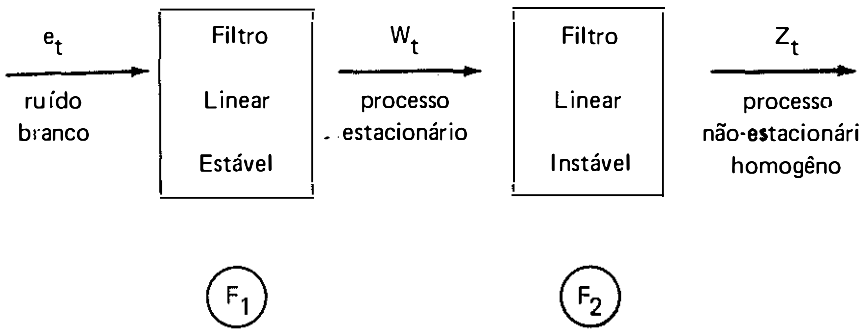
REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Brown, (1962); Harrison, (1965); Chatfield, (1975); Montgomery & Johnson, (1976); Pegels, (1969); Pereira, (1981); Thomopoulus, (1980).

3.3 -- Método Box & Jenkins

O grande desenvolvimento na área de previsão de séries temporais data de 1970, quando Box & Jenkins (BJ) apresentaram uma metodologia bem diferente das existentes. Baseados no importante resultado de Wold, (1938), que provou que qualquer série temporal Z_t pode ser representada por um modelo médias móveis infinito, BJ propõem uma classe de modelos lineares conhecida como modelos ARMA (Auto-Regressive & Moving-average).

Teoricamente, os modelos BJ assumem que a série temporal em estudo representa uma realização de um processo estocástico que foi gerado pela passagem sucessiva de um ruído branco (processo estocástico cujas variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas) por dois filtros lineares: um estável e outro instável (entende-se por filtro linear, neste contexto, a uma combinação linear das variáveis de entrada do sistema). Da teoria de sistemas lineares a passagem do ruído branco pelo filtro linear estável produzirá na saída um proceso estacionário. Este, quando tratado por um certo tipo de filtro instável produzirá na saída um processo não-estacionário (do tipo homogêneo) que caracteriza a maioria dos processos reais, conforme ilustramos abaixo:



É importante lembrar que a proposição acima foi, na realidade, apresentada iniciamente por Wold, provando que W_t pode ser expresso por:

$$W_t = \psi_0 e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots$$

ou seja, o filtro F_1 é dado por:

$$F_1 : \psi (B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$$

onde B é o operador de atraso, i.e.: $B^k Z_t = Z_{t-k}$. Por outro lado, o elevado número de parâmetros ψ. de F_1 (teoricamente ψ (B) tem grau infinito em B) motivou BJ a proporem para F_1 uma razão de dois polinômios de grau finito em B equivalente a ψ (B) — formulação parcimoniosa com relação ao número de parâmetros. BJ propõem os seguintes filtros:

$$F_1 : \theta (B) / \Phi (B),$$

$$F_2 : \nabla^{-d} = (1 - B)^{-d},$$

onde:

θ(B): polinômio médias-móveis (MA) de grau "q" em B;

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

ϕ(B): polinômio auto-regressivo (AR) de grau "p" em B;

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

$\nabla = (1-B)$: operador diferença simples, i. e.

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

d: grau da diferença simples.

Ao modelo assim obtido dá-se o nome de ARIMA (p, d, q) simples expresso por:

$$\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta (B) e_t ; \; W_t = \nabla^d Z_t \qquad (3.2)$$

No caso da existência de componente sazonal de período "s" BJ definem de forma similar o modelo ARIMA (p, d, q) **X** $(P, D, Q)_s$ multiplicativo (também conhecido na literatura como SARIMA), ou seja:

$$\Phi(B^s) \cdot \phi(B) \cdot \nabla_s^D \nabla^d Z_t = \Theta (B^s) \cdot \theta (B) \cdot e_t ; \qquad (3.3)$$

$$W_t = \nabla_s^D \nabla^d Z_t$$

onde $\Phi(\,.\,)$ e $\Theta(\,.\,)$ são os polinômios AR e MA sazonais de graus P.s e Q.s respectivamente e $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ é o operador de diferença sazonal.

A modelagem proposta por BJ consiste assim na identifcação de um modelo ARIMA (ou SARIMA) pertencente à classe de modelos lineares (equações 3.2 ou 3.3) que melhor represente Z_t. Em outras palavras, através de Z^T determinamos os polinômios dos dois filtros F_2 e F_1 (nesta ordem), que produzem aquela série de resíduos $e^T = (e_1, e_2, \ldots, e_T)$ que melhor represente uma realização de um processo ruído branco. Para tal BJ sugerem o seguinte procedimento:

- **Identificação**

(i) seleção preliminar dos graus de diferenciação "d" e "D" que levam a série não-estacionária Z_t numa série estacionária W_t.

(ii) seleção preliminar dos graus "p, P" (AR) e "q, Q" (MA) do filtro linear estável.

A identificação destes parâmetros é feita comparando os estimadores da função de autocorrelação e autocorrelação parcial com os respectivos padrões teóricos.

– **Estimação**

Estágio onde é feita a estimação dos parâmetros ($\varphi.$, $\Phi.$, $\theta.$, $\Theta.$) do modelo identificado, assim como da variância dos resíduos σ_e^2. Esta estimação é feita minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, ou maximizando a função de verossimilhança no caso de ruídos normais.

– **Testes**

O modelo estimado é submetido a um conjunto de testes estatísticos para se verificar a aderência do mesmo aos dados. A maioria dos testes propostos por BJ fazem uso dos resíduos estimados e^T, os quais devem representar uma realização de um processo ruído branco caso o modelo seja adequado. Caso o modelo não produza uma realização de um ruído branco na saída volta-se ao estágio inicial, identifica-se outro modelo e assim sucessivamente até que um modelo adequado seja obtido.

– **Previsão**

Neste último estágio fazemos as previsões dos valores futuros $Z_T(1)$, $Z_T(2)$, ..., $Z_T(\ell)$ utilizando o modelo devidamente testado.

A metodologia descrita acima corresponde exatamente à proposta dos autores em 1970. Tal formulação, apesar de tendenciosamente acadêmica, atraiu a atenção de pesquisadores teóricos e práticos, provocando um grande desenvolvimento na área. Como resultado, várias foram as tentativas de melhorias do método. Em particular, o estágio da identificação dos modelos que a prática tem mostrado ser o mais trabalhoso e que exige conhecimento e experiência do analista, tem sido o mais explorado nestes anos. Entre as diversas propostas para a identificação de modelos podemos destacar:

– Função de **Autocorrelação Inversa** em substituição à Função de Autocorrelação Parcial na identificação [Cleveland, (1972); Chatfield, (1979) e Souza, (1981b)].

– **Critério** de **Informação** de Akaike e reconhecimento de padrões via autocorrelação parcial (ou inversa). [Akaike, (1971); Ozaki, (1977)].

– **Transformação G** transformação das autocorrelações da série para a obtenção de certos arranjos (conhecidos como arranjos R e S). Identifica-se o modelo comparando estimativas destes arranjos com padrões teóricos [Gray et al, (1978); Findley, (1981)].

– **"Corner Method"** que consiste na formação de matrizes cujos elementos são as diversas autocorrelações da série. Substituindo-se as autocorrelações teóricas pelos respectivos estimadores os determinantes destas matrizes são calculados e posteriormente substituídos numa outra matriz, que é comparada com padrões teóricos os quais permitem a identificação de p e q.
Podemos adiantar que tanto este método quanto a transformação G têm mostrado ser de difícil aplicação a dados reais. Acreditamos que tal dificuldade é proveniente do uso de funções das autocorrelações teóricas por ambos modelos como padrão de reconhecimento [Begoin, (1979)].

– **Método Iterativo** de **Identificação**. Este é um método recente proposto por Abadie & Travers que consiste na identificação de modelos ARIMA, sem fazer uso dos estimadores das autocorrelações. Os autores desenvolveram um algorítmo de identificação no qual, começando com um ARIMA (1, d, 1) seus parâmetros AR e MA são estimados pelo procedimento usual. Dependendo dos valores destes parâmetros o método sugere modificações em p, d e q até que um modelo adequado seja obtido. O método também se aplica para modelos SARIMA [Abadie & Travers, 1980 e 1981].

— Algoritmo de Identificação de Pukkila. Este método, proposto recentemente por Pukkila, sugere a identificação dos parâmetros p e q de um modelo ARMA através dos estimadores dos pesos ψ. e π., onde:

$$Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e_{t-k}; \quad Z_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \cdot Z_{t-k} + e_t$$

Fazendo uso da relação existente entre ψ. e π. e os parâmetros φ. e θ. o algoritmo não só determina a ordem p e q, como também os respectivos estimadores dos parâmetros [Pukkila, 1981].

Além destas diversas propostas específicas, tem-se notado uma grande preocupação nos últimos anos na implementação do método BJ totalmente automático. Apesar das muitas críticas recebidas, tal procedimento tem provado ser de grande utilidade quando usado como ferramenta adicional no algorítmo não-automático. Destacamos em especial os seguintes métodos BJ automáticos: Hill & Woodworth, (1980); Lenz, (1977) e Kang, (1981).

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Box & Jenkins, (1970); Nelson, (1973); Souza, (1974); D'Araujo, (1974); Anderson, (1975); Granger & Newbold, (1977); Thomopoulos, (1980); Pereira & Souza, (1981).

3.4 — Método Filtro Adaptativo

O método Filtro Adaptativo recentemente desenvolvido, consiste também na fixação de modelos lineares do tipo ARIMA a séries temporais. A grande diferença deste procedimento em relação ao BJ está na utilização de um algorítmo recursivo para a estimação dos parâmetros, conhecido na literatura por "steepest descent". Tal algorítimo permite a estimação dos parâmetros AR e MA que se adaptam à série temporal a cada instante de tempo, diferentemente do modelo BJ que assumem estes parâmetros constantes.

Conforme originalmente proposto, o Filtro Adaptativo assume para a série temporal Z_t um modelo AR(p) de parâmetros variáveis da forma:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(t) \cdot Z_{t-i},$$

sendo os parâmetros $\phi_i(t)$ atualizados segundo a expressão:

$$\varphi_i(t+1) = \phi_i(t) + 2Ke_t Z_{t-i}; \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

onde:

e_t: erro de previsão 1—passo à frente no instante "t":

i.e.,

$$e_t = Z_t - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(t) \cdot Z_{t-i}$$

K: constante de aprendizado; responsável pela velocidade de convergência do método.

A versão mais geral do método, conhecida como **Filtro Adaptativo Generalizado** se aplica a qualquer tipo de modelo ARMA (p, q) da forma:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(t) \cdot Z_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j(t)\, e_{t-j}; \qquad \theta_0(t) = 1$$

Os parâmetros auto-regressivos são continuamente atualizados como mostrado anteriormente para o caso AR puro, enquanto que os parâmetros MA são atualizados pela seguinte expressão recursiva:

$$\theta_j(t+1) = \theta_j(t) - 2\, Ke_t\, e_{t-j}; \qquad j = 1, 2, \ldots, q$$

Conforme mencionado por Morettin & Toloi, (1981), este método tem como pontos positivos a adaptabilidade dos parâmetros do modelo ao comportamento local da série e não restringe o tamanho da série histórica. Por outro lado, possui sérios problemas de implementação, especialmente em relação à constante de aprendizado K. Esta constante, responsável pela velocidade de convergência do algorítmo de estimação, deve ser cuidadosamente escolhido para evitar instabilidade do método.

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Morettin & Toloi, (1981a); Perrotta, (1981); Makridakis, (1976); Makridakis & Wheelwright, (1977); Silva, (1975).

3.5 – Métodos Bayesianos

Apresentamos nesta seção aqueles métodos que devido a sua natureza Bayesiana, permitem que informações relevantes não presentes na série histórica sejam incorporadas ao modelo. O uso da "filosofia Bayesiana" no contexto de previsão é recente; na realidade a primeira proposição neste sentido só foi oficialmente publicada em 1976 com a formulação clara e elegante de Harrison & Stevens. Mostramos aqui os dois métodos Bayesianos de Previsão existentes na literatura: os modelos de Harrison & Stevens e o modelo BEF ("Bayesian Entropy Forecasting".)

3.5.1 – Modelo de Harrison & Stevens

Harrison & Stevens utilizam um modelo linear geral, de formulação paramétrica e a estes uma interpretação Bayesiana dinâmica, ou seja, os parâmetros do modelo são interpretados como variáveis aleatórias cuja distribuição é continuamente atualizada a cada instante de tempo. Eles utilizam uma classe geral de modelos lineares, conhecida por Modelo Linear Dinâmico (MLD), dada por:

$$Z_t = \underline{F}_t \, \underline{\theta}_t + v_t \rightarrow \text{equação das observações} \qquad (3.4)$$

$$\underline{\theta}_t = \underline{G} \, \underline{\theta}_{t-1} + \underline{w}_t \rightarrow \text{equação do sistema} \qquad (3.5)$$

onde:

t: instante de tempo

Z_t: observação

$\underline{F}_t$: vetor das variáveis independentes (1 xn)

$\underline{\theta}_t$: vetor paramétrico (nx1)

$\underline{G}$: matriz do sistema (nxn)

v_t e $\underline{w}_t$: ruídos de Z_t e $\underline{\theta}_t$; $v_t \sim N(0, V_t)$; $\underline{w}_t \sim N(0, \underline{W}_t)$

A formulação acima permite que a distribuição do vetor paramétrico seja continuamente atualizada a cada instante de tempo através do Filtro de Kalman [Kalman, (1960) e Kalman & Bucy, (1961)] . Seja, por exemplo, a distribuição a posteriori do vetor paramétrico no instante "T" conhecida e dada por:

$$(\underline{\theta}_T \mid \underline{Z}^T; I^T) \sim N(\underline{m}_T; \underline{C}_T);$$

onde I^T representa a informação não presente na série histórica. Podemos facilmente obter sequencialmente a distribuição de probabilidade das observações futuras $Z_{T+1}, Z_{T+2}, \ldots, Z_{T+\ell}$ através das equações 3.4 e 3.5. Quando observamos no instante seguinte Z_{T+1} (e I^{T+1}), utilizamos as equações recursivas do Filtro de Kalman para o cálculo da distribuição a posteriori no instante "T+1". Podemos provar que:

$$(\underline{\theta}_{T+1} \mid \underline{Z}^{T+1}, I^{T+1}) \sim N(\underline{m}_{T+1}; \underline{C}_{T+1});$$

onde

$$\underline{m}_{T+1} = \underline{m}_{T+1}(\underline{m}_T; \underline{C}_T; \underline{F}_{T+1}; \underline{G}; V_{T+1}; \underline{W}_{T+1}; Z_{t+1})$$

$$\underline{C}_{T+1} = \underline{C}_{T+1}(\underline{m}_T, \underline{C}_T, \underline{F}_{T+1}; \underline{G}; V_{T+1}; \underline{I}_{T+1}; Z_{T+1})$$

Ao leitor interessado em detalhes e provas destas equações recomendamos Harrison & Stevens, (1976).

Outro detalhe importante a respeito desta formulação é a possibilidade de incorporação de incertezas associada ao próprio modelo. Devido à sua natureza Bayesiana, podemos tornar a formulação bem mais "robusta", associando às incertezas inerentes aos parâmetros aquelas relativas ao próprio modelo. Podemos, por exemplo, assumir a existência de um número discreto de modelos para a série em estudo e associar a eles uma distribuição de probabilidade que é continuamente atualizada à luz de informações recebidas ao longo do tempo, via aplicação simples do teorema de Bayes. Isto permite que sistemas susceptíveis a descontinuidades de qualquer tipo, tais como transientes, variações do nível, tendência, etc. . . , sejam perfeitamente modeláveis. Deve o usuário estar ciente que o enfoque Bayesiano no contexto de Previsão faz com que a modelagem de uma série seja antes de tudo um estado da arte, exigindo do usuário alto grau de criatividade e conhecimento do sistema em estudo.

A grande aplicação destes modelos está concentrada em situações do tipo:

- série histórica é pequena ou inexistente;
- sistemas sujeitos a mudanças dinâmicas tais que suas séries históricas não traduzem a realidade.

Destacamos, por exemplo, o uso destes modelos na previsão de vendas de produtos novos lançados num dado mercado, previsão de índices econômicos em economias inflacionadas etc. . .

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Harrison & Stevens, (1976); Johnson & Harrison, (1980); Cantarelis, (1980); Souza et al, (1980); Souza & Farias Neto, (1980a, 1980b); Farias Neto & Souza, (1980); Morettin & Toloi, (1981b); Souza, (1981c); Farias Neto, (1981).

3.5.2 – Modelos BEF (Bayesian Entropy Forecasting)

Esta vem a ser uma outra formulação de natureza Bayesiana para previsão de séries univariadas, apresentada em 1979 por Souza & Harrison, seus autores. A metodologia consiste basicamente de uma extensão teórica dos modelos lineares de Harrison & Steven para ambientes não gaussianos. Mais especificamente, a formulação BEF existente na literatura generaliza somente duas classes dos modelos de Harrison & Stevens, ou seja:

– **Modelo estático**, descrito pelas equações:

$$Y_t = \theta_t + v_t;\ v_t \sim N(0,\ V);\ V \text{ constante}$$

$$\theta_t = \theta_{t-1}$$

– **Modelo estacionário**, descrito pelas equações:

$$Y_t = \theta_t + v_t;\ v_t \sim N(0,\ V)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t;\ w_t \sim N(0,\ W);\ V \text{ e } W \text{ constante.}$$

Redefinindo os modelos acima, utilizando-se agora a **Função de Entropia de Shannon** como medida de incerteza (ao invés da Variância, usada no caso geral), foi possível generalizar os modelos estático e estacionário para observações cuja distribuição de probabilidade pertence agora a uma família mais ampla, incluindo como caso particular a distribuição normal.

A natureza Bayesiana dos modelos BEF permite também que sejam incorporadas as incertezas com relação ao modelo, conforme discutimos na seção anterior. Esta formulação de "Estados Múltiplos" tem sido particularmente útil em aplicações relacionadas à previsão de surtos epidêmicos (notificações de sarampo em comunidades isoladas em particular). Neste caso específico utilizamos o modelo BEF Poisson-Gamma, assumindo que as observações seguem um processo de Poisson cuja média (razão de infecção) tem distribuição Gamma. Outros modelos BEF já formulados e usados em aplicações diversas são:

— BEF Binomial—Beta (aplicado à estimação do devastamento geográfico de processos epidemiológicos);
— BEF Geométrico Poisson—Gamma (aplicado em problemas de controle de estoques de itens de alto custo-baixa procura).

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Souza, (1978; 1980; 1981d; 1981e; 1981f); Souza et al, (1979); Souza & Harrison, (1981).

3.6 - Combinação de Previsões

Concluimos esta seção, apresentando um resumo dos resultados recentes de Granger, (1980) relativos à combinação de previsões univariadas. Granger, mostra inicialmente que a combinação das previsões obtidas com duas metodologias distintas, produzirá previsões melhores
seja a série temporal Z_t; $t = 1, 2, \ldots$ e as previsões 1—passo a frente obtidas com os métodos 1 e 2 dadas por:

$$Z_t^{(1)}(1): \text{ previsão de } Z_{t+1} \text{ (método 1)}$$

$$Z_t^{(2)}(1): \text{ previsão de } Z_{t+1} \text{ (método 2)}$$

Denotando:

$e.^{(1)}$ & $e.^{(2)}$: erros de previsão 1—passo à frente com métodos 1 e 2.

$e.^{(c)}$: erro de previsão do método combinado. Então, a previsão combinada $Z_t^{(c)}(1)$ de Z_{t+1} é aquela obtida pela combinação linear das previsões $Z_t(1)$ e $Z_t(2)$, i. e.;

$$Z_t^{(c)}(1) = k\, Z_t^{(1)}(1) + (1-k)\ .\ Z_t^{(2)}(1),$$

onde, o peso "k" é selecionado de tal forma que a variância do erro de previsão do método combinado;

$$e_{t+1}^{(c)} = Z_{t+1} - Z_t^{(c)}(1) \qquad \text{é minimizada}$$

Granger prossegue estendendo o argumento para o caso da combinação de previsões obtidas pelos dois métodos considerando o peso "k" variável, ou seja, assume para $Z_t^{(c)}(1)$ a seguinte expressão:

$$Z_t^{(c)}(1) = k_t Z_t^{(1)}(1) + (1-k_t) Z_t^{(2)}(1),$$

onde os pesos k. são continuamente atualizados seguindo o mesmo argumento do caso constante.

Finalmente, no caso geral da combinação de " p " previsões $Z_t^{(i)}(1)$; $i = 1, 2, \ldots, p$ a previsão combinada $Z_t^{(c)}(1)$ é também obtida através de uma combinação linear das p previsões da forma:

$$Z_t^{(c)}(1) = \sum_{i=1}^{p} k_t^{(i)} \cdot Z_t^{(i)}(1);$$

sendo os pesos $k_t^{(i)}$; $i = 1, 2, \ldots, p$ obtidos de forma idêntica.

Como palavra final, vale a pena salientar alguns pontos relativos à esta combinação de métodos. Devemos estar cientes que a previsão combinada obtida é ótima para o horizonte $\ell = 1$. Nada pode ser dito de $Z_t^{(c)}(\ell)$ para $\ell > 1$. Com relação à forma de previsão, é importante lembrar que o desenvolvimento acima se aplica somente à combinação das previsões pontuais fornecidas pelos diversos métodos. Caso algum dos métodos a ser combinado forneça previsões sob a forma de distribuição de probabilidade, devemos então obter um valor pontual nesta distribuição antes de empregarmos o procedimento de Granger.

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Newbold & Granger, (1974); Bunn, (1975 & 1981).

4 – MODELOS MULTIVARIADOS

4.1 – Introdução

Mostramos na seção anterior aqueles modelos desenvolvidos com o objetivo de explicar o comportamento futuro de uma série através do seu próprio passado. Estamos agora interessados em relacionar uma **série de saída** Z_t a várias **séries de entrada** $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$. Mais especificamente, os **Modelos Multivariados** que descrevemos nesta seção procuram explicar o comportamento futuro de Z_t por um modelo linear, obtido através de análise conjunta do passado histórico de Z_t e das " k " séries de entrada ou **causais**.

A literatura existente considera dois casos distintos:

(i) As séries de entrada afetam a saída **unidirecionalmente**. Em outras palavras, considera-se conhecida a **direção de causalidade** entre as séries. Para este tipo de problema o modelo multivariado é comumente conhecido como **Modelo de Função de Transferência.**

(ii) A direção de causalidade entre entrada e saída não é conhecida a priori, ou seja, pode existir um "feedback" no sistema. Para este problema o modelo recebe o nome de **Modelo de Função de Transferência de Malha Aberta** ou **Modelo Multivariado** propriamente dito.

4.2 – Modelo de Função de Transferência

Seja:

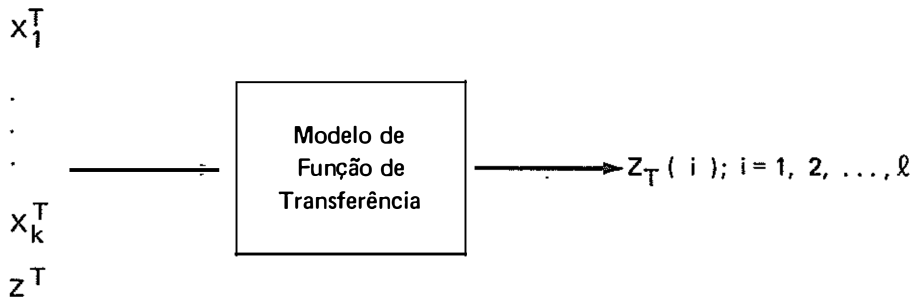
Z_t: série temporal de saída ou série de interesse.

Z^T: $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_T)$ série histórica correspondente à Z_t.

X_{it}: série temporal "i" de entrada; $i = 1, 2, \ldots, k$

X_i^T: $(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iT})$: série histórica correspondente a variável de entrada X_{it}.

Assumindo que não existe um "feedback" entra a saída e as entradas, ou seja, estamos seguros que X_{it}; $i = 1, 2, \ldots, k$ **causam** Z_t, as previsões dos valores futuros de saída $[Z_T(1), Z_T(2), \ldots, Z_T(\ell)]$ são determinadas pelo modelo de Função de Transferência obtido pela análise das séries de entrada e saída, conforme esquema



Apresentamos a seguir as duas metodologias de Função de Transferência em uso corrente; uma baseada em Estatística Clássica (Box & Jenkins) e a outra seguindo uma filosofia Bayesiana (Método de Harrison & Stevens).

4.2.1 – Modelo de Função de Transferência de Box & Jenkins

Sem perda de generalidade, consideremos o caso mais simples de uma única série de entrada X_t causando a saída Z_t. Vamos também supor que X_t e Z_t são séries estacionárias, ou foram feitas estacionárias através da aplicação apropriada dos operadores diferença (simples ∇^d) ou (sazonal ∇_s^D). Da teoria geral de sistemas lineares, o modelo linear mais geral que relaciona X_t e Z_t é:

$$Z_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \ldots + e_t \qquad (4.1)$$

ou, em termos do operador de atraso "B":

$$Z_t = v(B) \cdot X_t + e_t \qquad (4.2)$$

onde os pesos v_i; $i = 0, 1, 2, \ldots$ são as respostas à função impulso que indicam como a série de entrada X_t é "transferida" ou "refletida" na série de saída.

Analisando a formulação acima BJ constataram os seguintes problemas:

— modelo não-parcimonioso (número excessivo de pesos $v_0, v_1, v_2, \ldots$)
— não leva em consideração um possível defasamento no efeito da variável de entrada
— independência serial da série de saída.

Para contornar tais problemas BJ propõem uma formulação **parcimoniosa** para o modelo acima, considerando o polinômio de grau infinito em B da equação 4.2, i. e., v(B), substituído por um quociente de dois polinômios de grau finito em B conforme mostrado abaixo:

$$Z_t = \frac{w(B)}{\delta(B)} \cdot X_{t-b} + e_t \qquad (4.3)$$

onde w (B) e δ (B) são polinômios de graus " s " e " r " em B da forma:

$$w(B) = w_0 - w_1 B - \ldots - w_s B^s; \qquad \delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$$

e b é um inteiro representando o defasamento na entrada.

Comparando as equações 4.2 e 4.3 podemos facilmente constatar que:

$$v(B) = \frac{w(B)}{\delta(B)} \cdot B^b \qquad (4.4)$$

Para tornar a formulação dada pela equação (4.3) mais geral BJ propõem a substituição do termo de erro e_t (supostamente um ruído branco), por uma componente de erro "n_t" que apresenta correlação serial, sendo assim possível sua modelagem por um ARMA (p, q). Desta forma, o modelo final de BJ é dado por:

$$Z_t = \frac{(w_0 - w_1 B - \ldots - w_s B^s)}{(1-\delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r)} X_{t-b} + n_t \qquad (4.5)$$

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)\, n_t = (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q)\, e_t$$

Com relação à metodologia BJ para a obtenção da Função de Transferência, o procedimento segue a mesma seqüência do caso univariado, ou seja, identificação, estimação, testes e previsão. Aqui também a identificação do modelo, que consiste na determinação dos valores (d, r, s, b, p, q) se constitui no estágio mais difícil, obedecendo a seguinte seqüência:

1ª Etapa:

Identificação de "d" (e / ou "D")

Feita através dos estimadores das autocorrelações das duas séries com o objetivo de ter X_t e Z_t estacionárias.

2ª Etapa:

Identificação de (r, s, b)

Feita através das respostas impulsionais, i. e., os pesos v_0, $v_1, \ldots$ que são estimados da seguinte forma:

— Pré-branqueamento da entrada:

Determinamos o modelo ARMA (p, q) que transforma X_t na série de ruídos α_t.

— Aplicamos o mesmo modelo ARMA à saída que fornece a série de resíduos β_t (não necessariamente ruído branco).

— Estimação dos pesos pela expressão:

$$\hat{v}_k = r_{\alpha\beta}(k) \cdot \hat{\sigma}_\beta / \hat{\sigma}_\alpha,$$

onde:

$r_{\alpha\beta}(k)$: estimador da correlação cruzada entre β_t e α_t no "lag" $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\hat{\sigma}_\beta$, $\hat{\sigma}_\alpha$: estimadores dos desvios padrões das duas séries de resíduos.

Com os pesos estimados, fazemos uso da equação (4.4) e um procedimento geral de reconhecimento de padrões que permite a identificação dos parâmetros de interesse b, r e s (nesta ordem).

3ª Etapa:

Identificação de (p, q)

Utilizamos os pesos $\hat{v}_0$, $\hat{v}_1$, ... estimados na 2ª ... históricas que permitem a geração dos resíduos através da expressão:

$$\hat{n}_t = Z_t - \hat{v}(B)\, X_t.$$

Aplicamos em seguida o procedimento BJ univariado à série gerada, onde obtemos p e q.

A seqüência operacional do método é como já discutimos no caso univariado, ou seja, os parâmetros são estimados (mínimos quadrados) e o modelo estimado é submetido a uma série de testes. Comprovada a sua adequabilidade partimos para a previsão; caso contrário voltamos à fase de identificação para escolhermos outro modelo e repetirmos o ciclo.

O procedimento que descrevemos acima para o caso particular de uma entrada — uma saída se extende naturalmente para o caso geral de várias séries de entrada.

Este modelo tem sido usado em várias situações; entre elas destacamos:

- Consumo diário de gás na Grã-Bretanha em função da temperatura média diária [Piggott, 1980].
— Influência de "propaganda" em vendas [Helmer & Johansson, 1977].
— Consumo mensal de eletricidade na Grã-Bretanha em função da temperatura média mensal [Jenkins, 1979].

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Box & Jenkins, (1970) — Capítulos 10 e 11; Pack, (1977); Lenz, (1981); Jenkins, (1979).

4.2.2 — Modelo Bayesiano

Apresentamos agora uma nova formulação de Função de Transferência, neste caso, fundada na Estatística Bayesiana. Em particular, os modelos Bayesianos de Harrison & Stevens discutidos na seção anterior para o caso univariado podem ser ampliados, permitindo a incoporação de variáveis explicativas na formulação do modelo. Esta metodologia é bastante recente e, ainda, não está formalmente desenvolvida como a de Box & Jenkins descrita na seção 4.2.1. Na realidade existe na literatura um único trabal
son & Harrison.

A formulação Bayesiana de Harrison & Stevens consiste, basicamente, na incorporação das variáveis causais (previamente selecionadas pelo usuário) na matriz das variáveis independentes $\underline{F}_t$ e seus parâmetros incorporados ao vetor paramétrico. Temos, assim, a mesma formulação DLM do caso univariado, extendida o suficiente para que as novas variáveis causais sejam incorporadas. Desta forma podemos utilizar o Filtro de Kalman para a atualização dos parâmetros e as previsões obtidas como mostrado no caso univariado.

Esta idéia foi utilizada por Johnson & Harrison na previsão de vendas de bebidas alcoólicas na Inglaterra, explicada por duas variáveis: efeito climático e efeito de preço. O estudo detalhado do mercado permitiu que as diversas variáveis explicativas fossem analisadas e posteriormente incorporadas à formulação univariada. Vale a pena mencionar que este é um caso típico em que o uso do método Bayesiano se faz imperioso, já que as séries históricas eram praticamente inexistentes, o que não permitiria a utilização do modelo BJ.

REFERÊNCIA:

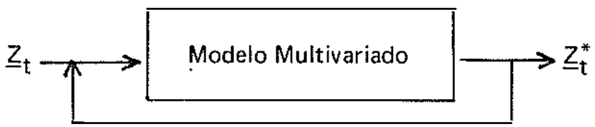
Johnson & Harrison, (1980).

4.3 — Modelos Multivariados Propriamente Dito

Ocorrem muitas vezes na prática situações em que um modelo de uma única equação não é adequado para descrever o comportamento de duas ou mais séries, devido à presença de mais de uma variável endógena na formulação do modelo.

Este é o caso comum em aplicações econômicas e do mercado financeiro. Seja por exemplo o caso da previsão do preço da carne de porco levando em consideração a quantidade existente. Poderíamos inicialmente aplicar um modelo de Função de Transferência assumindo a quantidade como variável de entrada e o preço como saída (i.e., quantidade causando preço). Entretanto, como já conhecemos do comportamento do mercado, se a oferta excede a demanda, os preços cairão, resultando numa redução da produção. Conseqüentemente, devido à queda nos preços, a procura tornará maior que a oferta causando eventualmente um aumento no preço. Este exemplo simples deixa evidente que um modelo de Função de Transferência (quantidade causando preço) não é adequado. Na realidade, este problema deve ser estudado através de uma **Função de Transferência de Malha Aberta** ou **Modelo Multivariado** que mostramos nesta seção.

Seja $\underline{Z}_t = (Z_{1t}, Z_{2t}, \ldots, Z_{kt})$ o vetor das "k" séries temporais em estudo. Os modelos multivariados para previsão de séries são esquematizados conforme mostramos abaixo; onde $\underline{Z}_t^*$ representa o vetor de saída de dimensão menor ou igual a k.



A literatura existente para tais modelos á bastante escassa. De fato, somente os modelos de Box & Jenkins e o Espaço de Estados de Mehra têm sido usados para este tipo de problema.

4.3.1 – Modelo Box & Jenkins multivariado

Apesar das idéias fundamentais do Modelo Multivariado terem sido lançadas em 1973, a sua implementação como metodologia só foi possível recentemente através de importantes trabalhos de Jenkins.

O método faz uso do modelo ARIMA Multivariado definido por:

$$\underline{\phi}(B)\underline{W}_t = \underline{\theta}(B)\underline{e}_t$$

onde:

$\underline{\phi}(B)$: é a matriz de operadores auto-regressivos cujos elementos são polinômios de grau p_{ij} em B.

$\underline{\theta}(B)$: é a matriz de operadores médias-móveis cujos elementos são polinômios de grau q_{ij} em B.

$\underline{W}_t$: $(W_{1t}, W_{2t}, \ldots, W_{kt})$: é o vetor de séries estacionárias obtido pela aplicação do operador diferença às séries do vetor original $\underline{Z}_t$.
$\underline{e}_t$: é o vetor cujas componentes são procesos ruído branco.

A metodologia consiste também das mesmas etapas características dos modelos Box & Jenkins, ou seja, identificação do modelo, estimação dos parâmetros, testes estatísticos e previsão. Aqui também o estágio da identificação se constitui no mais trabalhoso e de difícil utilização prática. Para o caso multivariado em questão, Jenkins, (1981) aponta dois métodos distintos:

— identificação baseada na comparação de padrões teóricos das matrizes de autocorrelação e autocorrelação parcial com as correspondentes, estimadas de $\underline{W}_t$;
— identificação baseada nas mesmas estatísticas (autocorrelação e autocorrelação parcial) estimadas com os resíduos obtidos de modelos univariados aplicados a cada uma das séries W_{it}; $i = 1, 2, \ldots, k$; i.é., pré-branqueamento de $\underline{W}_t$.

A prática tem mostrado que ambos métodos são de difícil aplicaçao prática, especialmente para valores elevados de k. Sugerimos ao leitor interessado o o recente artigo de Jenkins & Alavi, (1981) onde são mostrados 3 exemplos de identificação de modelos ARIMA bivariados.

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Alavi, (1973); Jenkins, (1975); Jenkins & McLeod, (1981); Wilson, (1973).

4.3.2 — Método de espaço de estado

Este método, desenvolvido recentemente, por Mehra & Cameron para a previsão de séries univariadas e, principalmente, multivariadas utiliza a formulação geral de modelos lineares para o vetor $\underline{Z}_t$ dada por:

$$\underline{\theta}(t+1) = \underline{F}\,\underline{\theta}(t) + \underline{G}\,\underline{e}(t+1)$$

$$\underline{Z}_t = \underline{H}\,\underline{\theta}(t)$$

onde:

$\underline{Z}_t$: vetor das observações no instante t.
$\underline{\theta}(t)$: vetor de estado no instante t que pode ter dimensão maior que a dimensão de $\underline{Z}_t$.
$\underline{e}(t+1)$: vetor residual no instante t para a previsão 1—passo à frente.
$\underline{F}$, $\underline{G}$, $\underline{H}$: são as matrizes do sistema cujos elmento são estimados pelos dados.

Mehra & Cameron propõem uma metodologia que faz a identificação do vetor de estado e das matrizes
testes e previsão automaticamente, sem a necessidade de intervenção do analista. Para tal são usadas as seguintes técnicas:

— critério de informação de Akaike para a identificação da ordem do vetor de estado;
— correlação canônica para a identificação da matriz de transição do espaço de estado;
— operadores diferenciação e transformações dos dados originais para produzir estacionaridade;
— testes estatísticos nos resíduos do modelo para verificar a adequabilidade do modelo;
— filtro de Kalman para a estimação do vetor de estado e as previsões.

É importante mencionar que esta formulação é geral; na realidade todos os modelos apresentados anteriormente podem ser colocados sob a forma de espaço de estados. Por outro lado, a confiabilidade dos resultados depende grandemente da existência de séries históricas longas, o que nem sempre existe na prática. Uma aplicação interessante deste método é apresentada num artigo recente de Cameron, (1981); envolvendo as séries: Produto Nacional Bruto Canadense e as séries de base monetária (M_1 e M_2).

REFERÊNCIAS ADICIONAIS:

Aoki, (1976); Cameron & Mehra, (1976 e 1980); Kubrusly, (1981).

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostramos neste trabalho tudo aquilo que no nosso entendimento é de relevância na área de análise e previsão de séries temporais. Àquelas metodologias de maior uso corrente procuramos dar ao leitor uma descrição um pouco mais detalhada. Entretanto, para todos os métodos aqui apresentados foi nossa preocupação fornecer uma lista de referências bibliográficas atualizada e de fácil acesso, permitindo assim que os detalhes referentes aos diversos métodos sejam facilmente obtidos.

Como palavra final, propositadamente não foi mencionado explicitamente no texto os modelos de regressão linear como uma técnica de previsão. Isto não foi feito pelo simples fato que muitas das metodologias apresentadas incluem, como caso particular, os modelos de regressão. Este é o caso por exemplo da formulação do modelo linear dinâmico usada nos modelos Bayesianos e Espaço de Estado aos quais podemos facilmente dar uma interpretação de um modelo de regressão linear (estática ou dinâmica).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABADIE, J. & TRAVERS, D. (1980). Une Approche Simplifié de la Méthode de Box et Jenkins pour l'analyse et la prévision des séries temporelles unidimensionnelles I. **RAIRO**, 14, 4, 353–380.

ABADIE, J. & TRAVERS, D. (1981). Une Approche Simplifié de la Méthode de Box et Jenkins pour l'analyse et la prévision des séries temporelles unidimensionnelles II. **RAIRO**, 15, 1, 51–71.

AKAIKE, H. (1971). Autoregressive of **Statistical Mathematics**, vol. 23, 163–180.

ALAVI, A. S. (1973). **Some Multivariate Extensions of Box-Jenkins Forecasting.** Ph. D. Thesis, Systems Engineering Dept., University of Lancaster, U. K.

ANDERSON, O. D. (1975). **Time Series Analysis and Forecasting**: The Box–Jenkins **Approach** Butterworth: London and Boston.

AOKI, M. (1976). **Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis.** North Holland Publishing Co.

BEGOIN, M. et al (1979). Corner Method of Order Selection. In Time Series Analysis, North Holland Publishing Co., Proceedings of the International Time Series Conference, Nottingham, 1979.

BOX, G.E.P. & JENKINS, G.M. (1970). **Time Series Analysis, Forecasting and Control.** San Francisco: Holden-Day, Inc.

BROWN, R.G. (1962). **Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time** Series. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.

BUNN, D. W. (1975). A Bayesian Approach to the Linear Combination of Forecasts. **Opl. Res. Q.**, 26, 2, 325–329.

BUNN, D. W. (1981). Two Methodologies for the Linear Combination of Forecasts. **J. Opl. Res. Soc.**, 32, 213–222.

CAMERON, A. V. (1981). State Space Forecast and Models for Gross National Product and the Money Supply. In **Time Series Analysis**, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 3rd ITSM, Houston, Texas, August, 1980.

CAMERON, A.V. & MEHRA, R. K. (1976). A Multidimensional Identification and Forecasting Technique Using State Space Models. **TIMS/ORSA**, Miami Conference, November, 1976.

CAMERON, A. V. & MEHRA, R. K. (1980). **Handbook on Business and Economic Forecasting for Single and Multiple Time Series**, Irvine, California: State Space System, Inc.

CANTARELIS, N. S. (1980). An Investigation into the Properties of Bayesian Forecasting Models. Ph. D. Thesis, School of Industrial and Business Studies, Warwick University, England.

CHATFIELD, C. (1975). The Analysis of Time Series: Theory and Practice. London: Chapman and Hall.

CHATFIELD, C. (1979). Inverse Autocorrelations, JRSS, Series A, 42, 3, 361—377.

CLEVELAND, W. S. (1972). The Inverse Autocorrelations of a Time Series and their Applications. Technometrics, 14 (2), 277—298.

D'ARAUJO, R. P. (1974). Transformação e Estimação de Parâmetros para Modelos Adaptados à Previsão de Séries Temporais. Tese de Mestrado, DEE—PUC/RJ, Brasil.

FARIAS NETO, J. J. (1981). Aplicações do Modelo Bayesiano de Crescimento Linear à Série de Demanda. Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa, PUC/RJ, Junho, 1980.

FARIAS NETO, J. J. & SOUZA, R. C. (1980). Um Método para Estimação "On-Line" da Variância do Ruído das Observações nos Modelos Bayesianos de Previsão. Artigo a ser publicado nos Anais do 4º SINAPE, Julho, 1980, Rio de Janeiro, Brasil.

FINDLEY, D. F. (1981). Large-Sample Behavior of the S—Array of Seasonally Non-Stationary ARMA Series. In Time Series Analysis, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 3rd ITSM, Houston, Texas, August, 1980.

GRANGER, C. W. J. (1980). Forecasting in Business and Economics. Academic Press: New York, San Francisco, London.

GRANGER, C.W. J. & NEWBOLD, P. (1977). Forecasting Economic Time Series. Academic Press: New York, San Francisco, London.

GRAY, H. L.; KELLEY, G. D. and MCINTIRED, D. D. (1978) A new approach to ARMA modelling. Commun. Statist.: Simul. Comput. B7(1), 1—15.

HARRISON, P. J. (1965). Short—Term Forecasting. Applied Statistics, Vol. 14, pp. 102—139.

HARRISON, P. J. & STEVENS, C.F. (1976). Bayesian Forecasting (with Discussion). JRSS, Series B, 38, 3, 205—267

HELMER, R. M. & JOHANSSON, J. K. (1977). An Exposition of the Box—Jenkins Transfer Funcion Analysis with an Application to the Advertising-Sales Relationship. Journal of Marketing Research, 14 (2), 227—239.

HILL G. W. & WOODWORTH D. (1980). Automatic Box-Jenkins Forecasting. J. Opl. Res. Soc. 31, 5, 413—423.

JENKINS, G. M. (1975). The Interaction between the Muskrat and Mink Cycles in North Canada. Proceedings of the 8th Internationational Biometric Conference, Constanta, Rommania, 1974.

JENKINS, G. M. (1979). Practical Experiences with Modelling and Forecasting

Time Series, AGJP Publication, Jersey, Channel Islands.

JENKINS, G. M. & ALAVI, A. S. (1981). **Some Aspects of Modelling and Forecasting Multivariate Time Series.** AGJP Publication, Lancaster, U. K.

JENKINS, G. M. & McLEOD G. (1981). **Case Studies in Time Series Analysis,** Vol. 1, AGJP Publication, Lancaster, U. K. (to appear).

JOHNSTON, F. R. & HARRISON, P. J. (1980). An Application of Forecasting in the Alcoholic Drinks Industry, **Opl.** Res. **Q.** 3, 8, 699–709.

KALMAN, R. E., (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction. **Trans. ASME, J. Basic Eng. 82D**, 1, 35–45.

KALMAN, R. E. &BUCY, R. S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. **Trans. ASME, J. Basic Eng. 82D**, 1, 95–108.

KANG, C.A. (1981). Automatic Identification of Univariate ARIMA models. In **Time Series Analysis**, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 5th ITSM, Houston, Texas, August (to appear).

KUBRUSLY, C.S. (1981). Métodos em Espaço de Estado. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**. PUC/RJ, Junho, 1980.

LENZ, H. J. (1977). Automatic Specification, Estimation, Testing and Forecasting within the Class of ARIMA models. Techincal Paper, **FU Berlin**, Berlin, Germany.

LENZ, H. J. (1981). Computational Experiences with an Algorithm for the Automatic Transfer Function Modelling. In Time Series Analysis, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 4th ITSM, Valencia, Spain, June, 1981(to appear).

LUCENA FILHO, A. D. (1981). **Comparação de Métodos de Identificação com Aplicação à Previsão de Estado.** Dissertação de Mestrado, Grupo de Sistemas, DEE, PUC/RJ.

MAKRIDAKIS, S. (1976). A Survey of Time Series. International **Statistical Review**, vol. 44.

MAKRIDAKIS, S. & WHEELWRIGHT, S. C. (1977). **Interactive Forecasting.** San Francisco: Holden-Day Inc.

MONTGOMERY, D. C. & JOHNSON, L. A. (1976). **Forecasting and Time Series Analysis.** New York: McGraw-Hill Book Company.

MORETTIN, P. A. & TOLOI, C. M. C. (1981a). **Modelos para Previsão de Séries Temporais.** Vol. 1, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas, MG, Junho, 1981.

MORETTIN, P. A. & TOLOI, C. M. C. (1981b). **Modelos para Previsão de Séries Temporais.** Vol. 2, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas, MG, Junho, 1981.

NELSON, C. R. (1973). **Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting.** San Francisco: Holden-Day, Inc.

NEWBOLD, P. & GRANGER, C. W. J. (1974). **Experience with Forecating Uni-**

variate Time Series and the Combination of Forecasts — **With Discussion, J. JRSS, Series A**, 137, 2, 131–165.

OZAKI, T. (1977). On the Order Determination of ARIMA Models. **Applied Statistics**, Vol. 26, 290–301.

PACK, D. J. (1977). Revealing Time Series Interrelationships. **Decision Sciences**, 8, 377–402.

PEGELS, C. C. (1969). Exponential Forecasting: Some New Variations. **Manag. Sci** 15, 311–314.

PEREIRA, B. B. (1980). Tópicos em Séries Temporais: Métodos Automáticos,de Previsão. **Comunicação PDD 07/80 COPPE/UFRJ**, Rio de Janeiro, Brasil.

PEREIRA, B. B. (1981). Métodos Automáticos de Previsão. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**, PUC/RJ, Junho, 1980.

PEREIRA, B. B. & SOUZA, R. C. (1981). Desenvolvimentos Recentes na Metodologia Box & Jenkins. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**, PUC/RJ, Junho, 1980.

PERROTA, A. H. V. (1981). Filtro Adaptativo. Extensões Univariadas e Multivariadas. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**, PUC/RJ, Junho, 1980.

PIGGOTT, J. L. (1980). The Use of Box-Jenkins Modelling for the Forecasting of Daily Gas Demand. Internal Report, **British Gas Corporation**, London Research Station, England.

PUKKILA, T. (1981). On Identification of ARMA (p, q) Models. In **Time Series Analysis**, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 4th ITSM, Valencia, Spain, June 1981 (to appear).

SILVA, F. A. (1975). **Sistemas de Projeção de Vendas a Curto Prazo**. Dissertação de Mestrado, Escola de Administração de Empresas de São Paulo, FGV.

SOUZA, R. C. (1974). **Identificação e Aplicação de Testes para Modelos Adaptados à Previsão de Séries Temporais**. Tese de Mestrado, DEE, PUC/RJ, Brasil.

SOUZA, R. C. (1978). **A Bayesian-Entropy Approach to Forecasting** Ph. D. Thesis, Statistics Dept., Warwick University, England.

SOUZA, R. C. (1980): The Forecasting of Epidemics' Progress Using a Bayesian-Entropy Framework — **Environment and Planning** (to appear).

SOUZA, R. C. (1981a). Métodos para a Análise e Previsão de Séries Temporais. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**, PUC/RJ, Junho, 1980.

SOUZA, R. C. (1981b). Função de Autocorrelação Inversa na Identificação de Modelos ARIMA. **Anais do XIV Simpósio da SOBRAPO**. Outubro, 1981, Vitória, ES.

SOUZA, R. C. (1981c). Métodos Bayesianos de Harrison & Stevens para Previsão de Séries Temporais. **Anais do I Encontro sobre Previsão Quantitativa**, PUC/RJ, Junho, 1980.

SOUZA, R. C. (1981d). A Bayesian Entropy Approach to Forecasting The Multi-

-State Model. In **Time Series** Analysis, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 3rd ITSM, Houston, Texas, August 1980.

SOUZA, R. C. (1981e). Mixed-State Models: Bayesian-Entropy Methods. In **Spatial Diffusion: An Historical Geography of Epidemics in an Island Community.** Edited by Cliff A. D. et al, Cambridge University Press, U. K.

SOUZA, R. C. (1981f). A Bayesian-Entropy Approach to Forecasting: The Binomial-Beta Model. In **Time Series** Analysis, North Holland Publishing Co., Proceedings of the 4th ITSM, Valencia, Spain, June 1981 (to appear).

SOUZA, R. C. & HARRISON, P. J. (1981). Steady State System Forecasting: A Bayesian-Entropy Approach, **European Journal of Opl. Research** (to appear).

SOUZA, R. C. & FARIAS NETO, J. J. (1980a). Modelo Bayesiano de Crescimento Linear Aplicado à Previsão de Demanda. **Anais do 3º Congresso Bras. de Autom.**, Setembro, 1980, Rio de Janeiro, Brasil.

SOUZA, R. C. & FARIAS NETO, J. J. (1980b). Análise de Performance do Modelo Bayesiano de Crescimento Linear de Estados Múltiplos. Anais do XIII Simpósio da **SOBRAPO**, Outubro, 1980, Rio de Janeiro, Brasil.

SOUZA, R. C.; KRIEGER, M. & SILVA, R. F. (1980). Um Modelo Bayesiano de Estados Múltiplos para Previsão de Sarampo. Artigo a ser publicado nos Anais do 4º **SINAPE**, Julho, 1980, Rio de Janeiro, Brasil.

SOUZA, R. C.; FARIAS NETO, J. J.; FIGUEIREDO, J. S. & VIEIRA, P. C. M. (1980). Um Método de Estimação das Variâncias nos Modelos Bayesianos para Previsão de Séries Temporais. XIII Simpósio da **SOBRAPO**, Outubro, 1980, Rio de Janeiro, Brasil.

THOMOPOULOS, N. T. (1980). **Applied Forecasting Methods**. Engleewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.

WILSON, G. T. (1973). The Estimation of Parameters in Multivariate Time Series Models. **JRSS**, Series B, 35, 76–85.

WOLD, H.O. (1938). A **Study** in the Analysis of **Stationary Time Series**. Stockholm: Almqrist and Wiksell.