

Um Modelo Econométrico Aplicado à Economia Brasileira *

Gerhard Tintner **

Isabella Consigliere **

José T. M. Carneiro **

1. Introdução. 2. O Modelo. 3. Avaliação dos Parâmetros. 4. Os Resultados Obtidos. 5. Elasticidades Simultâneas. 6. Interpretação dos Resultados. 7. Apêndice: Dados Utilizados. 8. Bibliografia.

Este estudo se propõe a aplicar à economia brasileira um modelo econométrico que possa servir a fins de análise e política econômica. Para tal se usou um modelo macroeconômico de tipo Keynesiano, altamente agregado e simplificado, baseado no modelo construído por Tintner¹ para os países membros da OEEC, U.S.A. e Canadá.

* Pesquisa patrocinada pela National Science Foundation, Washington, D.C.

** University of Southern California.

1 Ver VON HOHENBALKEN B. e TINTNER, G. Econometric Models of the OEEC Member Countries, the U.S.A. and Canadá, and their Application to Economic Policy. *Wirtschaftliches Archiv*, vol. 89, 1962.

Antes de tudo foram estimados os parâmetros das equações estruturais, através dos quadrados mínimos. Uma vez com os valores obtidos o modelo foi transformado num sistema de elasticidades simultâneas.

Os maiores problemas encontrados na elaboração do projeto são devidos à limitada disponibilidade de informações estatísticas. Do contrário poderíamos ter usado um modelo mais completo que incluísse um maior número de variáveis, primeiramente. Em segundo lugar, os resultados obtidos com a presente série de dados devem ser considerados cautelosamente.

Por exemplo, há uma sobreestima da quota do trabalho na renda nacional e conseqüentemente na elasticidade do trabalho na função produção que é devido ao uso da percentagem salarial da classe produtora industrial para emprêgo total da economia. Fomos levados a isto devido à falta de percentagem de salário para cada setor em particular, tal como agricultura, comércio, etc.

Foi-nos impossível também alcançar resultados satisfatórios para função consumo. Quando consumo foi usado em função direta à renda presente obtivemos altos valores de R^2 . Entretanto para evitarmos o famoso preconceito (bias) da *equação-simultânea* ou preconceito HAAVELMO², tratamos de usar outros métodos tais como a forma reduzida (TINTNER) ou consumo como função de renda avaliada, etc. Algumas de nossas dificuldades podem ser explicadas por problemas estruturais como a inflação³. Levando tudo isto em consideração, os melhores resultados foram obtidos onde consumo foi relacionado à renda do ano ou de anos precedentes.

2. O Modelo

O modelo vai consistir de cinco equações que correspondem às cinco endógenas variáveis usadas (Consumo Privado, Produto Nacional Bruto Nominal, Índice de Preços, Produto Nacional Bruto Real e Emprêgo). Destas equações, duas são estruturais (Função Consumo e Função Produção) e as outras três são identidades (Definição do Produto Nacional Bruto Nominal, do Produto Nacional Bruto Real e da Procura de Emprêgo). As outras variáveis incluídas nesse modelo (População, Consumo do Governo, Formação Bruta de Capital Fixo, Mudança de Estoque, Exportações,

2 HAAVELMO, T. Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume, cap. IV in *Studies in Econometric Method*, Nova Iorque e Londres, W.C. Hood e T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph n.º 14, 1953.

3 MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO E COORDENAÇÃO GERAL. *Programa Estratégico de Desenvolvimento 1968-70*, Brasília, 1968, vol. I, p. VI-8, VI-9.

Importações, Salários Mensais na Indústria Manufatureira e Tempo) são consideradas exógenas e por conseguinte independentes, embora somente a variável *Tempo* satisfaça plenamente a este requisito.

A. Variáveis —

1. Variáveis endógenas

<i>C</i>	Consumo Particular (Nominal)
<i>Y</i>	Produto Nacional Bruto Nominal
<i>P</i>	Índice de Preços
<i>X</i>	Produto Nacional Bruto Real
<i>D</i>	Emprêgo Total

2. Variáveis exógenas

<i>N</i>	População
<i>G</i>	Consumo do Governo (Nominal)
<i>I</i>	Formação Bruta de Capital Fixo (Nominal)
<i>L</i>	Mudanças nos Estoques (Nominal)
<i>E</i>	Exportações
<i>M</i>	Importações
<i>W</i>	Salário Mensal na Indústria (Nominal)
<i>T</i>	Tempo

B. Equações.

a)] Função Consumo

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = a + b \frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}} \quad (1)$$

b) Definição do Produto Nacional Bruto Nominal

$$Y_t = C_t + K_t \quad (2)$$

donde: $K_t = G_t + I_t + L_t + E_t - M_t$

c) Produto Nacional Bruto Real

$$X_t = \frac{Y_t}{P_t} \quad (3)$$

d) Procura de Emprêgo

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t} \quad (4)$$

e) Função Produção

$$\log X_t = d + f \log D_t \quad (5)$$

$$\text{donde: } \log f = \frac{1}{n} \sum_1^n t \left[\log \frac{W_t}{P_t} - \log \frac{X_t}{D_t} \right]$$

$$d = \frac{1}{n} \sum_1^n t [\log X_t - f \log D_t]$$

3. Avaliação dos Parâmetros

Se os parâmetros da função de consumo são avaliados diretamente através do método dos quadrados mínimos, verifica-se uma correlação entre $\frac{Y_t}{N_t P_t}$ e o erro da equação. Como consequência cria-se um preconceito (bias)⁴ que causa a sobreestima do parâmetro "b" e a subestima do parâmetro "a" na equação. Daí o preferirmos usar na equação (1) como termo independente a variável predeterminada $\frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}}$:

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = a + b \frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}}$$

A equação (2):

$$Y_t = C_t + G_t + I_t + L_t + E_t - M_t$$

representa o produto nacional bruto nominal, o qual nasce da soma do consumo privado, o consumo do governo, o investimento, as mudanças nos estoques, as exportações menos as importações.

A equação (3):

$$X_t = \frac{Y_t}{P_t}$$

representa o produto nacional bruto, em termos reais, ou, em outras palavras, a preços constantes.

A equação (4):

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

4 VALOVANIS S. *Econometrics*, Nova Iorque, McGraw-Hill Book Co., 1959, p. 64-67.

refere-se à procura de emprêgo, em termos da teoria da produtividade marginal. Em outras palavras, usamos a hipótese de que o valor real dos salários, $\frac{W_t}{P_t}$, seja igual ao valor do produto marginal do trabalho, $\frac{dX_t}{dD_t}$.

A quinta equação (5) representa a função produção. Esta função é do tipo COBB-DOUGLAS cuja expressão logarítmica é linear nos coeficientes o que nos permite a aplicação do teorema de MARCOFF.⁵ A função produção incluída neste modelo relaciona o produto nacional bruto real, X_t , com a força do trabalho, D_t , uma vez que não nos foi possível obter informações sobre o estoque de capital.

Para a avaliação dos coeficientes "d" e "f" preferimos não aplicar uma regressão direta. A ausência de outras variáveis independentes e o fato de que o emprêgo é uma variável endógena levam-nos a sobreestimar o coeficiente relativo ao trabalho. Daí nós usarmos, ao invés, o método indireto de KLEIN⁶ que é: a avaliação do parâmetro "f" se acha usando a equação (4). Na realidade "f" na função produção (na sua expressão logarítmica) representa a elasticidade do produto nacional bruto, referente à variável *trabalho* a qual podemos formular assim —

$$f = \frac{dX_t}{X_t} / \frac{dD_t}{D_t} \quad (6)$$

A expressão (6), por outro lado, poderá ser apresentada do seguinte modo:

$$f = \frac{dX_t D_t}{dD_t X_t}$$

De acôrdo com a definição (4) sabemos que o produto marginal do trabalho é igual ao salário real:

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

e substituindo-se tal expressão na equação (7) teremos —

$$f = \frac{W_t D_t}{P_t X_t}$$

⁵ TINTNER, G. *Econometrics*, Nova Iorque, J. Willey & Sons, 1952, p. 51-57 e 84.

⁶ KLEIN, L. R. *A Textbook of Econometrics*, Evanston, Illinois Row, Peterson and Co. 1953, p. 191-94.

KLEIN avalia o parâmetro "f" através do logaritmo da média geométrica o qual é equivalente à média aritmética dos logaritmos

$$\begin{aligned}\log f &= \frac{1}{n} \sum_1^n t \log \left[\frac{W_t D_t}{P_t X_t} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_1^n t \left[\log \frac{W_t}{P_t} - \log \frac{X_t}{D_t} \right]\end{aligned}$$

Para calcularmos a constante "d" adotamos a técnica igual, na qual se usa o valor "f" há pouco calculado:

$$\begin{aligned}\log X_t &= d + f \log D_t \\ d &= \log X_t - f \log D_t\end{aligned}$$

4. Os Resultados Obtidos

1. Função Consumo

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = 5,39 + 0,4014 \frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}} \quad R = 0,52$$

2. Função Produção

$$\log X_t = 4,05 + 0,695 \log D_t$$

5. Elasticidades Simultâneas

Pode-se agora facilitar a aplicação de nosso modelo ao âmbito de política econômica. Se traduzirmos tôdas as variáveis endógenas (variáveis objetivo) em termos das variáveis exógenas (variáveis instrumento), a predição das variáveis objetivo através da manipulação das variáveis instrumento será grandemente facilitada. Já que a estrutura não linear do modelo (referimo-nos à equação (5) não nos permite uma solução analítica direta das equações foi-nos pois necessário operar em termos das variações relativas e não absolutas, das variáveis. Os resultados obtidos foram transformados em forma de elasticidades, o que nos permitiu responder à seguinte pergunta: em que direção e grandeza mudarão, simultaneamente, tôdas as variáveis endógenas (objetivo) se uma das variáveis exógenas (instrumento) fôr aumentada de um por cento? Em outras palavras, com êste método, chegaremos a determinar a elasticidade simultânea das variáveis objetivo referente à mudança de um por cento nas variáveis instrumento

Fazendo-se uma substituição no nosso modelo original de "K" por "G + I + L + E - M" e " $f \frac{D}{X}$ " por " $\frac{dX}{dD}$ ", depois de eliminada a fração, chega-se a:

$$C = aNP + bY \quad (1)$$

$$Y = C + K \quad (2)$$

$$XP = C + K \quad (3)$$

$$fXP = WD \quad (4)$$

$$\log X = d + f \log D \quad (5)$$

As mudanças absolutas que se verificam nas variáveis endógenas quando uma das variáveis exógenas é alterada são encontradas substituindo-se cada uma das equações estruturais pela soma das diferenciais parciais desta equação referente a tôdas as variáveis endógenas e à respectiva variável exógena; assim sendo, chegamos à seguinte conclusão:

N varia, *W* e *K* continuam fixos

$$dC = a [PdN + NdP] + b dY \quad (6)$$

$$dY = dC \quad (7)$$

$$PdX + XdP = dY \quad (8)$$

$$f [pdX + XdP] = WdD \quad (9)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (10)$$

W varia, *N* e *K* conservaram-se fixos

$$dC = a NdP + b dY \quad (11)$$

$$dY = dC \quad (12)$$

$$PdX + XdP = dY \quad (13)$$

$$f [PdX + XdP] = WdD + DdW \quad (14)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (15)$$

K varia, *N* e *W* conservaram-se fixos

$$dC = a NdP + b dY \quad (16)$$

$$dY = dC + dK \quad (17)$$

$$PdX + XdP = dY \quad (18)$$

$$f [XdP + PdX] = WdD \quad (19)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (20)$$

A fim de obtermos as variações relativas, tôdas as diferenciais foram divididas pelas variáveis correspondentes, multiplicando-se ao mesmo tempo pelo variável para não alterarmos as expressões. Finalmente se resolve cada um dos grupos das equações simultâneas em termos da mudança nas endógenas variáveis, e se chega a êstes seguintes sistemas recursivos:

N varia

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{a(1-f)N}{(1-b)X - a(1-f)N} \right] \frac{dN}{N} \quad (21)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \left(\frac{1}{1-f}\right) \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (22)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{f}{1-f}\right) \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) = f \frac{dY}{Y} \quad (23)$$

$$\left(\frac{dD}{D}\right) = \frac{1}{f} \cdot \frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y} \quad (24)$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) \quad (25)$$

W varia

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{f(1-b)X}{X(1-b) - a(1-f)N} \right] \cdot \left(\frac{dW}{W}\right) \quad (26)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \left(\frac{a}{1-b}\right) \cdot \frac{N}{X} \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (27)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{dY}{Y}\right) - \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (28)$$

$$\left(\frac{dD}{D}\right) = \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{dX}{X}\right) \quad (29)$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) \quad (30)$$

K varia

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{K/P(1-f)}{(1-b)X - a(1-f)N} \right] \cdot \frac{dK}{K} \quad (31)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \frac{N}{X} \cdot \left(\frac{a}{1-b}\right) \cdot \frac{dP}{P} + \frac{K}{Y} \cdot \left(\frac{1}{1-b}\right) \cdot \frac{dK}{K} \quad (32)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{dY}{Y}\right) - \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (33)$$

$$\frac{dD}{D} = \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{dX}{X}\right) \quad (34)$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) - \frac{K}{C} \cdot \frac{dK}{K} \quad (35)$$

Caso substituamos nestes sistemas recursivos tôdas as variáveis por seus valores médios correspondentes e caso supoñhamos dN/N , dW/W e dK/K serem iguais a um por cento, obteremos então as elasticidades simultâneas das variáveis objetivo referentes às variáveis instrumento dadas.

No nosso caso chegamos aos seguintes resultados:

Variáveis Endógenas	N		K				
	N	W	G	I	L	E	M
Y	0,58	0,40	0,31	0,31	0,03	0,18	-0,18
X	0,40	-0,42	0,20	0,20	0,02	0,12	-0,12
C	0,85	0,59	0,23	0,23	0,02	0,13	-0,13
P	0,18	0,82	0,11	0,11	0,01	0,06	-0,06
D	0,58	-0,60	0,30	0,29	0,03	0,17	-0,16

6. Interpretação dos Resultados

Na primeira coluna do quadro precedente (N) apresentamos os resultados que se produzem nas variáveis endógenas devido a uma mudança na popu-

lação brasileira. Seguindo tais informações, o aumento na população, de um por cento, acarretará, *ceteris paribus*, os seguintes resultados:

- 0,58 por cento de aumento no Produto Nacional Bruto Nominal;
- 0,40 por cento de aumento no Produto Nacional Bruto Real;
- 0,85 por cento de aumento no consumo privado;
- 0,18 por cento de aumento no nível dos preços por atacado;
- 0,58 por cento de aumento no emprego total.

A interpretação dos resultados produzidos nas variáveis endógenas, causado por um aumento de um por cento nos salários nominais, nos gastos do governo, investimentos, mudanças, nos estoques, exportações e importações, é semelhante àquela apresentada pelo aumento da população.

O uso de nosso modelo para fins de economia política é-nos evidente: um aumento semelhante a um por cento nos gastos do governo acarretará as seguintes conseqüências:

- 0,31 por cento de aumento no Produto Nacional Bruto Nominal;
- 0,20 por cento de aumento no Produto Nacional Bruto Real;
- 0,23 por cento de aumento no consumo privado;
- 0,11 por cento de aumento no nível dos preços por atacado;
- 0,30 por cento de aumento no emprego total.

É importante observar que as elasticidades das despesas governamentais são quase iguais às de Investimento. O mesmo pode ser dito das elasticidades de Exportações e Importação.

A elasticidade negativa do Produto Nacional Bruto Real e do Emprego Total referente ao aumento de um por cento nos salários podem parecer pouco reais. Entretanto se consideramos a cláusula *ceteris paribus* poderemos ver que esta elasticidade baseia-se nas características do modelo original, isto é:

- a) o modelo opera no âmbito da teoria da produtividade marginal;
- b) trabalho é o único fator considerado na função produção.

De modo geral, os resultados conseguidos através das elasticidades vão de acordo com as previsões do comportamento das variáveis endógenas relativo à mudança em cada uma das variáveis exógenas.

Sem dúvida alguma, os resultados obtidos poderiam ser aperfeiçoados se tivéssemos à nossa disposição melhores e maiores informações com as quais construir-se-ia o modelo em uma forma mais completa.

7. Apêndice: Dados Utilizados

	C	Y	E	M	I	G	L	N (1958=100)	P	W	D
1952	253	351	28	40	54	45	12	55,1	39	14,52	13,9
1953	303	427	33	29	56	65	3	56,7	45	17,88	15,1
1954	375	554	48	50	91	75	19	58,4	59	23,04	15,7
1955	488	689	61	56	99	94	9	60,2	66	28,20	16,1
1956	619	880	70	63	117	130	14	62,0	79	37,32	15,6
1957	754	1.053	74	82	138	153	22	63,8	89	45,60	15,1
1958	960	1.304	89	97	181	180	—	65,7	100	54,12	16,3
1959	1.271	1.791	134	153	288	249	17	67,7	138	72,12	17,4
1960	1.665	2.397	167	203	400	371	19	71,0	180	97,92	18,5
1961	2.330	3.475	278	300	600	542	48	73,1	249	134,52	19,5
1962	3.752	5.436	339	446	894	853	106	75,3	383	194,16	20,5
1963	6.403	9.520	1.150	1.205	1.580	1.563	100	77,5	664	404,16	20,9
1964	12.615	18.726	1.709	1.473	2.696	2.909	410	79,8	1.273	753,60	21,4

NOTA.

Os valores das variáveis C , Y , E , M , I , G e L , as cifras relativas à população, N , e ao índice dos preços por atacado, P , foram encontrados nos quadros de *International Financial Statistics* (International Monetary Fund) 1966, 1967 e 1968.

Os valores das variáveis W correspondem ao salário anual dos operários na indústria manufatureira, expressos em cruzeiros novos. Usamos W do seguinte modo: para cada ano dividimos o total dos salários pagos aos trabalhadores na indústria manufatureira pelo número destes operários. Os dados para salário e número de empregados fomos encontrá-los no *Anuário Estatístico Brasileiro* (I.B.G.E.), 1952-68. A série resultante de W controlamos com os valores dos salários mensais oferecidos, para um número limitado de anos, nas publicações do I.L.O. *Yearbook of Labor Statistics*, 1952-68, e I.B.G.E., *Anuário Estatístico Brasileiro*, 1952-68.

Enfim, para os valores correspondentes à D , ocupação total, usamos os dados fornecidos pelo *Anuário Estatístico Brasileiro*, I.B.G.E., dados estes referentes aos anos de 1950 e 1960. Estes dados foram interpolados, tendo como base o índice de ocupação no setor industrial (1960 = 100), índice este calculado através dos valores de ocupação industrial fornecidos pelo *Anuário Estatístico Brasileiro*, anos 1952-1968:

1952		1953		1954		1955		1956		1957		1958
75,2		81,7		84,6		86,7		85,7		81,3		87,8
1959		1960		1961		1962		1963		1964		
93,9		100		105,3		110,7		103,1		106,0		

As cifras referentes aos valores D e N referem-se a milhões de pessoas. Os valores das variáveis C , Y , E , M , I , G e L foram calculados à base de milhões de cruzeiros novos

8. Bibliografia

1. HAAVELMO, T. *Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume*, cap. IV in *Studies in Econometric Method*, Nova Iorque e Londres, W.C. Hood and T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph n.º 14, 1953.
2. KLEIN, L. R. *A Textbook of Econometrics*, Evanston; Ill. Row, Peterson and Co., 1953.
3. MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO E COORDENAÇÃO GERAL. *Programa Estratégico de Desenvolvimento 1968-70*, Brasília, vol. I e II, 1968.

4. SNEDECOR, G. e COCHRAN, W. G. *Statistical Methods*, Ames, Iowa, The Iowa State University Press, 1967.
5. TINTNER, G. *Mathematics and Statistics for Economists*, Nova Iorque, Rinehart and Co, Inc., 1953.
6. TINTNER, G. *Econometrics*, Nova Iorque, John Wiley and Sons, Inc., 1952.
7. VALAVANIS, S. *Econometrics*, Nova Iorque, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1959.
8. VON HOHENBALKEN, B. e TINTNER, G. *Econometric Models for the OEEC Countries, the USA and Canada, and Their Application to Economic Policy. Weltwirtschaftliches Archiv*, vol. 89, 1962.

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ECONOMIA DA F.G.V.

O Economista brasileiro já pode fazer seu curso de Pós-Graduação no Brasil.

A Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas foi criada para manter cursos de nível internacional, contando com professôres nacionais e estrangeiros.

A vantagem é dupla. As deficiências ocasionais na formação profissional são corrigidas e o aluno não se desvincula da realidade brasileira, seu campo prioritário de trabalho.

Os cursos duram dois anos e, anualmente, são fornecidas 20 bôlsas reajustáveis de acôrdo com a alta do custo de vida.

Os candidatos prestam exames em outubro, desde que sejam Economistas formados ou que estejam cursando o 4º ano de sua Faculdade. No último caso, deverão apresentar certificado de conclusão do curso até janeiro.

Os exames serão realizados em tôdas as capitais de Estados, sendo fornecidas aos aprovados passagens para o Estado da Guanabara. As aulas se iniciam todos os anos no dia 16 de janeiro, estendendo-se até o dia 15 de dezembro, com férias de 30 de junho a 16 de julho.

Maiores informações podem ser obtidas na Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE) — Fundação Getúlio Vargas — Praia de Botafogo, 190 — 10.º andar — Rio de Janeiro (GB) — ZC-02.

An Econometric Model Applied To The Brazilian Economy

1. Introduction

The purpose of this study will be to apply to the Brazilian economy an econometric model that will be useful for economic policy. We will use a highly aggregated and simplified macro-economic model of Keynesian type, based on a model constructed by TINTNER¹ for the member countries of OEEC, USA, and Canada.

First of all, we made estimates of the structural equations through the methods of least squares; secondly the model was transformed into a system of simultaneous elasticities.

The major problem that was encountered in this project was due to the limited availability of statistical data. Otherwise we could have built a more complete model with a larger number of variables. The conclusions obtained from the available data should be used with caution.

For example there is an overestimation of the contribution of labor in the national income and therefore in the elasticity of labor in the production function. This is a consequence of the use of the percentage of

¹ VON HOHENBALKEN B., and TINTNER G., Econometric Models of the OEEC Countries, the USA and Canada, and Their Application to the Economic Policy, *Weltwirtschaftliches Archiv*, vol. 89, 1962.

the wages of the working class in the industry for total labor of the economy. We were forced to use this method due to the lack of a wage percentage for each sector, such as agriculture, commerce, etc.

It was also impossible to arrive at any good results for the consumption function. When consumption was related directly to the present income, we obtain high values of the correlation coefficient. However, in order to avoid the well-known bias of "simultaneous-equations" or HAAVELMO bias², we tried to use other methods such as the reduced form (TINTNER) or consumption as a function of the income. Some of our difficulties can be explained by structural problems such as inflation³. Taking all this into consideration, the best results were attained when consumption was related to the present or past years income.

2. The Model

The model will consist of five equations that will correspond to the five endogenous variables used: Private Consumption, Nominal Gross National Product, Price Index, Real Gross National Product, and Employment. Two of these equations are structural (Consumption Function and Production Function); three others are identities (Definition of the Gross National Product (nominal), of the Gross National Product (real), and of the Demand for Employment). The other eight variables included in this model (Population, Government Expenditures, Fixed Capital Formation, Changes in Inventory, Exports, Imports, Monthly Industrial wages, and Time) are considered exogenous, although only the variable Time satisfies this requirement completely.

A. Variables

1. Endogenous Variables

<i>C</i>	Private Consumption (nominal)
<i>Y</i>	Gross National Product (nominal)
<i>P</i>	Price Index
<i>X</i>	Gross National Product (real)
<i>D</i>	Total Employment

² HAAVELMO T., Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume, ch. IV in *Studies in Econometric Method*, New York and London, ed. by W. C. Hood and T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph N.º 14, 1953.

³ MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO E COORDENAÇÃO GERAL. *Programa Estratégico de Desenvolvimento 1968-70*, Brasília, 1968, vol. I, p. VI-8, 9.

2. Exogenous Variables

N	Population
G	Government Expenditure (nominal)
I	Fixed Capital Formation (nominal)
L	Changes in Inventory (nominal)
E	Exports (nominal)
M	Imports (nominal)
W	Monthly Industrial Wages
T	Time

B. Equations

1. Consumption Function

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = a + b \frac{C_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}} \quad (1)$$

2. Definition of Gross National Product (nominal)

$$Y_t = C_t + K_t \quad (2)$$

thus: $K_t = G_t + I_t + L_t + E_t - M_t$

3. Gross National Product (Real)

$$X_t = \frac{Y_t}{P_t} \quad (3)$$

4. Demand for Employment, explained by the marginal productivity theory:

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t} \quad (4)$$

5. Production Function

$$\log X_t = d + f \log D_t \quad (5)$$

The coefficients of this equation are estimated thus:

$$\log f = \frac{1}{n} \sum_1^n t \left[\log \frac{W_t}{P_t} - \log \frac{X_t}{D_t} \right]$$

$$d = \frac{1}{n} \sum_1^n t \left[\log X_t - f \log D_t \right]$$

3. Estimation of the Parameters

If the parameters of the consumption function are estimated directly the method of the least squares, one obtains a correlation between $\frac{Y_t}{N_t P_t}$ and $\frac{C_t}{N_t P_t}$. Consequently a bias⁴ is created that causes an overestimation of the parameter "b" and the underestimation of the parameter "a" in the equation. Therefore, we prefer to use in equation (1) as an independent term, the predetermined variable $\frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}}$:

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = a + b \frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}}$$

Equation (2):

$$Y_t = C_t + G_t + I_t + L_t + E_t - M_t$$

• represents the gross national product (nominal) which is derived from the total of private consumption, government expenditures, investment, changes in inventory, and exports minus imports.

Equation (3):

$$X_t = \frac{Y_t}{P_t}$$

represents the gross national product in real terms, or in constant prices.

Equation (4):

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

refers to the demand for employment in terms of the marginal productivity theory. In other words, we are using the hypothesis that the real wage, $\frac{W_t}{P_t}$ is equal to the value of the marginal product of labor, $\frac{dX_t}{dD_t}$. This would indeed be the case under free competition.

Equation (5): represents the production function. This function is of the Cobb-Douglas type. It is linear in the logarithms of the variables making it possible to apply the Markoff theory.⁵ The production function

⁴ VALAVANIS, S. *Econometrics*, McGraw-Hill Book Co, 1959, p. 64-67.

TINTNER G. *Econometrics*, New York, J. Wiley & Sons, 1952, p. 51-56, 84.

included in this model relates the logarithm of gross national product (real), X_t , to the logarithm of the labor force, D_t , since it was impossible to find data on the capital stock.

For the estimation of the coefficients "d" and "f" we prefer not to use direct regression. The reason being that the lack of other independent variables or the fact that employment is an endogenous variable, would lead us to an overestimation of the coefficient relative to labor. Therefore we used the indirect method of KLEIN⁶, that is: the evaluation of the parameter "f" is done through equation (4). In reality "f" in the production function (in its logarithmic expression) represents the elasticity of the gross national product, in relation to the variable "labor" which can be formulated as follows:

$$f = \frac{dX_t}{X_t} \bigg/ \frac{dD_t}{D_t} \quad (6)$$

The expression (6) on the other hand can be presented as follows:

$$f = \frac{dX_t D_t}{dD_t X_t}$$

According to definition (4) we know that the marginal product of labor is equal to the real wage:

$$\frac{dX_t}{dD_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

If we replace this expression in equation (7) we have:

$$f = \frac{W_t D_t}{P_t X_t}$$

KLEIN evaluates the parameter "f" through the geometric mean which is equivalent to the arithmetical mean of the logarithms

$$\begin{aligned} \log f &= \frac{1}{n} \sum_1^n t \log \left[\frac{W_t D_t}{P_t X_t} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_1^n t \left[\log \frac{W_t}{P_t} - \log \frac{X_t}{D_t} \right] \end{aligned}$$

⁶ KLEIN L. R. *A Textbook of Econometrics*, Evanston, Illinois, Row, Peterson & Co., 1953, p. 191-194.

In order to evaluate the constant "d" we adopt a similar technique, where we use the value of "f", just calculated.

$$\begin{aligned}\log X_t &= d + f \log D_t \\ d &= \log X_t - f \log D_t\end{aligned}$$

4. The Results Obtained

1. Consumption Function

$$\frac{C_t}{N_t P_t} = 5.39 + 0.4014 \frac{Y_{t-1}}{N_{t-1} P_{t-1}} \quad R = 0.52$$

2. Production Function

$$\log X_t = 4.05 + 0.695 \log D_t$$

5. Simultaneous Elasticities

We may now apply our model tentatively to economic policy. If we express all the endogenous variables in terms of the exogenous variables (instrument variables) it will be easier to predict the endogenous variables through the manipulation of the instrument variables. Because of the nonlinear structure of our model (we refer to equation 5) we could not find a direct analytical solution of the equation. It was necessary, therefore, to operate in terms of relative and not absolute variables. The results attained were transformed into elasticities, which allowed us to answer the following question: if *ceteris paribus* one of the exogenous (instrument) variables is increased by one per cent, by what percentage will the endogenous variable change simultaneously? In other words, with this method we will be able to determine the simultaneous elasticity of the endogenous variables — considering a change of one per cent in the exogenous variables (instruments).

If we substitute in our original model, "K" for " $G + I + L + E - M$ " and " $f \frac{D}{X}$ " for " $\frac{dX}{dD}$ ", and eliminate the fraction, these are the results:

$$C = aNP + bY \quad (1)$$

$$Y = C + K \quad (2)$$

$$XP = C + K \quad (3)$$

$$fXP = WD \quad (4)$$

$$\log X = d + f \log D \quad (5)$$

We can find the absolute changes that take place in the endogenous variables where one of the exogenous variables is changed if we substitute for each one of the structural equations the sum of the partial differentials of this equation. Using all the endogenous and exogenous variables in this way, we reach the following conclusion:

N changes, W and K remain the same

$$dC = a [PdN + N dP] + bdY \quad (6)$$

$$dY = dC \quad (7)$$

$$P dX + X dP = dY \quad (8)$$

$$f [PdX + XdP] = WdD \quad (9)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (10)$$

W changes, N and K remain the same

$$dC = a NdP + bdY \quad (11)$$

$$dY = dD \quad (12)$$

$$PdX + XdP = dY \quad (13)$$

$$f [PdX + XdP] = WdD + DdW \quad (14)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (15)$$

K changes, N and W remain the same

$$dC = aNdP + b dY \quad (16)$$

$$dY = dC + dK \quad (17)$$

$$PdX + XdP = dY \quad (18)$$

$$f [XdP = PdX] = WdD \quad (19)$$

$$\frac{dX}{X} = f \frac{dD}{D} \quad (20)$$

In order to obtain the relative variations, we divided all the differentials by the correspondent variables, then we multiplied at the same time by the variable in order not to change the expressions. Finally we determined each one of the groups of the simultaneous equations in terms of the change in the endogenous variables leading to the following recursive systems:

N changes

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{a(1-f)N}{(1-b)X - a(1-f)N} \right] \frac{dN}{N} \quad (21)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \left(\frac{1}{1-f}\right) \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (22)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{f}{1-f}\right) \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) = f \frac{dY}{Y} \quad (23)$$

$$\left(\frac{dD}{D}\right) = \frac{1}{F} \cdot \frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y} \quad (24)$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) \quad (25)$$

W changes

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{f(1-b)X}{X(1-b) - a(1-f)N} \right] \cdot \left(\frac{dW}{W}\right) \quad (26)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \left(\frac{a}{(1-b)}\right) \cdot \frac{N}{X} \cdot \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (27)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{dY}{Y}\right) - \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (28)$$

$$\left(\frac{dD}{D}\right) = \left(\frac{1}{f}\right) \cdot \left(\frac{dX}{X}\right) \quad (29)$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) \quad (30)$$

K changes

$$\left(\frac{dP}{P}\right) = \left[\frac{K/P(1-f)}{(1-b)X - a(1-f)N} \right] \cdot \frac{dK}{K} \quad (31)$$

$$\left(\frac{dY}{Y}\right) = \frac{N}{X} \cdot \left(\frac{a}{1-b}\right) \cdot \frac{dP}{P} + \frac{K}{Y} \cdot \left(\frac{1}{1-b}\right) \cdot \frac{dK}{K} \quad (32)$$

$$\left(\frac{dX}{X}\right) = \left(\frac{dY}{Y}\right) - \left(\frac{dP}{P}\right) \quad (33)$$

$$\frac{dD}{D} = \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{dX}{X}\right) \quad (34)$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{Y}{C} \cdot \left(\frac{dY}{Y}\right) - \frac{K}{C} \cdot \left(\frac{dK}{K}\right) \quad (35)$$

If we substitute in these recursive systems for all the variables their correspondent mean values, considering DN/N , DW/W and dK/K equal to one per cent, we will obtain, then, the simultaneous elasticities of the endogenous variables regarding the given exogenous variables (instrumental).

In our case, these are the results:

Endogenous Variable	N	W	K				
			G	I	L	E	M
Y	0.58	0.40	0.31	0.31	0.03	0.18	-0.18
X	0.40	-0.42	0.20	0.20	0.02	0.12	-0.12
C	0.85	0.59	0.23	0.23	0.02	0.13	-0.13
P	0.18	0.82	0.11	0.11	0.01	0.06	-0.06
D	0.58	-0.60	0.30	0.29	0.03	0.17	-0.16

6. Interpretation of the Results

In the first column (*N*) of the preceding table we presented the percentage changes in the endogenous variables due to a one per cent change in Brazilian population *ceteris paribus*. Given this information the in-

crease of one per cent into the population will bring, *ceteris paribus* the following results:

- 0.58 per cent increase in the Gross Nominal National Product;
- 0.40 per cent increase in the Gross Real National Product;
- 0.85 per cent increase in private consumption;
- 0.18 per cent increase in the wholesale price level;
- 0.58 per cent increase in total employment.

The interpretation of the results produced in the endogenous variables, caused by the increase of one per cent in nominal wages, government expenditures, investments, changes in inventory, exports, and imports is similar to the one presented by the increase in population.

The application of our model for the purpose of economic policy would seem to be easier now. A similar increase of one per cent in the expenses of the government will bring the following consequences *ceteris paribus*:

- 0.31 per cent increase in the Gross Nominal National Product;
- 0.20 per cent increase in the Gross Real National Product;
- 0.23 per cent increase in private consumption;
- 0.11 per cent increase in the wholesale price level;
- 0.30 per cent increase in total employment.

It is important to note that the elasticities of government expenses are almost the same as the ones of investment. The same can be said of the elasticities of exports and imports.

The negative elasticity of the Gross Real National Product and Total Employment in relation to the increase of one per cent in the wages may seem a little unrealistic. Nevertheless, if we consider the clause *ceteris paribus* we will be able to see that this elasticity is based on the characteristics of our original model; in other words.

- a) the model is confined to the theory of marginal productivity;
- b) labor is the only factor considered in the production function.

Generally speaking, the results obtained through the elasticities will agree with the behavior of the endogenous variables relative to the changes in each one of the exogenous variables.

Certainly the results obtained could have been better if we had more and better sources of information and data to build a more complete model.

7. Appendix: Data Used

	C	Y	E	M	I	G	L	N	P (1958 = 100)	W	D
1952	253	351	28	40	54	45	12	55.1	39	14.52	13.9
1953	303	427	33	29	56	65	3	56.7	45	17.88	15.1
1954	375	554	48	50	91	75	19	58.4	59	23.04	15.7
1955	488	689	61	56	99	94	9	60.2	66	28.20	16.1
1956	619	880	70	63	117	130	14	62.0	79	37.32	15.9
1957	754	1,053	74	82	138	153	22	63.8	89	45.60	15.1
1958	960	1,304	89	97	181	180	—	65.7	100	54.12	16.3
1959	1,271	1,791	134	153	288	249	17	67.7	138	72.12	17.4
1960	1,665	2,397	167	203	400	371	19	71.0	180	97.92	18.5
1961	2,330	3,475	278	300	600	542	48	73.1	249	134.52	19.5
1962	3,752	5,436	339	445	894	853	106	75.3	383	194.16	20.5
1963	6,403	9,520	1,150	1,205	1,580	1,563	100	77.5	664	404.16	20.9
1964	12,615	18,726	1,709	1,473	2,696	2,909	410	79.8	1,273	753.60	21.4

NOTE

The values of the variables C , Y , E , M , I , G and L , the figures regarding population, N , and wholesale price indexes, P , were found in the tables of the *International Financial Statistics* (International Monetary Fund) 1966, 1967, and 1968.

The values of the variables W correspond to the yearly wages of the workers in the manufacturing industries, expressed in new cruzeiros. We use the following method: for each year we divided the total of the wages paid to the workers in the manufacturing industries by the number of employees. The data for wages and number of workers were found in the *Anuário Estatístico Brasileiro* (I.B.G.E.) 1952-1968. The results of the W series were compared with the values of the given wages for a certain period of time, and were found in the publications of I.L.O., *Yearbook of Labor Statistics*, 1952-68 and I.B.G.E., *Anuário Estatístico Brasileiro*, 1952-68.

Finally, for the values regarding D , total employment, we use the data given by the *Anuário Estatístico Brasileiro*, I.B.G.E. 1950 and 1960. These data were interpolated having as a basis the index of employment in the industrial sector (1960=100), *Anuário Estatístico Brasileiro*, 1952-1968

1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
75.2	81.7	84.6	86.7	85.7	81.3	87.8
1959	1960	1961	1962	1963	1964	
93.9	100	105.3	110.7	103.1	106.0	

The figures regarding the values D and N are in millions. The value of the variables, C , Y , E , M , I , G and L were estimated based on millions of new cruzeiros.