Um Precursor dos Modelos de Decisão: O Modêlo de Feldman*

Jorge Vianna Monteiro

1. Formulação do Modêlo. 2. Duas ou Três Relações Básicas. 3. A Variante Mahalanobis. 4. Um Problema de Decisão. 5. Variante Frankel.

O ano de 1928 é, de certa forma, relevante na cronologia de modelos de crescimento econômico. Nesse ano, RAMSEY apresentava um modêlo de determinação da taxa ótima de poupança, em condições de horizonte de planejamento infinito, num grau de sofisticação só igualado em anos recentes por MALINVAUD, KOOPMANS e outros. Juntamente com VON NEUMANN (1938), a contribuição de RAMSEY forma a base da moderna teoria do crescimento.[1]

* Trabalho apresentado aos alunos da EPGE/FGV nos Seminários sôbre Desenvolvimento Econômico Comparado, conduzidos pelo Professor ANNIBAL VILLELA, nos meses de julho a dezembro de 1969.

Agradeço ao professor VILLELA a distinção do convite, assim como sua crítica.

[1] As investigações teóricas estão centradas em modelos de otimização, com base em comparações intertemporais. Na otimização tipo RAMSEY, o problema está em selecionar uma trajetória que domine as demais alternativas. De outro lado, existe a idéia de otimização de um *estado terminal*, que se tem desenvolvido no modêlo de VON NEUMANN — a teoria do *Turnpike*.

Sem maior repercussão no campo teórico, também em 1928, na Rússia, FELDMAN[2] apresentava um modêlo bi-setorial em que indaga das inter-relações do crescimento global da economia com o das indústrias de bens de capital, dentro do esquema interdepartamental de MARX.

A qualidade do *paper* de FELDMAN está muito mais em sua concepção e preocupação em dar conteúdo operacional ao modêlo do que no sinucso caminho do seu cálculo de derivadas, o que, de resto, era a preocupação comum dos teóricos soviéticos em suas investigações na área do planejamento econômico.[3]

O modêlo de FELDMAN é um sistema bi-setorial, não estocástico, para *análise* das relações entre o produto nacional, Y, e a estrutura produtiva (ou base industrial), Ω, da economia.

Nos países socialistas (inclusive a Índia), o desenvolvimento de Ω se tem processado pelo tratamento preferencial das indústrias de bens de capital. Ao nível de *decisão*. estruturas conceituais do tipo FELDMAN se tornam modelos alocativos de investimento.

1. Formulação do Modêlo[4]

a) Considera-se uma economia fechada, na qual o produto nacional (Y) consiste de dois bens: bens de consumo (Y_p) e de bens de capital (Y_u):

$$Y = Y_u + Y_p$$

Cabe notar, aqui, que também na União Soviética as pesquisas em tôrno do modêlo de VON NEUMANN têm sido intensas, segundo as análises de NEMCHINOV (1962) e KANTOROVICH-MAKAROV (1965). Ver a respeito o excelente ensaio de A. ZAUBERMAN, *The Rapprochement East and West in Mathematical Economic Thought*, na The Manchester School, março, 1969.

[2] Essa contribuição, todavia, por motivos ideológicos ou lingüísticos, estêve desconhecida no Ocidente por muitos anos. Em 1957, E. DOMAN divulgou uma versão do modêlo de FELDMAN (A Soviet model of growth, em *Essays in the Theory of Economic Growth*, 1957). Desde 1964, o artigo de FELDMAN dispõe de tradução inglêsa (em *Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth — Selected Soviet Essays, 1924 — 1930*, N. SPULBER (editor).

[3] É certo que, como técnica de planejamento, o modêlo apresentado por FELDMAN é bem insípido. Porém, deve-se considerar que à época não havia sequer uma *teoria* de política econômica — uma referência indispensável à utilização de modelos de decisão, como a desenvolvida mais tarde por TINBERGEN. Igualmente relevante é notar o estilo ideològicamente descompromissado das indagações de FELDMAN.

[4] No gráfico anexo, se considera explìcitamente a variável R, ou seja, o investimento de reposição. No texto, apenas eventualmente consideramos essa variável. É óbvio que a sua introdução nas equações apresentadas não altera a natureza básica das conclusões.

b) A relação Ω, entre o estoque de capital do setor $u(K_u)$ e do setor $p(K_p)$, define a estrutura produtiva da economia.

c) Não existem outros fatôres limitativos da produção além do capital. O constrangimento da mão de obra é de segunda linha.

d) A produção de novos bens de capital (investimento) é alocada segundo um parâmetro de decisão, λ, entre as indústrias de bens de consumo e bens de capital:

$$\dot{K}_u = \lambda Y_u \quad \text{e} \quad \dot{K}_p = (1 - \lambda)\, Y_u$$

ou, alternativamente,

$$Y_u = \dot{K}_p + \dot{K}_u$$

e) Contudo, para o estoque de bens de capital existente, impõe-se a cláusula de não transferibilidade.[5] *A fortiori*, o produto de um setor é rìgidamente determinado pelo estoque de capital existente no setor, ponderado pela respectiva produtividade (ou inverso do coeficiente de capital), β:

$$Y_u = \beta_u K_u$$
$$Y_p = \beta_p K_p$$

2. Duas ou Três Relações Básicas:

Está além do interêsse imediato dêste *paper* uma análise intensiva e fiel da apresentação de Feldman.[6] Todavia, analisaremos de modo mais objetivo algumas relações básicas entre as variáveis, deixando um ou outro ponto relevante para abordar no estudo das variantes[7] do modêlo.

Ponto 1 O papel da reposição (R)

Suponha-se que o consumo seja estacionário, *i. e.*, $gy = \frac{\dot{Y}_p}{Y_p} = 0$, e que haja reposição do capital obsoleto à taxa constante de r.

[5] Essa limitação tecnológica seria menos significativa numa economia aberta, de vez que aí, pelo comércio exterior, se poderia transformar bens de consumo em bens de capital, e vice-versa.

[6] O artigo original de Feldman é bastante confuso em suas derivações matemáticas, conquanto simples em sua estrutura lógica. Feldman analisa as variáveis básicas de seu modêlo, sob três hipóteses de comportamento do consumo: (i) estacionário; (ii) crescimento à taxa constante; (iii) crescimento à taxa crescente.

[7] Ver adiante as duas próximas seções.

A fortiori, tem-se:

$$K = 0 \quad \text{e} \quad Y_u = R$$

Tomando-se Ω como índice descritivo da estrutura de capital, $\dfrac{K_u}{K_p}$, obtém-se trivialmente

$$r = \frac{\beta_u \, \Omega}{1 + \Omega}$$

ou seja, um aumento em r, com β_u mantido constantemente, mesmo na hipótese de consumo estacionário, o investimento deve aumentar. E êsse aumento deverá ser tanto mais rápido, quanto mais reduzida fôr a produtividade do capital.[8]

Ponto 2 Interdependência das taxas de crescimento.

Diferenciando-se as três equações básicas do modêlo (ver Formulação), obtém-se:

$$gy_u - g\beta_u = \beta_u - \frac{1}{\Omega}\,(gy_p - g\beta_p)$$

onde g_i representa a taxa de crescimento da variável i.

Como simplificação, suponhamos que β_p se mantenha constante ao longo do tempo, *i.e.*, $g\beta_p = 0$. Assim, obtém-se:

$$gk_u = \beta_u - \frac{gk_p}{\Omega} = \beta_u - \frac{gy_p}{\Omega}$$

Ou seja, quanto maior a estrutura de capital da economia (Ω elevado), maiores serão as necessidades de acumulação face a um objetivo de crescimento do consumo, $gy_p = gy_p$. Por exemplo para $\Omega = 1/5$ e uma taxa programada $gy_p = 20\%$ e $\beta_u = 0{,}94$, teríamos $gk_u < 0$, *i. e.*, o objetivo fixado só poderá ser atingido pela descapitalização em u.

[8] É interessante notar o seguinte comentário de Feldman: "According to data on American industry, the effectiveness of capital utilization in leading capitalistic countries has not tended to increase during the last decade. Since we are going to go through an analogous stage of development, this could also be true in the future in our country, if we followed blindly in the footsteps of capitalist economies. Particular attention shoued be devoted to increasing the effectiveness of old as well as of new capital. A change in our attitude toward the problem of the effectiveness of capital investments may result in a significant change in the behavior of the value of the coefficient S (nosso β), since we have lagged very far behind outstanding industrial nations in the rational utilization of our productive apparatus." (*Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth, op. cit.* p. 185).

Agora vamos derivar o que FELDMAN chama a *fórmula geral de interdependência.* Para tanto, diferenciando a expressão

$$gk_u = \beta_u - \frac{gy_p}{\Omega}$$

em relação ao tempo, e introduzindo as taxas de crescimento das variáveis, obtém-se:

$$gk_u + \Omega\,\frac{(\beta_u\, g\beta_u)}{gk_p} - \frac{(gk_u\, g'k_u)}{gk_p} = gk_p + g'k_p$$

onde $g' = \dfrac{\dot{g}}{g}$.

Agora observe-se que, quando a expressão

$$\frac{\beta_u\, g\, \beta_u}{gk_p} - \frac{gk_u\, g'k_u}{gk_p}$$

se anula, têm-se $\beta_u g\beta_u = gk_u - g'k_u$, implicando em:

$$gk_u = gk_p + g'k_p$$

Interpretação: gk_p aumenta (*i.e.* $g'k_p > 0$) na medida em que $gk_u > gk_p$. Mas $gku \leq \beta_u$. Daí, quando $gku = \beta_u$

$$gk_p + g'k_p = \beta_u = gk_u$$

ou seja, a produtividade de K_u (ou a taxa de crescimento de K_u) é também o limite de gk_p.

Um outro tipo de indagação, com base na *fórmula*, é de como se poderia ter $gk_p > gk_u$, na hipótese de $g\beta_u = 0$.

Essa possibilidade implica (pela *fórmula*) em:

$$g'k_p + \Omega\,\frac{gk_u}{gk_p} \qquad g'k_u < 0$$

ou seja,

(i) as taxas de crescimento de K_u e K_p diminuem, *i.e.*, $g'k_p < 0$, $g'k_u < 0$. Do decréscimo relativo dessas duas taxas vai depender uma descapitalização mais ou menos rápida do sistema.

(ii) $g'k_p > 0$ e $g'k_u < 0$, isto é,

$$|k_u \cdot gk_u \cdot g'k_u| > |k_p \cdot gk_p \cdot g'k_p|$$

Como usualmente, $K_u > K_p$, e *por hipótese*, $gk_u < gk_p$,

$$|g'k_u| > |g'k_p|$$

Nesse caso, então, gk_u vai tender a decrescer, e a persistir $gk_u < gk_p$, o estoque Kp só poderá crescer efetivamente às custas da redução em Ku.

(iii) Uma terceira possibilidade é que $g'k_p < 0$ e $g'k_u > 0$,

$$|K_u \cdot gk_u \cdot g'k_u| < |K_p \cdot gk_p \cdot g'k_p|$$

A taxa de crescimento de K_u cresce, enquanto a de K_p decresce, e o sistema tenderá a se equilibrar a uma taxa gk_p, mais baixa.[9]

Uma configuração interessante é a do *crescimento balanceado*, ou seja, $gk_p = gk_u$. Ainda mantendo β_u, constante, essa hipótese permite reescrever a *fórmula* do seguinte modo:

$$g'k_p = -\ \Omega \frac{gk_u}{gk_p} \qquad g'k_u = -\ \Omega\, g'k_u$$

ou seja, com $g\,\beta_u = 0$, não é possível o crescimento simultâneo de gk_p e gk_u.[10]

Ainda na estrutura do modêlo de FELDMAN, poderiam ser consideradas relações de distribuição da renda, produtividade do trabalho e salários.

A seguir, são examinadas duas versões ou variantes dêsse modêlo, e com interêsse especial em sua aplicabilidade no planejamento econômico.

3. A Variante Mahalanobis

A técnica prospectiva do Primeiro Plano Qüinqüenal da Índia (1952) baseava-se essencialmente na equação de Domar, em que a relação incremental renda líquida/investimento líquido, β, e a taxa de investimento líquido, ρ, eram relacionados para a obtenção da taxa de crescimento da economia, $\beta\rho$.

[9] Ou seja, gk_u aumenta ($g'k_u > 0$) e tende para β_u. A taxa de crescimento de K_u é limitada pela produtividade de K_u. Isso pode ser visto na expressão: $gk_u = u - \frac{gk_p}{\Omega}$.

[10] A hipótese de *desbalanceamento*, *i.e.*, $gk_u =$ constante e $gk_p =$ constante, mas $gk_u \neq gk_p$, envolveria uma equação em gk do segundo grau e de análise mais difícil.

Òbviamente, a utilidade dessa técnica revelou-se limitada. Em se-tudos preliminares (1953) do Segundo Plano Qüinqüenal, MAHALANOBIS,[11] independentemente, estabeleceu um modêlo bisetorial, em linhas idênticas às de FELDMAN — embora o tratamento formal das equações seja mais elaborado.

Partindo das equações básicas:

$$\dot{Y}_u = \beta_u \lambda Y_u$$
$$\dot{Y}_p = \beta_p (1 - \lambda) Y_u$$
$$Y = Y_u + Y_p$$

e utilizando-se de equações diferenciais, se pode determinar as *trajetórias*[12] da renda e suas componentes:

$$(Y_u)_t = Y_0 \, e^{\lambda \beta u t}$$

$$(Y_p)_t = Y_0 \left\{ 1 - \rho + \frac{\rho (1 - \lambda) \beta_p}{\lambda \beta_u} (e^{\lambda \beta u t} - 1) \right\}$$

$$Y_t = Y_0 \left\{ \rho \frac{[\lambda \beta_u + (1 - \lambda) \beta_p]}{\lambda \beta_u} (e^{\lambda \beta u t} - 1) + 1 \right\}$$

onde ρ é a taxa de investimento no período inicial.

Para a condição inicial $Y_0 = 1.000$, e $\rho = 0{,}05$ e valôres fixos $\beta_u = 0{,}1$ e $\beta_p = 0{,}3$, MAHALANOBIS testa valôres alternativos de λ:

[11] "Some observations on the process of growth of national income", em Sankhyã, 1953, vol. 12, parte 4.

O objetivo primeiro da política da Índia era a redução do nível de desemprêgo, no mais curto espaço de tem possível. Conquanto bem dotada de recursos naturais e boas possibilidades para desenvolver a infra-estrutura de sua economia, faltava à Índia um fluxo adequado de bens de capital. Assim, os planejadores hindus se decidiram pelo aumento do estoque de capital, como meio de absorver mão de obra, sendo o parâmetro crucial dessa estratégia.

Posteriormente, MAHALANOBIS introduziu maior flexibilidade em seu modêlo, repartindo o setor-*p* em três sub-setores. Nesse modêlo as decisões são tomadas em dois níveis: (i) a escolha de λ; (ii) a escolha das proporções do investimento a serem alocadas pelos três novos setores. Matemàticamente, o nôvo sistema tem agora 3 graus de liberdade.

[12] Isto é o lugar geométrico das posições da variável, no tempo, obtido pela solução de equação diferencial. Omite-se aqui essa determinação por ser excessivamente laboriosa. (Ver, por exemplo, L. KINGSTON: *Misery or bliss: some models of growth for underdeveloped economies*, 1966, IBRE/FGV).

ALTERNATIVAS DE CRESCIMENTO DA RENDA NACIONAL
(valôres a preços constantes)

$Y_0 = 1000$	$\rho = 0{,}05$	$\beta_u = 0{,}1$	$\beta_p = 0{,}13$
t	0,1	λ 0,2	0,3
5	1.071	1.068	1.064
10	1.148	1.142	1.138
15	1.226	1.225	1.223
20	1.308	1.316	1.322
25	1.397	1.416	1.438
30	1.487	1.527	1.571
35	1.583	1.650	1.726
40	1.684	1.785	1.905
45	1.791	1.935	2.113
50	1.904	2.100	2.354

FONTE: Mahalanobis, Sankhyã, 1953, p. 309.

Observe-se que trata $t \leq 15$, o valor máximo da renda, Y^*, é obtido com $\lambda = 0{,}1$. A partir de $t = 20$, a alocação de 30% do investimento global às indústrias do setor-u é que permitirá alcançar Y^*.

HALDANE[13] formalizou o problema da determinação de t^*, para um dado valor de β_u.

4. Um Problema de Decisão

A hipótese crucial do sistema FELDMAN-MAHALANOBIS está em que o investimento é determinado ùnicamente no setor-u, *i.e.*, $I = Y_u$. Assim, o único parâmetro ou instrumento de decisão é λ. Porém, pode-se provar[14] que:

$$\lambda = \frac{\gamma\beta_p}{\gamma\beta_p + (1-\gamma)\,\beta_u},$$

onde γ é a taxa marginal de poupança.

Mas os problemas da determinação de tecnologia, *i.e.*, a variação de u e p e da taxa de poupança, *não são considerados* pelo modêlo. Portanto, ao nível de decisão, é crucial a escolha de (λ; β_p; β_u).

[13] *The Maximization of National Income*, em Sankhyã, 1955, vol. 16, Partes 1 e 2.

[14] Ver a seção seguinte: a variante FRANKEL.

MAHALANOBIS, por exemplo, escolhe $\lambda = 1/3$, $\beta_p = 0{,}65$, $\beta_u = 0{,}20$ (*i.e.*, $\beta_p > \beta_u$), o que dá $\gamma = 0{,}13$. Contudo, o acompanhamento do plano revelou que γ foi inferior ao valor esperado. As implicações dessa disparidade, em têrmos de absorção do produto e de manutenção de um dado nível de emprêgo, são óbvias.

5. A Variante Frankel

Em um brilhante estudo,[15] M. FRANKEL apresentou em 1961 um modêlo que também se propõe a estudar a relação entre a estrutura do capital e o crescimento da economia.

Aqui, o produto do setor-consumo é função do nível do produto nacional.

$Y_p = \alpha Y$, onde α é a propensão média[16] a consumir.

Ademais,

$$\beta_u K_u = Y(1-\alpha)$$
$$\beta_p K_p = Y\alpha$$

ou seja, o investimento $Y(1-\alpha)$ é fixado pelo estoque de capital do setor-u e pela respectiva produtividade. Também no setor-p, o nível de produto, $Y\alpha$, se relaciona a $\beta_p K_p$.

Com base nessas relações e na definição $Y = Y_p + \dot{K}_p + \dot{K}_u$ se obtém:

$$K_u/K_p = \frac{\beta_p(1-\alpha)}{\beta_u\alpha} \;/\; \beta_u\alpha$$

e

$$K_u/K_p = \frac{\beta_p(1-\gamma)}{\beta_u\gamma} \;/\; \beta_u\gamma$$

onde

γ é a propensão marginal a consumir.

Daí segue-se que:

$$\lambda = \frac{\dot{K}_u}{\dot{K}_u + \dot{K}_p} = \frac{\beta_p/\beta_u}{\dfrac{\beta_p}{\beta_u} + \dfrac{\gamma}{1-\gamma}}$$

[15] Producer goods, consumer goods and acceleration of growth, em *The Economic Journal*, março 1961.

[16] Para evitar confusão de subscritos, deixa-se de escrever os índices de tempo. FRANKEL considera α como a propensão média e γt como propensão marginal. Violentando um pouco a simbologia, vamos considerar α como a propensão média e $\gamma \neq \alpha$, como a propensão marginal.

Pode-se ver então a relação entre o parâmetro alocativo, λ, e a propensão a poupar, $1 - \alpha$, isto é, o uso de λ como o parâmetro de decisão implica numa decisão quanto a γ, e vice-versa. Ou, a preocupação com o equilíbrio global entre poupança e investimento *determina* e é *determinado* por um equilíbrio de segundo nível: a alocação *ótima* do investimento, pelos dois setôres da economia.[17]

VALÔRES ALTERNATIVOS DE λ

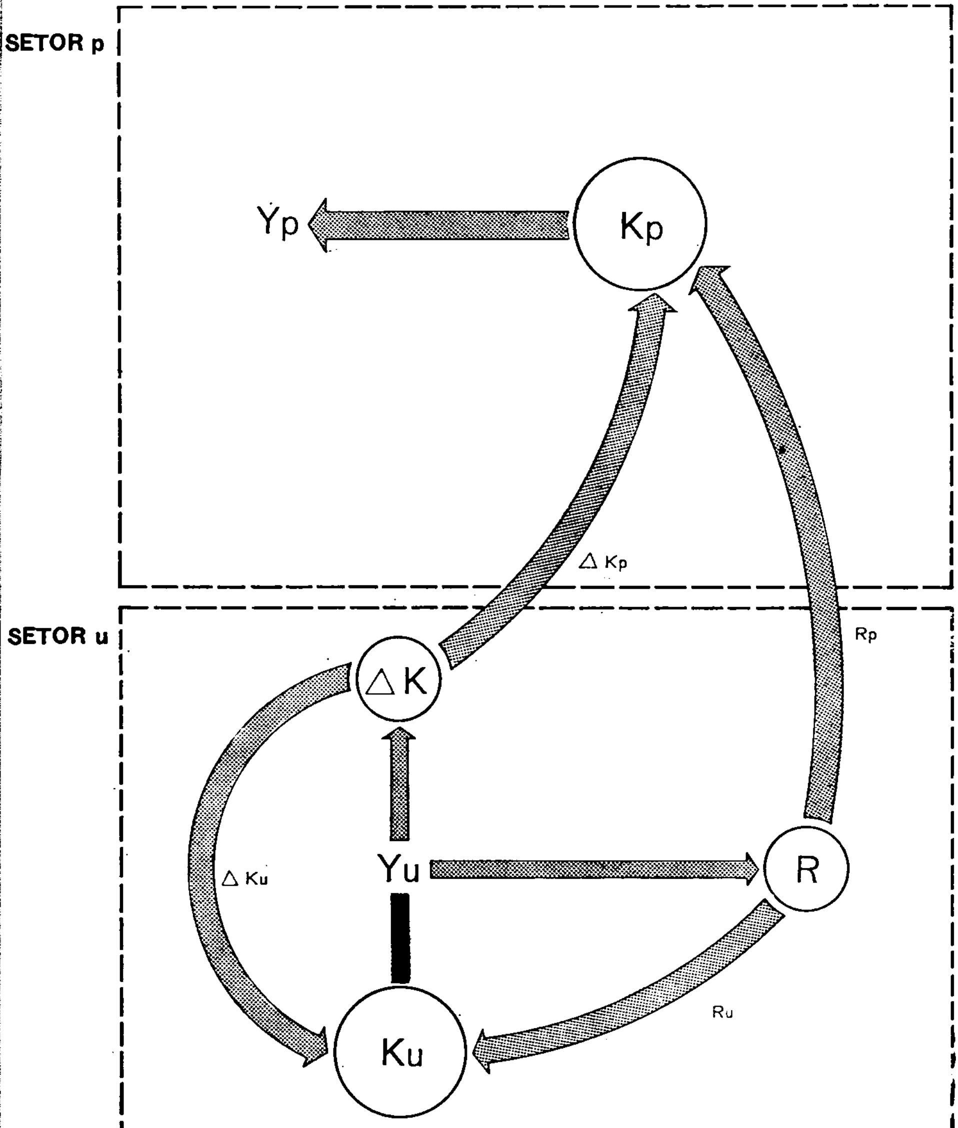
β_p / β_u	$1 - \gamma$							
	0.005	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
2	0,0952	0,18	0,26	0,33	0,40	0,46	0,52	0,57
3/2	0,073	0,14	0,21	0,27	0,33	0,39	0,45	0,50
1	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
2/3	0,034	0,069	0,105	0,14	0,18	0,22	0,26	0,31
1/2	0,026	0,053	0,08	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25

Observa-se, pois, que para um dado esfôrço de poupança o nível adequado da fração estará na razão direta de β_p/β_u.

Resta acentuar, uma outra vez, a originalidade do pensamento dos economistas soviéticos na década dos vinte. Surgiram aí, juntamente com o modêlo de FELDMAN, outras contribuições originais na área das técnicas de planejamento econômico, com LEONTIEF, GROMAN, BAZAROV e outros Como acentua ZAUBERMAN,[18] "it is fair to say that Soviet experiment in planing had no precedent and was a Soviet invention — it was certainly so in respect to its technical aspects".

[17] Êsse ponto é abordado em linhas diversas por TSURU, RAJ e outros, que introduzem a equação de DOMAR no modêlo de MAHALANOBIS. É de se notar que o modêlo RAJ-SEN estende o modêlo de MAHALANOBIS, com vistas a um maior grau de operacionalidade, e em cuja estrutura se pode analisar, por exemplo, a substituição de importações! Ver a respeito: Alternative patterns of growth, em *Oxford Economic Papers*, fevereiro, 1961.

[18] A. ZAUBERMAN, Recent development in soviet planning techniques, em *Economia Internazionale*, maio 1967.



Esquema simplificado dos setores produtivos no modêlo de Feldman

A Predecessor of Decision Models: The Feldman Model

As far as the history of economic growth models are concerned the year 1928 may in some respects be held as a relevant year. It was then that RAMSEY put forward a model dealing with the optimum savings rate under the assumption of infinite horizon which attained a sophistication level without rival until the recent models of MALINVAUD, KOOPMANS and others. RAMSEY's contribution together with VON NEUMAN's (1938) laid the foundations of the modern theory of growth[1].

In the same year FELDMAN developed in Russia a bisectorial model dealing with the relationships between the growth of the economy as a

[1] The theoretical investigations are couched in terms of optimazing models based on intertemporal comparisons. In the RAMSEY type models the problem is to chose a path which prevails over all other alternatives. On the other hand, there is the concept of a terminally optimal path which has stemmed from the VON NEUMAN model — namely the turnpike theory.

It should be noticed here that the URSS economists have been intensively engaged in research work on VON NEUMAN model according to the analyses of NEMCHINOV (1962) and KANTOROVICH-MALAKOV (1965). See on the subject the excellent essay of A. ZAUBERMAN *The Rapprochement between east and west in Mathematical Economic thought* in the Manchester School, March, 1969.

whole and that of the capital goods sector within a marxian frame-work which has suffered some neglect[2].

FELDMAN's paper merits lie rather in his conception and in the operational considerations he entered into his model than in the tortous way he handled the differential calculus which incidentally was a practise commonly to be found among the soviet theorists of the time whenever they dwell on the field of economic planning[3].

FELDMAN's model is a non stochastic bissectorial system dealing with the analysis of the relationships between the national product, Y, and the productive structure, Ω, of an economy.

The development of Ω in socialist countries (including India) has been attained through the priority given to the capital goods industry and such conceptual structures as portrayed in FELDMAN's model turned out to be a model for aplocating investments.

1. A Brief Outline of Feldman Model

1) The model assumes a closed economy in which the national product (Y) consist of two goods namely the consumption goods (Y_p) and capital goods (Y_u).

$$Y = Y_u + Y_p$$

2) The productive structure of the economy is determined by relationship Ω between the stock of capital in sector U, (K_u) and in sector P, (K_p).

2 The neglect by occidental scholars that was long the fate of FELDMAN contribution is due either to ideologic reasons or to the fact that it was written in a rather unknown language. DOMAN published a version of FELDMAN model (A Soviet model of Growth in *Essays in the theory of Economic Growth*, 1954). The English translation of FELDMAN paper has been available since 1964 (in *Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth. Selected Soviet Essays — 1924 — 1930*. N. SPULBER, publisher.

3 There is little doubt that the model put forward by FELDMAN is rather insipid as a planning technique. It must be borne in mind, however, that at that time, no economic policy theory was available — a fact which should not be forgotten — such as the one later developed by TINBERGEN. It is also worth mentioning the fact that FELDMAN's investigations are by no means ideologically bound.

4 The variable R namely the replacement investments are explicitly portrayed in the accompanying chart. In the text, however, no relevance to it is made but eventually. Needless to say that its introduction in the equations does not alter the nature of the basic solutions.

3) No constraint other than capital exists which limits the production of the flow of goods, labour constraints being of second order.

4) The current flow of goods is assumed to be allocable between the consumption flow and gross capital formation in accordance with a decision parameter λ.

$$\dot{K}_u = \lambda Y_u \quad \text{and} \quad \dot{K}_p = 9(1 - \lambda) Y_u$$

or alternatevely.

$$Y_u = \dot{K}_p + \dot{K}_u$$

5) Nevertheless the existing stock of capital is assumed to be untransferable[5]. It therefore follows that the product of each sector is rigidly determined by the existing stock of capital weighted by its represctive productivity (the inverse of the capital coeficient), β:

$$Y_u = \beta_u K_u$$
$$Y_p = \beta_p K_p$$

2. Two of Three Basic Relationships

Although this paper does not purport to provide a deep analysis and a fully accurate account of what the Feldman's model is like[6] yet some basic relationships between the variables must be more objectively analysed whilst some other relevant features are left aside to be taken up later when some versions of the model[7] are introduced.

Point 1. *The role of replacement* (R)

Let consumption be assumed stationary that is to say $gy = \frac{\dot{Y}_p}{Y_p} = 0$ and obsolete capital replaced at a constant rate r.
It therefore folows:

$$K = 0 \quad \text{and} \quad Y_u = R$$

[5] This technological constraint need not be so significant in case of an open economy since in such a case the international trade makes it possible that consumption goods are transformed into capital goods or the other way around.

[6] Although simple in its logic structure, Feldman original paper is rather confusing as far as its mathematical inductions are concerned. Feldman analyses the basic variables of his model under three assumptions (concerning the consumption pattern): (i) stationary; (ii) increase at a constante rate; (iii) increase at an increasing rate.

[7] See next two sections.

Taken Ω as an index portraiyng the capital structure $\frac{K_u}{K_p}$ the following is obtained trivially

$$R = \frac{\beta_u \ \Omega}{1 + \Omega}$$

That is to say if R increases while β_u is held constant the investment will increase even if consumption is assumed stationary, and the lower the capital productivity the faster the increase[8].

Point 2. *Interdependence of the rate of growth*

Differentiating the three basic equations (see model outline)

$$gy_p - g\beta_u = \beta_u - \frac{1}{\Omega}(gy_p - g\beta_p)$$

where in g_i stands for the rate of growth of variable i. For simplicity's sake let β_p be assumed constant through time that is to say $g\beta_p = 0$. It therefore follows:

$$gk_u = \beta_u - \frac{gk_p}{\Omega} = \frac{\beta y_p}{\Omega} \ \beta_u - \frac{gy_p}{\Omega}$$

that is to say once a given rate of increase in consumption is set $gy_p = gy_p$ the larger the capital structure of the economy (high Ω) the greater the need of accumulation. For example if $\Omega = 1/5$ and the plan sets a rate $gy_p = 20\%$ and $\beta_u = 0.94$ we would have $G_{ku} > 0$. This means that the objectives aimed at cannot materialize but through desinvestment in u.

Let now what FELDMAN called the general formula of interdependence be derived. To this end let us differentiate $gk_u = \beta_u - \frac{gy_p}{\Omega}$ with respect

[8] It is interesting to note the following comment by FELDMAN: "According to data on American industry, the effectiveness of capital utilization [β] in leading capitalistic countries has not tended to increase during the last decade. Since we are going to go through an analogous stage of development, this could also be true in the future in our country, if we followed blindly in the footsteps of capitalist economies. Particular attention should be devoted to increasing the effectiveness of old as well as of new capital. A change in our attitude toward the problem of the effectiveness of capital investments may result in a significant change in the behavior of the value of the coefficients [$o \cup a\, B$] since we have lagged very far behind outstanding industrial nations in the rational utilization of our productive apparatus" *Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth, op. cit.* p. 185

to time and introduce the variables concerning rates of growth:

$$gk_u + \Omega \frac{(\beta_u \, g\beta_u)}{gk_p} - \frac{(gk_u \, g'k_u)}{gk_p} = gk_p + g'k_p$$

wherein $g' = \frac{\dot{g}}{g}$.

Notice should be given to the fact that when $\frac{\beta_u \, g\beta_u}{gk_p} - \frac{gk_u \, g'k_u}{gk_p}$ vanishes identically then $\beta_u \, g\beta_u = gk_u - g'k_u$ implying that $gk_u = gk_p + + g'k_p$.

This means to say that g_{kp} increases (*i.e.* $g'k_p = 0$) to the extent that $gk_u > gk_p$. But $gk_u \leq \beta_u$. Since whenever gk_u equals β_u

$$gk_p + g'k_p = \beta_u = gk_u$$

In other word the productivity of K_u (or K_u rate of growth) is also the upper bound of gk_p.

We may also investigate starting from the "formula" how it might happen that $gk_p > gk_u$ under the assumption that $g\beta u = 0$.

The assumption implies (according to the formula)

$$g'k_p + \Omega \frac{gk_u}{gk_p} \qquad g'k_u < 0$$

id est:

i) The rate of growth of K_u and K_p will drop *i.e.* $g'k_p < 0$ and $g'k_u < 0$ and the system will desinvest at a rate of higher or lower apeed depending upon the relative fall of the said tates of growth.

ii) $g'k_p > 0$ and $g'k_u > 0$, That is to say

$$|k_u \cdot gk_u \cdot g'k_u| > |K_p \cdot gk_p \cdot g'k_p|$$

Since as a general rule $K_u > K_p$ and Gk_u is assumed to be higher than gk_p the inequality yelds

$$|g'k_u| > |g'k_p|$$

It therefore follows that gk_u will tend to decrese in wich case $gk_u < gk_p$: the stock k_p cannot actually increase unless K_y falls.

iii) We may still envisage a third possibility as follows

$$|K_u \cdot gk_u \cdot g'k_u| < |K_p \cdot gk_p \cdot g'k_p|$$

in that case the rate growth of K_u will increase while that of K_p falls and the system will tend to equilibrium at a lower rate gk_p.[9]

An interesting view of the model is the one depicting the *balanced growth* that is to say the one assuming $G_{kp} = G_{ku}$. Even if β_u is held constant the balanced growth assumption makes it possible to replace the basic formula by

$$g'k_p = -\,\Omega\,\frac{gk_u}{gk_p}\,g'k_u = -\,\Omega\,g'k_u$$

which means that if $g\beta_u = 0$ it will not be possible for both gk_p and gk_u to rise simultaneously.[10]

FELDMAN's model structure can also throw light on the relationships between income distribution labour productivity and wages.

We shall in what follows examine two versions of FELDMAN's model laying special stress on their applicability to economic planning.

3. The Mahalanobis Version

The prospective technique use in the first five year plan of India (1952) was fundamentally based on DOMAR's equation wherein the different quotient net income/net investment β and the net investment rate ρ were so related that a rate of growth of the economy $\beta\rho$ might be obtained.

Obviously this technique revealed to be not quitef ruitful. In the course of the preliminary studies (1953) made for the second five year plan, MAHALANOBIS[11] put forward independently from FELDMAN a bisec-

[9] That is to say gku increase ($g'ku > 0$) and tends to βu the rate of growth of Ku is bounded by its productivity. This can be seen in the expression: $gk_u = u - \dfrac{gk_p}{\Omega}$.

[10] The assumption of unbalanced growth that is that gk_u = constant and gk_p = constant but $gk_u \neq gk_p$ would envolve a second degree equation in gk the analysis o which is more difficult.

[11] Some observations on the process of growth of national income in Sankhyā 1953. vol. 12 part 4.

The primary objective of India policy was to pursue a drop in the level of unemployment within the shortest possible time. Although well endowned with natural resources and good possibilities to develop their economic structure, India lacked an adequate flow of capital goods. The Indian planners therefore set to the task of increasing the stock of capital as a means to absorb labour inputs. In that case λ was the crucial parameter of their strategy.

Later MAHALANOBIS provided this model with more flexibility dividing sector p into three subsections. In this model decisions are taken at two different levels —

torial model, along the same lines. His formal treatment of the equations envolved however, was more elaborated than FELDMAN'S.

Starting from the basic equations.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_u &= \beta_u \lambda Y_u \\ \dot{Y}_p &= \beta_p (1 - \lambda) Y_u \\ Y &= Y_u + Y_p \end{aligned}$$

and making use of differential equations, the *path* of the national income and components may be determined as follows:[12]

$$(Y_u)_t = Y_0\, e^{\lambda \beta u t}$$

$$(Y_p)_t = Y_0 \left\{ 1 - \rho + \frac{\rho (1 - \lambda)\, \beta_p}{\lambda \beta_u} (e^{\lambda \beta u t} - 1) \right\}$$

$$Y_t = Y_0 \left\{ \rho\, \frac{[\lambda \beta_u + (1 - \lambda)\, \beta_p]}{\lambda \beta_u} (e^{\lambda \beta u t} - 1) + 1 \right\}$$

where in ρ is rate of investment in the initial period.

Setting the initial conditions as $Y_0 = 1.000$, $\rho = 0.05$ and using constant values $\beta_n = 0.1$ and $\beta_p = 0.3$ MAHALANOBIS tests alternative values for λ as follows.

ALTERNATIVE RATES OF GROWTH OF THE NATIONAL INCOME
(Constant prices)

$Y_0 = 1000$	$\rho = 0.05$	$\beta_u = 0.1$	$\beta_p = 0.13$
T	0,1	λ 0,2	0,3
5	1.071	1.068	1.064
10	1.148	1.142	1.138
15	1.226	1.225	1.223
20	1.308	1.316	1.322
25	1.397	1.416	1.438
30	1.487	1.527	1.571
35	1.583	1.650	1.726
40	1.684	1.785	1.905
45	1.791	1.935	2.133
50	1.094	2.100	2.354

SOURCE: Mahalanobis, Sankhyā, 1953, p. 309.

(i) the choice of λ, and (ii) the choice of how the investments are allocable among the three sections. Mathematically the new systems have now three degrees of freedom

[12] That is to say the locus of the sequence of values taken by the variable through time obtained by solving difference equations. The mathematical details of said solution

Note that for $t \leq 15$ the maximum value of income Y^* is attained when $\lambda = 0{,}1$. On the other hand it is the fact that 30% of the total investments are allocated to the industries of sector u that makes it possible for the system to attain Y^* as from $t = 20$.

HALDANE[13] developed a formal treatment to the problem of determining t^* once β_u is given.

4. A Decision Problem

The crucial assumption of the FELDMAN-MAHALANOBIS system rests on it that the investment is determined only in sector U, that is to say $I = Y_u$. It therefore follows that λ is the only parameter or decision tool. Nonetheless it may be moved that[14]

$$\lambda = \frac{\gamma\beta_p}{\gamma\beta_p + (1-\gamma)\,\beta_u}$$

in which γ is the marginal propensity to save. Nonetheless, the model does not account for such problems as dealing with the determination of technologies that is to say the variations of B_n, B_p and the rate of savings γ. Hence, the choices of $(\lambda, \beta_u, \beta_p)$ turn out to be crucial at the level of decision.

MAHALANOBIS for example set $\lambda = 1/3$, $\beta_p = 0{,}65$, $\beta_u = 0{,}20$ (*i.e.*, $\beta_p > \beta_u$) which yield $\gamma = 0{,}13$. Nevertheless, as the plan was carried out γ revealed to be lower than expected. We need hardly dwell on the bearings of such a disparity upon the absorption of product and level of employment.

5. The Frankel Version

In 1961, M. FRANKEL put forward in a brilliant[15] paper a model which also was intended to study relationships between the capital structure and the economic growth. In that model the product of the consumption sector is a function of the national product.

are not entered upon here in view of the great amount of work involved. (See, for example, KINGSTON, L. *Misery or Bliss — Some models of growth for underdeveloped countries*).

13 *The maximization of National Income, in* Sankhy̆a., 1955, vol. 16, parts 1 and 2.

14 See next section the FRANKELL version.

15 Producer goods, consumer goods and acceleration of growth in *Economic Journal,* March, 1961.

$Y_p = \alpha Y$ wherein α is the average propensity[16] to consume. Furthermore:

$$\beta_u K_u = Y(1 - \alpha)$$
$$\beta_p K_p = Y\alpha$$

that is to say the investment $Y(1 - \alpha)$ is determined by the stock of capital in sector as well as its productivity. The product $Y\alpha$ in sector ρ is also related to $\beta_p K_p$.

Starting from said equations as well as from the definition equation: we have

$$K_u/K_p = \frac{\beta_p(1-\alpha)}{B_u\alpha} B_u\alpha$$

$$K_u/K_p = \frac{\beta_p(1-\gamma)}{B_u\alpha} B_u\gamma$$

wherein γ is the marginal propensity to consume. We have:

$$\lambda = \frac{\dot{K}_u}{\dot{K}_u + \dot{K}_p} = \frac{\beta_p/\beta_u}{\dfrac{B_p}{B_u} + \dfrac{\gamma}{1-\gamma}}$$

It may be seen therefore that there is a relationship between the allocating parameter λ and the propensity to save $1 - \alpha$ that is to say if λ is used as a decision parameter, then it implies a decision as to γ and the other way around:

Moreover, the concern with the balance between total savings and investments stems from as well as cause another equilibrium at a second level i.e. that the investment be optimally allocated between the two sectors of the economy.[17]

[16] Time subscrits are omitted lest the reader should be led to confusion. FRANKEL's α stands for average propensity and γ_t for marginal propensity. Parting slightly with this simbolism our α stands for average propensity while $\gamma \neq \alpha$ stands for marginal propensity.

[17] TSURU, RAJ and others who introduce DOMAR equation in the MAHALANOBIS model have a different approach to this point. Notice should be given to the fact that the RAJ-SEN Model extends the MAHALANOBIS model with a view to attaining greater operationality. Imports substitution, for example, may be analysed in the light of his models. See on the subject *Alternative Patterns of Growth*, *in* Oxford Economic Papers, February, 1961.

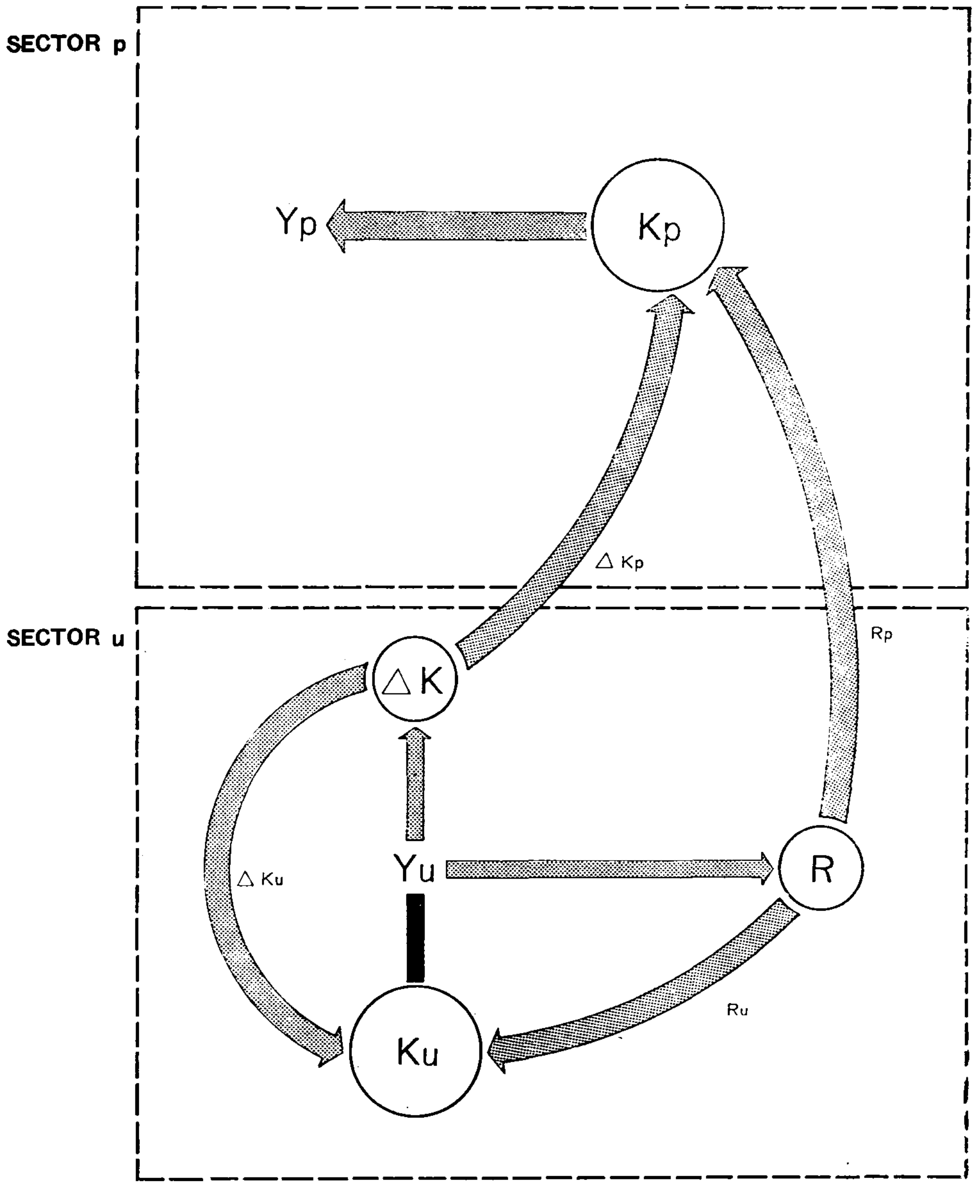
ALTERNATIVE VALUES OF λ

β_p / β_u	$1-\gamma$							
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
2	0.0952	0.18	0.26	0.33	0.40	0.46	0.52	0.57
3/2	0.073	0.14	0.21	0.27	0.33	0.39	0.45	0.50
1	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
2/3	0.034	0.069	0.105	0.14	0.18	0.22	0.26	0.31
1/2	0.026	0.053	0.008	0.11	0.14	0.18	0.21	0.25

It should be noticed, therefore, that given a certain saving effort the proper level of function λ is directly related to β_p/β_u.

It only remain how to lay stress once again on the originality of thought of the soviet economists of the twenties. Together with FELDMAN's model other original contributions are to be found there in the field of economic planning techniques among which are LEONTIEF's, GROMAN's, BAZAROV's and many other scholars', as pointed out by ZAUBERMAN[18]: "It is fair to say that soviet experiment in planning had no precedent and was a Soviet invention—it was certainly so in respect to its technical aspects.

[18] A. ZAUBERMAN recent development in Soviet planning techniques *in Economic Internazionaly*, May, 1967.



Simplifild pattern of the producing sectors in the Feldman Model