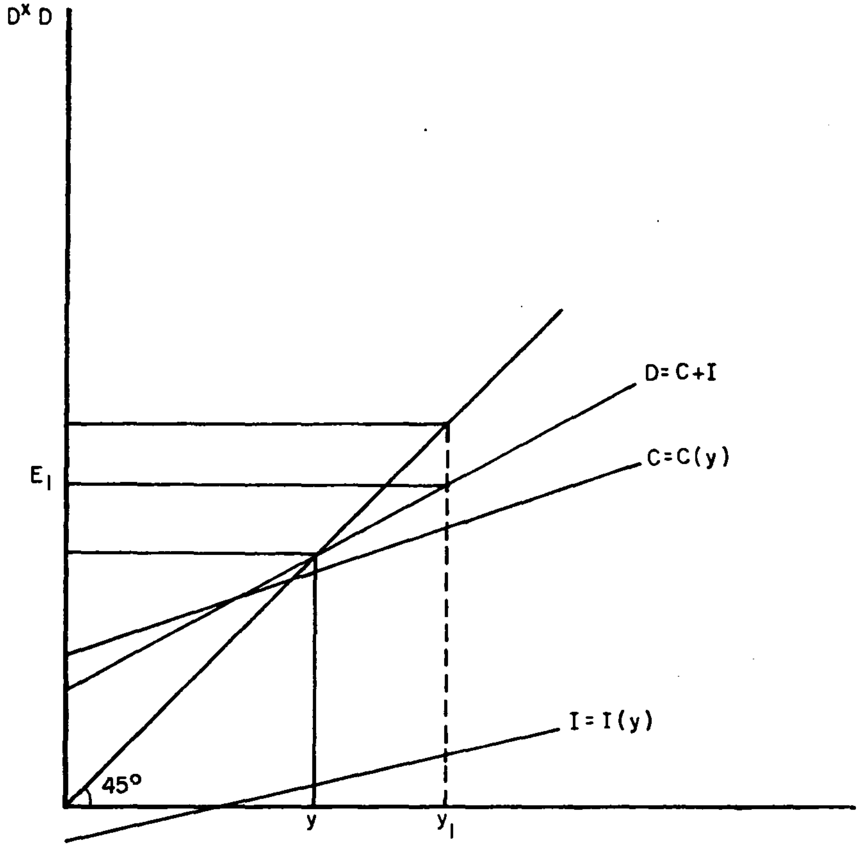
A evolução da teoria da função consumo de Keynes até nossos dias

J. M. Gouvêa Vieira

A recente publicação do livro *A consumption savings model and its application,* de W. H. Somermeyer e R. Bannink, da excelente série Contributions to economic analysis, dirigida por D. W. Jorgenson e J. Waelbroeck (cujo editor honorário é o prêmio Nobel J. Tinbergen), oferece a oportunidade de fazer-se um ligeiro apanhado do desenvolvimento da teoria da função consumo a partir da teoria geral. Sabemos que os instrumentos tradicionais da análise keynesiana são a função consumo e investimento. No modelo bastante simplificado que aparece nos livros-textos de graduação, supõe-se que essas duas funções dependem exclusivamente do nível da renda real. É o que ilustra a figura a seguir.

As despesas desejadas $C.I$ e D são, respectivamente, as despesas *desejadas* de consumo, investimento e o total $(D = C + I)$.

As despesas *desejadas* são análogas às quantidades procuradas e ofertadas que aparecem nas curvas de oferta e demanda. Para estabelecer a correlação existente entre a renda do consumidor e seu consumo, perguntar-lhe-íamos que quantidade de um determinado produto adquiriria se, permanecendo constante o preço desse produto, sua renda variasse. A soma dessas curvas individuais para todos os produtos e indivíduos comporia o que Keynes denominou de função consumo.



Segundo a teoria keynesiana, apresentada nos livros-textos, essa função depende *exclusivamente* da renda real. Uma vez encontrada a função, o nível de *equilíbrio* da renda nacional real fica determinada da seguinte maneira: traça-se uma reta de 45° que representa a função $D' = Y$ em que D' é a despesa nacional real e Y a renda nacional real. A identidade não passa da afirmação de que ninguém pode ter uma renda a menos que alguém tenha uma despesa. A afirmação implica várias premissas, sendo a mais importante delas a de que a empresa adquire de si própria os estoques que possui, pelo preço de produção, ou, na linguagem do economista, pelo custo dos fatores. Admitida a hipótese, consideremos a renda Y_1. Essa renda fará com que, ***no próximo período,*** os indivíduos *desejem* ter uma despesa E_1 inferior à renda gerada no período anterior. Em outras palavras, como Keynes está raciocinando em termos *reais,* isto quer dizer que, dada a função consumo, os indivíduos, no caso da renda ser *Y, desejarão* adquirir uma quantidade *física* de bens de consumo e de produção inferior à disponível. Mas, pela própria análise desenvolvida na teoria geral, o valor da produção é necessariamente igual ao valor adicionado, que por sua vez é igual ao lucro mais salários mais juros e aluguéis. Isso implica dizer que se a renda foi de Y_1, o lucro, salário, juros e aluguéis *recebidos* também foram de Y_1. Logo, se os indivíduos gastarem apenas E_1 em bens de consumo e produção, necessariamente aumentarão seus saldos monetários num montante igual a $Y_1 - E_1$. Por que motivo? A explicação é dada pela chamada preferência pela liquidez cujo ponto essencial é o de que, dado um determinado nível de renda, os indivíduos podem desejar aumentar seus saldos monetários preferindo ter moeda ociosa a investir. Se a preferência pela liquidez for absoluta, em outras palavras, se a demanda de moeda (quantidade de moeda que os indivíduos desejam guardar) for infinita, será impossível baixar a taxa de juros mediante medidas puramente monetárias. Por outro lado, se o consumo e o investimento não são influenciados pela taxa de juros, uma queda dessa taxa não teria conseqüência. A depressão, ocasionada por uma queda dos investimentos, ou por falta de oportunidade de investir ou por mera vontade de acumular moeda, não poderia ser remediada a não ser que o Estado investisse. A teoria geral, todos sabemos, provocou a chamada revolução keynesiana a ponto de Paul Samuelson, prêmio Nobel de 1971, afirmar no seu livro mais difundido: "Todos os economistas modernos concordam que o fator que provoca a flutuação da renda e emprego é o investimento."

Mas a preferência absoluta pela liquidez, o *liquidity trap,* tão importante para a teoria keynesiana sofreu rude ataque por parte de Haberler, cuja contribuição, nesse sentido, passou a ser conhecida por *efeito Pigou,* em homenagem ao grande opositor de Keynes, A. C. Pigou. Um caso especial desse efeito é o apresentado por Don Patinkin que, no capítulo 2 do clássico *Money, interest and prices,* refere-se ao *real cash balance effect.* Efetivamente, ao basear seu modelo sobre o teoria do comportamento do consumidor, exposta por Hicks no *Value and capital,* Don Patinkin acrescenta aos conhecidos efeitos renda e substituição o *real cash balance effect* que define da seguinte maneira:

"Como seu próprio nome traduz, esse efeito mede a influência que, *coeteris paribus,* uma alteração dos saldos monetários reais exerce sobre a demanda." O *efeito Pigou* e o *real cash balance effect* foram desde logo reconhecidos como uma das forças que influenciam o consumo. Pode-se citar os seguintes estudos que os levam em consideração: Christ, C. A test of an econometric model for the United States 1921-1947. Conference on business cycles, New York, 1951; Cohen, M. Liquid assets and the consumption functions. *Review of Economics and Statistics,* v. 36, p. 202-11, 1954; Gurley, J. G. Excess Liquidity and European monetary reforms 1944-1952. *American Economic Review,* v. 43, 1953.

Convém assinalar uma coincidência entre o pensamento dos economistas que se interessaram pela função poupança, e o trabalho de Somermeyer e R. Bannink. Como vimos, Don Patinkin parte para sua análise da curva de indiferença tal como exposta por Hicks. Martin Bailey, em artigo publicado em 1958 no *Journal of Political Economy,* sobre a influência da taxa de juros sobre a poupança, também se baseia no *Value and capital.* Interessa reproduzir alguns conceitos de Bailey, dada a analogia que terão com a análise de Somermeyer e R. Bannink. Diz Bailey que todos os economistas que escreveram sobre a poupança chegaram à conclusão de que uma elevação da taxa de juros tanto poderia aumentar a poupança como o consumo, dependendo das preferências dos "poupadores". A ambigüidade aparece claramente no seguinte passo dos *Principles of economics* de Alfred Marshall:

"Suponha-se, por exemplo, que os habitantes de uma cidade necessitam, para construir cabanas, de ir à floresta buscar madeira. Quanto mais distante a floresta, menor a recompensa em termos de conforto futuro, de um dia de trabalho e menor o lucro futuro da riqueza acumulada por dia de trabalho. A vileza da recompensa a ser alcançada, por um dado sacrifício, tende evitar que aumentem as dimensões das cabanas e, provavelmente, diminuirá a quantidade total de trabalho dedicado à busca da madeira. Essa regra, porém, sofre exceções. E isso porque, es estiverem habituados a um determinado tipo de cabana, quanto mais distante a floresta e menor a produção útil de um dia de trabalho, mais dias dedicarão ao trabalho... Como foi salientado por Sagant, se um indivíduo decidiu trabalhar e economizar até alcançar um determinada renda para velhice ou para deixar determinada herança para os filhos, mais ele economizará, se a taxa de juros baixar."

Esse trecho de Marshall, como veremos, já contém em forma embrionária certas idéias que irão inspirar Modigliani e Brumberg que, por seu turno, inspirarão Somermeyer e Bannink. O que interessa, porém, é o comentário de Bailey, apoiado em Hicks, pois é ele que será comparado com o estudo desenvolvido pelos autores, ora analisados.

O trecho de Marshall, comenta Bailey, "ilustra a confusão dos economistas a respeito da relação entre a taxa de juros e a poupança, pois não deixa claro quais os fatores que supõem constantes quando varia a taxa de juros". A análise é pouco feliz, segundo esse autor, porque considera como um todo um conjunto de diferentes variáveis cujas influências sobre a poupança são distintas quando analisadas cada uma de per si.

O indivíduo deixa de consumir no presente, para que possa aumentar seu consumo futuro. No entanto, a psicologia humana é de tal ordem, que todos preferimos consumir no presente uma determinada quantidade a adiar o consumo *dessa mesma quantidade* para o futuro. Em outras palavras, o valor atual de um bem futuro sofre um desconto. Quanto mais alta essa taxa de desconto, menor o valor do bem futuro relativamente ao presente. Podemos, pois, usar essa taxa de desconto para comparar o valor dos bens futuros com os atuais para aplicar-lhes a teoria da curva de indiferença de Hicks, segundo o qual a alteração do preço de um bem, relativamente ao de um outro, tem dois efeitos: o efeito renda e o efeito substituição. A decisão do indivíduo ao optar entre um e outro é o resultado desses dois efeitos. Creio que foi por isso que Bailey afirmou: "Se a análise da função poupança for realizada, à luz da teoria de Hicks, cessa a ambigüidade que transparece no trecho de Marshall." Veremos adiante que os autores da presente obra apresentam análise superior à de Bailey.

Mas como dito, a frase de Marshall já contém em embrião uma idéia que será mais tarde desenvolvida. Refiro-me ao trecho: "se um indivíduo decidiu trabalhar e economizar até alcançar uma determinada renda para sua velhice...". Parece-me que, no fundo, a frase antecipa a teoria de Friedman que por sua vez é bastante semelhante à de Modigliani acerca da influência do ciclo de vida sobre a poupança. Senão vejamos. As principais contribuições de Modigliani aparecem nos trabalhos: Ando, A. & Modigliani, F. The life cycle hipothesis of savings, agregate implications and tests. *American Economic Review,* v. 53, p. 55-84, 1963; The life cycle hypothesis of savings: a correction. *American Economic Review,* v. 54, p. 11-113; Modigliani, F. & Brumberg, R. Utility analysis and agregate consumption function an attempt of integration (inédito); Modigliani, F. & Ando, A. The permanent income and the life cycle hypothesis of savings behaviour: comparison ond tests. In: Proceedings of the conference on consumption and savings. Filadélfia, vol. 2, 1960.

Sintetizando tudo o que consta desses artigos, podemos dizer que Modigliani afirma ser a utilidade uma função homogênea do consumo *ao longo do tempo* de tal sorte que a alteração da renda provoca alterações proporcionais do consumo *também ao longo do tempo.* Em outras palavras, segundo Modigliani o consumo de um dado período é proporcional ao valor, atualizado, à taxa de desconto, de todos os recursos presentes e futuros; é uma função linear homogênea da renda corrente *(i. é,* da renda não proveniente do capital acumulado), do valor dos ativos e do valor esperado da renda não proveniente do capital que se auferirá no futuro.

Admitindo a hipótese de que a distribuição etária, a distribuição da renda e riqueza, e a média da função consumo individual permaneçam constantes ao longo do tempo, Modigliani agrega essas funções para estabelecer a seguinte função consumo macroeconômica:

$$C_t = q_1 L_t + q_2 L_t^e + q_3 A_{t-1}$$

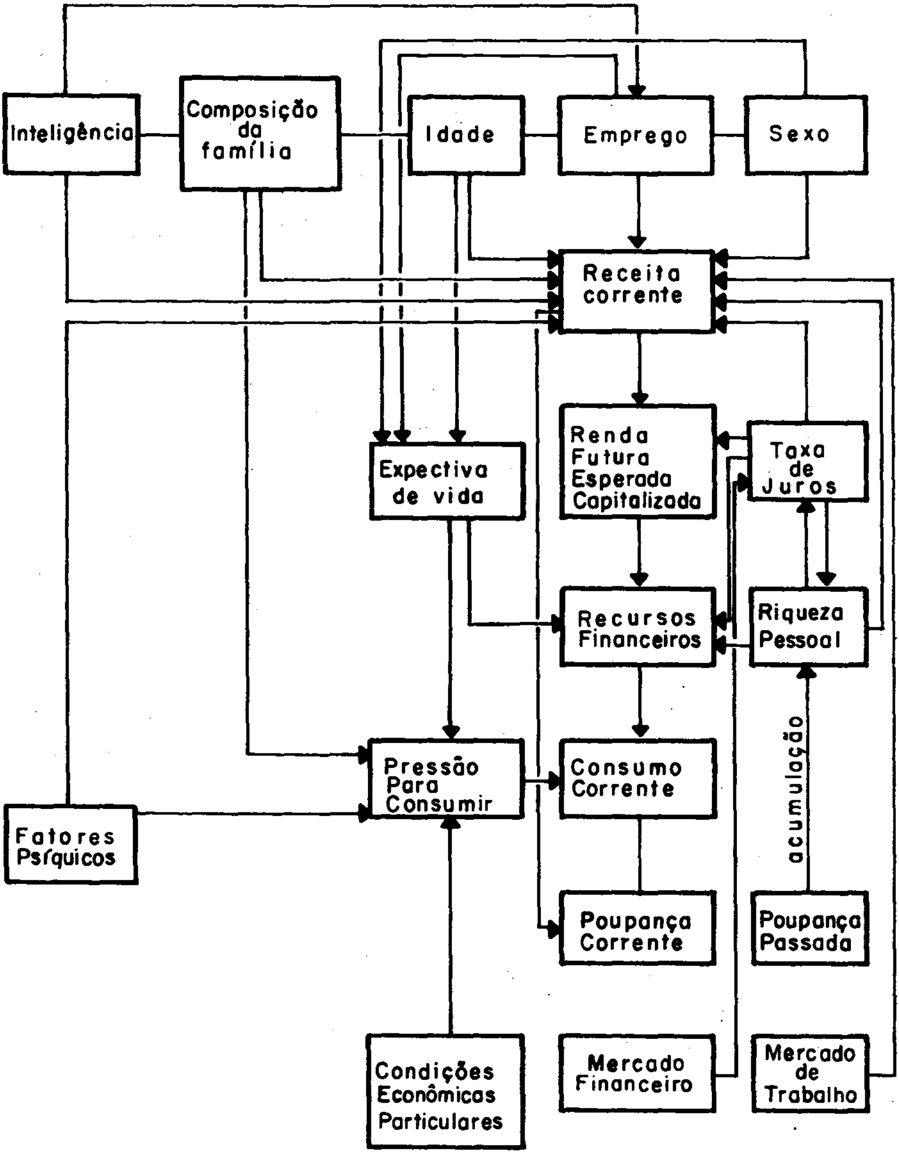
em que

C_t = consumo agregado no período t;
L_t = renda corrente não proveniente do capital;
L_t^e = renda esperada não proveniente do capital;
A_{t-1} = valor dos ativos no início do período.

Os autores da presente obra ficaram bastante impressionados pelas potencialidades da teoria de Modigliani e Brumberg. Cuidaram, porém, que ela simplificava exageradamente a realidade.

O resultado foi a idealização de um modelo de acordo com o diagrama a seguir.

Apresentado o modelo, em 1969, o Prof. Krelle, da Universidade de Bonn pôs em dúvida o seu realismo já que não levava em consideração nem a complementaridade dos consumos de diferentes períodos nem a incerteza.



O resultado foi a apresentação de um novo modelo que, inicialmente, é formulado em termos da teoria do consumidor de Eugenio Slutsky.

O artigo clássico do economista e grande estatístico russo foi publicado em 1915 no *Giornale degli Economistici* sob o título de Sulla teoria del bilancio del consumatore.

Infelizmente, é pouco conhecido entre nós, o que obriga a transcrição de alguns passos quando necessário a salientar os pontos comuns às teorias de Slutsky e dos autores. O texto utilizado para as transcrições é a versão espanhola do livro editado por Stigler e Boulding, *Teoria de los precios*. Aquilar Madrid, 1960.

O problema inicial é bastante fácil de formular. Sejam C_1 C_2 ... C_L os consumos nos períodos 1, 2 ... 1 em que L é o horizonte de planejamento do consumidor.

Seja ΔK o aumento da riqueza desejado pelo consumidor nesse período.

Seja W $(C_1\ C_2\ \ldots\ C_L)$ uma função utilidade.

O problema é, então, maximizar w condicionado a ΔK.

Em termos de curva de indiferença, o problema seria exposto substituindo-se o bem x_1 pela poupança do ano 1, e o bem x_2 pela poupança do ano 2, e a reta do orçamento por ΔK. Infelizmente, no caso em tela, ainda que simplificássemos o problema, reduzindo-o a dois períodos, não seria possível uma solução puramente gráfica, como no caso da teoria de Slutsky.

Na exposição que fazemos a seguir, do modelo básico dos autores, utilizaremos não a notação de Slutsky, cujo artigo clássico é entre nós pouco conhecido, mas a de que se utilizou Hicks no suplemento matemático do *Value and capital* por ser muito mais difundida.

O primeiro problema enfrentado pelos autores é expressar ΔK de maneira análoga à da reta do orçamento, utilizada na teoria tradicional da demanda.

A diferença entre a riqueza no período L (K_L) e a do período inicial (K_0) é a soma das poupanças realizadas nos períodos 1, 2 ... L.

Como sabemos, essas poupanças são as diferenças entre as rendas e os consumos de cada período.

$$S = Y - C$$

Mas a renda do indivíduo pode ser de duas espécies: a decorrente de seus ativos e a que obtém por seu trabalho. A primeira depende da poupança acumulada e da taxa de juros.

Conseqüentemente, a diferença entre o estoque de riqueza no período L e no período $L-1$ é dada por:

$$K_l - K_{l-1} = R\,(K_{l-1} - K_0) + (Y_l - C_l)$$

em que

R = taxa de juros;
K_{l-1} = estoque de riqueza no período anterior;
K_0 = estoque de riqueza no período 0;
Y_l = renda não proveniente do capital no período l;
C_l = consumo no período l,

Temos então uma equação de diferenças finitas de 1.ª ordem, cuja solução para K_L é:

$$K_L = K_0 + \sum_{l=1}^{L} (Y_l - C_l)(1 + R)^{L-1}$$

o que dá a *reta do orçamento*

$$\Delta K = \sum_{l=1}^{L} (Y_l - C_l)(1 + R)$$

Exatamente, como no caso de Slutsky, a condição necessária (mas não suficiente) para a maximização da função utilidade, obtida pelo multiplicador de Lagrange é o de que:

$$\frac{\delta\omega}{\delta C_i} = \lambda(1 + R)^{L-i}$$

ou seja, a taxa de juros composta representa, na teoria dos autores, o papel do preço na teoria tradicional.

A condição necessária é, pois, a de que a utilidade marginal da quantidade consumida no período $i = (1, 2 \ldots L)$ seja igual à taxa de juros capitalizada multiplicada por λ [multiplicador de Lagrange].

Como na teoria da demanda de Slutsky, λ também tem um significado preciso na teoria de Somermeyer e Bannink.

Para Slutsky, λ mede a utilidade marginal do dinheiro segundo o conceito de Marshall.

No caso dos presentes autores

$$\lambda = \sum_{l=1}^{L} C_l \frac{\delta\omega}{\delta C_l} R_L^{-1}$$

sendo:

$$R_L = \sum_{l=1}^{L} Y_l(1 + R)^{L-l} - \Delta K$$

ou seja R_L é o total acumulado das rendas auferidas no período, avaliado no final desse período, menos a poupança. Em outras palavras, é o valor dos recursos destinados a financiar o consumo.

A analogia como o λ de Slutsky

$$\lambda = \frac{\delta_u}{\delta_x} P_x^{-1}$$

é perfeita.

Um problema, que não existe no caso de Slutsky, mas que teve que ser resolvido pelos autores é o seguinte:

No caso tradicional da teoria da demanda o vetor das quantidades consumidas $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ pode ter elementos nulos embora tenha que ter pelo menos um elemento positivo. Em outras palavras, o vetor X é *semipositivo,* pois $x_i \geqq 0$ e $x_i > 0$ para alguns i.

No entanto, no caso dos outros autores, o vetor solução $[C_1 \ C_2 \ldots C_L]$ não pode ter elementos nulos pois isso implicaria ausência de consumo num período dado.

A solução é encontrada mediante o teorema de Taylor (ver Hancock, Harris. *Theory of maxima and minima.* New York, Doven Publications Inc. 1960, cap. 5) .

Fazendo $[C'_1 \ C'_2 \ldots C'_L]$ ser um vetor estritamente positivo e ΔC a diferença $[C_1 \ C_2 \ldots C_L] - [C'_1 \ C'_2 \ldots C'_L]$ e expandindo a fórmula de Taylor tem-se:

$$W[C'] \, W^x + (\Delta^L C)' \, W^x C + 1/2 \, (\Delta C') \, \Omega \, x_{\alpha c} (\Delta C),$$

(abandonando-se os termos de ordem superior a 2).

No caso de dois períodos, a fórmula acima deduz-se à:

$$\omega(C_1 C_2) = \omega(C_1^* C_2^*) + [\Delta C_1 \, \Delta C_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\delta \omega^*}{\delta C_1} \\ \\ \dfrac{\delta \omega^*}{\delta C_1} \end{bmatrix} *$$

$$+ \frac{1}{2} \left[[\Delta C_1 \, \Delta C_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} & \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \, \delta C_2} \\ \\ \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \, \delta C_2} & \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \\ \Delta C_2 \end{bmatrix} \right]$$

em que o segundo termo é uma forma quadrática.

Para que $W[C_1 C_2] < W^*(C_1^* C_2^*)$ a forma quadrática tem que ser *negativa* quando ΔC tende para *zero*. Por outro lado,

$$[\Delta C_1 \; \Delta C_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\delta \omega^*}{\delta C_1^*} \\ \\ \dfrac{\delta \omega^1}{\delta C_2^*} \end{bmatrix}$$

anula-se em virtude da condição necessária encontrada através do multiplicador de Lagrange.

Acresce que a soma dos termos de ordem mais elevada tende para zero o que implica o seguinte:

$$[\Delta C_1 \quad \Delta C_2 \quad 1] \begin{bmatrix} \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} & \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \, \delta C_2} & \dfrac{\delta \omega}{\delta C_1} \\ \\ \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \, \delta C_2} & \dfrac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} & \dfrac{\delta \omega}{\delta C_2} \\ \\ \dfrac{\delta \omega}{\delta C_1} & \dfrac{\delta \omega}{\delta C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \\ \Delta C_2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

Para que isso ocorra, é suficiente que a matriz simétrica Hessiana seja definida-negativa; isto é, a função é representada por uma curva côncava em relação à origem.

É interessante comparar, agora, a teoria dos autores com a de Slutsky.

Partindo da condição necessária representada pelo sistema:

$$- \lambda (1 + R)^{L-1} + \frac{\delta \omega}{\delta C_1} = 0$$

$$- \lambda (1 + R)^{L-2} + \frac{\delta \omega}{\delta C_2} = 0$$

. . . .

$$- \lambda (1 + R)^{L-L} + \frac{\delta \omega}{\delta C_L} = 0$$

$$(Y_1 - C_1)\,(1 + R)^{L-1} + (Y_2 - C_2)\,(1 + R)^{L-2} + \ldots (Y_L - C_L)^{L-L} = \Delta K$$

podemos calcular os efeitos sobre o consumo das variações de Y_e; R e ΔK.

Pode-se ver imediatamente que:

$$\frac{\delta}{\delta Y_k}\left(\frac{\delta \omega}{\delta C_t}\right) = \frac{\delta \lambda}{\delta Y_k}(1 + R)^{L-t}$$

$$(1 + R)^{L-k} - \sum_{l=1}^{L} \frac{\delta C_l}{\delta Y_k}(1 + R)^{L-l} = 0$$

$$\frac{\delta}{R}\left(\frac{\delta \omega}{\delta C_t}\right) = \frac{\delta \lambda}{\delta R}(1 + R)^{L-t} + \lambda(L - t)(1 + R)^{L-t-1}$$

$$\sum_{l=1}^{L} (Y_l - C_l)(L - l)(1 + R)^{L-l-1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{\delta C_l}{\delta R}(1 + R)^{L-l} = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta \Delta K.}\left(\frac{\delta \omega}{\delta \Delta K}\right) = \frac{\delta \lambda}{\delta \Delta K}(1 + R)^{L-t}$$

$$\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\delta C_l}{\delta \Delta K}\right)(1 + R)^{L-l} = -1.$$

Cabe agora indagar se, no caso de dois períodos, este sistema pode ser exposto de acordo com a teoria da indiferença. O problema é didáticamente importante. Não há dúvida de que a demonstração gráfica, mediante a curva de indiferença, é muito mais acessível aos estudantes que o artigo de Slutsky que requer amplo domínio da teoria dos máximos e mínimos tal como exposta por Harris Hancock na obra clássica já citada. Por outro lado, a teoria tradicional da curva de indiferença supõe que o consumidor gasta toda a sua renda em bens de consumo, o que não é realista. Conseqüentemente, seria bastante interessante, se possível, apresentar o modelo dos autores em complementação à teoria de Edgeworth, Irving Fisher e Pareto.

Para examinar se é possível o tratamento geométrico, parece de toda conveniência basear a argumentação, sempre que houver analogia, no raciocínio desenvolvido por Nicholas Georges Roegen no clássico The pure theory of consumer's behaviour, publicado em 1936 no v. 50, do *Quarterly Journal of Economics*. Seja como for, cumpre não esquecer que a análise sob a forma de máximo condicionado é nitidamente superior à da curva de indiferença.

No caso de dois períodos, o sistema de equações, expandidas as derivadas parciais de segunda ordem fica:

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} \frac{\delta C_1}{\delta Y_1} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \delta C_2} \frac{\delta C_2}{\delta Y_1} - (1 + R)^1 \frac{\delta \lambda}{\delta Y_1} = 0$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2 \delta C_1} \frac{\delta C_1}{\delta Y_1} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} \frac{\delta C_2}{\delta Y_1} - (1 + R)^0 \frac{\delta \lambda}{\delta Y_1} = 0$$

$$(1 + R)^1 \frac{\delta C_1}{\delta Y_1} + (1 + R)^0 \frac{\delta C^2}{\delta Y_1} = (1 + R)^1$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} \frac{\delta C_1}{\delta Y_2} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \delta C_2} \frac{\delta C_2}{\delta Y_2} - (1 + R)^1 \frac{\delta \lambda}{\delta Y_2} = 0$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2 \delta C_1} \frac{\delta C_1}{\delta Y_2} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} \frac{\delta C_2}{\delta Y_2} - (1 + R)^0 \frac{\delta \lambda}{\delta Y_2} = 0$$

$$(1 + R)^1 \frac{\delta C_1}{\delta Y_2} + (1 + R)^0 \frac{\delta C_2}{\delta Y_2} = (1 + R)^0$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} \frac{\delta C_1}{\delta R} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \delta C_2} \frac{\delta C_2}{\delta R} - (1 + R)^1 \frac{\delta \lambda}{\delta R} = 0$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2 \delta C_1} \frac{\delta C_2}{\delta R} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} \frac{\delta C_2}{\delta R} - (1 + R)^0 \frac{\delta \lambda}{\delta R} = 0$$

$$(1 + R)^1 \frac{\delta C_1}{\delta R} + (1 + R)^0 \frac{\delta C_2}{\delta R} = (Y_1 - C_1)(2 - 1)(1 + R)^0 +$$

$$+ (Y_2 - C_2)(2 - 2)(1 + R)^{-1}$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} \frac{\delta C_1}{\delta \Delta K} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \delta C_2} \frac{\delta C_2}{\delta \Delta K} - \frac{\delta \lambda}{\delta \Delta K} (1 + R)^1 = 0$$

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2 \delta C_1} \frac{\delta C_2}{\delta \Delta K} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \delta C_2} \frac{\delta C_2}{\delta \Delta K} - \frac{\delta \lambda}{\delta \Delta K} (1 + R)^0 = 0$$

$$\frac{\delta C_1}{\delta \Delta K} (1 + R) + \frac{\delta C_2}{\delta \Delta K} (1 + R)^0 = -1$$

Podemos expressar este sistema em forma bem mais compacta. Basta utilizar a notação matricial.

Façamos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1^2} & \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_1 \, \delta C_2} \\ \frac{\delta^2 C}{\delta C_2 \, \delta C_1} & \frac{\delta^2 \omega}{\delta C_2^2} \end{bmatrix}$$ a matriz Henssiana.

$$d = \begin{bmatrix} (1 + R)^1 \\ (1 + R) \end{bmatrix}$$ vetor coluna dos juros.

$$Cy = \begin{bmatrix} \frac{\delta C_1}{\delta Y_1} & \frac{\delta C_1}{\delta Y_2} \\ \frac{\delta C_2}{\delta Y_1} & \frac{\delta C_2}{\delta Y_2} \end{bmatrix}$$ matriz jacobiana dos consumos em função da corrente de rendas.

$$C_R \begin{bmatrix} \frac{\delta C_1}{\delta R} \\ \frac{\delta C_2}{\delta R} \end{bmatrix}$$ vetor coluna dos consumos em função da taxa de juros.

$$C \Delta K \begin{bmatrix} \frac{\delta C_1}{\delta \Delta K} \\ \frac{\delta C_2}{\delta \Delta K} \end{bmatrix}$$ vetor coluna dos consumos em função do aumento do estoque de riqueza. É o vetor que expressa o *efeito Pigou.*

$$\lambda Y \begin{bmatrix} \frac{\delta \lambda}{\delta Y_1} \\ \frac{\delta \lambda}{\delta Y_2} \end{bmatrix}$$ é o vetor da utilidade marginal dos recursos destinados a financiar o consumo apresentada como função das rendas.

$$\lambda R = \frac{\delta \lambda}{\delta R}; \qquad \lambda \Delta K = \frac{\delta \lambda}{\delta \Delta K}$$

$$\bar{d} \begin{bmatrix} (1 + R)^1 & 0 \\ 0 & (1 + R) \end{bmatrix}$$

$$\bar{L} \begin{bmatrix} (2 - 1) \\ (2 - 2) \end{bmatrix}$$

Adotadas essas notações, o sistema de equações passa a ser:

$$\begin{bmatrix} \Omega & d \\ d' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & C_R & C_{\Delta K} \\ -\lambda_y' & -\lambda_R & -\lambda_{\Delta K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0 & \lambda(1+R)^{-1}\,\bar{d}\,\bar{L} & 0 \\ 0\,0 & & 0 \\ d' & (1+R)^{-1} & (y'-C')\,\bar{d}\,\bar{L}-1 \end{bmatrix}$$

Notar que $\lambda\ (1+R)^{-1}\ \bar{d}\,\bar{L}$ é um vetor coluna de ordem 1 x 2 de modo que o elemento a_{23} da matiz à direita da igualdade é encontrado quando se expande o produto matricial $\lambda\ (1+R)^{-1}\ \bar{d}\ \bar{L}$.

Para calcularmos o efeito renda C_y, o efeito da alteração da taxa de juros C_R e o efeito da alteração do acréscimo desejado da riqueza $C\Delta K$ basta que multipliquemos ambos os termos da igualdade por:

$$\begin{bmatrix} \Omega & d \\ d' & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

A inversa de uma matriz orlada, como demonstra Joan R. Westlake em: *A hand book of numerical matrix inversion and solution of linear equations* (John Wiley & Sons Inc. New York, London Sydney, 1968, cap. 2.6.2, p. 27), é:

dada a matriz $A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & Un \\ U'_n & Ann \end{bmatrix}$

a matriz de ordem n x n tem a inversa

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1}\ Un\ (-\Delta^{-1}\ U'n\ A_{n-1}^{-1}) & -A_{n-1}^{-1}\ Un\ \Delta^{-1} \\ -U'n\ A_{n-1}^{-1}\ \Delta^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

sendo Δ o determinante da matriz

$$\Delta = Ann - U'n\ A_{n-1}^{-1}\ Un$$

Pondo o determinante em evidência, a inversa da matriz orlada dos autores é:

$$(d'\,\Omega^{-1}\,d)^{-1} \begin{bmatrix} (d'\ \Omega^{-1}d)\ \Omega^{-1} - (\Omega^{-1}d)\ (d'\ \Omega^{-1}) & \Omega^{-1}\ d \\ d^1\ \Omega^1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dividindo ambos os membros por essa matriz inversa encontramos:

$$\begin{bmatrix} C_y & C_R & C_{\Delta K} \\ -\lambda'_y & -\lambda_R & -\lambda_{\Delta K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^{-1} - (d'\,\Omega^{-1}d)^{-1}\,(\Omega^{-1}d)\,(d'\,\Omega^{-1}) & (d'\,\Omega^{-1}\,d)^{-1}d \\ (d'\Omega^{-1}d)'d'\Omega^{-1} & -(d'\Omega^{-1}\,d)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda\,(1+R)^{-1}\,\bar{d}\,\bar{L} & 0 \\ d' & (1+R)^{-1}\,(y'-C')\,\bar{d}\,\bar{L} & -1 \end{bmatrix}$$

em que a última matriz está particionada conformemente à matriz inversa de modo que o primeiro zero representa uma matriz nula de ordem 2 x 2 e o último um vetor 2 x 2 nulo.

O produto matricial da direita é:

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1}\,\Omega^{-1}\,d\,d' & \lambda\,(1+R)^{-1}\,[\Omega^{-1} - \Delta^{-1}\,(\Omega^{-1}d)']\,\bar{d}\,\bar{L} + (1+R)^{-1}\,[\Delta^{-1}\,(\Omega^{-1}d)\,(y'-C']\,\bar{d}\,\bar{L} & -\Delta^{-1}\,\Omega^{-1}\,d \\ -\Delta^{-1}\,d' & \lambda\,(1+R)^{-1}\,[\Delta^{-1}\,d'\,\Omega^{-1}]\,\bar{d}\,L - (1+R)^{-1}\,(y'-C')\,\bar{d}\,\bar{L} & -\Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

Os três elementos da primeira linha da matriz produto dão-nos os três efeitos Cy; Cr e $C\Delta K$

Comparando o primeiro com o terceiro vemos que $C_y = -C\Delta K d'$.

Em outras palavras, o efeito de um aumento esperado das rendas futuras sobre o consumo é o oposto do efeito do aumento desejado da riqueza, ponderado pela taxa de juros. É o que se deveria esperar.

Na realidade, os autores pouco inovaram até aqui, a não ser quando introduzem a condição:

$$\Delta K = (K_L - k_0) = \sum_{l=1}^{L} (y_l - C_l)\,(1+R)^{L-l}$$

Todo o resto é puro Slutsky. Senão vejamos: para Slutsky, o problema é maximizar $U = 7\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Condicionando à reta do orçamento $\sum_{j=1}^{m} P_j\,x_j = y$ em que y é a renda do consumidor, P_j são os preços e x_j as quantidades consumidas.

A expressão de Lagrange, para o problema é:

$$L = F(x_1\ x_2 \ldots . x_n) - \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} p_j\ x_j - y \right)$$

A condição necessária para a maximização é a de que:

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} = F_i(x_1, \ldots . xm) - \lambda P_i = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = \sum_{j=1}^{m} P_x\ x_j - y = 0.$$

Esse sistema de equação verifica-se para qualquer ótimo. Segue-se que os x e λ são funções dos preços e da renda:

$$X_i = X_i\ (P_1\ P_2 \ldots Pm;\ y)$$

$$\lambda = \lambda\ (P_1\ P_2 \ldots Pm;\ y)$$

Substituindo neste sistema os x e λ por seus valores dados pela condição necessária, ficamos com o sistema:

$$\begin{bmatrix} F_{11} \ldots\ldots F_{1n} & -P_1 \\ F_{21} \ldots\ldots F_{2n} & -P_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ F_{n1} \qquad F_{nn} & -P_n \\ -P_1 \ldots\ldots -P_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta P_1} \\ \frac{\delta x_2}{\delta P_1} \\ \frac{\delta x_n}{\delta P_1} \\ \cdot\ \frac{\delta \lambda}{\delta P_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\delta x_i}{\delta P_1} = \lambda\ \alpha_{i1} + \alpha_i\ m + 1\ x_1$$

em que os alfas são os elementos da matriz orlada invertida.

Esse não foi, evidentemente, o método seguido por Slutsky, que obedeceu ao processo clássico da teoria dos máximos e mínimos, que se utiliza de determinantes, como observamos no livro de Harris Hancock.

Mas é o mesmo problema tal como exposto modernamente, mediante a utilização de matrizes como se vê, por exemplo, em Almon Jr., Clopper. Matrix methods in economics. Addison, Wesley, Publishing Company, Reading Massachusetts, 1967, cap. 5.

Cumpre notar, no entanto, desde logo, uma diferença entre o resultado dos autores e o de Slutsky.

Enquanto em Slutsky, o efeito renda é dado pelo produto da utilidade marginal da moeda por um escalar (elemento αij da inversa da matriz Henssiana orlada), segundo os autores, esse efeito é o produto de λ por um produto interno da matriz de ordem $n - 1 \times n - 1$, pelo vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} (1+R)^{L-1} \ (L-1) \\ (1+R)^{L-2} \ (L-2) \\ (1+R)^{L-L} \ (L-L) \end{bmatrix}$$

Isso porque, no caso dos autores, é a taxa de juros capitalizada que influencia a substituição do consumo de um ano pelo outro, o que é perfeitamente lógico.

O menor da matriz inversa obtido eliminando as últimas linha e coluna é uma matriz $\begin{bmatrix} \Omega & d \\ d' & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ singular que posmultiplicada pelo vetor linha d' dá uma matriz nula.

As implicações do fato são as seguintes:

A soma dos efeitos substituição da taxa de juros, quando eles são ponderados por $(1 + R)^{L-1}$ $(1 + R)^{L-2}$ ... é nula. Por outro lado, se a matriz é singular seu determinante é nulo. Ora, como o referido menor não é nulo, segue-se que pelo menos um de seus elementos é negativo e pelo menos um outro é positivo.

Lembremos agora que uma matriz é definida negativa se $x' A x < 0$ para todo $x \neq 0$ e que ela é definida negativa se $x' A x > 0$ para todo $x \neq 0$.

Mas, pela condição de maximização, a forma quadrática de $d'\Omega d$ é negativa. O que significa que Ω é definida negativa. Conseqüentemente, o menor da inversa da matriz Henssiana orlada é negativa semidefinida. Isto significa que os elementos da diagonal não são positivos, são geralmente negativos.

Em outras palavras, a menos que formulemos postulados adicionais sobre a função utilidade, o efeito da elevação da taxa de juros sobre o consumo futuro pode ser negativo, positivo ou nulo.

O efeito renda da taxa de juros é o efeito do aumento da renda sobre o consumo multiplicado pelo valor *líquido* da poupança, ponderado pela diferença entre o último ano abrangido pelo planejamento e os sucessivos anos do mesmo.

Se $Y_t - C_t > 0$ ou seja, se o consumidor deseja poupar, o aumento da taxa de juros, permanecendo constante a quantidade de riqueza que deseja acumular, incentiva o consumo em escala decrescente à medida que ele se realiza em anos cada vez mais distantes.

Se o consumidor deseja consumir além de sua renda, endividando-se, o efeito da taxa de juros desincentivará o consumo.

Por outro lado, os outros elementos podem ser negativos, positivos ou nulos o que implica a possibilidade de haver complementaridade, substitubilidade e indiferença entre os consumos dos diversos períodos. (Ver Hicks, J. R. *Value and capital.* Apêndice matemático, p. 311).

No capítulo 4 os autores apresentam uma função utilidade do tipo

$$\omega = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \; log \; C_l$$

em que os *alfas* indicam a "impaciência em consumir"

As funções encontradas pelos autores obedecem a todos os teoremas da dimensão formulados por Wilhem Quade. (Ver, a propósito, o apêndice do livro de Jong, F. J. *Dimensional analysis for economists.* Amsterdam North Holland Publishing Company, 1967). Esse é um aspecto interessante, porquanto, em geral, os economistas não se preocupam muito com os problemas dimensionais.

Ao estudar a influência da variação da renda sobre o consumo, os autores chegam à fórmula:

$$\frac{\delta C_1}{\delta Y_t} = \alpha_1 (1 + R)^{1-t} \quad t = 1 \ldots . L$$

Conseqüentemente, é o consumo corrente o que sofre maior influência da alteração da renda corrente. Mas

$$\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} = \alpha_1$$

Esse conceito de propensão marginal a consumir é, numericamente, bem distinto do de Keynes. Para o autor da teoria geral, a propensão marginal a consumir depende, entre outras coisas, do *status* ocupacional do indivíduo. É maior para o empregado, menor para o empregador. Não é o que ocorre com α_1. Se essa propensão não se afastar de sua média, seu valor será L^{-1} sendo L o período de planejamento. Se, por exemplo, L for 10 anos, α_1 seria menor do que 0,1.

Importa notar que o que se denomina comumente de propensão marginal a consumir não é uma medida do efeito direto de uma alteração *isolada* da renda corrente. Ela mede *dois efeitos*. O *direto* e o *indireto,* vale dizer, o efeito que a alteração *esperada* da renda exerce sobre o consumo. Com a notável exceção de Milton Friedman, em A theory of the consumption function, nunca ninguém tentou medir os dois efeitos separadamente.

Os autores procuram resolver o problema pela utilização da *elasticidade da expectativa.* Por exemplo, se essa elasticidade não variar ao longo do tempo, temos:

$$\frac{d\,YE}{d\,Y_l} = E\,\frac{YE}{Y_l}$$

de maneira que

$$\frac{d\,C_l}{d\,Y_l} = \alpha_l \left[1 + E \sum_{l=2}^{L} (1+R)^{1-L} \frac{YE}{Y_l} \right]$$

Outro conceito importante é o do fator de capitalização de renda *n*.

Para os trabalhadores, esse fator tem a seguinte definição:

$\overline{Y}_{b,\,a\,+\,t,\,s}$ é a média *típica* da renda do trabalho no período corrente na idade de $a + t$.

$\overline{Y}_{b,\,a,\,s}$ é o mesmo conceito para a idade a.

$$\overline{Y}_{i,\,e,\,a,\,s,\,t} = \frac{\overline{Y}_{b,\,a\,+\,t,\,s}}{\overline{Y}_{b,\,a,\,s}}$$

Considerando que a propensão marginal a consumir é an, os autores concluíram que, dada uma elasticidade de expectativa $E = 1$, a referida propensão seria a que aparece no quadro a seguir.

Grupo ocupacional	Idade				
	30	40	50	60	70
01. Empresários	0,93	0,94	0,86	0,75	0,52
02. Diretores de Cias. de responsabilidade limitada	1,19	1,24	0,99	0,74	0,52
03. Professores primários	1,13	1,08	0,93	0,82	0,52
04. Professores de escolas secundárias e universitárias	1,27	1,13	0,97	0,84	0,52
05. Funcionários públicos	0,99	1,01	0,92	0,80	0,52
06. Militares	1,04	1,05	0,92	1,00	0,52
07. Pessoal administrativo	0,99	0,99	0,911	0,80	0,52
08. Balconistas	0,92	0,96	0,83	0,70	0,52
09. Vendedores e agentes de seguros	0,89	0,92	0,84	0,69	0,52
10. Outros empregados	0,96	0,96	0,87	0,73	0,52
11. Trabalhadores fabris	0,95	0,96	1,00	0,87	0,77
12. Trabalhadores do campo	1,05	0,96	1,00	0,86	0,77

Os dados apresentados parecem extremamente interessantes. Importa, porém, notar que a elasticidade da expectativa de renda não foi mensurada, mas admitida por hipótese. Tratando-se de um conceito puramente subjetivo, parece-nos ser impossível mensurá-lo.

Os autores reconhecem que estes dados talvez não sejam realistas. Em suas próprias palavras:

"A elasticidade unitária da expectativa da renda talvez esteja sobrestimada para as idades mais baixas, quando as rendas futuras ainda são um tanto incertas, pelo menos mais incertas que em idades mais altas, principalmente quando o indivíduo já se aposentou, quando tanto o receio de uma redução como a esperança do aumento da renda já se desvaneceram."

"Por outro lado a teoria não é aplicável para as classes etárias mais baixas, embora aos 30 anos as rendas futuras não sejam tão previsíveis como aos 40, as propensões a consumir entre um e outro período tendem antes a aumentar (embora ligeiramente) que a diminuir."

"Em segundo lugar é lícito supor que a expectativa da vida tende a ser sobrestimada principalmente quando o indivíduo vai-se tornando mais velho. Tornando-se acostumado a viver, o indivíduo mais velho talvez até se esqueça de que é mortal...".

Não obstante as ressalvas que importa fazer ao trabalho empírico dos autores, alguns dos resultados obtidos parecem-nos de grande importância.

Um desses é o de que um aumento da renda "temporária" reduz a poupança enquanto um aumento da renda permanente (no sentido a que Friedman dá ao conceito), *talvez* reduza a poupança. Pode, no entanto, aumentá-la.

A obra dos autores não é conclusiva. Muitos outros estudos deverão ser feitos para que possamos esclarecer melhor os determinantes da poupança.

Uma coisa, porém, ficou bastante clara. A função consumo de Keynes, devido à sua extrema simplificação, é inaceitável.

Não parece, pois, que os ciclos econômicos sejam frutos exclusivos da escassez de investimentos. À primeira vista, a obra analisada parece ser uma grande contribuição à escola monetarista e um rude golpe contra os post-keynesianos.

Espero, porém, que alguém mais douto analise em maior profundidade o livro cuja leitura recomendo vivamente.