Pesquisa de fórmula de índice de custo da construção predial de composição móvel, com adequação às variações de conveniência econômica e de tecnologia

Gerardo Estellita Lins

1. Apresentação; 2. Propriedades desejáveis dos números-índices; 3. Pesquisa da fórmula ideal; 4. Interpretação das fórmulas de índice de custos, de quantidades e de valores — reversão de fatores; 5. Aplicação da fórmula (10) a índice de custo de construção predial de composição móvel.

1. Apresentação

Inúmeras fórmulas têm sido estudadas, para representar a evolução de custos de utilidades determinadas.

Essas fórmulas envolvem preços de produtos e quantidades definidas, que se referem a diferentes épocas, entre as quais se deseja indicar a evolução do custo da utilidade suprida por aqueles produtos.

Diversas propriedades são preconizadas para teste de qualidade dos números-índices. Contudo, nenhuma das fórmulas clássicas de números-índices satisfaz a todas as propriedades principais.

O não-atendimento dessas propriedades acarreta eventuais distorções.

Se a fórmula de índice não satisfaz ao teste de reversibilidade no tempo, por exemplo, poderia ocorrer o retorno às condições iniciais, sem que o índice voltasse ao valor unitário.

Se a fórmula não satisfaz ao teste de reversibilidade cíclica, o índice do custo a uma certa data dependeria das datas-base intermediárias.

As propriedades de identidade e de homogeneidade são geralmente satisfeitas, sendo óbvia a sua conveniência.

A propriedade de proporcionalidade comporta dois enunciados alternativos:

1º Se, entre duas datas, todos os relativos de preços apresentarem um mesmo valor, esse será o valor assumido pelo índice.

2º Se, a uma data *t*, todos os preços estivessem multiplicados por um certo fator, o índice também viria multiplicado por esse fator.

O primeiro enunciado considera qualquer evolução de processo de produção, que atue sobre as quantidades dos diversos componentes, podendo vir a preconizar uma distorção com tendência à elevação dos índices.

O segundo enunciado refere-se a situações alternativas de preços a uma mesma época, caracterizada por uma mesma situação de tecnologia.

Consideramos a propriedade definida por esse segundo enunciado como a mais conveniente para o índice de custo.

É, ainda, desejável, que se possa dispor de um índice de custo e um índice de quantidade, cujo produto represente o índice de valor da produção.

Essa propriedade, de reversão de fatores, colocada em sua forma mais restritiva, exigiria que o índice de quantidade e o índice de custo diferissem pela permuta de preços e quantidades, fixadas as épocas. Foi, assim, proposta por Fisher, cuja fórmula a satisfaz.

Outros autores condicionam, mais liberalmente, que o índice de custo represente a evolução de custos ponderados com quantidades, e o índice de quantidades represente a evolução de quantidades, ponderadas com custos.

A propriedade seria, então, satisfeita, pela fórmula de índice de custo de Laspeyres, associada à de índice de quantidades de Paasche, ou vice-versa.

Aceitaremos a condição de que as fórmulas de índice de custo e de quantidades devam ter expressões análogas.

Outro fato a considerar é que, embora os critérios de utilidade sejam relativamente estáveis, as formas de satisfazê-los variam rapidamente com o avanço da tecnologia.

O ideal seria que a fórmula de índice permitisse uma mobilidade automática da composição, adaptando-se às novas situações tecnológicas, tanto no que diz respeito a técnicas construtivas, como a novos materiais lançados no mercado, que visam a atingir, para igual qualidade do produto, a redução de custos.

2. Propriedades desejáveis dos números-índices

São as seguintes as propriedades preconizadas por diversos autores, que seria de desejar que um número-índice significativo apresentasse:

1.ª *propriedade de identidade*: segundo a qual o número-índice referente ao período-base será igual à unidade

$$E_{a,\,a} = 1$$

Na prática, tomam-se, usualmente, os índices multiplicados por 100, de modo a indicar variações percentuais em relação ao período básico.

2.ª *propriedade de homogeneidade*: o índice deve ser independente das unidades adotadas, para cada um dos componentes.

3.ª *propriedade de continuidade*: o índice será representado por uma função contínua e derivável do preço e da quantidade de cada um dos seus elementos. As derivadas parciais de 1.ª ordem serão, todas, positivas.

4.ª *propriedade de proporcionalidade*: pela qual, se os preços da época *t* estivessem todos multiplicados por um mesmo fator, o índice de custo referente a essa época viria multiplicado pelo mesmo fator.

Essa propriedade é necessária, mas não suficiente, para que a fórmula tenha um sentido orçamentário.

5.ª *propriedade de reversibilidade no tempo*: o número-índice representativo do custo de uma utilidade na época *a*, em relação à época *b*, será o inverso do número-índice representativo do custo na época *b*, relativamente a *a*.

$$E_{a,\,b} = \frac{1}{E_{b,\,a}}$$

6.ª *propriedade de reversão cíclica* ou *circular*: em virtude da qual se pode proceder à mudança de base de um índice por simples multiplicação:

$$E_{a,b} \times E_{b,c} = E_{a,c}$$

7.ª *propriedade reversiva de fatores*: o índice de uma grandeza-produto deverá ser igual ao produto dos índices representativos da evolução das grandezas-fatores.

Assim, um índice de custo multiplicado por um índice de quantidade, daria como resultado um índice de valores, devendo os três índices atender às demais propriedades.

Observemos que os índices de Laspeyres e de Paasche não atendem às três últimas propriedades.

Podemos efetuar a mudança de base por simples multiplicação, em índices calculados segundo a fórmula de Laspeyres, apenas em períodos em que não tenha sido efetuada mudança de composições básicas.

O índice de Fisher também não apresenta a propriedade de reversão cíclica, como, aliás, nenhum outro índice ponderativo clássico.

Todas essas fórmulas apresentam, ainda, uma deficiência em comum: não admitem a mudança de composição, com a introdução de novos produtos, não cotados e não quantificados no período inicial.

A modificação da estrutura da composição, com a introdução de novos produtos, implica a quebra da série cronológica, e ajustamento de uma nova série.

Seria conveniente, portanto, juntar às sete propriedades consideradas (ou seis propriedades independentes, pois que a quinta propriedade decorre da primeira e da sexta), mais a seguinte:

8.ª *propriedade de atualização tecnológica*: segundo a qual a fórmula de índice deva permitir a substituição de componentes, com a supressão daqueles, tornados obsoletos, e a inclusão de novos produtos.

As seguintes propriedades são, ainda, necessárias (embora também não suficientes), para que a fórmula de índice tenha sentido orçamentário:

9.ª *propriedade de simetria*: a fórmula do índice deve constituir-se em uma função simétrica em relação aos diversos pares de elementos, preços e quantidades, de uma mesma época.

10.ª *propriedade de positividade*: o índice só poderá assumir valor zero, em uma época t, se, nessa época, forem nulos todos os preços dos elementos que o compõem, não associados, na fórmula do índice, a quantidades nulas (ou a coeficientes nulos).

3. Pesquisa da fórmula ideal

Investiguemos a existência de uma fórmula que atenda às diversas propriedades desejáveis.

Seja a utilidade cujos componentes são $A, B, C, \dots K$, cujos preços unitários e quantidades, nas épocas 0, 1, ... t são dados a seguir:

Épocas	A		B		...	K	
	preço	quantidade	preço	quantidade	...	preço	quantidade
0	$P_{a,0}$	$q_{a,0}$	$P_{b,0}$	$q_{b,0}$	...	$P_{k,0}$	$q_{k,0}$
1	$P_{a,1}$	$q_{a,1}$	$P_{b,1}$	$q_{b,1}$	...	$P_{k,1}$	$q_{k,1}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
t	$P_{a,t}$	$q_{a,t}$	$P_{b,t}$	$q_{b,t}$	...	$P_{k,t}$	$q_{k,t}$

O índice de evolução de custos da época 0 à época t será função dos preços unitários e quantidades nas duas épocas (podendo, eventualmente, independer de alguns deles).

$$E_{t,0} = f_1 (P_{a,0}, \dots P_{k,0}, q_{a,0}, \dots q_{k,0}, P_{a,t}, \dots P_{k,t}, q_{a,t}, \dots q_{k,t}) \quad (1)$$

Em virtude da propriedade de homogeneidade (segunda propriedade), o índice deve ser independente das unidades adotadas.

Se exprimirmos o produto A em uma unidade n vezes maior, os preços de A virão multiplicados por n, e os números que medem suas quantidades virão divididos por n:

$$E_{t,0} = f_1 (P_{a,0}, \dots P_{k,0}, q_{a,0}, \dots q_{k,0}, P_{a,t}, \dots P_{k,t}, q_{a,t}, \dots q_{k,t}) \equiv$$

$$\equiv f_1 \left(nP_{a,0}, \dots P_{k,0}, \frac{q_{a,0}}{n}, \dots q_{k,0}, nP_{a,t}, \dots P_{k,t}, \frac{q_{a,t}}{n}, \dots q_{k,t}\right)$$

As duas expressões sendo iguais para qualquer valor de $P_{a,0}$, terão, necessariamente, coeficientes iguais de $P_{a,0}$.

Portanto, esses coeficientes devem conter os fatores $q_{a,0}$, $q_{a,t}$, *ou* $\frac{1}{P_{a,t}}$.

Nesse último caso, podemos dizer que $P_{a,0}$ e $P_{a,t}$ vêm associados a uma das quantidades anteriores, pois que

$$P_{a,0} \times \frac{1}{P_{a,t}} = \frac{P_{a,0}}{P_{a,t}} = \frac{q_{a,t} \cdot P_{a,0}}{q_{a,t} \cdot P_{a,t}}$$

$P_{a,0}$ virá, então, sempre associada, por multiplicação a uma quantidade, $q_{a,0}$ ou $q_{a,t}$.

O mesmo se pode demonstrar com relação a $P_{a,t}$:

Pode-se escrever a fórmula de índice de custo:

$$E_{t,0} = f_2\,(P_{a,0}\,q_{a,0},\ P_{a,0}\,q_{a,t}\ P_{a,t},\ q_{a,0},\ P_{a,t}\,q_{a,t},\ \ldots,\ P_{k,0}\,q_{k,0},\ P_{k,0}\,q_{k,t},\ P_{k,t}\,q_{k,0},\ P_{k,t}\,q_{k,t}) \qquad (2)$$

A expressão (2) já é uma forma um tanto mais restrita da fórmula pesquisada.

Seja I o componente genérico, a cujos preços e quantidades atribuiremos o índice i, podendo ser $i = a, b, c, \ldots K$.

Notemos que, na igualdade (1), tínhamos quatro variáveis independentes, em relação a cada componente:

$$P_{i,0},\ q_{i,0},\ P_{i,t},\ q_{i,t}.$$

No entanto, as variáveis da igualdade (2):

$$(P_{i,0}\,q_{i,0}),\ (P_{i,0}\,q_{i,t}),\ (P_{i,t}\,q_{i,0}),\ (P_{i,t}\,q_{i,t})$$

não são independentes, pois que

$$(P_{i,t}\,q_{i,0}) = \frac{(P_{i,0}\,q_{i,0})\ (P_{i,t}\,q_{i,t})}{(P_{i,0}\,q_{i,t})}$$

Pode-se escrever a fórmula geral do índice pesquisado:

$$E_{t,0} = f_3\,(P_{i,0}\,q_{i,0},\ P_{i,0}\,q_{i,t},\ P_{i,t}\,q_{i,t}),\ \forall\, i \qquad (3)$$

Consideremos, agora, a propriedade de reversão cíclica (sexta propriedade). Devemos ter:

$$E_{1,0} \times E_{2,1} = E_{2,0}$$

Ou seja:

$$f_3 (P_{i,0}\, q_{i,0},\ P_{i,0}\, q_{i,1},\ P_{i,1}\, q_{i,1}) \times f_3 (P_{i,1}\, q_{i,1},\ P_{i,1}\, q_{i,2},\ P_{i,2}\, q_{i,2}) =$$
$$= f_3 (P_{i,0}\, q_{i,0},\ P_{i,0}\, q_{i,2},\ P_{i,2}\, q_{i,2})$$

Tomemos como variáveis independentes:

$$\begin{aligned} P_{i,0}\ q_{i,0} &= X_{00} \\ P_{i,0}\ q_{i,1} &= X_{01} \\ P_{i,1}\ q_{i,1} &= X_{11} \\ P_{i,1}\ q_{i,2} &= X_{12} \\ P_{i,2}\ q_{i,2} &= X_{22} \end{aligned}$$

Resultando a variável dependente

$$P_{i,0}\, q_{i,2} = \frac{P_{i,0}\, q_{i,1} \times P_{i,1}\, q_{i,2}}{P_{i,1}\, q_{i,1}} = \frac{X_{01} \times X_{12}}{X_{11}} = Y_{02}$$

donde:

$$f_3 (X_{00},\ X_{01} X_{11}) \times f_3 (X_{11},\ X_{12},\ X_{22}) = f_3 (X_{00},\ Y_{02},\ X_{22})$$

sendo

$$Y_{02} = \frac{X_{01} \cdot X_{12}}{X_{11}}$$

As variáveis independentes X_{01} e X_{12} só aparecem em um dos fatores, também não subsistindo no produto, que contém Y_{02}.

Portanto, X_{01} e X_{12} devem fornecer Y_{02}

$$Y_{02} = \frac{X_{01} \cdot X_{12}}{X_{11}}$$

Logo, a segunda variável da função f_8 deve ser exclusivamente multiplicativa, repetida qualquer número de vezes mas, cada vez, dividida pela terceira ou pela primeira variável, pois, de qualquer dessas maneiras, obter-se-á, no produto, Y_{02}, respeitando-se a forma da função.

$$\frac{X_{01}}{X_{11}} \cdot \frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{X_{01} \cdot X_{12}}{X_{11}} \cdot \frac{1}{X_{22}} = \frac{Y_{02}}{X_{22}}$$

$$\frac{X_{01}}{X_{00}} \cdot \frac{X_{12}}{X_{11}} = \frac{X_{01} \cdot X_{12}}{X_{11}} \cdot \frac{1}{X_{00}} = \frac{Y_{02}}{X_{00}}$$

A forma geral do índice pesquisado fica restrita a:

$$E_{t,0} = f_4\,(P_{i,0}\, q_{i,0},\, P_{i,t}\, q_{i,t}) \times \prod_{i=a}^{i=k} \left[(P_{i,0}\, q_{i,t})^{n_0 + n_t} (P_{i,0}\, q_{i,0})^{-n_0} \cdot (P_{i,t}\, q_{i,t})^{-n_t} \right]$$

$$E_{t,0} = f_4\,(P_{i,0}\, q_{1,0},\, P_{i,t}\, q_{i,t}) \times \prod_{i=a}^{i=k} \left[\frac{P_{i,0}^{n_t} \times q_{i,t}^{n_0}}{P_{i,t}^{n_t} \times q_{i,0}^{n_0}} \right] \quad i = a, b, \ldots K \qquad (4)$$

Por força da propriedade de simetria (nona propriedade), as operações repetir-se-ão em igual número para todos os produtos, e, portanto, usaremos n_0 e n_t independentes de i.

Se n_t for maior que zero, bastará que um preço inicial seja nulo, para que o índice se torne nulo, contrariando a propriedade de positividade (décima propriedade).

Por outro, se n_0 for maior que zero, bastará uma quantidade $q_{i,t}$ seja nula, para que o índice se anule, embora outros preços, associados a quantidades positivas, sejam também positivos.

Portanto, por força da propriedade de positividade, deveremos ter

$$n_t = 0 \qquad\qquad n_0 = 0$$

E a fórmula geral pesquisada para o índice assume a expressão:

$$E_{t,0} = f_4\,(P_{i,0},\, q_{i,0},\, P_{i,t}\, q_{i,t}),\ \forall\, i \qquad (5)$$

Chamemos $P_{i,0}\, q_{i,0} = X_i$

$P_{i,t}\, q_{i,t} = Y_i$

$$E_{i,0} = f_4(X_i,\ Y_i),\ \forall i \qquad 5a)$$

ou $$E_{i,0} = f_4(X_a,\ X_b, \ldots X_k,\ Y_a,\ Y_b, \ldots Y_k)$$

Pela propriedade de proporcionalidade (quarta propriedade), temos a identidade:

$$f_4(X_a, X_b, \ldots X_k, \alpha Y_a, \alpha Y_b, \ldots \alpha Y_k) \equiv \alpha f_4(X_a, X_b, \ldots X_k, Y_a, Y_b, \ldots Y_k) \qquad (5b)$$

que, sendo válida para qualquer valor de Y_i, acarreta a identidade das derivadas (aceita a terceira propriedade, de continuidade-derivabilidade).

$$\frac{d f_4(X_a, X_b, \ldots X_k, \alpha Y_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_i)} \cdot \frac{d(\alpha Y_i)}{d Y_i} \equiv \alpha \frac{d f_4(X_a \ldots X_k, Y_a \ldots Y_k)}{d Y_i}$$

$$\frac{d f_4(X_a, \ldots X_k, \alpha Y_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_i)} \cdot \alpha \equiv \alpha \frac{d f_4(X_a, \ldots X_k, Y_a, \ldots Y_k)}{d Y_i}$$

$$\frac{d f_4(X_a, \ldots X_k, \alpha Y_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_i)} \equiv \frac{d f_4(X_a, \ldots X_k, Y_a, \ldots Y_k)}{d Y_i} \qquad (5c)$$

logo, a derivada parcial

$\dfrac{d f_4(X_a \ldots X_k, \alpha Y_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_i)}$ independe de α.

A identidade (5b) verifica-se para qualquer valor de α, portanto as derivadas dos dois membros em relação a α são, também, idênticas.

$$\frac{d f_4(X_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_a)} \cdot \frac{d(\alpha X_a)}{d\alpha} + \ldots + \frac{d f_4(X_a, \ldots \alpha Y_k)}{d(\alpha Y_k)} \cdot \frac{d(\alpha Y_k)}{d\alpha} \equiv$$

$$\equiv f_4(X_a, \ldots X_k, Y_a, \ldots Y_k)$$

Mas, aplicando (5c), para $i = a, b, \ldots K$, vem:

$$\frac{d f_4(X_a, \ldots Y_k)}{d Y_a} \cdot Y_a + \ldots + \frac{d f_4(X_a, \ldots Y_k)}{d Y_k} \cdot Y_k \equiv$$

$$\equiv f_4(X_a, \ldots X_k, Y_a, \ldots Y_k) \qquad (5d)$$

A fórmula (5d) determina que a expressão do índice deve ser igual à soma dos produtos de cada variável Y_i pela derivada parcial a ela relativa.

Trata-se de uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem.

A solução geral pode ser obtida pelo método de Lagrange, resolvendo-se o sistema auxiliar de equações diferenciais ordinárias, chamando: $Z = f_4 \ (X_a, \ldots X_k, Y_a, \ldots Y_k)$:

$$\frac{d\,Y_a}{Y_a} = \frac{d\,Y_b}{Y_b} = \ldots = \frac{d\,Y_k}{Y_k} = \frac{d\,Z}{Z} \qquad (5e)$$

Tem-se:

$$\frac{d\,Y_a}{Y_a} = \frac{d\,Z}{Z} : u_a = \frac{Z}{Y_a} = c_a$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\,Y_k}{Y_a} = \frac{d\,Z}{Z} : u_k = \frac{Z}{Y_k} = c_k$$

e *a solução geral de (5d) será*:

$$\Phi \ (u_a, u_b, \ldots u_k) = 0$$

ou

$$\boxed{\Phi \ \frac{Z}{Y_a}, \frac{Z}{Y_b}, \ldots \frac{Z}{Y_k} = 0} \qquad (6)$$

sendo Φ uma função arbitrária.

Uma família de soluções que se enquadra nessa forma geral será:

$$\boxed{Z = \sum_j C_j \prod_{i=a}^{i=k} Y_i^{\,n_{i,j}} \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=a}^{i=k} n_{i,j} = 1, \forall_j} \qquad (6a)$$

Optamos por fazer, nos produtórios, para cada j, um dos $n_{i,j} = 1$, e os demais nulos, passando a ter uma combinação linear dos $Y_a, \ldots Y_k$, da forma

$$Z = f_4 (X_a, \ldots Y_k) = C_a\,Y_a + C_b\,Y_b + \ldots + C_k\,Y_k \qquad (6b)$$

Essa opção baseia-se na conveniência de que a influência da variação do preço de um produto independa das variações dos preços dos demais componentes.

Aliás, poderíamos chegar, diretamente, à forma linear, se colocássemos, a partir de (5d), essa condição, que é expressa pela nulidade das derivadas de 2.ª ordem em relação a variáveis independentes diferentes.

$$\frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_i \cdot d Y_j} = 0 \qquad \forall\, i, j, \qquad i \neq j$$

Derivando (5d) em relação à variável genérica Y_i:

$$\frac{d f_4 (X_a, \ldots Y_i, \ldots Y_k)}{d Y_i} \equiv \frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_a \cdot d Y_i} \cdot Y_a + \ldots +$$

$$+ \frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_i \cdot d Y_i} Y_i + \frac{d f_4 (X_a, \ldots, Y_i, \ldots Y_k)}{d Y_i} + \ldots +$$

$$+ \frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_k \cdot d Y_i}$$

$$\frac{(d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_a \cdot d Y_i} + \ldots + \frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_i \cdot d Y_i} + \ldots + \frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_k \cdot d Y_i} \equiv 0$$

Sendo nulas as demais derivadas parciais, também

$$\frac{d^2 f_4 (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_i^2} \equiv 0$$

E, integrando:

$$\frac{d f_{a,} (X_a, \ldots Y_k)}{d Y_i} = C_i$$

$$f_4 (X_a, \ldots Y_k)\, C_i\, Y_i + D_i$$

C_i independe de outras variáveis, porque as derivadas segundas deveriam ser todas nulas, e D_i é função de quaisquer variáveis, excetuando-se Y_i, e chegaríamos à expressão (6b).

A partir dela, em vista da nona propriedade (de simetria), devemos ter $C_a = C_b = \ldots = C_i = \ldots = C_k$, resultando:

$$f_4 \; (X_a, \ldots Y_k) \equiv C \, \Sigma \, Y_i \tag{7}$$

A partir da igualdade (5), podemos escrever a expressão de $E_{t,0}$

$$E_{t,0} = \frac{F_1(P_{i,0}\, q_{i,0},\, P_{i,t}\, q_{i,t})}{F_2(P_{i,0}\, q_{i,0},\, P_{i,t}\, q_{i,t})} = \frac{F_1(X_i, Y_i)}{F_2(X_i, Y_i)} \tag{8}$$

$$i = a, b, \ldots K.$$

mas (5a) e (7a) dão:

$$E_{t,0} = f_4 \ (X_i, Y_i) = C \ \Sigma \ Y_i \tag{9}$$

Como C independe de Y_i, notemos $C \ (X)$:

$$E_{t,0} = f_4 \ (X_i, Y_i) = C \ (X) \ . \ \Sigma \ Y_i \tag{9a}$$

Analogamente

$$E_{0,t} = f_4 \ (Y_i, X_i) = C \ (Y) \ . \ \Sigma \ X_i \tag{9b}$$

Pela propriedade de reversão no tempo (quinta propriedade), teremos:

$$E_{0,t} = \frac{1}{E_{t,0}}$$

$$C(Y) \cdot \sum X_i = \frac{1}{C(X) \cdot \sum Y_i}$$

$$C \ (Y) \cdot \sum Y_i = \frac{1}{C(X) \cdot \sum X_i}$$

então C $(Y) \ . \ \Sigma \ Y_i$ independe de Y e de X, bem como $C \ (X) \ . \ \Sigma \ X_i$, logo:

$$C(Y) = \frac{D}{\sum Y_i} \qquad C(X) = \frac{\frac{1}{D}}{\sum X_i}$$

sendo D uma constante.

De (9a) vem: $$E_{t,0} = \frac{1}{D} \frac{\sum Y_i}{\sum X_i}$$

Mas, pela propriedade de identidade (primeira propriedade), deve ser $D = 1$.

Resulta:

$$E_{t,0} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i}$$

Substituindo os valores de X_i e Y_i:

$$\boxed{E_{t,0} = \frac{\sum P_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}}} \qquad i = a, b, \ldots k \qquad (10)$$

Até aqui aplicamos as propriedades, restringindo necessariamente a fórmula do índice teórico ideal, até a expressão (6).

Exercemos a opção sobre a forma (6b), fundamentando, e transformamo-la na forma final (10).

Essa expressão apresenta certa analogia com a fórmula usual de índice de valores. Veremos, adiante, a interpretação que permite usá-la como índice de custo.

Cumpre, ainda, testar o atendimento às diversas propriedades.

Pode-se verificar, facilmente, que essa fórmula de índice de custo atende às propriedades de:

identidade:

$$E_{0,0} = \frac{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}}{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}} = 1$$

homogeneidade:

$$E_{t,0} = \frac{\sum P_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}} = \frac{\sum (k_i\, P_{i,t}) \left(\frac{q_{i,t}}{k_i}\right)}{\sum (r_i\, P_{i,0}) \left(\frac{q_{i,0}}{r_i}\right)}$$

proporcionalidade:

$$\frac{\sum (P_{i,t} \cdot r)\, q_{i,t}}{\sum P_{i,0} \cdot q_{i,0}} = r \cdot \frac{\sum P_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}}$$

reversibilidade no tempo:

$$E_{t,0} = \frac{\sum P_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}} = \frac{1}{\dfrac{\sum P_{i,0}\, q_{i,0}}{\sum P_{i,t}\, q_{i,t}}} = \frac{1}{E_{0,t}}$$

reversibilidade cíclica:

$$E_{a,b} \times E_{b,c} = \frac{\sum P_{i,a}\, q_{i,a}}{\sum P_{i,b}\, q_{i,b}} \times \frac{\sum P_{i,b}\, q_{i,b}}{\sum P_{i,c}\, q_{i,c}} = \frac{\sum P_{i,a}\, q_{i,a}}{\sum P_{i,c}\, q_{i,c}} = E_{a,c}$$

além das propriedades de continuidade, simetria e positividade.

Analisaremos o atendimento das provas de reversão de fatores, segundo os conceitos colocados inicialmente, e de atualização tecnológica, nos capítulos seguintes.

4. Interpretação das fórmulas de índice de custos, de quantidades e de valores — reversão de fatores

A expressão (11)

$$E_{t,0} = \frac{\sum_s Q_s \cdot \sum_i K_{i,t,s,j} \cdot P_{i,t}}{\sum_s Q_s \cdot \sum_i K_{i,0,s,j} \cdot P_{i,0}} \tag{11}$$

pode ser escrita:

$$E_{t,0} = \frac{\sum_s Q_s \cdot P_{s,t}}{\sum_s Q_s \cdot P_{s,0}} \tag{12}$$

em que $P_{s,t} = \sum_i k_{i,t,s,j} \cdot P_{i,t}$ representa o custo unitário para o "serviço" cuja quantidade é Q_s.

Sob esse aspecto, a fórmula obtida é de ponderação fixa.

Pressupõe-se que as componentes Q_s da utilidade $\mathcal{U}$ se mantenham constantes, embora seu *input* varie a curto prazo.

Essa constância do vetor Q_s pode ser admitida, quer para o valor médio da satisfação da necessidade (projeto habitacional, por exemplo), quer para faixas definidas de satisfação da necessidade (diversos projetos habitacionais representativos da demanda, por exemplo).

Sejam $T_{s,t}$ a quantidade total produzida do componente ou "serviço" no ano *t*, e $A_{s,t}$ a quantidade de área construída no mesmo período.

Analogamente, sejam $T_{s,0}$ e $A_{s,0}$ a quantidade total produzida do "serviço" e a área construída no ano inicial, 0. Teremos:

$$Q_s = \frac{T_{s,t}}{A_t} \qquad Q_s = \frac{T_{s,0}}{A_0}$$

$$E_{t,0} = \frac{\sum_s \frac{T_{s,t}}{A_t} \cdot P_{s,t}}{\sum_s \frac{T_{s,0}}{A_0} \cdot P_{s,0}} = \frac{A_0}{A_t} \cdot \left[\frac{\sum_s T_{s,t} \cdot P_{s,t}}{\sum_s T_{s,0} \cdot P_{s,0}} \right]$$

O índice de valor da construção será:

$$IV_{t,0} = \frac{\sum_s T_{s,t} \cdot P_{s,t}}{\sum_s T_{s,0} \cdot P_{s,0}}$$

O índice de quantidades será:

$$IQ_{t,0} = \frac{A_t}{A_0}$$

tal que o produto do índice de custo pelo índice de quantidades será igual ao índice de valor:

$$E_{t,0} \times IQ_{t,0} = IV_{t,0}$$

Pode-se escrever o índice de quantidades:

$$IQ_{t,0} = \frac{A_t}{A_0} = \frac{\frac{T_{s,t}}{Q_s}}{\frac{T_{s,0}}{Q_s}} = \frac{T_{s,t}}{T_{s,0}} = \frac{T_{1,t}}{T_{1,0}} = \frac{T_{2,t}}{T_{2,0}} = \ldots = \frac{T_{m,t}}{T_{m,0}}$$

$$= \frac{C_1 T_{1,t}}{C_1 T_{1,0}} = \frac{C_2 T_{2,t}}{C_2 T_{2,0}} = \ldots = \frac{C_m T_{m,t}}{C_m T_{m,0}} = \frac{C_1 T_{1,t} + C_2 T_{2,t} + \ldots + C_m T_{m,t}}{C_1 T_{1,0} + C_2 T_{2,0} + \ldots + C_m T_{m,0}}$$

$$= \frac{\sum_s C_s T_{s,t}}{\sum_s C_s T_{s,0}} \tag{13}$$

Sendo $C_1, C_2, \ldots, C_s, \ldots, C_m$ constantes arbitrárias.

Esta última expressão do índice de quantidades é análoga à expressão (12) do índice de custo.

Na expressão (12) do índice de custos ponderam-se custos de "serviços", usando-se pesos constantes (iguais a Q_s) e, na expressão (13), do índice de quantidades, ponderam-se quantidades dos "serviços", com pesos constantes, C_s quaisquer.

5. Aplicação da fórmula (10) a índice de custo de construção predial de composição móvel

A utilidade $\mathcal{U}$, que é a satisfação representada pela utilização de um prédio, pode ser considerada como função de diversas variáveis ou produtos que proporcionam algum tipo de satisfação, tais como pisos de dormitórios, paredes externas, iluminação dos diversos cômodos, instalação sanitária, etc., que, em linguagem de construção civil, são chamados "serviços": $Q_1, Q_2, \ldots Q_s, \ldots Q_m$.

$$\mathcal{U} = f\ (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_m)$$

Um valor quantificado de qualquer dessas variáveis pode ser obtido com o concurso de diversos insumos, ou componentes, geralmente "produtos" das indústrias de materiais de construção civil, e especialidades de mão-de-obra, $q_a, q_b, \ldots q_i, \ldots q_n$.

$$Q_s = F_s\ (q_a, q_b, \ldots q_i \ldots q_n)$$

F_s é, geralmente, uma função discreta, modificando-se a curto prazo, em decorrência da evolução das tecnologias construtivas, e da invenção de novos "produtos", contrariamente à função f, que é de evolução mais lenta.

Sem nos preocuparmos em investigar a forma de f, caracterizaremos a utilização por um vetor de valores quantificados Q_s das diversas variáveis, "serviços", considerado válido em um prazo mais ou menos longo.

Cada "serviço" admitirá composições unitárias alternativas, representadas pelos coeficientes técnicos $K_{i,t,s,j}$ referentes ao insumo i, usual na época t, para executar a unidade do "serviço" ou produto final de ordem s, segundo a alternativa de composição j.

A escolha da alternativa (j), para cada serviço, deve recair sobre a mais econômica, dentre as predefinidas como qualitativamente equivalentes, isto é, o serviço para o qual a expressão $\sum_i K_{i,t,s,j} \cdot P_{i,t}$ atinge o menor valor.

Selecionadas as alternativas, dentre as especificações qualitativamente equivalentes, para cada "serviço", a fórmula do índice expressar-se-á:

$$E_{t,0} = \frac{\sum_{s}\left[Q_s \sum_{i} K_{i,t,s,j} \cdot P_{i,t}\right]}{\sum_{s}\left[Q_s \sum_{i} K_{i,0,s,j'} \cdot P_{i,0}\right]}$$

em que os segundos somatórios se referem aos $K_{i,t,s,j}$ componentes da alternativa selecionada no respectivo período, e $P_{i,t}$ os preços dos mesmos componentes no período.

A expressão (11) pode ser escrita:

$$E_{t,0} = \frac{\sum_{s}\sum_{i} Q_s \cdot K_{i,t,s,j} \cdot P_{i,t}}{\sum_{s}\sum_{i} Q_s \cdot K_{i,0,s,j'} \cdot P_{i,0}} \tag{11a}$$

Fazendo $Q_s \cdot K_{i,t,s,j} = q_{s,i,t}$

$Q_s \cdot K_{i,0,s,j}' = q_{s,i,0}$

viria:

$$E_{t,0} = \frac{\sum_{s}\sum_{i} q_{s,i,t} \cdot P_{i,t}}{\sum_{s}\sum_{i} q_{s,i,0} \cdot P_{i,0}} \tag{11b}$$

que está na forma geral pesquisada (10), para o índice de custo capaz de atender aos testes de qualidade referidos.

Observamos que novas alternativas de composição unitária dos "serviços" podem ser incluídas, em decorrência da evolução da tecnologia, bem como alternativas obsoletas podem ser suprimidas, sem prejudicar o atendimento das diversas propriedades, inclusive a de reversão cíclica, e, portanto, sem quebrar a série.

A fórmula de índice proposta (10) é, pois, de composição móvel, atendendo à propriedade de atualização tecnológica.

É vasto o programa editorial da Unesco. No Brasil, esse valioso acervo de obras, versando sobre aspectos variados das atividades culturais, educacionais e científicas do homem, encontra-se à sua disposição na Fundação Getulio Vargas, através do seu Serviço de Publicações, de suas livrarias ou de seus revendedores autorizados em todo o País.

Qualquer que seja o seu campo de atividade, solicite o catálogo de obras da Unesco a qualquer uma das nossas livrarias ou a um dos nossos agentes de vendas autorizados.

LIVRARIAS:

Praia de Botafogo, 188
Caixa Postal, 21 120
Rio de Janeiro, GB

Avenida Graça Aranha, 26
Lojas C e H
Rio de Janeiro, GB

Super Quadra 104 — Bloco A
Loja 11
Brasília, DF

Avenida Nove de Julho, 2 029
Caixa Postal, 5 534
São Paulo, SP

AGENTES AUTORIZADOS:

Dilertec
Distribuidora de Livros e Revistas Ltda.
Rua Coelho Rodrigues, 1 244
Teresina — PI

Ceará — Ciência e Cultura
Rua Edgard Borges, 89
Fortaleza, CE

Organização Sulina de Representações
Av. Borges de Medeiros, 1 030
Porto Alegre, RS

CATAVENTO — Distribuidora de Livros Ltda.
Rua Conselheiro Ramalho, 928
Tel.: 36-5642
São Paulo, SP

Fornecedora de Publicações Técnicas
M. M. de Oliveira Marques
Av. Ipiranga, 200 — Loja 40
São Paulo, SP

Livraria Martins
Av. Campos Sales, 171
Belém, PA

Lunardelli Representações
Livraria Universitária
Rua Vítor Meireles, 23-A
Florianópolis, SC

Centro do Livro Brasileiro
Rua Rodrigues Sampaio, 30-B
Lisboa, Portugal

Agência Van Damme
Rua Goitacazes, 103 s/ 1310
Belo Horizonte, MG

Livraria Ghignone
Rua Quinze de Novembro, 423
Curitiba, PR

Livraria Civilização Brasileira S.A.
Rua Padre Vieira, 9
Salvador, BA

M. Inojosa
Av. Dantas Barreto, 564
Sala 901
Recife, PE

Livraria J.C.
Rua Nina Rodrigues, 33-B
São Luiz, MA

Praia Grande Distribuidora
Rua Tiradentes, 71
Loja 2
Ingá
Niterói, RJ

Ou pelo Reembolso Postal. Pedidos para a Fundação Getulio Vargas. Praia de Botafogo, 188, C.P. 21120, ZC-05, Rio de Janeiro, GB.