A UTILIZAÇÃO DE EXPERIÊNCIAS NO ENSINO DA ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

PAULO PARDAL *

1. INTRODUÇÃO

É necessário, positivamente, ultrapassar a fase de ensino da estatística descritiva nas Faculdades de Engenharia e de Economia. É indispensável a assimilação pelos alunos do cálculo de probabilidades e da estatística matemática, permitindo-lhes dominar a indução estatística, os testes de significância, os testes de hipótese, a determinação do coeficiente de segurança, o contrôle estatístico da qualidade, a pesquisa de mercados, etc., para não citar os modernos métodos da pesquisa operacional: método de Monte Carlo, teoria dos jogos, teoria de filas, dimensionamento de estoques, etc.

É entretanto dificil o ensino adequado da estatística matemática, devido ao seu caráter abstrato, que se alia freqüentemente à falta de preparo dos alunos em matemática. A fim de minorar tal dificuldade, temos adotado, com ótimos resultados, o emprêgo de experiências práticas, que permitem apresentar aos alunos os conceitos fundamentais dessa disciplina, de forma concreta, clara e exata.

* Professor da Escola Nacional de Engenharia e da Faculdade de Ciências Econômicas do Estado da Guanabara.

Abaixo apresentamos algumas dessas experiências, as quais subdividiremos em experiências com urnas e experiências com dados, que utilizamos para demonstrar propriedades referentes, respectivamente à estatística de atributos e de variáveis.

2. EXPERIÊNCIA COM URNAS — ESTATÍSTICA DE ATRIBUTOS

Uma urna em plexiglass e de formato especial para evitar tendenciosidade, contém pequenas esferas brancas e pretas, que podem representar, por exemplo, um universo de peças, no qual as defeituosas (pretas) ocorrem em proporção conhecida. Acompanha a referida urna uma pequena pá com um cursor, cuja posição determina a retirada de amostras de 5, 10, 15, 20 ou 25 elementos. Com êsse material, apresentado nas figuras 1, 2 e 3, podemos realizar experiências sôbre distribuições de variável discreta, como a distribuição binomial.

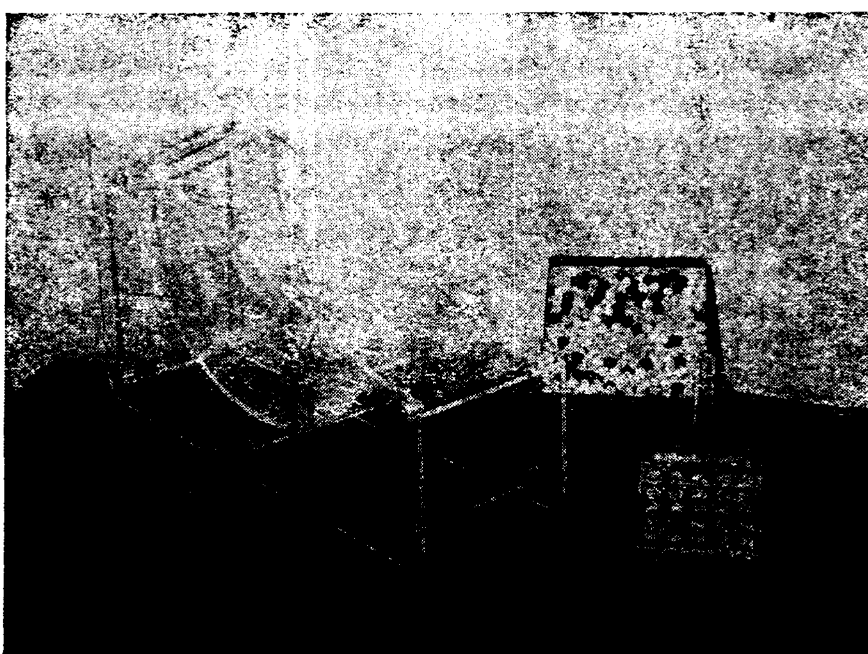


FIGURA 1

FIGURA 2

FIGURA 3

EXPERIÊNCIA COM A URNA

(0)	(1)		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\frac{r}{n}$	$n = 20$, $p = 0{,}20$			$\frac{f_1}{100}$	$\frac{f_2}{100}$	$\frac{f_3}{100}$	$\frac{f_1 + f_2}{200}$	$\frac{f_1 + f_2 + f_3}{300}$	$\frac{rf_1}{100}$	$\frac{r(f_1 + f_2)}{200}$	$\frac{r(f_1 + f_2 + f_3)}{300}$
	r	P_r									
0,00	0	0,012		0,01	0,00	0,01	0,005	0,007	0,00	0,000	0,000
0,05	1	0,058		0,04	0,06	0,09	0,050	0,063	0,04	0,050	0,063
0,10	2	0,137		0,13	0,12	0,11	0,125	0,120	0,26	0,250	0,240
0,15	3	0,205		0,26	0,24	0,24	0,250	0,250	0,78	0,750	0,750
0,20	4	0,218		0,28	0,16	0,19	0,220	0,210	0,12	0,880	0,840
0,25	5	0,175		0,12	0,15	0,21	0,135	0,160	0,60	0,675	0,800
0,30	6	0,109		0,11	0,14	0,09	0,125	0,112	0,66	0,750	0,672
0,35	7	0,055		0,05	0,05	0,03	0,050	0,042	0,35	0,350	0,294
0,40	8	0,021		0,00	0,04	0,02	0,020	0,020	0,00	0,160	0,160
0,45e+	9e+	0,010		0,00	0,04	0,01	0,020	0,016	0,00	0,180	0,154
		1,000		1,00	1,00	1,00	1,000	1,000	3,81	4,045	3,973

QUADRO I

Recordemos para os não especialistas, que a distribuição binomial fornece qual a probabilidade (P_r) de que ocorram 0,1,2, ... r peças defeituosas, em uma amostra de n peças escolhidas ao acaso de um universo no qual a porcentagem de defeituosos é igual a p. A fórmula para o cálculo de P_r, deduzida fàcilmente, é: $P_r = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$, onde $\binom{n}{r}$ é o número de combinações de n elementos r a r. Essa fórmula pode ser empregada sem êrro apreciável, desde que o universo seja 10 vêzes maior do que a amostra.

Se, por exemplo, p = 0,20 e n = 20, fazendo r = 0,1,2, ... teremos as respectivas probabilidades P_0 = 0,012; P_1 = 0,058; P_2 = 0,137; etc., conforme vemos nas colunas (1) e (2) do Quadro I.

Qualquer aluno pode compreender fàcilmente a demonstração matemática da fórmula P_r, porém poucos assimilam realmente seu significado prático. Para isso podemos realizar uma experiência com a urna acima referida, que familiarizará definitivamente os alunos com a distribuição binomial.

Antes, recordemos ainda que do teorema de Bernouilli, concluímos que, quando o número de experiências cresce indefinidamente, a freqüência relativa de ocorrência de certo acontecimento tende para a probabilidade de ocorrência dêsse acontecimento em uma prova simples (lei dos grandes números). Para o exemplo dado acima (p = 0,20; n = 20) a probabilidade de têrmos 0 peças defeituosas em uma amostra de 20 peças é de 0,012. Se tirássemos uma infinidade de amostras, a freqüência relativa das que conteriam 0 defeituosas seria também de 0,012. Se tirássemos um número elevado de amostras, essa freqüência relativa, que evidentemente se aproximaria do valor 0,012, pode ser tomada como uma estimativa dêsse valor.

No quadro I, vemos os resultados das experiências realizadas por engenheiros da Companhia Siderúrgica Nacional, em curso sôbre aplicações industriais da estatística, que ministramos em Volta Redonda.

Nas colunas (3), (4) e (5) temos as freqüências relativas obtidas por três alunos, cada um dos quais retirou 100 amostras (por exemplo, o 1.° aluno encontrou nas 100 amostras, uma com 0 defeituosas, logo, a freqüência relativa de ocorrência do valor r = 0 foi de 1/100 = 0,01). Nas colunas (6) e (7) temos as freqüências relativas / considerando 200 e 300 observações, respectivamente. Vemos que aumentando o número de observações, as frequências relativas se aproximam das probabilidades teóricas, dadas na coluna (2).

Com os valores obtidos empìricamente, podemos também estimar p: probabilidade de uma peça ser defeituosa, que é a relação entre peças defeituosas para o total de peças ($p = 20\%$, nesse exemplo) bem como o valor esperado do número de peças defeituosas por amostra (r) que é definido pela expressão $E(r) = \Sigma r\, P_r = n\,p$ (nesse exemplo, $np = 20 \times 0{,}20 = 4$, isto é, esperamos ter 4 peças defeituosas em cada amostra). Como os P_r são estimados pelos $f_1/100$, $(f_1 + f_2) / 200$ e $(f_1 + f_2 + f_3) / 300$, o valor esperado de r será estimado por $\Sigma r \dfrac{f_1}{100}$, $\Sigma r \dfrac{f_1 + f_2}{200}$, $\Sigma r \dfrac{f_1 + f_2 + f_3}{300}$.

Êsses valores, obtidos nas colunas (8), (9) e (10) do quadro I, tendem para o valor teórico 4, à medida que aumenta o número de observações.

A fim de têrmos as estimativas de p, basta observarmos que $\Sigma(r) = np$, donde $p = \dfrac{\Sigma(r)}{n}$ (nesse caso $p = 4/20 = 0{,}20$).

Substituindo $\Sigma(r)$ por suas estimativas calculadas anteriormente teremos para estimativas de p: $\dfrac{3{,}810}{20} = 0{,}19050$; $\dfrac{4{,}045}{20} = 0{,}20225$ e $\dfrac{3{,}973}{20} = 0{,}19865$. Êsses valores tendem para o valor teórico 0,20, à medida que aumenta o número de observações, o que comprova pràticamente o teorema de Bernoulli.

A distribuição da freqüência relativa (r/n) de ocorrência de peças defeituosas (ou de outro acontecimento qualquer) pode ser imediatamente assimilada, mostrando aos alunos que dizer que 0,058 é a probabilidade de ter a ocorrência de uma peça defeituosa na amostra de 20 peças, é o mesmo que dizer que é de 0,058 a probabilidade de ter 0,05 ($1/20 = 0{,}05$) de peças defeituosas na amostra. Raciocinando de modo semelhante para os demais valores de r, adicionamos a coluna 0, que juntamente com a coluna (2) nos dá a distribuição binomial de r'/n.

Um exemplo simples de teste de hipótese pode ser figurado: Suponhamos que determinado processo de fabricação há muito controlado conduza a 20% de peças de 2.ª categoria. Após uma modificação, que se supõe benéfica, no processo, examinam-se 20 peças, encontrando-se sòmente 5% de 2.ª categoria. O engenheiro responsável pela modificação do processo acredita que houve melhoria, pois a porcentagem de defeituosos passou de 20% a 5%. Como decidirá seu superior: aceitará que tenha havido melhoria (i. é., que a nova porcentagem de defeituosos é inferior a 20%) ou que êsse valor possa ser devido ao acaso, por só se ter examinado 20 peças?

Façamos a hipótese de que não houve melhoria, i. é., de que $p = 20\%$ e vejamos qual a probabilidade de que se possa obter em uma amostra de 20 peças, uma porcentagem igual ou inferior a 5%. No quadro I vemos que a probabilidade de ter r/n igual a 0,00 ou 0,05 é de $0{,}012 + 0{,}058 = 0{,}07$. Logo, mesmo que não tenha havido melhoria é razoável têrmos 5% ou menos de peças defeituosas em uma amostra de 20, devido sòmente ao acaso. Se fôsse aceita a hipótese de ter havido melhoria correr-se-ia um risco de êrro de 7%, que é a probabilidade de que uma porcentagem de defeituosos de 5% ou menos possa ocorrer devido sòmente ao acaso, sendo $p = 20\%$. Os três alunos encontraram respectivamente 5,6 e 10 amostras com 5% ou menos de defeituosos. Êsse fato foi pois observado em média com freqüência relativa de 7%:

$$\frac{0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}10}{3} = 0{,}07$$

Assim, os conceitos teóricos e abstratos de distribuição de probabilidades, cálculo de estimativas, testes de hipótese, riscos de êrro, etc., são apresentados de modo prático e intuitivo. O aluno "vê" nos resultados experimentais o que significam êsses conceitos e os assimila definitivamente, pois cada um participou ativamente em sua formulação, realizando as experiências com a urna.

Cabe observar que, no entender do professor E. Morice, diretor da Escola de Aplicação do Instituto National de Statistique et Etudes Economiques, de França, tais experiências são de grande utilidade, não só para os alunos com pequena bagagem matemática, como também para os que estudam Teoria Estatística em profundidade. Para êsses, as experiências educam no sentido de assimilar sempre os conceitos teóricos a problemas reais, não encarando a teoria como uma finalidade abstrata, distorsão a que se chega fatalmente nos cursos excessivamente teóricos.

* * *

Utilizando a mesma experiência de urnas, outros métodos podem ser explicados como a carta de contrôle do número de defeituosos. Suponhamos um processo de fabricação que em condições normais produz 20% de peças defeituosas ou de 2.ª categoria. Se retirarmos periòdicamente (cada hora por exemplo) uma amostra de 20 elementos, a probabilidade de têrmos 8 peças defeituosas é de 0,021 e de têrmos 10 ou mais peças defeituosas é sòmente de 0,003. No quadro I, vemos que a probabilidade de têrmos 9 ou mais peças defeituosas, é de 0,010. Êsse valor é a soma das probabilidades de têrmos 9 peças defeituosas, que é 0,007, e de têrmos 10 ou mais peças defeituosas que é 0,003. Logo, quando encontrarmos 10 ou mais peças defeituosas em uma amostra de 20, devemos acreditar que houve um descontrôle na fabricação, pois se a fabricação continuasse normal, a probabilidade de que tal fato tivesse sido devido sòmente ao acaso seria de 3/1000. Se encontrarmos 8 ou 9 peças defeituosas, devemos, desconfiando que possa ter havido descontrôle pois tal fato ocorre devido ao acaso com a baixa probabilidade de 0,03, tirar uma segunda amostra imediatamente: se o número de defeituosos estiver próximo do valor esperado (4), julgaremos a fabricação normal; se tivermos outra vez um número de peças defeituosas de 8 ou mais, julgaremos que houve descontrôle.

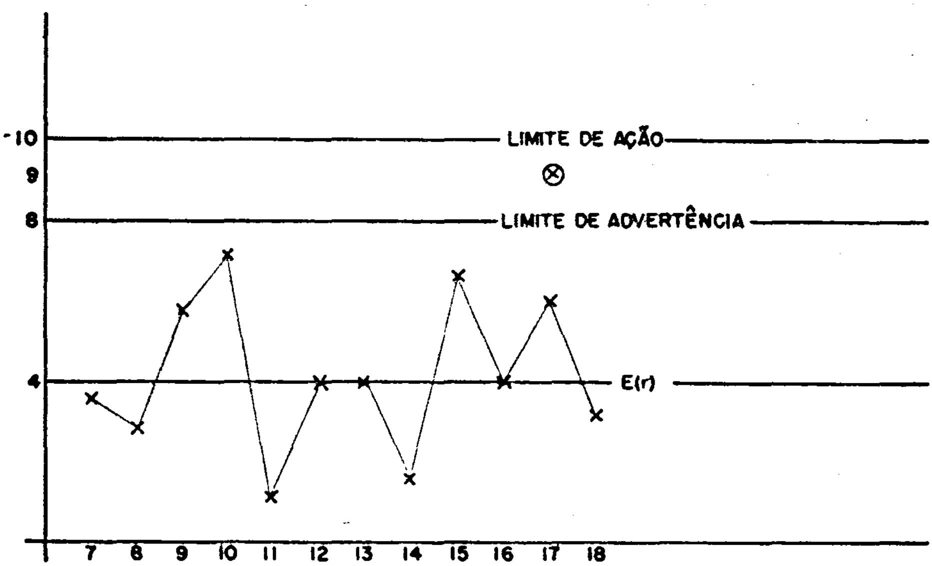
Êsses resultados são levados ao gráfico I, onde cada aluno lança os 100 valores de r que obteve em suas experiências verificando como se utiliza a carta de contrôle.

r — número de peças defeituosas na amostra de 20 peças

t — tempo (horas)

Em seguida, entregamos ao aluno, um conjunto de esferas no qual 40% são defeituosas (ou de 2.ª categoria). O valor esperado

GRAFICO — I



r = numeros de peças defeituosa na amostra de 20 peças
t = tempo (horas)

do número de defeituosas em amostras de 20 será de 8. Logo, na primeira ou segunda amostras, a carta indicará o "descontrôle". Note-se que no contrôle tradicional, no qual geralmente uma única peça é examinada, se a porcentagem de peças defeituosas fôr de 40%, a probabilidade de uma peça escolhida ao acaso ser perfeita, ainda é de 60%. A probabilidade de passar o inspetor quatro vêzes por uma máquina, colhendo sempre uma peça perfeita, ainda é de $0{,}6^4 = 16\%$! Da urna que contém 40% de esferas pretas, tiram-se várias, uma a uma, verificando-se serem comuns as seqüências de 2, 3 e 4 esferas brancas. O aluno comprova o risco elevado que corre o industrial, quando utiliza o contrôle tradicional de uma única peça.

Alterando o tamanho da amostra e a porcentagem de esferas pretas da urna, introduzimos a noção de curva característica e de eficiência do contrôle, que permite determinar o tamanho da amostra que se deve empregar em face do risco que o industrial aceita correr de ver passar despercebida em uma amostra um descontrôle caracterizado por uma certa porcentagem p' de defeituosos.

Em relação ao contrôle de recepção, inúmeras experiências podem ser realizadas. A seguinte situação pode ser imaginada: um industrial deseja um material de bôa qualidade, que tenha no máximo 5% de peças de 2.ª qualidade; resolve tirar uma amostra de 20 peças e só aceitar o lote, se encontrar nessas 20, no máximo uma peça defeituosa (1/20 = 5/100).

Êsse procedimento, que pode parecer lógico a alguns, acarreta ao industrial um risco de 7% de aceitar um lote que tenha 20% de peças de 2.ª categoria (conforme vimos, se p = 0,20 e n = 20, a probabilidade de ter 0 ou 1 peça defeituosa é 0,012 + 0,058 = 0,07). O terceiro aluno encontrou 10 de tais lotes, nos 100 que examinou. (Veja-se coluna 5, quadro I).

Introduzimos assim o conceito do risco do comprador, e de modo semelhante, o de risco do vendedor e, daí, como determinar cientìficamente um plano de inspeção de modo a correr determinados riscos pré-determinados. Em seguida, após escolhido um plano de inspeção, outra vez a urna é empregada, a fim de que os alunos comprovem pràticamente que os riscos do comprador e do vendedor correspondem às frequências relativas de maus lotes aceitos e de bons lotes recusados.

Com a mesma urna podemos realizar experiências referentes a outras distribuição teóricas (hipergeométrica, de Poisson, etc.) bem como a inúmeras outras aplicações: como carta de contrôle do número de defeitos por unidade, número médio de peças a examinar por lote, curva da qualidade média dos lotes aceitos (em contrôle de recepção), etc.

* * *

3. EXPERIÊNCIAS COM DADOS — ESTATÍSTICA DE VARIÁVEIS

Imaginemos o pêso de uma peça (x) que varia no intervalo 100,1 — 100,6, conforme a distribuição de probabilidade da Tabela I, à qual podemos associar a distribuição do n.º de pontos que se obtém quando se lança um dado (Tabela II).

TABELA I

x	p
100,1	1/6
100,2	1/6
100,3	1/6
100,4	1/6
100,5	1/6
100,6	1/6

TABELA II

x	p
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

A média e variância dessa distribuição são dadas por:

$$\mu_1 = \Sigma\, xp = 1/6\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$$

$$\delta_1^2 = \Sigma\,(x - \mu_1)^2 p = \frac{1}{6}\,[(-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2]$$

$$x\ 2 = 2{,}92$$

A) *Teorema do limite central:*

Êsse teorema diz que a distribuição da soma de variáveis quaisquer, tende para a distribuição normal quando o número de variáveis tende para o infinito. A experiência abaixo mostrará que a soma de três variáveis que tenham a mesma distribuição retangular já pode ser considerada como obedecendo a uma distribuição normal.

Consideremos a variável X soma de pontos, quando se jogam três dados. Sua média e variância são dados por:

$$\mu = 3 \times 3{,}5 = 10{,}5$$

$$\delta^2 = 3 \times 2{,}92 = 8{,}76$$

A probabilidade de ter para X o valor 3, é a probabilidade de têrmos a face I nos 3 dados. Será pois igual a $(1/6)^3$ ou 0,0046.

De forma semelhante podemos calcular as demais probabilidades P, obtendo-se a distribuição apresentada nas colunas (2) e (3) da Tabela III.

TABELA III

(1) $\bar{x}$	(2) X	(3) P	(4) t	(5) δy	(6) y	(7) f/n
1,00	3	0,0046	— 2,54	0,0158	0,0053	0,011
1,33	4	0,0139	— 2,20	0,0355	0,0119	0,018
1,66	5	0,0278	— 1,86	0,0707	0,0237	0,037
2,00	6	0,0463	— 1,52	0,1257	0,0422	0,042
2,33	7	0,0695	— 1,18	0,1989	0,0669	0,074
2,66	8	0,0972	— 0,845	0,2790	0,0938	0,102
3,00	9	0,1157	— 0,507	0,3510	0,1180	0,120
3,33	10	0,1250	— 0,169	0,3933	0,1320	0,129
3,66	11	0,1250	0,169	0,3933	0,1320	0,118
4,00	12	0,1157	0,507	0,3510	0,1180	0,109
4,33	13	0,0972	0,845	0,2790	0,0938	0,094
4,66	14	0,0695	1,18	0,1989	0,0669	0,063
5,00	15	0,0463	1,52	0,1257	0,0422	0,039
5,33	16	0,0278	1,86	0,0707	0,0237	0,025
5,66	17	0,0139	2,20	0,0355	0,0119	0,012
6,00	18	0,0046	2,54	0,0158	0,0053	0,007

Considerando a distribuição de X como normal, com média $\mu = 10{,}5$ e desvio padrão $\delta = \sqrt{8{,}76} = 2{,}96$, obtemos as probabilidades da coluna (6), mediante o emprêgo da variável reduzida $t = \dfrac{X - \mu}{\delta}$, cujos valores estão na coluna (4), e da tabela de ordenadas da distribuição normal, da qual foram obtidos os valores que constam da coluna (5).

Verificamos a boa concordância entre as probabilidades apresentadas nas colunas (3) e (6), o que mostra que a variável soma de três outras que obedecem a distribuições retangulares já pode ser considerada normal.

Em seguida, distribuímos 3 dados a 10 alunos, de forma a obter as freqüências relativas referentes a 300 observações, cujos valores, apresentados na coluna (7), concordam razoàvelmente com os das colunas (3) e (6).

Note-se que para comprovar o teorema do limite central, basta apreciar as colunas (3) e (6), sendo realmente dispensável a participação dos alunos com as experiências que fornecem a coluna (7).

Entretanto, essas experiências são úteis não só para motivá-los mediante sua participação direta, como também para que sejam comprovadas as probabilidades das colunas (3) e (6), que foram deduzidas teòricamente.

B) *Distribuição de amostragem da média:*

A distribuição de amostragem da média ($\bar{x}$) que fornece qual a probabilidade de ocorrência dos valores de médias de amostras, é em seguida assimilada fàcilmente, mostrando que ao invés de ter notado na coluna (2) a soma dos pontos na amostra de três dados, poderíamos ter notado em uma coluna (1), a média da soma dêsses pontos. A distribuição da média dessa amostra de 3 elementos, já pode ser considerada normal, embora, a distribuição da variável no universo seja retangular.

C) *Composição de tolerâncias:*

A mesma experiência permite exemplificar a composição de tolerâncias como aplicação do teorema sôbre a soma de variâncias.

Se x for o pêso de uma peça cujos limites de tolerância são 100,1 e 100,6, vemos que o pêso de uma montagem não precisa ter 300,3 e 301,8 como limites de tolerância, conforme tradicionalmente se procede. Se adotarmos 300,4 e 301,7, só 1% das peças ($2 \times 0{,}0046 \simeq 0{,}01$), estarão fora dêsses limites. Vice-versa, se mantivermos 300,3 e 301,8 como limites de tolerância para o pêso da montagem, poderemos adotar limites de tolerância mais amplos para o pêso de cada peça.

D) *Carta de contrôle da média:*

Imaginemos uma peça cujo pêso obedece à distribuição apresentada nas Tabelas I e II, sendo os limites de tolerância para x: 100,1 e 100,6 ou 1 e 6, considerando-se sòmente a fração que ultrapassa 100.

Suponhamos que haja uma desregulagem na fabricação, e que a nova distribuição seja x, p', de média $\mu' = \frac{1}{6}(3 + 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6) = 4{,}83$.

TABELA IV

x	p'
1	0
2	0
3	1/6
4	1/6
5	2/6
6	2/6

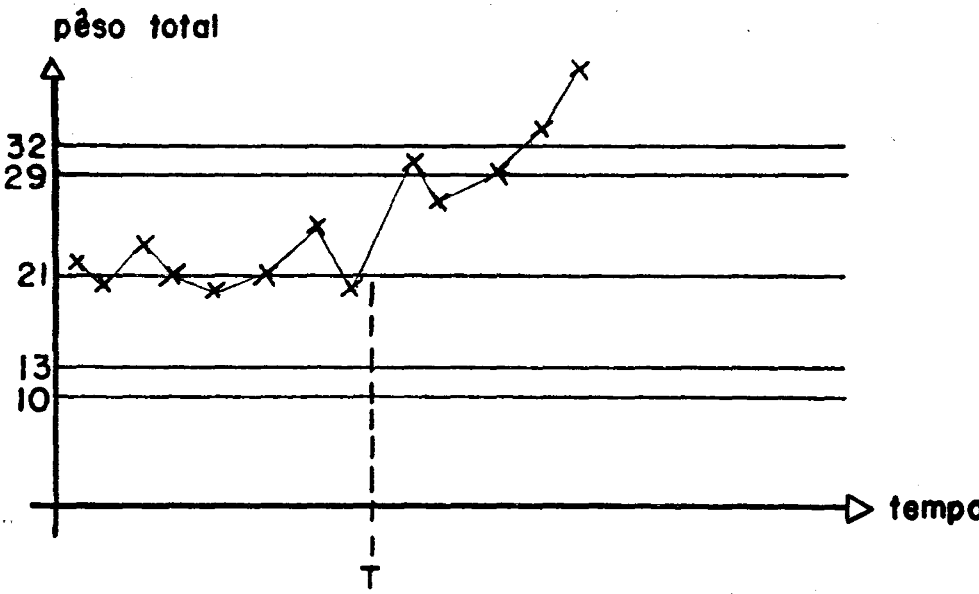
O contrôle tradicional, que consiste em examinar uma peça de quando em vez, dificilmente descobriria êsse descontrôle, que seria, porém, imediatamente evidenciado em uma carta de contrôle de médias.

Essa carta funciona de modo semelhante à do número de peças defeituosas. Retiram-se a intervalos regulares amostras de n peças. Se a média da amostra fôr exterior aos limites de ação, julga-se que houve descontrôle. Se a média cair entre os limites de ação e de advertência, retira-se imediatamente uma segunda amostra, etc. Os limites de advertência e de ação são tais que a probabilidade de ter uma média que lhes seja exterior, devido sòmente ao acaso é de ordem de 2,5% e 0,1%, respectivamente. Adotaremos amostras de n = 6 peças. Nesse exemplo de pêso de peças, ao invés de fazermos uma carta de contrôle de médias, faremos uma carta de contrôle de pêso total. Ora, a média é igual ao pêso total dividido por 6, logo o pêso total é 6 vêzes a média, donde marcaremos em nossa carta os limites da carta da média, multiplicados por 6 (veja-se o gráfico 2).

Ter o pêso de 6 peças que obedecem à fabricação normal, corresponde a somar o número de pontos que se obtém quando se jogam 6 dados perfeitos, isto é, de face I, II, ... VI. Assim procedemos diversas vêzes obtendo os pontos marcados na carta até à vertical T.

Suponhamos que no instante T tenha ocorrido um descontrôle na fabricação, cujo pêso passa a obedecer à distribuição apresentada na Tabela IV. Distribuem-se então aos alunos, dados especiais, em cujas faces estão marcados: III, IV, V, V, VI, VI. Jogando-se 6 dêsses dados, logo se perceberá o descontrôle, pois os pontos vão alcançar e ultrapassar os limites superiores do gráfico.

GRÁFICO- II



Utilizando-se dados marcados IV, V, VI, VII, VIII, IX, (conforme vemos na figura 4) temos a representação de um forte descontrôle, que passaria ainda despercebido com probabilidade de 50% na primeira passagem do inspetor de qualidade que examinasse uma única peça. Já na carta de contrôle acima figurada, a desregulagem seria imediatamente descoberta, pois a soma de pontos iria se distribuir em tôrno de 39.

4. CONCLUSÃO

Deixamos de apresentar aqui inúmeras outras experiências conhecidas e mais simples, porém também altamente ilustrativas.

Na Escola Fluminense de Engenharia, por exemplo, em uma das aulas práticas de Estatística, cada grupo de 10 alunos recebe peças (hastes de aço) cujo comprimento obedece à distribuição normal. Utilizando um paquímetro com a precisão de 0,1 mm, cada aluno mede 100 peças e grupa os valores numa tabela, cujos limites de classe são comuns a todos os alunos. Em seguida, cada aluno constrói seu histograma e calcula a média e o desvio padrão.

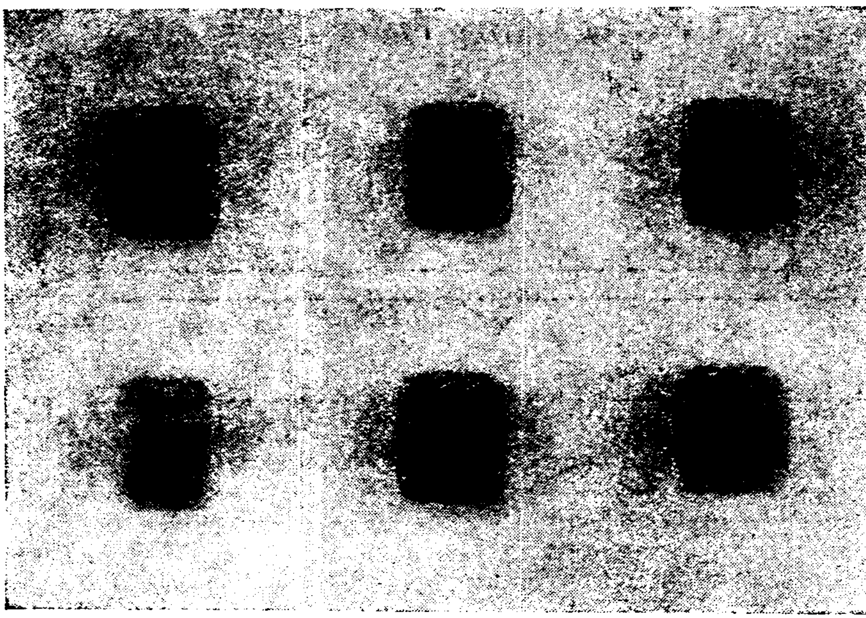


FIGURA 4

Comparam-se então os histogramas individuais, que em geral fogem sensìvelmente da forma normal, em virtude de terem resultado de 100 medidas sòmente. Como os limites de classe são comuns, com os 10 histogramas traçamos um único, que resultando de 1000 medidas, se aproxima bastante da forma normal, que seria obtida se pudéssemos aumentar indefinidamente o número de observações e fazer o intervalo de classe tender para zero. Assim, êsses alunos assimilam definitivamente o que significa dizer que uma variável obedece à distribuição normal, pois "viram" como isso ocorre com os comprimentos das hastes quando n aumenta.

Com as médias e desvios padrões calculados, realizam-se testes referentes às distribuições de médias e de desvios padrões. Constata-se por exemplo que pràticamente tôdas as médias estão no intervalo $\mu \pm 3\ \delta\ /\ \sqrt{n}$ onde: μ = média das médias δ = média dos desvios padrões e n = 100 (tamanho da amostra).

Daí traça-se uma carta de contrôle de médias, de limites $\mu \pm 3\ \delta\ /\ \sqrt{n}.$

Também se comprova a tabela de áreas da curva normal de média μ e desvio padrão δ, calculando qual a probabilidade de ocorrência de valores em dada classe central. Êste valor estará próximo da frequência relativa dessa classe, obtida por cada um dos alunos e mais próximo ainda a respectiva freqüência relativa para os resultados obtidos pelos 10 alunos, em virtude da lei dos grandes números (quando aumenta o número de observações, a freqüência relativa tende para a probabilidade teórica, obtida para a distribuição normal, na tabela das áreas).

Além disso, a diferença entre a frequência relativa e a probabilidade teórica (p) deve estar no intervalo $p \pm 3 \sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}$ pois a distribuição binomial pode confundir-se com a normal quando $np \geqslant 5$ (o que ocorre no caso, pois $n = 100$ e escolhemos uma classe em que $p > 0{,}05$).

Note-se quantas propriedades podem ser fixadas por meio dêsse simples exercício.

O Curso de Estatística torna-se assim uma experiência excitante para os alunos, pois as leis são redescobertas por êles próprios, com experiências reais, e intuitivas, o que lhes fará assimilar principalmente a utilidade prática dessas leis.

Além disso, a utilização dos métodos fundamentais da Estatística pode ser compreendida pràticamente sem nenhuma base matemática, evitando a demonstração de alguns teoremas, que podem ser sòmente explicados por meio de exemplos simples. Disso temos experiência pessoal, em curso que ministramos a mestres, geralmente só com instrução primária, na Usina de Volta Redonda, da Companhia Siderúrgica Nacional.

Assim, é de se desejar que o ensino atualizado dos princípios básicos da Estatística Matemática seja eficazmente ministrado em nossas Escolas Superiores. A falta de base matemática não é um empecilho grave, e a indiscutível dedicação dos professôres, aliada a exemplos práticos do tipo dos que aqui foram apresentados, poderá saná-la.

SUMMARY

The purpose of this paper is to indicate the advantages of using practical experiments in teaching Mathematical Statistics. The article shows, also, the possibility of presenting through the use of such experiments, to students with insufficient mathematical trainning, the fundamental concepts and the major applications of Statistical Analysis.