OS ÊRROS EM SISTÊMAS INSUMO-PRODUTO DE LEONTIEF (*)

DAVID CARNEIRO JR. (**)

Várias entidades advogam a utilização das tábuas de insumo produto para planejamento econômico, como por exemplo a Cepal |38|, |39|. O Bureau of Labour Statistics tem envidado grandes esforços e recursos para aprimorar os dados das tábuas de que dispõe relativamente à Economia Americana, bem como realizado substanciais trabalhos de pesquisa em tôrno de vários problemas que permanecem insolúveis, empregando a última disponível. Vários países já enveredaram pelo caminho da obtenção de dados para a elaboração de tábuas que representem suas economias. Outros publicaram tábuas prévias, como é o caso da Espanha que já conseguiu uma com reduzido número de setores |47|.

Algumas experiências nacionais foram reunidas no volume editado por T. Barna |5|.

Utilizações do modêlo de Leontief a problemas mais restritos que o planejamento econômico global tiveram aparente sucesso; isto aumenta o interêsse pelo estudo de suas aplicações e deficiências. O exemplo de previsão de padrões de emprêgo para a economia americana é especialmente útil em economias capitalistas |18| bem como o da absorção de grande número de imigrantes que enfrentou o govêrno de Israel |21|. Do outro lado estão os casos extremos de planejamento em economias socialistas |27| ou de planejamentos regionais como o estudo realizado pelo govêrno americano para a Itália Meridional |9| e |10|.

(*) «A Survey of the Literature on Input-Output Analysis with special reference to the problem of errors». University of Birmingham (England), Maio 1959.
Dissertação para o gráu de Master of Social Science.

(**) Professor Catedratico da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade do Paraná.

O modêlo permite uma descrição geral de uma economia de produção e fornece elementos detalhados acêrca da interdependência estrutural dos setores produtivos: a produção de uma tonelada de aço exige certa quantidade de carvão; para produzir esta quantidade de carvão é necessário consumir aço, o que vai exigir mais carvão e conseqüentemente mais aço e assim por diante |12|. Se todos êstes efeitos diretos e indiretos forem conhecidos, é possível estimar os efeitos sôbre tôdas as indústrias, da expansão (ou contração) de uma indústria particular. Neste sentido se tem um exemplo simples de um modêlo de equilíbrio geral com possibilidade de aplicação de modelos teóricos que dependiam de volumosos cálculos numéricos.

O objetivo que temos em vista neste artigo é o de pesquisar os resultados obtidos relativamente à influência dos erros sôbre as soluções numéricas, bem como de verificar até que ponto as soluções obtidas com as tábuas de insumo-produto se comparam vantajosamente com soluções dadas por meios de técnicas mais simples, como regressão múltipla, nas tentativas de previsão.

A falta de literatura em língua nacional relativa ao assunto, cremos justificar a apresentação de um trabalho desta natureza.

O artigo está subdividido em quatro secções: na primeira descrevemos o modêlo, as fontes possíveis de erros e as influências dos erros sôbre as soluções finais. A segunda dá mais atenção ao problema da agregação; a terceira dirige-se para a questão da universalidade das hipóteses fundamentais; por fim, a quarta apresenta descrição de testes efetuados com as tábuas americanas por diversos autores. Seguem conclusões.

Imprimimos ao trabalho um caráter de formalismo matemático. Os aspectos econômicos mais importantes emergem como interpretação das propriedades matemáticas do modêlo. Algumas hipóteses de natureza econômica são apresentadas logo de início — são os postulados sôbre os quais êle se apóia. Esta apresentação limita o interêsse e a extensão do trabalho, porém atribui mais precisão à argumentação. A leitura proveitosa do trabalho exige conhecimentos de álgebra de matrizes.

O MODÊLO E ERROS

1. — DESCRIÇÃO GERAL DO MODÊLO.

Consideremos a economia subdividida em n "indústrias pequenas" (*) e as transações entre elas (e dentro das próprias indústrias, isto é, transações em bruto) em unidades físicas. Se j, k são as indústrias supridoras e insumidoras respectivamente e x_{jk} a quantia do produto de j vendido a k; se fôr possível medir estas quantias para j, k variando a n.ª indústria, formamos uma tábua de n^2 elementos não-negativos que chamamos matriz de transações e representamos por

$$X = ||x_{jk}|| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Manteremos a convenção de atribuir letras minúsculas aos elementos de vetores ou matrizes e letras maiúsculas aos próprios vetores ou matrizes; quando seja necessário, os elementos serão especificados por subscritos j, k denotando linha e coluna ou indústrias que ofertam e demandam respectivamente. Além disso, duas barras verticais indicam matriz.

Como consideramos apenas "indústrias" a matriz (1) não fornece todos os elementos do fluxo de mercadorias, incluídos no produto de cada uma. Temos que considerar o grupo de unidades exógeno ou não produtivo constituído pelas famílias, govêrno, investimentos e exportação. (**) Cada indústria j vende seu produto em parte às demais indústrias (transações inter-industriais) e em parte ao grupo exógeno (vendas a demanda final). Consideremos êste último componente do produto e com êle formemos uma coluna de elementos y_j (parte do produto em unidades físicas que vai ou flui da indústria j diretamente a demanda final) para j variando entre 1 e n; esta coluna é chamada "vetor de demanda final" ou "cêsta de bens". (Basket of goods).

Desta consideração temos:

$$x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jn} + y_j = x_j \tag{2}$$

para j = 1, 2, ..., n, isto é, um sistema de n equações que pode ser pôsto sob a forma

$$\sum_{k=1}^{n} x_{jk} + y_j = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ou, em forma matricial:

$$||x_{jk}|| \, [1] + [y_j] = [x_j] \tag{4}$$

(*) Empregamos as expressões de |8| para uniformizar a terminologia também ao tratar do problema da agregação.

(**) O tratamento das exportações não é mesmo em tôdas as tábuas. Não consideraremos porém aqui êsse problema que está bem explanado em |10| e |16|, adaptado a circunstâncias distintas.

em que agora $||x_{jk}||$ é a matriz quadrada de (1), [1] é um vetor coluna de n unidades, $[y_j]$ é vetor coluna cujas n componentes são as vendas por tôdas as indústrias a demanda final e [x] um vetor coluna cujas n componentes são os produtos de tôdas as n indústrias.

Note-se que para (2), (3) ou (4) apresentarem sentido econômico, devemos ter:

$$\begin{array}{lll} x_{jk} \geqslant 0 & \text{a)} & \\ y_j \geqslant 0 & \text{b)} & \\ x_j \geqslant 0 & \text{c)} & \qquad (5) \end{array}$$

O modêlo que (4) representa é o modêlo "aberto" e "estático" de Leontief |28|.

No modêlo "fechado", o setor exógeno era considerado como "produtivo", isto é, de acôrdo com nossa terminologia, como uma indústria à qual correspondessem elementos $x_{j,n+1}$. Tôdas as tábuas existentes são do primeiro tipo.

O modêlo é estático porque as inversões estão incluídas no vetor de demandas e não existe têrmo algum para exprimir as velocidades de alteração do produto |1| |31|.

Como fizemos com o vetor de demanda final, podemos considerar cada indústria k demandando produto de tôdas as j = 1, 2, ..., n. Isto significa simplesmente que a indústria k compra quantidades diferentes em unidades físicas diferentes (toneladas, metros, litros, kwh, metros cúbicos, unidades etc.). Se as transações são efetivamente consideradas em unidades físicas, elas deixam de ser homogêneas quando consideradas como insumo ao passo que eram homogêneas como produto ou em outras palavras, não são aditivas ao longo de colunas (as colunas de (4) mas o são ao longo de linhas. A única forma de satisfazer essa condição de homogeneização tanto para insumos como para produtos é através da valoração em unidades monetárias. Esta é, na verdade, a forma como os elementos da matriz de transações e do vetor de demanda final são obtidos geralmente, com a vantagem adicional de permitir uma rápida aferição das Estatísticas de Renda e Produto Nacionais |36|. Podemos então dizer que a indústria k compra da indústria j (ou que j vende a k) quantidades x_{jk} (j,k = 1, 2, ..., n) medidas monetárias e que a equação (4) e as condições (5) permanecem válidas nessas novas unidades. Daqui por diante sempre nos referiremos a (4) e (5) como se fôssem definidas em têrmos de valor.

i. as funções de produção de tôdas as indústrias são lineares e homogêneas;

ii. não existem produtos simultâneos (*) (joint products); e chamemos

$$a_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_k} \tag{6}$$

os coeficientes de produção que representam o valor dos insumos da indústria j necessários para produzir uma unidade em valor do produto da indústria k. Quando todos os coeficientes de produção, dados por (6) forem substituídos em (2) teremos o sistema (4) transformado no seguinte:

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x^{o}_1 + a_{12}\, x^{o}_2 + \ldots + a_{1n}\, x^{o}_n + y^{o}_1 = x^{o}_1 \\ a_{21}\, x^{o}_1 + a_{22}\, x^{o}_2 + \ldots + a_{2n}\, x^{o}_n + y^{o}_2 = x^{o}_2 \\ \text{———} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{———} \quad \text{———} \\ a_{n1}\, x^{o}_1 + a_{n2}\, x^{o}_2 + \ldots + a_{nn}\, x^{o}_n + y^{o}_n = x^{o}_n \end{array} \tag{7}$$

o qual, em forma matricial se torna:

$$AX^{o} + Y^{o} = X^{o} \tag{8}$$

ao qual acrescentemos um superscrito ° para indicar que a matriz de transações, o vetor de demanda final e o vetor de produtos utilizados na estimação dos coeficientes de produção são referentes a um certo ano-base. A matriz A em (8) é a matriz estrutural ou de "coeficientes tecnológicos", é quadrada de ordem n e seu elemento típico é fornecido por (6), em que x_{jk} e x_k devem ser entendidos medidos no ano-base.

Se a condição de Hawkins-Simon é satisfeita |12|, a equação (8) pode ser escrita na forma

$$X^{o} = (I - A)^{-1}\, Y^{o} = BY^{o} \tag{9}$$

em que I é a matriz identidade de ordem n, dando a "solução" no ano base.

(*) É esta uma hipótese pouco realista ao passo que (i) exprime uma simples, identidade contábil em qualquer ano. Em alguns casos de produtos simultâneos é possível separar o produto e melhorar as condições (quando existem distinções claras de departamentos ou subsidiárias). Em outros podem ser tratados como insumos negativos |30| (produção de eletricidade como subprodutos de aço).

Supondo mais: iii. que não há substituição entre insumos em todas as industrias;

o que implica a fixação da estrutura produtiva representada pela matriz A, e portanto da inversa de Leontief correspondente. (*)

Desta forma podemos compor novos vetores de demanda final (diferentes do observado no ano base) e com uma equação como

$$X^* = XY \qquad (10)$$

tentar uma solução geral, isto é, níveis de atividade correspondendo a este vetor Y e a uma inversa de Leontief dada obtida de uma matriz estrutural fixa.

Abandonamos o superscrito sôbre Y e X para acentuar que ambos representam respectivamente qualquer vetor de demanda final obtido através de condições que são exógenas ao próprio modêlo e o vetor de produtos calculados através de uma estrutura produtiva "congelada". Ao mesmo tempo acrescentamos um superscrito * a X para indicar que é um vetor estimado e não observado experimentalmente.

Podemos imaginar que os componentes do vetor X^* difiram de seus valôres observados concretamente. Se X^* foi obtido pelo produto de um certo vetor de demanda final, que pode ser um vetor correspondente a um ano qualquer, afastado do ano-base e observado experimentalmente, por uma inversa de Leontief, como em (10), e se X é o vetor correspondente com seus componentes resultando de medidas efetivamente realizadas naquele ano, êles podem diferir, isto é,

$$X^* - X \neq 0 \qquad (11)$$

em que 0 é um vetor nulo.

Desejamos investigar as fontes das discrepâncias entre X^* e X e se possível os sinais das diferenças expressas por (11).

2. — OS ERROS.

Ao examinar as equações (6), (9) e (10) identifiquemos algumas óbvias fontes de êrro para em seguida verificar os seus efeitos.

(*) A matriz $A = |a_{jk}|$ que aparece em (8) e (9) é a matriz estrutural, a inversa de $(I - A)$, isto é $B = (I - A)^{-1}$ é chamada a inversa de Leontief correspondente a A.

Observemos que (6) fornece os coeficientes de produção e portanto a matriz estrutural com base em dados coligidos durante um certo ano-base arbitràriamente escolhido.

A partir da matriz calculamos seu como mostra a equação (9) e uma vez conhecido êste seu produto por um vetor de demanda final diferente daquele que foi observado no ano-base, fornece o vetor X* correspondente (10).

Somos assim levados a considerar as seguintes possíveis fontes de erros.

a) A matriz inversa de Leontief B pode conter erros de duas espécies:

1. A matriz estrutural A contém alguns elementos com erros os quais afetarão a inversa de Leontief correspondente; tais erros provêm de qualquer um ou de ambos os elementos que aparecem em (6) e cuja divisão fornece os a_{jk}.

2. O método de cálculo da inversa pode introduzir erros: ao passar de $(I - A)$ para $(I - A)^{-1}$ numerosas multiplicações são efetuadas (são da ordem de n^3, onde n é a ordem da matriz estrutural) e a necessidade de limitar o número de casas decimais dos algarismos empregados em tais operações (limite êsse que é uma contingência da máquina de cálculo empregada) pode causar acúmulo de erros; por outro lado em determinadas circunstâncias a inversa é obtida através do emprêgo de expressões aproximadas de soluções convergentes também causando erros.

β) O vetor de demanda final pode conter erros de observação ou ser, digamos, muito afastado da realidade futura se é o caso de uma projeção ou previsão de valôres futuros.

δ) As hipóteses podem não corresponder à realidade e a equação (10) não ser válida enquanto que (9) é o resultado de uma identidade contábil originada em (7) e (8) e cuja validez independe das hipóteses. Neste caso, mesmo se o vetor de demanda final "estimado" é correto, os resultados obtidos através de (10) podem ser desprovidos de significado.

A hipótese (iii) é crucial porque implica a validez da mesma inversa de Leontief e portanto da mesma matriz estrutural mesmo tendo havido substituição entre insumos de um ano para outro.

Uma ulterior fonte de erros deve ser considerada: até agora descrevemos nossa economia como se estivesse subdividida em n indústrias que chamamos "indústrias pequenas"; devemos notar que isto já implica uma certa dose de "agregação" (*) porque tal número n não se refere às unidades produtoras ou firmas efetivamente existentes mas a uma combinação delas de maneira a se ter estruturas mais ou menos homogêneas de produtos ou de insumos. Mesmo esta não é a forma como as tábuas são construídas. A economia é geralmente subdividida em $N < n$ "indústrias grandes" (também chamados "setores" produtivos) em que N pode ser da ordem de 40 ou menos, as tábuas americanas mais detalhadas são da ordem de 200 setores. Surgem então setores apresentando denominações genéricas do tipo "Produtos Alimentícios e de Agricultura", "Indústria do Aço", "Indústria da Construção", etc. Então:

δ) As matrizes com que se opera efetivamente são agregadas; isto pode ser uma fonte de erros por si ou no momento em que seja necessário conhecer as partes componentes dos setores que se acham agregados.

3. — ERROS NA MATRIZ ESTRUTURAL.

Tentemos identificar as fontes de erros na matriz estrutural dada por (8). Observando as equações fundamentais (6) e (10) podemos considerar, sempre no ano-base, o seguinte:

i. — Os elementos da matriz de transações intersetoriais x^o_{jk} podem conter erros devidos a falhas no processo de coleta de dados mesmo quando imaginamos que tanto o vetor de demanda final Y^o quando o vetor de produtos X^o estejam corretos |15|. É hipótese plausível porque X^o baseia-se em estatísticas de melhor qualidade, as dos elementos de Y^o seguindo-lhe no grau de precisão, os de $||x^o_{jk}||$ sendo os menos precisos.

ii. — todos os três conjuntos de elementos, isto é, da matriz de transações intersetoriais, do vetor de demanda final e do vetor de produtos no ano-base, utilizados no cálculo dos a_{jk} podem conter erros, seja isolada, seja simultâneamente.

Consideremos separadamente cada caso:

i. — quando apenas a matriz de transações intersetoriais contiver erros, chamemos x^*_{jk} seus elementos, onde

$$x^*_{jk} = x^o_{jk} + v^o_{jk} \tag{12}$$

sendo x^o_{jk} os valores verdadeiros, porém desconhecidos, das transa-

(*) Num sentido que tornaremos mais claro em seguida.

ções, e v^{o}_{jk} erros no ano-base; o sinal dos erros pode ser positivo ou negativo e mesmo alguns ser nulos.

A partir da hipótese que somando os x_{jk} aos valôres corretos de demanda final (ao longo de linhas) formamos o produto final desprovido de erros, obtemos:

$$||x^{*}_{jk}||\ [1] + [y^{o}_{j}] = [x^{o}_{j}] \tag{13}$$

em que outra vez, $|x^{*}_{jk}|$ é a matriz quadrada, [1] é uma coluna de unidades

$[y_j]$ e $[x_j]$ são vetores coluna.

Daí obtemos:

$$a^{*}_{jk} = \frac{x^{*}_{jk}}{X^{o}_{k}} \quad \text{ou} \quad a^{*}_{jk} = a_{jk} + e_{jk}$$

isto é, os coeficientes estruturais contêm um elemento êrro e_{jk} que se origina apenas de v^{o}_{jk} em (12).

A equação (13) indica que em qualquer linha os erros devem compensar-se, isto é, se houver qualquer $v^{o}_{jr} > 0$ para lagum $k = r$, haverá pelo menos um $v^{o}_{js} < 0$ correspondendo a pelo menos um $k = s$, tais que

$$v^{o}_{jr} + \sum_{s \neq r} v^{o}_{js} = 0$$

Isto é equivalente a dizer que os erros em qualquer linha têm soma zero.

A ser isso verdade, os elementos da matriz estrutural a^{*}_{jk} conterão erros por excesso ou por falta em qualquer linha de tal maneira que erros de sinais opostos apareçam em pelo menos dois elementos. Se, como é o caso que estamos estudando, as tábuas são obtidas em unidades monetárias, o mesmo efeito aparece ao longo das colunas, isto é, qualquer êrro em um elemento a^{*}_{jk} será compensado em algum ou em todos os demais elementos da mesma coluna k de tal maneira que

$$e^{o}_{rk} + \sum_{s \neq r} e^{o}_{sk} = 0$$

Veremos em seguida quais serão os efeitos destes erros nos elementos da inversa. Antes de passar à seção seguinte devemos mencionar o seguinte: pode ocorrer que não haja êrro de espécie alguma seja em x^0_{jk} ou em x^0_k (caso limite hipotético) mas na operação de dividi-los um pelo outro seja necessário aproximar o quociente a um certo número de casa decimais ou de algarismos significativos, em cujo caso se estarão introduzindo erros nos elementos da matriz estrutural.

ii. — Passemos ao caso geral.

a. — Suponhamos que no ano-base nossa matriz foi obtida com os elementos do vetor de produtos contendo erros de qualquer espécie (alguns estoques por exemplo, foram reduzidos e o fato não foi registrado pelas estatísticas de produção). Expressemos formalmente esta condição como segue:

$$X^* = X^0 + S^0 \tag{14}$$

onde X^* é o vetor coluna de produtos no ano-base, X^0 o verdadeiro, mas desconhecido vetor e S^0 um vetor coluna de desvios em relação aos valôres corretos, cujos elementos supomos serem todos não — nulos, isto é,

$$S^0 > 0 \quad (*)$$

Teremos então para todos os elementos de A^* (onde * indica a existência de erros):

$$a^*_{jk} = \frac{x^*_{jk}}{x^*_k} \tag{15}$$

Torna-se claro que se (18) é verdadeira, devendo coexistir simultâneamente com (8) que por sua vez provam de (4), sendo todos os seus elementos expressos em unidades monetárias, os elementos de S^0 devem ser compensados no outro têrmo de (4), quer nas transações intersetoriais, quer no vetor de demanda final ou mesmo em ambos. Isto se torna claro através da expressão

$$||x^0_{jk} + s^0_{jk}||\ [1] + [y^0_j] = [x^0_j + s^0_j]$$

fornecendo, em (20):

$$a^*_{jk} = \frac{x^0_{jk} + s^0_{jk}}{x^0_k + s^0_k} = \frac{x^0_{jk}}{x^0_k + s^0_k} + \frac{s^0_{jk}}{x^0_k + s^0_k} \tag{16}$$

(*) Para qualquer vetor M, convencionamos que M=0 se todos os seus elementos forem iguais a zero: $M \geqslant 0$ se todos os seus elementos, forem positivos ou nulos;
$M \geqslant 0$ quando pelo menos um elemento é positivo — v. |44|.

onde verificamos que o êrro s^{o}_{k} será por si mesmo causador de um erro em a^{*}_{jk} (para todos j) o qual o torna menor que o verdadeiro valor a_{jk} enquanto que o elemento compensado s^{o}_{jk} que corresponde a s^{o}_{j}, isto é,

$$s^{o}_{j} = \sum_{k} s^{o}_{jk}$$

tenderá a aumentar a $_{jk}$.

Tudo que podemos dizer é que seus efeitos aparecem em direções opostas, mas que s^{o}_{k} aparece no denominador (e para um valor particular de k pode ser nulo) enquanto que s^{o}_{jk} no numerador de (16) correspondendo a compensação para um s^{o}_{j} $(j = k)$ portanto qualquer um pode ser maior do que outro, e os erros em a_{jk} podem ser de sinal positivo ou negativo.

b. — Análise similar é válida quando os s^{o}_{j} são compensados no proprio vetor de demanda final não na matriz estrutural.

Teríamos então, simultâneamente cpm (14):

$$Y^{c} = Y^{o} + S^{o}$$

o que fornece:

$$||x^{o}_{jk}|| \, [1] + [y^{o}_{j} + s^{o}_{j}] = [x_{j} + s^{o}_{j}]$$

Verificamos que em (15) apenas o denominador é diferente, sendo aumentado de uma quantidade $s^{o}_{j} \geqslant 0$, e o efeito será o de reduzir os verdadeiros valôres dos coeficientes a_{jk}. Corresponde êste ao menos provável dos casos de deslocamento de dados (misalocation).

O caso mais provável ocorre quando os erros no vetor de demanda final são compensados na própria matriz estrutural como indicado abaixo:

$$||x^{o}_{jk} - s^{o}_{jk}|| \, [1] + [y^{o}_{j} + s^{o}_{j}] = [x^{o}_{j}]$$

Então, se os s^{o}_{jk} têm todos o mesmo sinal, os erros nos a_{jk} terão também o mesmo sinal. Os sinais serão diferentes no caso de ocorrência simultânea de sinais opostos em s^{o}_{jk}.

Todos êstes casos focalizam a necessidade de estimação acurada tanto dos elementos do vetor de demanda final quanto nos do vetor de produtos no ano-base a fim de evitarem-se erros devidos a deslocamentos de elementos dentro desses vetores.

4. — EFEITOS DOS ERROS SÔBRE A INVERSA.

Iniciaremos esta análise pela introdução de método devido ao Dr. J. Wise. (*)

De acôrdo com |15| chamamos A uma matriz estrutural cujos elementos não contêm êrros e A^* a uma matriz estrutural observada concretamente e que é igual à matriz A mais outra matriz de êrros E não vazia e da mesma ordem que A.

Estas matrizes gozam das propriedades seguintes:

$$A^* = A + E$$

E pela definição de inversa de Leontief:

$$B = (I - A)^{-1} \tag{17}$$
$$B^* = (I - A^*)^{-1} \tag{18}$$

para ambas A e A^* supondo que satisfaçam as condições de Leontief.

A inversa B^* conterá portanto erros devidos a E, os quais formam uma outra matriz de erros D que é dada por:

$$D = B^* - B = B(I - EB)^{-1} - B = BEB(I - EB)^{-1} = \quad (19)$$
$$= (I - BE)^{-1} - B = (I - BE)^{-1}\, BEB \quad (20)$$

Consideremos agora os produtos EB ou BE. Representam êles os produtos escalares de linhas (colunas) da matriz de erros por colunas (linhas) da inversa de Leontief:

$$EB = |\Sigma_{i_1}\, e_{ji_1}\, b_{i_1 k}| = ||c_{jk}| \tag{21}$$

Introduzindo algumas hipóteses simplificadoras sôbre as expectâncias:

$$\underset{k}{\text{Expect}}\ (e_{jk}) = 0$$

$$\text{ou } \underset{j}{\text{Expect}}\ (e_{jk}) = 0$$

$$\text{e} \quad \text{var}(e) = \delta^2_e$$

(*) Comunicação pessoal.

sendo constante a variança de erros para tôdas as linhas (ou colunas);

$$\mathrm{var}(b) = \delta^2_b$$

sendo constante a variança para tôdas as colunas (ou linhas) da inversa;

$$r_{eb} \neq 0$$

isto é, havendo uma correlação entre elementos das colunas (linhas) da matriz de erros; e os elementos de linhas (colunas) da inversa verdadeira.

Tomemos agora $\max \delta_e \; \delta_b r_{eb} = nc$ para o valor extremo do elemento típico do produto matricial EB e formemos esta matriz como sendo:

$$EB = nc\,[1]\;\;|1| = ncii' \tag{22}$$

em que $i = [1]$ é um vetor coluna de unidade e $i' = |1|$ seu transposto.

Nestas condições, como elemento o típico de D (19) é dado por

$$b^*_{jk} - b_{jk} = \sum_{i_1 i_2} b_{ji_1} e_{i_1 i_2} b_{i_2 k} + \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} b_{ji_1} e_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} e_{i_3 i_4} b_{i_4 k} + \ldots \tag{23}$$

desenvolvendo em série de potências $(I - EB)^{-1}$ |41|, e substituindo (22) em (23) e voltando à forma matricial, obtemos uma progressão geométrica que fornece:

$$B^* - B = \frac{nc}{1\text{-}n^2c} \;.\; Bii' \tag{24}$$

Esta expressão pode ser também obtida com o produto BE e (20) conduzindo a resultado semelhante. É possível que êste enfoque traga alguma contribuição para a análise do comportamento dos erros na inversa de Leontief porque (24) fornece um valor extremo para os erros em B. Seria de interêsse verificar os efeitos de abandonar certos valores desprezíveis em A (fazendo-os iguais a zero) em (21) e sôbre os elementos de B^* — B.

Esta maneira de encarar o problema fornece também um método simples de obter uma expressão devida a Waugh |40| citada em |15|. Consideremos que todos os elementos na matriz de erros E sejam iguais a *e* por exemplo. Então

$$E = eii'$$

sendo a correspondente matriz de erros na inversa de Leontief, de acôrdo com (19) e (20), dada por:

$$\begin{aligned} B^* - B &= eBii'B(I - eii'B)^{-1} = \\ &= e(Bi)(i'B)(I - eii'B)^{-1} = \\ &= e(Bi)(i'B)(I - eS)^{-1} = \end{aligned} \qquad (25)$$

Onde os produtos Bi e i'B representam somas de elementos de linhas e colunas da matriz B respectivamente, de maneira tal que o elemento típico em (25) pode ser colocado sob a forma:

$$b^*_{jk} - b_{jk} = \frac{e\, R_j\, C_k}{1 - eS} \qquad (26)$$

onde R_j e C_k são as somas dos elementos da j.ª linha e da k.ª coluna da inversa verdadeira B, e S é a soma de todos os seus elementos.

Outro extremo pode ser obtido conforme Evans |15|. É o caso em que exprimimos o êrro máximo e em função da maior soma dos elementos de uma coluna e a ordem da matriz necessária a manter, na inversa estimada, tôdas as somas de colunas entre zero e a unidade, isto é, a fim de obter:

$$1 \geqslant C_m \geqslant 0$$
$$ne \geqslant 0$$

por adição: $1 \geqslant C_m + ne \geqslant 0$

portanto: $C \leqslant \dfrac{1 - C}{n} m$

Esta e a condição $1 - eS > 0$ nos fornecem

$$S < \frac{n}{1 - C_m} \qquad (27)$$

condição esta obtida por simples restrição sôbre o sinal, dadas a ordem da matriz e a máxima soma de elementos de colunas.

Nestas expressões C_m é qualquer soma de elementos de coluna de A, n a ordem da matriz e S, como anteriormente, a soma de todos os elementos da inversa.

Passemos agora às condições mais restrítas estudadas por Evans |16|.

Com objetivo de simplicidade de raciocínio e sem prejuízo para a generalidade, suponhamos que E seja composta de apenas um elemento não nulo.

Chamemos êsse elemento de e_{pq}; então

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e_{pq} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

e, de (7), obtemos o elemento característico de A^* que é dado por

$$a^*_{jk} = a_{jk} + e_{jk}$$

em que os e são definidos como

$$l_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{para } \begin{cases} j = p \\ k = q \end{cases} \\ \\ e_{pq} & \text{para } \begin{cases} j = p \\ k = p \end{cases} \end{cases}$$

Passemos agora à obtenção dos efeitos de E sôbre a inversa B^*. De (17) e (18) temos:

$$\begin{aligned} B^* &= |I - (A + E)|^{-1} = |(I - A) - E|^{-1} = \\ &= (I - A)^{-1} |I - E(I - A)^{-1}|^{-1} = \\ &= B(I - EB)^{-1} = (I\ BE)^{-1} B = \end{aligned}$$

As matrizes correspondentes de erros na inversa serão dadas por (19) ou (20) respectivamente.

Desenvolvendo em série (19) ou (20) obtemos o elemento típico do êrro na inversa de Leontief correspondendo ao efeito de e_{pq}, como sendo igual a:

$$b^*_{jk} - b_{qk} = \frac{b_{jp}\ e_{pq}\ b_{qk}}{1 - e_{pq}\ b_{qp}} \tag{28}$$

Desta expressão verificamos que se

$$\frac{1}{b_{qp}} = e_{pq} > 0$$

tôdas as diferenças entre elmentos da inversa estimada e da verdadeira serão positivos ou não serão afetados (*) dependendo de ser qualquer elemento b_{jp} ou b_{qk} nulo.

Por outro lado, se $e_{pq} < 0$ os erros fornecidos por (28) serão negativos ou permanecerão inalterados.

Consideremos agora o vetor de produtos estimado por meio de uma inversa contendo erros. Então, de acôrdo com o que foi dito,

$$X_{+} = B^{*}Y$$

ou

$$x^{*}_{j} = \sum_{r} (b_{jr} \neq e_{jr})\, y_{r} \tag{29}$$

Se tomarmos então apenas $e_{pq} > 0$, obtemos:

$$X_{+} \geqslant X \tag{30}$$

em que agora X_{+} é vetôr de produtos avaliado com uma inversa contendo um erro de sinal é positivo e X é correto.

De maneira análoga, se um $e_{pq} < 0$, teremos

$$X_{-} \leqslant X \tag{31}$$

em que X_{-} é o vetor de produtos avaliado com uma inversa cont ndo um êrro de sinal negativo e X é correto.

Se erros de sinal positivo e negativo existem simultâneamente na inversa de Leontief, chamando $X_{\pm}$ o vetôr de produtos a calculados com a sabida existência de tais erros; então a aplicação reiterada de (30) e (31) nos garante que

$$X_{+} \geqslant X_{\pm} \geqslant X_{-}$$

(*) Uma das propriedades das matrizes inversas de Leontief |35|, |43| consiste em que todos os seus elementos são não-negativos e ambas B^{*} e B são do mesmo tipo. Tôdas as matrizes para as quais o maior valor próprio de det. $(I - A) = 0$ sejam menores do que a unidade participam desta propriedade. Em particular, desenvolvendo $(I - A)^{-1}$ em séries de potencias de A, |41|, se verifica a validês da propriedade. Para propriedades destas matrizes, v. |43|.

Resultados análogos foram atingidos por Dwyer e Waugh |14| com referência a inversão de matrizes em geral e não apenas a matrizes de Leontief. Estes autores encontraram restrições para os erros na matriz inversa de Leontief (nossa expressão (28)) dada a matriz de erros E. No caso particular em que E se compõe de elementos iguais com o mesmo sinal, todos os elementos na inversa correspondente contêm erros do mesmo sinal que os elementos de E (sua tabela III, pág. 300 |14|). É interessante observar que êstes autores não pareciam conhecer na época os resultados acima apresentados e obtidos por Evans. Referem-se também ao caso de todos os elementos de uma matriz estrutural de Leontief conterem erros na mesma proporção. Ambos os casos são extremamente afastados da realidade após se ter conhecimento dos resultados de Evans.

5. — ERROS DE CÁLCULO.

O problema aqui é de natureza diferente. Dispomos de uma matriz estrutural a partir da qual, por métodos convenientes, obtemos a correspondente inversa de Leontief e desejamos investigar a natureza e a ordem dos erros que são introduzidos durante a inversão.

Há dois métodos fundamentais de obter uma solução ou a inversa. Um é o chamado da "solução geral" o qual consiste na inversão direta da matriz de Leontief e a partir desta obter-se o vetor de produtos. Em outras palavras, por um processo algébrico conveniente estimamos $(I - A)^{-1}Y$ simplesmente.

O outro é o da solução particular baseado na propriedade das matrizes de Leontief de serem passíveis de expansão em séries de potência, conforme foi demonstrado por Waugh |41| e outros.

Cada método tem seu campo de aplicação próprio e apresenta diferentes fontes de erros. Mencionaremos cada uma especìficamente.

i. — Consideremos o primeiro método. Desde que haja sido obtida a matriz A, a sua inversa correspondente é calculada e utilizada para tôdas as soluções. Todos os erros contidos nos elementos de A são mantidos congelados na inversa e quaisquer correções exigem inversão completamente nova o que aumenta considerável os custos de cômputo os quais podem mesmo atingir níveis proibitivos. Quando o método de solução geral é utilizado, é possível calcular a inversa pelo método de eliminação (*) ou mediante variantes do método de Gauss-Doolittle dependendo geralmente a escolha da ordem da matriz de que se dispõe e dos equipamentos mecânicos ou eletrônicos de cálculo.

É também teòricamente possível desenvolver em séries de potências; diretamente porém êste método não parece adequado para as técnicas modernas de cômputo eletrônico. Para maiores esclarecimentos sôbre o assunto, vale a pena ler a controvérsia levantada por Saibel e Berger e Evans em artigos de caráter polêmico |46|.

Logo adiante faremos referência com maiores detalhes ao método de desenvolvimento em séries de potências ao tratar do método da solução particular.

Devido a dificuldades de cálculo, a solução geral é usualmente obtida quando a ordem da matriz que se considera é elevada, como é o caso da matriz do B.L.S. (Bureau of Labour Statistics) cuja ordem é 190 x 190.

ii. — O método da solução particular. Todas as matrizes A que tenham o maior valor próprio de sua equação característica menor do que a unidade, podem ser desenvolvidas em série de potências |25|, |35|, |40|, |43|. A mesma propriedade se prova com base em certas propriedades das normas |41|. Na verdade não existe distinção entre os valôres próprios e as normas das matrizes de elementos positivos, 43|.

A fim de apresentar uma rápida demonstração das propriedades fundamentais de tais tipos de matrizes e de sua propriedade de serem desenvolvíveis em série de potências, nos basearemos na definição de normas.

Definimos normas, de acôrdo com Waugh e Neumann |41| e Goldstine |33|, de qualquer matriz P com elementos p_{ij}:

$$N(P) = \max_j \sum_i p_{ij}| \qquad (32)$$

o que fornece imediatamente:

$$|p_{ij}| < N(P')$$

(*) Êste método, descrito por Neumann e Goldstine |33| consiste na transformação da matriz A de um sistema linear no produto de outras três, isto é, A = BCD em que D é uma matriz semi-diagonal superior, C é diagonal e B é semi-diagonal inferior.

(notemos que aqui as barras verticais significam módulo do elemento p_{ij} ou seu valor absoluto).

Em geral podemos definir normas de variadas maneiras e não apenas por (32). Suas propriedades no entanto, sendo independentes da definição adotada, são principalmente as seguintes: dadas duas matrizes quaisquer P e Q, são válidas as relações seguintes:

$$N(P + Q) \leqslant N(P) + N(Q)$$
$$N(PQ) \leqslant N(P)\, N(Q) \qquad (33)$$

portanto:

$$N(P^m) \leqslant |N(P)|^m$$

Consideremos agora que $N(P) < 1$; então de (33):

$$\begin{aligned} N(1 + P + P^2 + \ldots) &\leqslant N(I) + N(P) + N(P^2) + \ldots \\ &\leqslant 1 + N(P) + |N(P)|^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - N(P)} \end{aligned}$$

Significa isto que se P tiver sua norma definida por (32) menor que a unidade, a matriz $(I - P)^{-1}$ pode ser desenvolvida em série de potências de P.

Uma condição adicional exige que $(I - P)$ seja matriz não-singular |25), isto é:

$$\det (I - P) = |I - P| = 0$$

que é condição necessária à existência de sua inversa.

Para a matriz A satisfazendo as propriedades acima, teremos então:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=o}^{oo} A^k$$

Quando a série é ràpidamente convergente é possível tomar têrmos até a ordem de, digamos, um certo *m* onde *m* é alguma potência convenientemente escolhida de tal modo que o êrro cometido ao tomar apenas m + 1 têrmos da série seja pequeno.

Neste caso, o erro devido à inversão seria então dado pela matriz

$$E = \sum_{k=m+1}^{\infty} A^k$$

É possível determinar a potência m necessária para obter um certo erro mínimo |41|, cuja expressão é obtida a partir das seguintes transformações óbvias:

$$N(B^* - B) \leqslant \frac{|N(A)|^m}{1 - N(A)} \tag{34}$$

por (29):

$$|a_{ij}| \leqslant N(A)$$

que exprime ser qualquer elemento da matriz menor que sua norma, de tal forma que (34) nos fornece:

$$|b^* - b| \leqslant N(B^* - B) \tag{35}$$

Se desejarmos que $N(B^* - B)$ seja restrita, podemos achar um *m* tal que

$$N(B^* - B) \leqslant e$$

portanto

$$\frac{|N(A)|^m}{1 - N(A)} \leqslant e$$

a partir do que obtemos:

$$m \geqslant \frac{\log e + \log (1 - N(A))}{\log N(A)}$$

Esta expressão nos assegura que, em virtude de (35) nenhum elemento na inversa estimada é menor que *e*.

O desenvolvimento em série de potências pode ser simplificado através do emprêgo de determinadas analogias algébricas |41| e permite também algumas aferições muito simples.

Após esta introdução, consideraremos a solução particular ou o método iterativo de solução. Suas propriedades e características foram intensamente analisadas por Evans |6| e sua aplicação de forma explícita foi recomendada por Chenery |10| e pela Cepal |39|.

Suponhamos que um certo vetor de produtos esteja disponível para o qual procuramos uma solução correspondendo a uma economia cuja matriz estrutural é dada e igual a A. Por aproximações sucessivas obtemos estimativas da solução:

$$
\begin{aligned}
X^{(1)} &= Y + AY \\
X^{(2)} &= Y + AX^{(1)} = (I + A + A^2)\,Y \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\
X^{(m)} &= Y + AX^{(m-1)} = (I + A + A^2 + \ldots + A^m)\,Y
\end{aligned}
\tag{36}
$$

onde o superscrito (m) indica a m^a iteração. Na m^a aproximação sucessiva teremos já atingido um certo grau de precisão, porém é possível estimar o resto da série e assim aumentar a precisão da estimativa final. Consiste na estimativa da razão de uma progressão geométrica que é dada por (36) quando *m* é infinitamente grande e a série é convergente.

Tal razão é uma estimação aproximada do maior valor próprio de A. Quanto melhor seja a estimativa de tal valor mais aproximada será a estimativa do resto da série.

Variações do método foram apresentadas por Evans |17| em algumas das quais é aumentada a velocidade de convergência do processo.

O ponto importante para o qual se deve chamar atenção consiste em que em tôdas as fases do método da solução particular introduzem-se erros na inversa.

Se paramos em uma certa potência *m*, o erro será dado pela soma de todas as potências a partir de m+1; mesmo se prosseguimos o processo até estimarmos o maior valor próprio para obter o resto, ainda teremos erros. Tais erros são de natureza computacional e nada têm a ver, seja com as hipóteses do modêlo, seja com os erros contidos nos elementos de A que são de natureza estatística.

6. — A NATUREZA DOS ERROS DEVIDOS A APROXIMAÇÕES.

Parece haver sido crença bastante generalizada, quando o método de Leontief foi lançado ao público, que erros de aproximação ou de natureza computacional tinham tendência a acumularem-se no processo de inversão. Em um artigo extraordinário, Neumann e Goldstine |33| estudaram os efeitos dos erros em inversão de matrizes de ordem elevada e demonstraram que os erros finais eram limitados. Sua conclusão final çode ser sumarizada em poucas linhas.

Chamemos β a base da representação numérica e por s o número de algarismos representativos mantidos consistentemente durante todos os cálculos executados no processo de inversão. Seja $\bar{A}$ a matriz considerada e $\bar{S}$ sua inversa aproximada, como também um fator de escala 2^0 que podemos desprezar, e n a ordem de $\bar{A}$.

Pelo método de eliminação, um extremo superior é encontrado para a matriz formada pelas diferenças entre os produtos de $\bar{A}$ por sua inversa calculada a matriz identidade, isto é,

$$|\overline{AS} - I| \leqslant 2{,}000\ n^4\beta^{-s}$$

para o módulo da diferença.

Se chamamos de e_{ij} os elementos de AS — I, temos também: (*)

$$\max_{iji} |c_{ij}| \leqslant |\overline{AS} - I|$$

Tomamos max e_{ij} como erro final máximo permissível e sendo êste menor do que β^{-p} onde p é um dado número — desejável — de algarismos significativos, obtemos:

$$\beta^{-p} \geqslant e = 2{,}000\ n^{4-s}$$

$$\beta^{-p} \geqslant 2{,}000\ n^4\ \beta^{-s}$$

(*) Neumann e Goldstine, |33| pág. 1045 e Waugh, |41| pág. 147. Para uma discussão de normas e extremos, vide também Dwyer e Waugh |41|, Yong |42| e Debreu e Herstein |43|.

Para $\beta = 10$, (*) isto é, o sistema decimal, tomando logaritmos em (37) obtemos:

$$s - p \geqslant \log (2{,}000\ n^4)$$

e portanto,

$$s - p \geqslant 4 \log n + 3{,}301$$

Esta expressão nos diz que as diferenças entre o número de casas decimais exigidos após inversão deve ser pelo menos igual a $4 \log n + 3{,}301$.

Êste ponto foi mencionado por Christ |11| o qual notou além disso que as hipóteses de Neumann e Goldstine são excessivamente conservadoras quando apenas se têm em vista matrizes de Leontief por causa de suas propriedades especiais (matrizes de elementos não-negativos muitos dos quais nulos por não haver transações diretas entre certos setores produtivos).

Êstes mesmos autores determinaram também o número de multiplicações executadas durante o processo de inversão e outra vez devemos chamar atenção para o fato que as matrizes de Leontief que têm geralmente cêrca de metade de seus elementos igual a zero, o número encontrado deve ser grandemente reduzido em prática. |11|, |15|.

7. — PROCEDIMENTO PARA CORREÇÃO. (**)

Consideremos a inversa de Leontief B e sua primeira estimativa, dada por B_0.

Esta conterá alguns erros de cálculo e fazemos então

$$B_0 = B + D \tag{38}$$

em que D é uma matriz de erros.

$$B^1 = B_0 + D_0 \tag{39}$$

é uma melhor aproximação de B do que B_0. Se a partir de (39) fôr possível melhorar a estimativa de D_0; seja D_1, e assim por diante, podemos, por meio de um processo iterativo reduzir os erros em nossa estimativa da inversa.

(*) Em computações eletrônicas digitais usualmente se toma $\beta = 2$ ou 10.

(**) Agradeço a Mr. W. M. Gorman por dirigir minha atenção para êste aspecto do problema.

$$\begin{aligned} B_0B^{-1}B_0 - B_0 &= B_0B^{-1}D_0 = \\ &= (B + D_0)\,B^{-1}D_0 = \\ &= D_0 + D_0B^{-1}D_0 \end{aligned} \qquad (40)$$

Vejamos como é isto possível: em (38) premultipliquemos por B_0B^{-1} (notemos que $B^{-1} = (I - A)$ é conhecida e que nas hipóteses consideradas não contêm erros) a fim de obter

Se todos os elementos de D_0 forem desprezíveis, hipótese razoável de formular, então os elementos de $D_0B^{-1}D_0$ sendo com mais forte razão desprezíveis, podemos supor ser uma matriz nula, portanto (40) fornece:

$$D_0 = B_0\,(B^{-1}B_0 - I)$$

logo

$$B_1 = B_0 + D_0 = B_0B^{-1}B_0.$$

Se o procedimento continuar e se os elementos das matrizes D_m convergirem ràpidamente com m, obtemos para a expressão geral da inversa corrigida:

$$B_m = (B_0B^{-1})^{m+1}B_0$$

Enfoque ligeiramente diferente que provém de um arranjo diverso dos têrmos em (40) foi apresentado por Hottelling |22B): se B_0 é uma aproximação da inversa de $L = (I - A)$, formamos as seguintes matrizes

$$B_1 = B_0(2 - LB_0)$$
$$B_2 = B_1(2 - LB_1)$$
$$\dots$$
$$B_m = B_{m-1}\,(2 - LB_{m-1})$$

em que $2 = 2I$ é matriz quadrada com todos os elementos da diagonal principal iguais a 2, os restantes sendo iguais a zero.

B_m converge para L^{-1} se em $C = I - LB_0$ (41), todos os valôres próprios tiverem módulo menor que a unidade, o que significa que suas potências tendem para a matriz nula.

É aparente que erros de cálculos não apresentam dificuldades sérias no método de insumo produto.

8. — ERROS NO VETOR DE DEMANDA FINAL.

Nossa análise de erros na solução de um sistema de Leontief, isto é, nas componentes de um vetor de produtos para um dado vetor de demanda final, conforme (10), ficou concentrada na matriz estrutural e a correspondente inversa de Leontief. Devemos considerar também uma fonte diversa de erros.

A equação (10) sugere que é possível prever as componentes do vetor de demanda final para um ano futuro, t digamos, e obter os produtos necessários para satisfazê-lo. Se compararmos os valores efetivamente observados naquele ano obtemos uma idéia dos desvios de nossas previsões. Tal método contudo só permite verificação após têrmos chegado ao ano t e nêle observado os produtos correspondentes. A forma mais simples de obter uma verificação imediata consiste em projetar em direção ao passado, isto é, fixar a estrutura de produção na forma como é dada por uma matriz A e sua inversa de Leontief e a ela aplicar um vetor de demanda final (o qual pode ser observado em um ano passado) a fim de obter os produtos; comparar o resultado obtido com os produtos observados.

No primeiro caso, produzimos o vetor de demanda final por considerações que são exógenas ao sistema. No segundo não temos idéia da precisão das medidas anteriores. A culpa da ocorrência de erros foi sempre atribuída à estrutura de produção, os cálculos necessários à inversão e as hipóteses sôbre que se apóia o modêlo, raramente a erros que posam existir no próprio vetor de demanda final.

Dois aspectos nos parecem surgir claramente quando tratamos de examinar as diferentes possibilidade de erro devidas ao vetor de demanda final. Em primeiro lugar, quando se obtém a estimativa dos produtos correspondente a uma dada demanda final, se a matriz estrutural ainda permanece compatível com a nova composição interna do "product mix" (*) todos os erros que podem aparecer têm que ser considerados como originários do interior da própria demanda final e o problema é trivial, consistindo simplesmente em uma transferência de erros de uma para outra fonte.

Em segundo lugar, pode ocorrer que as novas componentes do vetor de produtos obtidas do vetor de demanda final dado, sejam

(*) «product — mix» é a expressão em lingua inglêsa para um setor produtivo agregado.

incompatíveis com a matriz estrutural original. Tal problema surge porque todas as matrizes são agregadas em variados graus, conforme já mencionamos, e a discrepância devida à agregação (aggregation bias |37|) existirá independentemente de qualquer erro na matriz estrutural.

O problema da identificação das diferentes fontes de erros e a possibilidade de os separar permanece questão aberta. Apesar de que o primeiro caso acima citado parece trivial, em alguns testes executados com o modêlo de Leontief, encontraram-se erros e a única fonte de que nunca se cogitou, aparentemente, foi o vetor de demanda final. Retornaremos a êste problema, ao chegar à descrição de tais testes.

Um último ponto nesta seção. Os erros podem ser devidos ao dinamismo inerente ao sistema econômico. Se um planejador projeta um certo vetor de demanda final, a única condição real sob a qual aquela demanda final poderia ser testada seria a de uma política econômica rígida fôsse empregada, independentemente dos acontecimentos nos intervalos de tempo decorridos entre a data em que foi executada a projeção e a data em que o vetor de demanda final seja observado.

II — ERROS DE AGREGAÇÃO

Um argumento adicional em favor de um sistema que acabamos de descrever, conhecido como modêlo de Leontief, reside principalmente na necessidade prática de alguma subdivisão das Estatísticas de Renda e Produto Nacionais de forma a obterem-se resultados mais detalhados referentes a diferentes setores produtivos ou supridores. Se tal processo é conduzido muito longe, as hipóteses essenciais de não existência de substituição entre insumos não mais permanecerá válida e perde sentido o tentarmos aplicar a solução de Leontief. Dificuldades práticas também nos detêm na tentativa de obter matrizes muito detalhadas, por isso nos conduzir ao caso limite de unidades individuais e portanto a matrizes de ordem muito elevada as quais são difíceis de manejar sob o ponto de vista de computos.

A outra face do problema consiste em que o emprêgo de matrizes agregadas significa perda de detalhe e também introdução de erros no sistema. Novamente, como foi indicado por vários autores, diferentes padrões de agregação dão origem a soluções diferentes.

Como se apresenta hoje o problema, temos um dilema a enfrentar. Ou agregamos e tentamos contornar as conseqüências, ou empregamos material detalhado (solução que pode ser impraticável devido a dificuldades de obtenção de dados) enfrentando dificuldades ainda mais sérias de natureza tanto prática quanto teórica. A única saída consiste no emprêgo de matrizes agregadas.

Na realidade há dois problemas a considerar. O primeiro é o da discrepância devida à agregação pròpriamente dita e o segundo, o da desagregação, o qual consiste na separação de alguns setores agregados em suas componentes.

Tentaremos apresentar uma análise formal dos vários casos e finalmente, entre os testes que foram executados com o modêlo de Leontief, introduziremos a descrição de algum trabalho empírico sôbre a agregação.

1. — DEFINIÇÕES.

Consideremos uma matriz de transações não agregada $||z^o_{jk}||$ obtida a partir de uma equação como (4) com todos os seus elementos em unidades monetárias:

$$||z^o_{jk}||\ [1] + [y^o_j] = [z^o_j] \qquad (42)$$

$$(j,k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

que fornece, em têrmos dos coeficientes de produção:

$$Y^o = (I - A)\ Z^o \qquad (43)$$

Os setores são em número de n e podem ser denominados pequenas industriais conforme já observamos, Theil |37| emprega a denominação de firmas e Balderston e Whitin |8| de pequenos setores.

Se a agregação é obtida por simples adição |30|, obtemos diretamente, adicionando por exemplo as três pequenas indústrias de ordem n-2, n-1 e n após notar que estamos considerando dados referentes ao ano base, os elementos agregados:

$$w^o_{jk} = z^o_{jk} \qquad (j,k = n - 2) \qquad (44)$$

para as transações intersetoriais das pequenas indústrias não agregadas.

$$w^o_{j,n-2} = z^o_{j,n-2} + z^o_{j,n-1} + z^o_{jn} \qquad (j,k \neq n-2)$$

$$w^o_{n-2,k} = z^o_{n-2,k} + z^o_{n-1,k} + z^o_{nk} \qquad (j,k \neq n-2)$$

$$w^o_{n-2,n-2} = z^o_{n-2,n-2} + z^o_{n-2,n-1} + z^o_{n-2,n} + z^o_{n-1,n-2} + z^o_{n-1,n-1} +$$

$$+ z^o_{n-1} + z^o_{n,n-2} + z^o_{n,n-1} + z^o_{nn} \qquad (45)$$

para as transações intersetoriais das três pequenas indústrias agregadas;

$$v^o_{n-2} = y^o_{n-2} + y^o_{n-1} + y^o_n$$

$$v^o_j = y^o_j \qquad (j \neq n-2) \qquad (46)$$

para as componentes do vetor de produtos.

$$w^o_j = z^o_j$$

$$w^o_{n-2} = z^o_{n-2} + z^o_{n-1} + z^o_n \qquad (j \neq (n-2)) \qquad (47)$$

para as componentes do vetor de produtos.

Se, a partir da matriz agregada (n-2 setores e da matriz não agregada (n pequenas indústrias) calculamos os coeficientes de produção e se A fôr a matriz estrutural não agregada, obtemos (43) para a primeira e

$$V^o = (I - G)\, W^o$$

para a última onde V^o e W^o foram definidos em (44), (45), (46) e (47). Desde logo os elementos de G serão fornecidos por

$$g_{jk} = \frac{w^o_{jk}}{w^o_k}$$

os quais substituídos nos fornecem, após simples rearranjo de têrmos:

$$g_{j,n-2} = a_{j,n-2}\,\beta_{n-2} + a_{j,n-1}\,\beta_{n-1} + a_{jn}\,\beta_n$$

$$g_{n-2,k} = a_{n-2,k} + a_{n-1,k} + a_{nk}$$

$$g_{n-2,n-2} =$$

$$(a_{n-2,n-2} + a_{n-1,n-2} + a_{n,n-2})\beta_{n-2} + (a_{n-2,n-1} + a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1})\beta_{n-1} +$$

$$+ (a_{n-2,n} + a_{n-1,n} + a_{nn})\beta_n \qquad (48)$$

onde:

$$\beta_{n-2} = \frac{z_{n-2}}{\Delta}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{\Delta}$$

$$\beta_{n} = \frac{z_{n}}{\Delta} \tag{49}$$

e

de tal maneira que

$$\Delta = z_{n-2} + z_{n-1} + z_{n} \tag{50}$$

$$\beta_{n-2} + \beta_{n-1} + \beta_{n} = 1 \tag{51}$$

Estes coeficientes representam as proporções dos produtos de cada pequena indústria componente no produto total do novo setor formado pela agregação.

O procedimento pode ser apresentado de forma mais compacta pela utilização da nomenclatura matricial. No caso simples acima introduzido, definimos:

$$T = \left\| \begin{array}{c:c} I_{(n-3)} & 0 \\ \hdashline 0 & 111 \end{array} \right\| \tag{52}$$

matriz retangular de ordem (n-2) x n subdividida em uma submatriz identidade de ordem n-3, no canto superior esquerdo, uma linha de zeros seguida de três unidades em sua última linha, todos os restantes elementos sendo iguais a zero, formando uma submatriz de ordem (n-3) x 3, e

$$S = \left\| \begin{array}{c:c} I_{(n-3)} & 0 \\ \hdashline & n-2 \\ & n-1 \\ & n \end{array} \right\| \tag{53}$$

que é retangular, de ordem n x (n-2) com os três últimos elementos de sua última coluna iguais aos coeficientes de proporção de produtos conforme a definição expressa por (49), (50) e (51), os restantes tendo um significado óbvio. Estas duas matrizes T e S têm a propriedade de produzir tôdas as transformações definidas em (44) a (51) pelas quais são obtidos os setores agregados. Através de premultiplicação de Z^o e Y^o por T, obtemos respectivamente W^o e V^o, isto é,

$$W^o = TZ^o \tag{54}$$

$$V^o = TY^o \tag{55}$$

e S surge naturalmente após havermos obtido W^o e V^o, mantendo-os a satisfazer uma equação como (42), depois da agregação, isto é, fornece:

$$(I - G) = T(I - A)S$$

porque

$$TS = I$$

a matriz identidade de ordem (n-2) a partir da relação (51), e

$$G = TAS \tag{56}$$

como podemos verificar fàcilmente em (48). Notamos que (43) fornece a solução não agregada

$$Z^o = (I - A)^{-1} Y^o$$

e com G, temos igualmente:

$$W^o = (I - G)^{-1} V^o$$

É possível generalizar estas matrizes T e S |37| de agregação.

Consideremos para êste fim, o padrão de agregação de n indústrias pequenas para N indústrias ou setores. Sejam J ou K quaisquer setores típicos de tal maneira formados que sejam compostos de um grupo de pequenas indústrias, geralmente $j \Sigma J$ ou $k \Sigma K$, isto é, setores J e K são compostos de tôdas as pequenas indústrias j e K que a êles pertencem.

O resultado desta convenção consiste em têrmos o vetor de produtos transformado, de Z^o com n indústrias pequenas produtivas, em W^o, com N ($< n$) setores produtivos. De maneira análoga Y será transformado em V, conforme (54) e (55). O procedimento genérico de definir êste padrão de agregação é através da matriz T (similar a (52)):

$$T = \begin{Vmatrix} 1 \ldots 1\,0 \ldots 0\,0 \ldots 0\,0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0\,1 \ldots 1\,0 \ldots 000 \ldots 0 \\ \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 0 \ldots 0\,0 \ldots 0\,0 \ldots 0\,1 \ldots 1 \end{Vmatrix} \qquad (57)$$

onde, em cada linha temos uma seqüência de unidades e os elementos restantes iguais a zero. Cada uma destas seqüências de unidades representa os setores a serem agregados: $j \Sigma J$ para todos os J. A primeira linha terá então n_I unidades se o setor agregado I contiver n_I indústrias pequenas em geral a linha J terá n_J unidades correspondendo às n_J pequenas indústrias aí contidas. A matriz T é então de ordem N x n. Como vemos fàcilmente, o padrão de agregação definido por T, fornece:

$$W^o = TZ^o \qquad (58)$$

$$V^o = TY^o \qquad (59)$$

de maior generalidade que (54) e (55).

Além disso, como W^o e Y^o devem ser próprios de um modêlo de Leontief, tanto quanto as indústrias não-agregadas, obtemos também:

$$(I - G)\,W^o = V^o$$

e

$$W^o = (I - G)^{-1}V^o \qquad (60)$$

onde a matriz identidade I é de ordem N.

Ao aplicar (58) e (59) a (60) veremos que a matriz estrutural agregada G subentende a matriz S de ordem n x N, que é composta dos elementos seguintes:

Cada coluna contém zeros e os pesos correspondentes às proporções dos produtos no ano-base das n_J indústrias nêle agregadas:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \beta_{I1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \beta In_{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{II,1} & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & IIn_{II} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Nn_{N} \end{array} \right\| \qquad (61)$$

Notemos que (61) surge da mesma forma que (53) e agora:

$$\sum_{i \in j} \beta_{js} = 1$$

sendo válidas as relações seguintes:

i. — tomemos (43) e agreguemos:

$$TY^{o} = T(I - A)Z^{o} = V^{o} \qquad (62)$$

porém o mesmo V^{o} é obtido por aplicação de $(I - G)$ ao vetor de produtos agregados $W^{o} = TZ^{o}$, isto é,

$$V^{o} = (I - G)W^{o} = (I - G)TZ^{o} \qquad (63)$$

igualando obtemos:

$$T(I - A) = (I - G)T$$

$$\text{ou} \qquad TA = GT \qquad (64)$$

Observemos que esta relação apenas é válida quando estivermos considerando vetores observados no ano-base.

De maneira análoga a (56),

$$TAS = GTS = G \tag{65}$$

ii — A partir de (57), (61) e (65) obtemos o elemento típico de G:

$$g_{JK} = \sum_{k \varepsilon K}^{nK} \sum_{j \varepsilon J}^{nJ} a_{jk} \beta Kk$$

que representa uma média ponderada dos coeficientes de produção não agregados, sendo os pesos as proporções de produtos no ano base (proporção do produto da pequena indústria k dentro do setor K).

iii — Definimos igualmente um têrmo de que vamos ter necessidade logo em seguida, os "coeficientes semi-agregados". Premultipliquemos a matriz A pela matriz agregação T; corresponde isto ao mesmo que formar uma nova matriz retangular de ordem N x n cujos elementos estão agregados apenas com relação a indústrias supridoras.

$$TA = \sum_{j \varepsilon J} a_{jk} = || g_{Jk} || \tag{66}$$

(os micro-coeficientes técnicos derivados de |37|).

Anàlogamente, posmultiplicando por

$$ST = L$$

obtemos: $AL = AST$

cujo elemento típico é:

$$\bar{g}_{jk} = \sum_{k \varepsilon K} (a_{jk} \beta_{Kk})$$

formando uma matriz quadrada de ordem n com n_K elementos ao longo de tôda linha, os quais são independentes de k.

2. — A TENDENCIOSIDADE DEVIDA À AGREGAÇÃO.

Consideremos qualquer ano diferente do ano-base e que as duas matrizes estruturais, agregada e não agregada, estão disponíveis, o que implíca a existência das duas matrizes agregação T e S.

Como se torna claro em (62) e (63), há duas maneiras diferentes de estimar as componentes do vetor agregado de produtos: ou obtendo primeiro a solução agregando em seguida pelo emprêgo de (58), ou agregando primeiro e obtendo em seguida a solução por meio de (63). Exceto no ano-base, as duas soluções não coincidirão e as diferenças entre os valores obtidos por meio de cada um dos procedimentos são chamadas "Tendenciosidades devidas à agregação" de acôrdo com Theil |37|. (*)

Obtemos então:

$$\xi = \overline{W} - W = |\,(I - G)^{-1}\,T - T(I - A)^{-1}\,|\;Y = PY \tag{67}$$

$$\text{onde } \overline{W} = (I - G)^{-1}TY \tag{68}$$

corresponde a "Agregar e em seguida resolver".

$$\text{e} \quad W = T(I - A)^{-1}Y \tag{69}$$

a "resolver e em seguida agregar", e

$$P = (I - G)^{-1}T - T(I - A)^{-1} \tag{70}$$

é chamada a "matriz da tendenciosidade devida à agregação".

Em virtude de que ambos $(I - G)^{-1}$ e $(I - A)^{-1}$ são inversas de Leontief, seus maiores valores próprios têm módulo menor que a unidade (e/ ou suas normas satisfazem as condições para desenvolvimento em série de potências).

Na matriz P (70), desenvolvemos ambas as inversas do segundo membro após substituição de G por TAS, obtendo:

$$\begin{aligned} P &= |\,I + TAS + (TAS)^2 + \ldots\,|\,T - T\,|\,I + A + A^2 + \ldots\,| = \\ &= T\,|\,I + AL + (AL)^2 + \ldots\,| - T\,|\,I + A + A^2 + \ldots\,| = \\ &= [(AL - A) + |\,(AL)^2 - A^2\,| + \ldots] \\ &= P_1 + P_2 + P_3 + \ldots \end{aligned} \tag{71}$$

onde:

$$P_r = T\,|(AL)^r - A^r|$$

(*) No artigo de Theil, uma expressão mais geral para o êrro foi obtida, pois êle considera o efeito de discrepâncias na matriz estrutural causando erros adicionais à tendenciosidade devida à agregação.

é a matriz de tendenciosidade de ordem r devida à agregação e em particular,

$$P_1 = T(AL - A) \tag{72}$$

é a matriz de tendenciosidade de primeira ordem devida à agregação.

A matriz P fornecida por (71) goza da propriedade de que uma combinação linear conveniente dos elementos de suas linhas é igual a zero:

$$P(I - A)S = 0 \tag{73}$$

como é fàcilmente demonstrado.

Analisemos a matriz de tendenciosidade de primeira ordem devida à agregação (72):

$P_1 = T(AL - A)$, cujos elementos típicos são fornecidos por:

$$p_{jK}^{(1)} = \sum_{j \varepsilon J} (\overline{g}_{jK} - a_{jk}) = g_{JK} - g_{Jk} \tag{74}$$

de tal maneira que a tendenciosidade é dada finalmente pelo produto P_1Y, isto é, consiste em:

$$P_1 Y = \left| \sum_{k \varepsilon K} y_k \, (g_{JK} - g_{Jk}) \right| \tag{75}$$

Podemos verificar que a matriz de tendenciosidade de primeira ordem, quando multiplicada por S (61), fornece uma matriz nula, isto é,

$$P_1 S = \underline{0} \tag{76}$$

3. — CASOS PARTICULARES.

Há casos em que a tendenciosidade devida à agregação é igual a zero. Passemos a examiná-los.

a. — Os elementos da matriz estrutural não-agregada A são independentes das indústrias supridoras e insumidoras para todos os pares de setores agregados, (isto é, a_{jk} é independente de j e k para todos os J e K) — corresponde isto ao caso de "estrutura homogênea de insumo-produto". Teremos então:

$$AL = A$$

de tal forma que $P_1 = 0$ e também $P_r = 0$ ($r = 1, 2, \ldots$) ou que tôdas as tendenciosidades devidas à agregação são iguais a zero, e portanto, $P = 0$. Êste é um caso extremo e dificilmente encontrado em prática, (exceto, talvez, quando tenhamos iniciado, em situação extrema, a agregar a partir de unidades individuais).

b. — Os coeficientes semi-agregados g_{Jk} são independentes das indústrias insumidoras dentro de cada setor e para todos os setores — corresponde isto a "estrutura de insumos homogênea" ou à mesma estrutura de custos. Teremos então a partir de (74):

$$g_{JK} - g_{Jk} = 0$$

Porém esta relação significa que $TA = GT$ (64) de tal forma que a tendenciosidade devida à agregação de primeira ordem é igual a zero, por (75), isto é,

$$P_1 Y = 0$$

Podemos provar que se a tendenciosidade devida à agregação de primeira ordem fôr igual a zero, tôdas as demais são também a zero. Este caso é menos restritivo que o anterior.

c. — Devemos mencionar que o caso de estrutura homogênea de produtos não corresponde a tendenciosidade nula. Isto é, quando os g_{Jk} são independentes das indústrias supridoras dentro de cada setor e para todos os setores, a tendenciosidade não é nula.

d. — Quando tôdas as componentes do vetor de demanda final em qualquer ano forem proporcionais às componentes no ano-base, a tendenciosidade devida à agregação é nula. Em outras palavras, quando o novo vetor é um múltiplo escalar do vetor no ano-base, não haverá tendenciosidade alguma.

Se, dada uma escala R, tiverms:

$$Y^n = RY^0$$

onde o superscrito indica o vetor no ano-base, como anteriormente, então:

$$Y^{o} = (I - A)Z^{o}$$

e a tendenciosidade é fornecida por:

$$PY = RPY^{o} = RP(I - A)Z^{o} = \underline{0}$$

Esta relação é verdadeira porque no ano-base as relações seguintes são válidas:

$$SW^{o} = Z^{o}$$

de tal maneira que

$$PY = R\,[P(I\ A)S]Z^{o} = \underline{0}$$

em virtude de (73) e de (76) no caso particular.

e. — O caso da agregação perfeita. Consideremos que a inversa de Leontief correspondente à matriz estrutural não agregada é dada e que a premultiplicamos pela matriz agregação T, isto é, obtemos:

$$B^{(p)} = T(I - A)^{-1} \tag{77}$$

cujo elemento típico chamamos $b^{(p)}_{Jk}$ por motivo de semelhança com (66).

Nossa matriz (77) é retangular. Empregamo-la para agregar o vetor de demanda final, isto é, em vez de premultiplicar Y por T como fizemos anteriormente, obtemos:

$$B^{(p)}\,Y = V^{*}$$

cujo elemento típico será:

$$v^{*}_{J} = g^{(p)}_{Jr}\,y_{r} \tag{78}$$

É facil verificar que êste procedimento não dá origem a tendenciosidade alguma aplicando as equações (68) e (69). Mediante êste método de ponderar os elementos de vetor de demanda final fomos capazes de eliminar completamente a tendenciosidade.

Devemos lembrar que para obter os pesos b_{Jk} necessitamos da existência da inversa, a qual é então agregada, de acôrdo com (77).

Uma simplificação é possível se utilizarmos os dois primeiros têrmos do desenvolvimento em série de potências da inversa:

$$T(I - A)^{-1} = T(I + A) \qquad (79)$$

o êrro introduzido por êste procedimento dependerá da velocidade de convergência de (79).

4. — SELEÇÃO DE DIFERENTES PADRÕES DE AGREGAÇÃO. CRITÉRIO.

Fisher |20| apresentou recentemente um método que permite decidir entre diferentes padrões de agregação aquêles que melhor servem a certos propósitos objetivos. Apresentá-lo-emos sumàriamente.

Consideremos a tendenciosidade devida à agregação dada por (67) e coloquemos seu elemento típico sob a forma:

$$\xi_J = \sum_{r \varepsilon J} (b_{JK} - b_{Jr}) Yr \qquad (80)$$

para $J = 1, 2, \ldots, N$, onde b_{JK} são os elementos da inversa $(I - G)^{-1}$ e b_{Jr} os de $T(I—A)^{-1}$ ou os coeficientes inversos semi-agregados.

Procuramos minimizar certas funções da tendenciosidade devida à agregação, fornecida por (80).

Façamos a hipótese que os elementos que compõem o vetor de demanda final são variáveis aleatórias cujas expectâncias são os valores no ano-base:

$$E(y_j) = y^o_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

onde novamente o superscrito se refere ao ano-base e a expectância cobre uma série de anos.

Definamos agora duas somas de quadrados da tendenciosidade:

$$C_J = \Sigma (\xi^2_J) \qquad (J = 1, 2, \ldots, N) \qquad (81)$$

que é chamada a "previsão de objetivo especial" e

$$C = \sum_{J=1}^{N} C_J \sum E(\xi_J^2) \quad (82)$$

chamada a "previsão com objetivo geral".

Consiste então o problema em selecionar um padrão de agregação (matrizes T e S (57) e (61)) tais que tornem mínimas as expressões (81) ou (82).

Se estivermos interessados nos efeitos sôbre a indústria da construção de alterações sofridas pela indústria do carvão, então, para um J específico, (no caso o J que especifica a indústria da construção), escolhemos um padrão que o minimize o C_j correspondente. Se estivermos interessados em interrelações generalizadas sem menção especial a qualquer indústria particular, escolhemos o padrão de agregação que minimiza C.

Façamos algumas hipóteses simplificadoras: sejam

$$\text{var. } (y_j) = \delta \; E(y_j)$$

onde δ é um fator constante e, como em (81) e (82). E indica a expectância matemática ou o valor médio; e

$$\text{cov. } (y_j, y_k) = 0$$

para todos os j, k = 1, 2,..., n e j = k.

As expressões C_J (81) e C (82) podem então ser simplificadas em:

$$E(\xi 2_J) = \sum_{r=1}^{n} (b_{JK} - b_{Jr})^2 . \text{ var } (y_r) +$$

$$= \sum_{\substack{r=k \\ r \varepsilon J \\ k \varepsilon K}} (b_{jK} - b_{Jr})(b_{jk} - b_{jk}) . \text{cov.} (y_r, y_k) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (b_{JK} - b_{Jr})^2 . \quad E(y_r) = C_I \quad (83)$$

$$\text{e} \quad C = \sum_{J=1}^{N} \sum_{r=1}^{n} (b_{JK} - b_{Jr})^2 . \quad E(y_r) \quad (84)$$

Ambas (83) e (84) podem ser ainda simplificadas pela aproximação de utilizar apenas os primeiros dois têrmos do desenvolvimento em série de potência da inversa de Leontief. Teríamos então:

$$b_{JK} - b_{Jr} = g_{JK} - a_{Jr} \tag{85}$$

Outra simplificação consiste em usar a expressão

$$\bar{b}_{JK} - b_{Jk} \tag{86}$$

em lugar de

$$b_{Jk} - b_{Jk}$$

onde

$$\bar{b}_{JK} = \frac{\sum\limits_{k \varepsilon K} y_k b_{Jk}}{\sum\limits_{k \varepsilon K} y_k}$$

Este procedimento simplifica (78) e (79) além de tornar mais simples os cálculos que conduzem à escolha final.

Na Seção IV voltaremos a êste ponto ao fazer referência a alguns resultados numéricos obtidos com êste processo.

Devemos notar a importância de dois pontos. Primeiro, que as hipóteses simplificam as expressões utilizadas em cálculos numéricos porém estão longe da realidade; não é demais dizer que os valores dos elementos do vetor de demanda final no ano-base fôsse típico do período considerado de uma forma um pouco imprecisa; com referência às covarianças serem iguais a zero, deparamos já com uma hipótese que não pode ser válida porque isso significaria completa impossibilidade de substituição entre dois insumos quaisquer ou mesmo que pares de insumos quaisquer pudessem ser complementares. Em segundo lugar, que quando tivéssemos duas ou três ou mesmo mais padrões entre os quais decidir qual o melhor, o procedimento seria útil, porém não forneceria indicação alguma sôbre como "descobrir" *o melhor* padrão a introduzir entre os que devem ser analisados.

5. — DESAGREGAÇÃO.

Uma última palavra no problema inverso ainda dentro do capítulo de agregação: o da desagregação. O caso consiste no seguinte: dispomos de uma matriz agregada a partir da qual uma solução é encontrada correspondendo a um vetor de demanda final também pròpriamente agregado. De posse dêste vetor de produtos, desejamos decompor seus elementos em suas componentes. Em outras palavras, conhecendo as necessidades gerais da indústria do aço, por exemplo, podemos desejar tais necessidades em têrmos de chapas, produtos laminados, aços, ferramentas, etc.

Se, além da inversa agregada, conhecemos também a matriz S (61) que contém a informação acêrca das proporções dos produtos, em cada setor agregado, das indústrias componentes, postulando além disso, que tal composição permanece a mesma na nova solução, devemos apenas realizar a subdivisão proporcional dos agregados. Com referência ao título "Erros no vetor de demanda final" lembramos que o procedimento de subdivisão proporcional pròvàvelmente introduz erros que são devidos ao fato de que S terá seus elementos em constante modificação ao longo do tempo de tal forma que não só o processo de subdivisão introduz erros como também a própria solução estará incorreta. A hipótese simples de subdivisão proporcional é conhecida como de "estabilidade" de setores produtivos agregados (product-mix).

Quando nada sabemos acêrca de S, significando isto que tôda a informação referente às proporções dos produtos tenha sido perdida durante o processo de agregação, ou a solução é impossível ou devemos ser suplementados com informação adicional. Fei |19| estudou os vários casos, baseando seu estudo em operadores aumentadores convenientes. É êste um problema ainda largamente aberto para estudo e pesquisa.

III — AS HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

Desejamos fazer referência, aqui, à validez das hipóteses feitas atrás e as quais são básicas nos sistemas de Leontief, permitindo a utilização das equações (6), (7), (8) e (10).

Como é facil verificar, as hipóteses não gozam de validez universal mas em circunstâncias especiais podemos demonstrar serem válidas — algumas delas ao menos. Da mesma forma, em certos casos, hipóteses mais elaboradas podem ser utilizadas como é o caso de coeficientes de produção lineares em aproximação a relações funcionais entre insumos e produtos em lugar de simples proporcionalidade, caso estudado por Evans |15|.

Consideremos cada uma das hipóteses e tentemos analisar os casos especiais de validez de cada uma como também as condições sob as quais podemos provar que sejam válidas.

Distingamos três hipóteses:

(i). — Funções de produção lineares e homogêneas. É esta uma hipótese simplificadora e que permite a construção concreta do modêlo. É muito pouco provável que seja válida em tôdas as indústrias e para todos os intervalos de produção porque isto significaria a impossibilidade, seja de rendimentos crescentes, seja de rendimentos decrescentes. Uma possibilidade de descrever as funções por hipóteses mais realísticas consiste na substituição da hipótese de homogeneidade por uma relação linear. Então, o têrmo constante pode ser incluído na demanda final e a relação funcional considerada como uma aproximação de uma curva de caráter mais geral na vizinhança do ponto tangência.

(ii). — A negação da possibilidade de produtos simultâneos (joint products). É também muito pouco realístico supor que esta condição seja válida em todos os setores. Contudo, como foi referido por Malinvaud |30| e Evans |16|, muitos casos podem ser tratados de tal forma que sejam reduzidos os efeitos de sua existência notória. Podemos dizer que em geral os problemas práticos com que deparamos na obtenção de uma tábua são múltiplos e que é difícil separar multiprodutos quando sabidamente existem.

(iii). — Não existência de substituição entre insumos.

Eis a hipótese crucial por ser aquela que permite a utilização de uma matriz obtida em um ano-base para soluções empregando vetores de demanda final referentes a diferentes períodos de tempo. Em alguns casos podemos provar que a substituição não se dará como conseqüência de postulados mais fundamentais. O notável teorema enunciado e provado por Samuelson |34| e demonstrado para casos mais gerais por Arrow e Koopmans |4|, |26|, estabelece que quando existe apenas um fator escasso que seja não produtível e as funções de produção são lineares e homogêneas, os coeficientes de produção resultarão da condição de maximização de lucros em todos os setores de uma economia em concorrência perfeita.

Ainda aqui outro ponto deve ser mencionado com referência à substituição devida a alterações de preços. Existe o argumento da existência de inércia no sistema econômico dificultando a adaptação ao prevalecerem condições diferentes; isso atenuaria os efeitos de substituições. Também, como foi demonstrado por Arrow |3|, sob certas condições programas ótimos são independentes de preços, proporção formulada por Chenery |10|.

IV — TESTES EFETUADOS COM TABELAS DE INSUMO-PRODUTO.

Vários autores, a começar por Leontief, serviram-se de tabelas existentes para comparar resultados.

Entre os trabalhos mais recentes realizados neste sentido, podemos distinguir claramente duas categorias de testes; primeiro, aquêles que verificam as soluções obtidas com o sistema de insumo produto (Leontief |28|, Evans |15|, Barnett |7|, Hatanaka |22| e segundo, aquêles que enfrentam principalmente o problema da agregação (Balderston e Whitin |8|, e Fisher |20|). Passemos a uma descrição sumária dos mesmos e dos resultados obtidos.

1. — LEONTIEF.

Usando a tábua relativa ao ano de 1939 para a Indústria Americana agregada de 38 para 13 setores, realizou projeções para trás a fim de obter "previsões" dos produtos para os anos de 1919 e 1929 para os quais vetores de demanda final eram disponíveis. As mesmas previsões foram realizadas pelo emprêgo de outros dois métodos, "expansão" do Produto Nacional Bruto e "expansão" da demanda final (ver o sumário do teste de Barnett para uma explicação dêstes métodos).

As unidades comuns foram reduzidas a preços fixos de 1939.

Foram realizadas comparações em têrmos do êrro-padrão das previsões, isto é, a raiz quadrada do valor esperado dos quadrados das diferenças entre produtos previstos e atuais para tôdas as indústrias.

Os erros de previsão obtidos com o sistema de insumo-produto foram os menores quando comprados com aquêles obtidos com os outros dois métodos.

A tábua utilizada neste teste era sabidamente deficiente e os testes realizados subseqüentemente com emprêgo da tábua de 1947 deveriam apresentar resultados mais dignos de confiança. Também não foi considerada a hipótese de modificações na estrutura produtiva que pudessem haver ocorrido no intervalo de dez ou vinte anos coberto pelas projeções.

Foi êste um teste pioneiro cujo valor é hoje mais histórico que científico.

2. — EVANS.

Constituíram os testes realizados por Evans, um conjunto de natureza mais específica.

Em seu artigo publicado em Econometria |15| tentou medir os efeitos de erros de diferentes dimensões e origens e sob distintas hipóteses sôbre a tábua de 44 setores para a Econômia Americana, cujos elementos foram considerados, para efeito dos testes, como verdadeiros.

Em primeiro lugar, um êrro proporcional de $_j$ foi atribuído a uma linha dos coeficientes (isto significa que todos os coeficientes que forem nulos não terão êrro e também que nenhuma compensação existe, o que é um caso extremo).

Então:

A partir de (28) $\delta\ _j a_{jk} = a^*_{jk}$ uma expressão é obtida para a porcentagem de êrro no r° elemento do vetor de produtos com a hipótese adicional que apenas y_k = o no vetor de demanda final, todos os demais sendo iguais a zero:

$$\frac{Xr^* - Xr}{Xr} = \frac{b_{rj}\ \delta_j\ \Sigma_i\ a_{ji}\ b_{ik}}{b_{rk}\ (1 - \delta_j\ \Sigma_i\ a_{ji}\ b_{i_j}\ )} \tag{86}$$

O setor "Produtos Fabricados de Metal" foi escolhido para incorporar o êrro δ_j porque tinha transações com a maioria dos demais setores ao longo tanto de linhas quanto de colunas. Êste foi o setor j.

A expressão (86) foi então avaliada para diferentes valores de *r* sob sua forma simplificada:

$$\frac{X^*_r - X_r}{X_r} = \delta\ \frac{b_{rj}\ (b_{jk} - \delta_{jk})}{j\ b_{rk}\ |\ 1 - {}_j(b_{jj} - 1)\ |} \tag{87}$$

(onde δ_{jk} é o símbolo de Kronecker).

O êrro suposto foi $\delta_j = 5\%$, produzindo erros nos demais setores que foram explicados da forma seguinte:

"Se apenas veículos a motor aparecessem no setor autônomo, as necessidades de produtos de ferro e aço seriam sôbre-estimadas por pouco menos que um por cento em virtude do êrro uniforme de cinco por cento em "produtos fabricados de metal". Apenas onde as exigências em produtos fabricados de metal para manter uma outra atividade única estão sendo estimadas, o êrro excede cinco por cento e mesmo aqui, por apenas uma quantia pequena."

Outra aplicação foi a de determinar a restrição dos elementos da inversa por meio da expressão (26). As máximas somas de linha e coluna foram fornecidas como também a soma total de todos os elementos, a partir do que o efeito máximo de aproximação nos elementos da matriz estrutural na quinta casa decimal encontrou-se ser igual a 0,00011 (para a matriz de 44 setores) porém, deve ser lembrado, no caso extremo de mais de 1900 erros de aproximação todos de mesmo sinal.

Na matriz de 190 setores o efeito máximo correspondente à aproximação na quinta casa decimal foi de 0,00021, na hipótese de que mais de 36.000 erros de aproximação fôssem de mesmo sinal.

A restrição para a soma de todos os elementos de uma inversa de Leontief (27) encontrou-se ser, para a matriz de 44 setores, igual a 424,9 quando o valor efetivamente encontrado foi 96,0. Outros testes seguindo a mesma linha foram executados com a tábua de 44 setores do Bureau of Labour Statistics os quais estão explicados no texto do artigo referido.

3. — BARNETT.

Foram utilizadas as projeções dos produtos obtidas em 1947 para o ano de 1950 por Cornfield, Evans e Hoffenberg |18|, e uma matriz de 40 setores referente à Econômia Americana, ano de 1939, com algumas correções óbvias introduzidas nos coeficientes. Duas hipóteses alternativas foram feitas relativamente à demanda em 1950, uma, que foi chamada modêlo de "consumo" e a outra de modêlo de "investimento". Ademais foram introduzidas correções nos resultados a fim de garantir pelo emprêgo. Êstes eram os dados disponíveis e os objetivos a atingir.

Barnett fèz uso de certas hipóteses análogas às do referido estudo e projetou os mesmos produtos empregando técnicas distintas. Foram estas: *regressão múltipla*, em que as equações empregadas foram:

Produto de indústrias específicas = a + b(PNB) + c(tempo), onde PNB significa Produto Nacional Bruto e *a, b, c* constantes;

Expansão do PNB, em que foi feita a hipótese de que o produto em qualquer indústria particular cresceria na mesma proporção do PNB;

Expansão da demanda final, onde o crescimento do produto total de indústrias específicas é proporcional ao crescimento da demanda final.

Finalmente, os produtos obtidos efetivamente em 1950 foram comparados com as projeções obtidas com os quatro métodos.

Seus resultados são extensos, mas merecem ser resumidos. As expansões do PNB e da demanda final produziram os maiores desvios em relação aos valores observados. Os resultados obtidos por meios de regressão múltipla e de insumo-produto (dois conjuntos de resultados para cada um) foram comparáveis, os obtidos com regressão múltipla fornecendo "melhores" projeções quando o valor do produto da indústria é ponderado. O resultado se inverte (talvez não significativamente) quando as projeções não são ponderadas.

Os erros médios expressos como porcentagem do produto da indústria em 1939 estão reproduzidas abaixo:

Erro médio — % do valor da indústria no produto em 1939

Técnica de projeção utilizada	Modêlo	Ponderado pelo valor do produto da indústria específica em 1939	Não ponderada
Regressão Múltipla	Investimento	14	30
	Consumo	22	42
Insumo-produto	Consumo	29	32
	Investimento	30	35

FONTE: Barnett [7], pág. 202.

A lista de indústrias em que cada projeção foi a melhor é a seguinte:

Insumo-produto (Modêlo de consumo)	Insumo-produto (Modêlo de investimento)	Regressão menor PNB
Equipamento de transporte, n.e.	Construção naval.	Agricultura e pesca.
Metais não ferrosos e seus produtos	Maquinaria.	Processamento de alimentos.
Comunicações.	Veículos a motor.	Metais ferrosos.
Construção.	Editorial e gráfica.	Aeronáutica.
	Produtos texteis.	Ferro e Aço, n.e.
	Borracha.	Produção e refinação de petróleo.
	Demais manufaturas.	Mineração de carvão.
	Transporte ferroviário.	Química.
		Madeira e seus produtos.
		Mobiliário e outros de madeira.
		Pôlpa de madeira e papel.
		Vestuário.
		Couros.

4. — BALDERSTON & WHITIN.

Foi êste, tanto quanto nos foi dado descobrir, o primeiro teste realizado com agregação em tábuas de insumo-produto. Seu objetivo foi relativamente vago porque se propuseram verificar se na verdade diferentes agregações produziriam diferentes resultados conforme fôra sugerido pelo próprio Profesor Leontief:

> "um sistema de agregação que possa servir como base aceitável para a análise da interdependência entre as indústrias de Papel e de Automóveis, pode ser constatado que seja completamente ineficiente se a utilizarem para estimar os efeitos indiretos da construção de casas, sôbre, digamos, as importações de borracha".
>
> (Professor Leontief em "Recent Studies in the Study of Interindustrial Relationships", citado de [18]).

A tábua utilizada foi a de 18 setores representando a econômia Americana em 1939. Três padrões de agregação foram tentados, em tôdas as duas indústrias "Metais" e "Borracha" foram mantidas sem agregação. As diferenças entre os resultados obtidos com êstes dois padrões foram então comparadas. Os resultados finais provaram que o Professor Leontief estava correto em afirmar que padrões diferentes de agregação produziriam soluções diferentes. As diferenças entre coeficientes na inversa agregada foram da ordem de até 50% em relação ao menor em quaisquer dos três padrões. Os erros absolutos não foram grandes, porém foi difícil julgar a sua importância porque esta depende do propósito que se tem em vista. Um critério para uma decisão neste sentido foi desenvolvido por Fisher |20|. Sua escolha de indústrias para agregação formando a tabela de oito setores foi inteiramente arbitrária, porque os critérios para escolha, mencionados por Theil |37| (vide nossas observações nas páginas 29 a 34), não podem ser aplicados quando as tábuas iniciais já estão tão agregadas ao ponto de contarem com apenas 18 setores. Senso comum foi o critério utilizado, em contraposição ao de Fisher que é sistemático.

5. — FISHER.

A matriz Americana relativa ao ano de 1939 foi utilizada, reduzida para 18 setores. Dez padrões diferentes de agregação foram utilizados para reduzi-la de 18 para 8 setores, como no caso anterior. Os padrões foram comparados entre si e com outros três que já haviam sido utilizados por Balderston e Whitin |8|. O emprêgo da tábua de 18 setores foi preferido por estar à mão, bem como sua inversa, e também em razão de suas dimensões reduzidas e ao fato de já haver sido usada anteriormente para testes de agregação. Os padrões foram testados de acôrdo com seu critério de previsão de objetivo especial (81) de forma a fornecer mínimo C_J em quatro indústrias J diferentes as quais eram:

(1) Metais ferrosos;

(2) Borracha;
Pequenas indústrias, Agricultura e Pesca e Alimentação; Fumo e produtos derivados, Combinadas;

(4) Um conglomerado de cinco indústrias menores: Químicas inclusive munições, Demais manufaturas, Comércio, Negócios e Serviços Pessoais e Não-distribuídas.

No total oito padrões, sendo quatro com a expressão geral simplificada resultante de (83) e quatro com a simplificação resultante de (86). Nestes casos, uma indústria é fixada prèviamente e o problema consiste em localizar as demais nos sete setores agregados. Dois padrões adicionais foram testados segundo o critério de previsão com objetivo geral de acôrdo com (84). Como o procedimento pode dar origem a um grande número de soluções e para facilitar as escolhas, um critério adicional foi empregado que se baseia no fato de que as entradas diagonais eram predominantes em valor em comparação às entradas não diagonais de maneira a ser possível aproximar a matriz original a uma matriz diagonal. Um dêstes padrões foi utilizado para minimizar a expressão geral (83) e o outro para minimizar a expressão simplificada resultante de (83) e (85).

Seus resultados foram que "em todos os casos estudados (cada uma das quatro indústrias chaves separadas e tôdas as indústrias combinadas) em têrmos do critério C (84), um padrão de agregação foi melhor que os n.º 1, 2, 3 (de Balderston e Whitin) empregando idéias de distância mínima. Isto é, um dos padrões de agregação 4 a 13 forneceu sempre um valor mais baixo de C do que qualquer um dos padrões 1, 2 ou 3.

Todos os seus resultados indicam que o critério desenvolvido permite a escolha de padrões que produzem menores erros.

6. — HATANAKA.

O último teste de que tivemos notícia foi executado por Mr. M. Hatanaka em um trabalho apresentado à Econometric Society em Dezembro de 1957. Infelizmente apenas um resumo de seu trabalho final nos foi pôsto à disposição em forma mimeografada pelo próprio Mr. Hatanaka.

Trabalhou êle com a matriz americana relativa ao ano de 1947, com uma restrição. A matriz estrutural foi subdividida em blocos e em uma das submatrizes os coeficientes foram modificados, para introduzir as adoções previsíveis de novos processos tecnológicos.

As previsões para os anos de 1949, 1950 de produtos individuais por meio do método de insumo-produto foram comparadas com previsões para os mesmos anos por meio de técnicas de regressão múltipla.

Os erros obtidos com o método de insumo-produto foram menores que aquêles obtidos com regressão múltipla.

CONCLUSÃO

Parece fora de dúvida que os erros de natureza computacional não constituem sério inconveniente para a utilização do método de insumo-produto, como sugerem os enfoques de Evans e Waugh. Alguma pesquisa seguindo as sugestões de Wise talvez possam lançar luz sôbre mais de um novo aspecto do problema dos erros.

Erros nos coeficientes de produção exercem influência sôbre os elementos da inversa e portanto sôbre a solução. Desde que possamos considerá-los como existindo com sinais opostos espalhados no interior da matriz estrutural, os efeitos dos que têm o mesmo sinal são aditivos havendo porém uma tendência para que os sinais opostos produzam efeitos de sentidos inversos na solução.

Os dados no ano-base devem ser tão corretos quanto seja possível de maneira a permitir a redução dos erros introduzidos de início na matriz estrutural, prestando-se cuidado especial ao vetor de demanda final e às transações intersetoriais.

Quando previsões forem executadas, devemos devotar atenção às estimativas dos elementos do vetor de demanda final.

Se quaisquer alterações forem notórias nos coeficientes de produção, provindo de tendências cognoscíveis ou em modificações ocorridas nos processos produtivos, devem ser elas introduzidas nas tábuas, pela forma sugerida por Stone |36| e utilizada por Hatanaka |22a|.

Os argumentos em favor de uma tábua completa quando outras estatísticas menos dispendiosas ainda não estejam disponíveis devem ser cuidadosamente ponderados com considerações de custos. Principalmente porque até o presente técnicas de regressão múltipla têm provado ser tão boas para propósitos práticos.

Êste argumento se aplica em particular a países subdesenvolvidos. Pouca atenção tem sido devotada ao dual, em um sentido de programação linear, de uma solução direta |5|. Ambas combinadas poderiam ser extremamente úteis na detenção de engarrafamentos estruturais permitindo conduzir a maneiras de eliminá-los.

O único problema que permanece quase intransponível é o dos erros de agregação e não vemos maneira de o contornar senão por meio de revisão periódica de tôda a tábua de que disponhamos, verificando e reverificando os resultados com elas obtidos. Na realidade êste tópico ainda necessita que com êle sejam realizadas cuidadosas pesquisas. Cremos residir nêle o ponto crucial de fraqueza do método de insumo-produto.

Descrição completa de uma econômia, tal como a que fornecem as tábuas, pode ser excelente instrumento em economias planificadas e pode ter muita utilidade também para o setor privado, sendo fora de dúvida a sua utilidade para o economista teórico.

SUMMARY

The purpose of the paper is to investigate results obtained with regard to the influence of errors on numerical solution, as well as to compare, with reference to the use in forecasting, solutions reached through input-output tables with solutions arrived at by the use of simpler techniques, such as multiple regression.

In the first section of the paper, the author describes the model, the possible sources of errors and the influence of errors on final solutions. The second section, deals with the problem of aggregation; the third one, with the question of the universality of the fundamental hypothesis; and, finally, the fourth section, indicates experiences that have been carried out with the use of American input-output tables, by several authors. At the end of the article, the author indicates his conclusions.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

1. — ALLEN, R. G. D. — Mathematical Economics, Macmillan, London, 1957.

2. — ADAMS, A. A. e STEWART, I. G. — Input-Output Analysis, an Application, in The Economic Journal, vol. LXVI, N.º 263, 1956.

3. — ARROW, K. J. — Import Substitution in Leontief Models, Econometrica, vol. 22, N.º 4, 1954, págs. 481-492.

4. — ARROW, K. J. — in [26], pág. 155.

5. — BARNA, T. — The Interdependence of the British Economy in Journal of the Royal Statistical Society, Series A, vol. VXV, 1952.

6. — BARNA, T. — (ed.) The Structural Interdependence of the Economy, J. Wiley, N. York, 1954.

7. — BARNETT, H. J. — in Studies in Income and Wealth, N.B.E.R., vol. 16, Princeton, 1954.

8. — BALDERSTON, J. B. & WHITIN, T. M. — Agregation in the Input-Output Model in |32|, págs. 79-128.

9. — CAO — PINNA, V. — in Economia Internazionale, Genoa, N.º 2, Maggio 1958, pág. 259.

10. — CHENERY, H. B. & outros — The Structure and Growth of the Italian Economy, U.S.A. Mutual Security Agency, Roma, 1953.

11. — CHRIST, C. F. — in Input — Output Analysis, an appraisal, Studies in Income and Wealth, vol. 18, N.B.E.R., Princeton 1955.

12. — DORFMAN, R. SAMUELSON, P. A. e SOLOW, R. — Linear Programming and Economic Analysis, MacGraw Hill, N. York, 1957.

13. — DORFMAN, R. — The Nature and Significance of Input-Output, The Review of Economics and Statistics, Vol. XXXVI, N.º 2, May 1954, Cambridge, Mass.

14. — DWYER, P. S., & WAUGH, F. V. — On Errors in Matrix Inversion, in Journal of the American Statistical Association, vol. 48, 1953, págs. 289-319.

15. — EVANS, W. D. — The Effect of Structural Matrix Errors on Interindustry Relations Estimates, in Econometrica, vol. 22, N.º 4, 1954, pág. 461.

16. — EVANS, W. D. e HOFFENBERG, M. — The Interindustry Relations Study for 1947, Review of Economics and Statistics N.º XXXII, May 1952, pág. 97.

17. — EVANS, W. D. — Input — Output Computations, in |6., pág. 51.

17-A. — EVANS, W. D. — Letter to the Editor in Econometrica, vol. 26. N.º 1, 1958, pág. |7 .

18. — EVANS, W. D., CORNFIELD, J. and HOFFENBERG, M. — Full Employment Patterns 1950, Monthly Labour Review, LXIV. (Febr. and March 1947) págs. 163-190 e 420-432.

19. — FEI, J. C. H. — A Fundamental theorem for the Aggregation Problem of Input — Output Analysis Econometrica, vol. 24, n.º 4, 1956, pág. 40.

20. — FISHER, W. D. — Criteria for Aggregation in Input-Output Analysis, The Review of Economics and Statistics, vol. XL, N.º 3, 1958, pág. 250.

21. — GRUENBAUM, A. L. — Four year development plan for Israel, Prime Minister's Office, Jerusalem, 1951.

22. — HATANAKA, M. — Note on Consolidation Within a Leontief System, in Econometrica, vol. 20, N.º 2, 1952, pág. 301.

22-A. — HATANAKA — personal comunication.

22-B. — HOTTELING, H. — Some new methods in Matrix calculation in Annals of Mathematical Statistics, 1943, págs. 1 — 34.

23. — HATANAKA, M. — The Workability of an Input-Output Model, Trabalho apresentado à Reunião da Econometric Society, Dec. 1957, v. Referência e Sumário em Econometrica, vol. 26, n.º 4, 1958, pág. 608 (mimeografado).

24. — HOLZMAN, M. — Problems of classification and Aggregation, in |29|, capitulo 9.

25. — HOLLEY, J. L. — Note on the Inversion of the Leontief Matrix, in Econometrica, July 1951, págs. 317 — 320.

26. — KOOPMANS, T. C. — ed.) Activity Analysis of Production and Allocation, J. Wiley, N. York, 1951.

27. — LANGE, O. — Some Observations on Input-Output Analysis, in SANKHYA, Indian Journal of Statistics, vol. 17, Part I, June 1956.

28. — LEONTIEF, W. W. — The Structure of the American Economy 1919 — 1939; 2 nd. edition, New York, 1951.

29. — LEONTIEF, W. W. — (ed.) Studies in the Structure of the American Economy, Harvard Economic Research Project, 1953.

30. — MALINVAUD, E. — Aggregation Problems in Input-Output models in |6|, pág. 187.

31. — McMANUS, M. — General Consistent Aggregation in Leontief Models, in the Yorkshire Bulletin of Economic and Social Research, 1956.

32. — MORGENSTERN, O. — (ed.) Economic Activity Analysis J. Wiley, N. York, 1954.

33. — NEUMANN, J. von e GOLDSTINE, H. H. — Inversion of Higher Order Matrices in Bulletin of the American Mathematical Society, 1947, pág. 1022.

34. — SAMUELSON, P. A. — in |26|, pág. 142.

35. — SOLOW, R. — On the Structure of Linear Models Econometrica, 20, January 1952, pág. 29.

36. — STONE, R. — Input-Output and the Social Acounts, in |6|, pág. 153.

37. — THEIL, H. — Linear Aggregation in Input-Output Analysis, Econometrica, vol. 25, N.º 1, January 1957, Pág. III.

38. — O.N.U. — C.E.P.A.L. — Economic Commission for Latin América, an Introduction to the technique of Programming, Santiago Chile, 1955.

39. — O.N.U. — C.E.P.A.L. — Economic Bulletin for Latin America, vol. 1, N.º 2, Santiago, Setembro, 1956.

40. — WAUGH, F. V. — Inversion of the Leontief Matrix by Power Series, Econometrica, vol. 18, April 1950, pág. 142.

41. — WOODBURY, M. A. — in |32|, pág. 341.

42. — WONG, Y. K. — in |32|, págs. 201 e 283.

43. — DEBREU, G. e HERSTEIN, I. N. — Non — negativo square matrices in, Econometrica, vol. 21, 1953, págs. 597-606.

44. — KOOPMANS, T. C. — in |26|.

45. — CANSADO, E. — in Trabajos de Estadística, Madrid, 1959.

46. — BERGER e SAIBEL — in Econometrica, vol. 25, N.º 4, 1957.

47. — OFICINA DE COORDINACION Y PROGRAMACION ECONOMICA — Programa de Ordenacion de las Inversiones, Documentacion Economica N.º 3, MADRID, 1959.

— - — - —