A Teoria dos Jogos e sua Aplicação á Economia (*)

THALES MELLO CARVALHO

1. INTRODUÇÃO.

A Teoria dos Jogos foi iniciada por J. VON NEUMANN, cuja primeira análise matemática dos jogos de salão apareceu em 1928 (**). Em colaboração com O. MORGENSTERN publicou, em 1943, o famoso tratado *Theory of Games and Economic Behavior* de grande repercussão entre matemáticos e economistas, cujas contribuições nesse campo são atualmente numerosas.

Nosso objetivo não é apresentar uma síntese dessa teoria e sim dar uma idéia de suas possibilidades especialmente no tocante à sua aplicação aos problemas econômicos. É mister para isso, além da conceituação fundamental, apresentar de modo simples alguns resultados teóricos mais importantes.

A teoria trata apenas dos chamados *jogos de estratégia*, isto é, aquêles cujos resultados não dependem sòmente de *chance*, mas, sobretudo, da *habilidade* de cada jogador.

Em sua exposição sistemática, os autores (***) classificam os jogos de acôrdo com o número de jogadores. Assim, um *jôgo de n pessoas* (*n-person game*) é aquêle de que participam n pessoas ou n conjuntos de pessoas, associadas essas últimas por identidade de interêsses (****). As chamadas *paciências* são jogos de *uma* pessoa; o xadrez é jôgo de *duas* pessoas; o *bridge* é, também, jôgo de *duas* pessoas (embora dêle participem quatro), visto ser disputado por um *grupo de duas* contra o grupo restante das outras duas.

De um modo geral, os *resultados* dos jogos sociais podem ser aferidos:

a) em têrmos monetários, segundo a norma estipulada;

b) mediante "scores", de acôrdo com as regras do jôgo (*bridge* em torneios, por exemplo);

(*) Aula inaugural do ano letivo de 1957, proferida na FACULDADE NACIONAL DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS DA UNIVERSIDADE DO BRASIL. Sua exposição foi feita através de quadros ilustrativos. A fim de divulgá-la nesta revista, o autor escreveu-a sob a forma de artigo, respeitando, porém, o conteúdo daquela preleção.

(**) **Zur Theorie der Gesellshaftsspiele**, MATHEMATISCHE ANNALEN, vol. 100, 1928, pp. 295-320.

(***) Denominação com que neste artigo faremos referência a VON NEUMANN e MORGENSTERN.

(****) Como a bibliografi asôbre o assunto é predominantemente de língua inglêsa, a fim de orientar o leitor interessado em seu estudo, apresentaremos a terminologia correspondente naquele idioma.

c) em têrmos de vitória, empate ou derrota (xadrez, poı exemplo).

A teoria parte da suposição fundamental da *mensurabilidade* dêsses resultados em têrmos *numéricos* (*monetários*), irrestritamente transferíveis de jogador a jogador. São os *pagamentos*. Assim, numa partida de xadrez, a *vitória* corresponderia a 1 (uma unidade monetária estipulada); *empate* e *derrota* valeriam, respectivamente, 0 e — 1.

Um jôgo é de *soma nula* (*zero-sum game*) se a soma algébrica dos pagamentos finais é nula; em outras palavras, se a soma dos ganhos finais é igual à soma das perdas finais dos jogadores. Em caso contrário, os jogos denominam-se de *soma não nula* (*non-zero-sum games*). É grande a importância dêsses últimos para a Economia, uma vez que, no processo econômico — identificado com determinado jôgo-modêlo, pode haver criação ou destruição de riqueza.

As *regras do jôgo* são os princípios que definem as possibilidades de ação de cada jogador.

Ponto importante é o conjunto de *informações* de cada jogador acêrca dos elementos de que dispõem seus adversários e de sua atuação passada. O xadrez, por exemplo, é jôgo de informações completas; cada jogador, ao fazer seu lance, sabe os lances passados de seu adversário, isto é, dispõe dos elementos necessários à avaliação exata de sua posição estratégica. No *bridge* cada jogador tem apenas informações parciais: conhece as treze cartas de sua mão e procura, através de um *leilão* convencional, avaliar as "mãos" de seu parceiro e seus adversários antes de tomar a decisão do contrato.

2. JOGOS RETANGULARES. (*)

Consideremos, inicialmente, os jogos retangulares, pertencentes à classe dos *jogos de duas pessoas e de soma nula* (*two-person zero-sum games*). Seu modêlo matemático pode ser, assim, apresentado: o jogador P_1 escolhe um número do conjunto (finito) M (1, 2, ... m), constituído dos números naturais de 1 a *m*; seu adversário P_2 escolhe um número do conjunto N (1, 2, ... n), cujos elementos são os números naturais de 1 a *n*. Sejam *i* ($i \in M$) e *j* ($j \in N$), respectivamente, as escolhas de P_1 e P_2. As regras do jôgo definem, então, um certo pagamento a_{ij} de P_2 a P_1. Se a_{ij} fôr positivo, representará realmente um pagamento (no sentido usual do vocábulo) de P_2 a P_1; se fôr negativo, equivalerá a um pagamento de P_1 a P_2. Os "pagamentos" relativos a tôdas as escolhas possíveis de P_1 e P_2 podem ser apresentados em uma *matriz retangular*, o que justifica a denominação acima.

Vejamos, para ilustração, um exemplo do jôgo denominado *Morra*, muito difundido desde longa data entre os italianos. Cada

(*) Denominação de J. C. C. McKINSEY. Nesta primeira parte acompanharemos, de perto, a exposição teórica de seu trabalho **Introduction to the Theory of Games**.

jogador (P_1 ou P_2) levanta *um* ou *dois* dedos e, simultâneamente, prevê a escolha de seu adversário. Se ambos acertam ou erram, o jôgo é nulo; se um apenas acerta, recebe um número de unidades monetárias igual ao total de dedos levantados. Representemos por (a, b) a escolha do jogador que levantou *a* dedos (a = 1 ou 2) e previu que seu adversário levantasse *b* dedos (b = 1 ou 2). Cada um dos jogadores terá, então, quatro escolhas: (1, 1), (1, 2), (2, 1) e (2, 2). De acôrdo com a regra do jôgo, a *matriz dos pagamentos* (*pay-off matrix*) de P_2 a P_1 será:

P_1 \ P_2	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	0	2	— 3	0
(1, 2)	— 2	0	0	3
(2, 1)	3	0	0	— 4
(2, 2)	0	— 3	4	0

Assim, por exemplo, se P_1 fêz a escolha (2, 2), isto é, se levantou 2 dedos e previu que P_2 levantaria 2, e se P_2 fêz a escolha (1, 2), isto é, levantou 1 dedo e previu que P_1 levantaria 2, P_2 ganhou 3 (soma dos números de dedos levantados). A matriz indica para P_2 o pagamento — 3 (portanto, o recebimento 3) no cruzamento da linha (2, 2) com a coluna (1, 2).

3. ESTRATÉGIAS PURAS.

O problema fundamental é a pesquisa do *recurso ótimo* para cada jogador, qualquer que seja a atuação contrária de seu antagonista. Esta *independência de ação* é característica da teoria dos jogos de estratégia.

Apresentemos, de início, dois exemplos simples, a fim de melhor esclarecer os resultados teóricos dados mais adiante.

Consideremos o jôgo assim caracterizado: P_1 escolhe um número do conjunto (1, 2, 3) e P_2 um número do conjunto (1, 2, 3, 4), sendo a seguinte a matriz de pagamentos:

P_1 \ P_2	1	2	3	4
1	6	4	2	8
2	5	3	1	6
3	4	2	0	5

Como cada elemento da primeira linha é superior ao elemento correspondente de qualquer das outras duas, será mais vantajoso para P_1 escolher a primeira linha, pois seu resultado será o melhor, qualquer que seja a escolha de P_2. Por outro lado, como cada elemento da terceira coluna é inferior aos elementos correspondentes das outras três, P_2 deverá jogar na terceira coluna, pois pagará menos, qualquer que seja a escolha de P_1. Esta circunstância especial define, então, o que se chama uma *estratégia pura* (*pure strategy*) para cada jogador: P_1 deverá escolher 1 (jogar na primeira linha) e P_2 deverá escolher 3 (jogar na terceira coluna). O *valor do jôgo* será 2 para P_1 e, portanto, — 2 para P_2.

Observemos que não é eqüitativo o jôgo definido pela matriz anterior: P_2 perderá na quase totalidade dos casos; sua estratégia pura 3 apenas torna mínimo seu prejuízo. Êsse aspecto é, porém, indiferente, uma vez que a teoria pretende fornecer modelos matemáticos para a análise dos mercados, onde os agentes econômicos (consumidores ou empresários) participam da competição geralmente em condições desiguais. Importante para cada um é dispor de uma *estratégia* capaz de lhe assegurar um máximo de *utilidade* ou de *lucro.*

Consideremos, agora, o jôgo retangular definido, nos moldes anteriores, pela seguinte matriz:

P_1 \ P_2	1	2	3	4
1	0	— 1	3	2
2	— 3	4	2	6
3	1	2	5	3

Não ocorre, evidentemente, a particularidade do exemplo anterior.

Procuremos, então, uma estratégia *segura* que garanta a cada jogador o melhor resultado, qualquer que seja a escolha de seu adversário. Observemos que, para P_1, os resultados mais desfavoráveis são os *mínimos* pagamentos de cada linha (— 1, — 3 e 1, respectivamente) e, para P_2, os *máximos* pagamentos de cada coluna (1, 4, 5 e 6, respectivamente). Logo, P_1 correrá menor risco jogando na linha correspondente ao *máximo* daqueles mínimos, o que lhe assegura o ganho mínimo 1. P_2 terá, igualmente, menor risco jogando na coluna correspondente ao *mínimo* daqueles máximos, com o que evita pagar mais do que 1 a P_1. Fica, assim, definida uma *estratégia pura* para cada jogador: P_1 deve escolher 3 (jogar na linha 3) e P_2 deve escolher 1 (jogar na coluna 1). O *valor do jôgo* será, pois, 1 para P_1 e — 1 para P_2.

Assinalemos o característico especial da matriz anterior: o *máximo dos mínimos das linhas* é, ao mesmo tempo, o *mínimo dos máximos das colunas.* Tal valor ocorre no ponto do campo de existência da função-matriz (*) definido pela linha 3 e pela

(*) A matriz retangular caracteriza uma função de duas variáveis, definida no produto cartesiano de seus domínios.

coluna 1. Êsse ponto denomina-se *ponto-sela* (*saddle-point*) da matriz; sua conceituação será dada mais adiante.

O resultado acima indica que, se a matriz tem ponto-sela, cada jogador dispõe de uma *ótima estratégia pura*, do que decorre o *valor* do jôgo.

Os exemplos dados esclarecem a apresentação geral do problema, dada a seguir.

Consideremos o jôgo retangular, no qual P_1 escolhe um número do conjunto M (1, 2, ... m) e P_2 um número do conjunto N (1, 2, ... n), sendo *m* e *n* números naturais. Seja

P_1 \ P_2	1	2 ...	j ...	n
1	a_{11}	a_{12} ...	a_{1j} ...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22} ...	a_{2j} ...	a_{2n}
:	:	:	:	:
i	a_{i1}	a_{i2} ...	a_{ij} ...	a_{in}
:	:	:	:	:
m	a_{m1}	a_{m2} ...	a_{mj} ...	a_{mn}

(1)

a matriz de pagamentos.

P_1 examinará o valor mínimo ($\min\limits_{j \in N} a_{ij}$) de cada linha *i* (i = 1, 2, ... m) e procurará o máximo dêsses mínimos ($\max\limits_{i \in M} \min\limits_{j \in N} a_{ij}$). P_2 examinará o valor máximo ($\max\limits_{i \in M} a_{ij}$) de cada coluna *j* (j = 1, 2, ... n) e procurará o mínimo dêsses máximos ($\min\limits_{j \in N} \max\limits_{i \in M} a_{ij}$).

Demonstra-se fàcilmente que

$$\max_{i \in M} \min_{j \in N} a_{ij} \leq \min_{j \in N} \max_{i \in M} a_{ij} \qquad (2)$$

isto é, que o *máximo dos mínimos das linhas é inferior ou igual ao mínimo dos máximos das colunas.*

Se a relação (2) se transforma em uma igualdade, diz-se que a matriz (1) tem ponto-sela, cuja definição seria: ponto (i_0, j_0) tal que $a_{i_0 j_0}$ seja, ao mesmo tempo, o mínimo valor de sua linha e o máximo valor de sua coluna. A existência do ponto-sela é condição necessária e suficiente para a igualdade mencionada.

4. ESTRATÉGIAS MISTAS.

Vejamos, agora, o caso geral das matrizes sem ponto-sela. Consideremos, inicialmente, o jôgo retangular definido pela matriz (*)

$$\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{Vmatrix}$$

desprovida de ponto-sela, visto que o mínimo valor de cada linha (— 2 na primeira e — 4 na segunda)não é o máximo valor de sua coluna. Dêsse modo, nenhuma estratégia pura é conveniente para cada jogador. Se, por exemplo, P_1 escolhe a estratégia pura 1 (joga na primeira linha) P_2 tira proveito dessa escolha empregando a estratégia pura 2 (jogando na segunda coluna); se P_1 escolhe a estratégia 2, P_2 tem mais vantagem empregando a estratégia 1. Raciocínio idêntico faz-se em relação às possíveis escolhas de P_2.

Cada jogador deve, então, fazer seu plano de modo que o adversário *não descubra sua escolha* e, portanto, não tire proveito de tal informação.

Suponhamos que P_1 e P_2 usem recursos aleatórios assim definidos: as probabilidades de P_1 jogar nas linhas 1 e 2 são, respectivamente, x e $1 - x$; as probabilidades de P_2 jogar nas colunas 1 e 2 são, respectivamente, y e $1 - y$. Então, a esperança matemática de P_1 será

$$E\ (x, y) = 2xy - 2x\ (1 - y) - 4y\ (1 - x) + 6\ (1 - x)\ (1 - y)$$

ou, após uma transformação algébrica,

$$E\ (x, y) = 14\ \left(x - \frac{5}{7}\right)\ \left(y - \frac{4}{7}\right) + \frac{2}{7} \qquad (3)$$

Se P_1 empregar a probabilidade $x = \frac{5}{7}$, terá a certeza de sua esperança matemática (ganho aleatório) ser igual a $\frac{2}{7}$ e, portanto, *não ser inferior a* $\frac{2}{7}$, qualquer que seja a escolha de P_2. Se P_2 utilizar a probabilidade $y = \frac{4}{7}$, sua perda aleatória será $\frac{2}{7}$ e, por conseqüência, *não superior* a $\frac{2}{7}$. Disso resulta que P_1

(*) Para simplicidade, indicaremos, de agora em diante, apenas a matriz de pagamentos. A definição do jôgo é semelhante à dos casos anteriores.

deverá jogar nas linhas 1 e 2 com probabilidades iguais, respectivamente, a $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{7}$, e P_2 deverá jogar nas colunas 1 e 2 com probabilidades iguais, respectivamente, a $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$. Em têrmos da teoria dos jogos, diz-se que P_1 deverá utilizar a *estratégia mista* $\left\| \frac{5}{7}, \frac{2}{7} \right\|$ e P_2 a estratégia mista $\left\| \frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right\|$.

Êste comportamento harmoniza-se com os princípios da teoria dos jogos: cada jogador age *racionalmente*, procurando um resultado seguro que independa da ação esclarecida e contrária do adversário.

De um modo geral, para o jôgo definido pela matriz (1), uma estratégia mista de P_1 é representada por um vetor $X = \| x_1, x_2, ... x_m \|$, sendo $x_1, x_2, ... x_m$ as probabilidades com que deve jogar, respectivamente, nas linhas 1, 2, ... m. Logo:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \qquad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, ... m) \qquad (4)$$

Anàlogamente, uma estratégia mista de P_2 é o vetor $Y = \| y_1, y_2, ... y_n \|$, sendo $y_1, y_2, ... y_n$ as probabilidades com que deve jogar, respectivamente, nas colunas 1, 2, ... n, do que decorre

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = 1 \qquad y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, ... n) \qquad (5)$$

Sejam S_m o conjunto de tôdas as estratégias X definidas pelas condições (4) e S_n o conjunto de tôdas as estratégias Y definidas pelas condições (5).

Consideremos, então, a *função-esperança* de P_1

$$E\ (X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i\ y_j \qquad (6)$$

Sejam

$$X^* = \| x_1^*, x_2^*, ... x_m^* \| \qquad Y^* = \| y_1^*, y_2^*, ... y_n^* \| \qquad (7)$$

estratégias mistas de P_1 e P_2, respectivamente. Diz-se que X^* e Y^* são *ótimas estratégias* se

$$E\ (X, Y^*) \leqslant E\ (X^*, Y^*) \leqslant E\ (X^*, Y) \qquad (8)$$

quaisquer que sejam X e Y pertencentes, respectivamente, aos domínios S_m e S_n.

Diz-se, então, que (X^*, Y^*) é a *solução* ou *ponto-sela estratégico* do jôgo definido pela matriz (1). $E\ (X^*, Y^*)$ é o valor do jôgo (para P_1).

A existência de ótimas estratégias (7) para P_1 e P_2 é assegurada por um teorema fundamental. Isto equivale a afirmar que *todo jôgo retangular tem um valor e cada jogador dispõe de uma ótima estratégia.*

5. SOLUÇÃO DO JÔGO RETANGULAR.

A exposição do método geral para a solução de um jôgo retangular não caberia neste artigo. Todavia, as propriedades da ótima estratégia permitem obtê-la mediante recursos algébricos simples. (*)

Tais propriedades poderiam ser assim resumidas:

5.1. $E(i, Y^*) \leqslant v \leqslant E(X^*, j)$, sendo *i* um elemento qualquer do conjunto (1, 2, ... m) e *j* um elemento qualquer do conjunto (1, 2, ... n). $E(i, Y^*)$ representa a esperança matemática de P_1 se P_1 usa a estratégia simples *i* e P_2 a estratégia mista Y^*. $E(X^*, j)$ será essa esperança na hipótese de P_1 usar a estratégia mista X^* e P_2 a estratégia simples *j*.

5.2. Se $E(i, Y^*) < v$, então, P_1 não deverá jogar na linha *i*, isto é, em sua estratégia mista, a probabilidade de jogar nessa linha deve ser nula. Se $E(X^*, j) > v$, P_2 não deverá jogar na coluna *j*, isto é, em sua estratégia mista, a probabilidade de jogar nesta coluna deve ser nula.

Consideremos, por exemplo, o jôgo retangular definido pela matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Calculemos as ótimas estratégias $X^* = \| x_1, x_2 \|$ e $Y^* = \| y_1, y_2, y_3 \|$ de P_1 e P_2, respectivamente. (**)

De acôrdo com as relações (4) e (5), temos

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \tag{9}$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \qquad y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0 \tag{10}$$

Empregando a propriedade 5.1, obtemos

$$\begin{array}{ll} E(X^*, 1) = x_2 \geqslant v & E(1, Y^*) = 2y_2 + y_3 \leqslant v \\ E(X^*, 2) = 2x_1 - x_2 \geqslant v & E(2, Y^*) = y_1 - y_2 \leqslant v \\ E(X^*, 3) = x_1 \geqslant v & \end{array} \tag{11}$$

O problema consiste em calcular os valores das incógnitas x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, v através das equações (9) e das relações (11), observadas as restrições (10).

(*) J. C. C. McKINSEY, op. cit., Cap. II.

(**) Omitiremos agora os asteriscos com que assinalamos as probabilidades da ótima estratégia, a fim de facilitar a composição tipográfica.

A solução é obtida por tentativas. Verifica-se, em primeiro lugar, se tem solução o sistema formado por (9) e pelas equações resultantes da supressão dos sinais de desigualdade nas relações (11). Tal solução deve atender não sòmente à compatibilidade das equações como também às condições (10).

Em caso contrário, até ser conseguida a solução, experimentam-se os sistemas obtidos substituindo-se cada sinal $\geqslant$ por $=$ ou $>$ e cada sinal $\leqslant$ por $=$ ou $<$, observada a propriedade 5.2. Assim, por exemplo, a substituição da relação $E(X^*, 2) = 2x_1 - x_2 \geqslant v$ pela desigualdade $2x_1 - x_2 > v$ implicaria ser $y_2 = 0$.

Mediante êste recurso obtivemos a solução

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \qquad y_1 = y_3 = \frac{1}{2} \qquad y_2 = 0 \qquad v = \frac{1}{2}$$

isto é, as ótimas estratégias de P_1 e P_2 são, respectivamente,

$$X^* = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\| \qquad Y^* = \left\| \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\|$$

e o valor do jôgo para P_1 é $v = \frac{1}{2}$.

6. JOGOS DE *n* PESSOAS E DE SOMA NULA.

Nosso objetivo, agora, é dar uma idéia da solução de um jôgo de *n* pessoas e de soma nula (*zero-sum n-person game*). Para isso, esclareceremos os conceitos fundamentais abaixo enumerados.

Representaremos por 1, 2, ... n os jogadores e por N seu conjunto.

6.1. *Imputação*. A *imputação* (*imputation*) é o vetor $(a_1, a_2, \dots a_n)$ que define a distribuição dos ganhos dos *n* jogadores; a_i representa, pois, o pagamento ao jogador *i* $(i = 1, 2, \dots n)$. Como o jôgo é de soma nula, tem-se $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

6.8. *Coalizão*. A teoria dos jogos de *n* pessoas é estruturalmente baseada no conceito de *coalizão* (*coalition*), assim denominada a união de dois ou mais jogadores que agem de comum acôrdo, visando ao mesmo objetivo. Admite-se que um jogador só participe de uma coalizão se nela seu ganho é, no mínimo, igual ao que teria se agisse isoladamente.

A teoria estuda, então, as possibilidades de uma coalizão S, de *k* jogadores $(1 \leqslant k < n)$, na situação mais desfavorável, isto é, suposta a formação de uma contracoalizão (representada por $-S$), constituída dos demais $n - k$ participantes. A análise dos jogos de duas pessoas assim formados (S contra $-S$) em tôdas as hipóteses possíveis (k = 1, 2, ... n — 1) permite determinar o valor do jôgo de *n* pessoas.

6.3. *Função característica.* A *função característica* (*characteristic function*) v (S), para uma coalizão S, é o valor do jôgo para S, disputado contra — S. Em outras palavras, é a soma dos pagamentos aos participantes da coalizão S. Suas propriedades essenciais são:

a) *v (0) = 0*, isto é, se a coalizão não tem participantes (é um conjunto vazio), seu ganho total é nulo.

b) *v (— S) = — v (S)*, pois v (S) e v (— S) são, respectivamente, os ganhos de S e — S no jôgo de duas pessoas e de soma nula, a que se reduz o caso geral considerado.

Dessas duas propriedades decorre imediatamente que v (N) = 0, resultado de interpretação simples: o total dos ganhos dos *n* participantes é zero por ser jôgo de soma nula.

c) v (S U S') $\geqslant$ v (S) + v (S'), se S e S' são subconjuntos de N que não têm elemento comum; em outras palavras, se duas coalizões S e S' (que não têm jogador comum) formam uma coalizão, o ganho total desta não será inferior à soma dos ganhos totais de S e S'.

6.4. *Dominância.* O conceito de *dominância* (*domination*) de imputações pode ser assim definido:

Uma imputação X domina uma imputação Y se alguns jogadores têm individualmente maiores ganhos em X do que em Y e, atuando de comum acôrdo, podem assegurar X.

Observe-se a importância da segunda parte: é preciso que os jogadores possam *assegurar* a imputação mais vantajosa sem o que não há dominância.

Assinalemos o seguinte característico fundamental: *a relação de dominância não é transitiva*, isto é, se X domina Y e Y domina Z, disso não resulta que X domine Z.

Um exemplo, dado mais adiante, melhor esclarecerá êsses conceitos.

6.5. *Solução.* A solução de um jôgo de *n* pessoas e de soma nula é, de acôrdo com a teoria, um *conjunto de imputações* tal que:

a) nenhuma imputação do conjunto-solução domine qualquer outra dêsse conjunto;

b) cada imputação não pertencente ao conjunto-solução seja dominada, pelo menos, por uma imputação dêsse conjunto.

Como a relação de dominância não tem a propriedade transitiva, uma imputação não pertencente ao conjunto-solução pode dominar uma imputação dêsse conjunto, mas é certamente dominada por outra do mesmo conjunto. A análise do mercado de três pessoas, feita mais adiante, ilustrará melhor êsses resultados.

Exemplifiquemos alguns conceitos anteriores considerando o seguinte jôgo de 3 pessoas A, B, C: cada jogador escreve o nome de um qualquer dos outros dois; se, em relação a dois dêles, há reciprocidade de escolha, êsses dois ganham e cada um recebe 1 do perdedor. Por exemplo, se A escreve o nome de B e B escreve o nome de A, C perde, qualquer que seja sua escolha, e deve pagar 1 a cada um dos outros dois. Se não há tal reciprocidade, o jôgo é nulo. Isto ocorre, por exemplo, se A escreve o nome de B, B o nome de C e C o nome de A.

Observemos os valores da função característica:

$v\ (0) = 0$: o valor da coalizão sem participantes é nulo (propriedade essencial vista no item 6.3);

$v\ (ABC) = 0$: o ganho total da coalizão de todos os jogadores é zero (propriedade mencionada no mesmo item);

$v\ (A) = v\ (B) = v\ (C) = -2$: cada jogador, enfrentando a coalizão dos outros dois, perde certamente, pois a coalizão de dois assegura-lhes o ganho (*);

$v\ (AB) = v\ (AC) = v\ (BC) = 2$: a coalizão de dois jogadores quaisquer assegura-lhes o ganho.

Vejamos dois exemplos de imputação, relativos às coalizões abaixo indicadas:

(A): A, jogando só, perderá para a coalizão BC; seu ganho é, pois, — 2 e os ganhos de B e C são iguais a 1; a imputação correspondente é (— 2, 1, 1);

(AB): a coalizão AB garante os ganhos 1 de A e B e, portanto, a perda — 2 de C; a imputação correspondente é (1, 1, — 2).

7. JOGOS DE SOMA NÃO NULA.

A teoria dos *jogos de soma não nula* (*non-zero-sum games*) reduz-se à dos jogos de soma nula mediante a introdução de um *jogador fictício* (*fictitious player*) que ganha ou perde a soma perdida ou ganha pela totalidade dos outros n jogadores e nenhuma influência tem no curso do jôgo: não controla seus ganhos nem pela formação de coalizões nem pela escolha de decisões mais vantajosas.

Como no processo econômico pode haver criação ou destruição de riqueza, os jogos de soma não nula constituem importante modêlo para sua análise.

(*) Se, por exemplo, A e B formam uma coalizão, isto equivale ao seguinte acôrdo entre êsses jogadores: A escreve o nome de B e B escreve o nome de A. Então, C perde, qualquer que seja sua escolha.

8. APLICAÇÕES À ECONOMIA.

Os autores, no início do livro já citado, declaram que seu objetivo é a discussão de questões fundamentais da teoria econômica, cuja caracterização e solução exigem tratamento por métodos matemáticos bem diversos das técnicas até então empregadas. Em sua opinião, a teoria dos jogos contribui de modo diferente para o exame dêsses problemas, sendo o instrumento apropriado ao desenvolvimento de uma teoria do comportamento econômico.

Consideram que, ao contrário do ocorrido em outras ciências, a aplicação da Matemática à Economia — talvez até de modo exagerado — não teve o almejado sucesso. Repelem à argumentação relativa à influência do elemento humano ou à impossibilidade de medida de importantes fatôres, reportando-se, como elemento comparativo, à fase pré-matemática da Física, da Química e da Biologia.

A seu ver, são outras as razões daquele insucesso, especialmente:

a) formulação pouco clara dos problemas econômicos;

b) freqüente inadequação dos instrumentos matemáticos utilizados, nos casos em que essa formulação era mais satisfatória;

c) conhecimento dos fatos relevantes da Economia incomparàvelmente menor do que os relativos à Física na época de seu desenvolvimento à luz da Matemática. (*)

Nesse particular, lembram que a criação da Mecânica Racional, fase decisiva da aplicação da Matemática à Física, está ligada ao aparecimento do Cálculo Infinitesimal. Nova descoberta, de tal envergadura, no campo da Matemática talvez seja indispensável ao desejado progresso da Economia.

Concluem pela necessidade de precisão e domínio, inicialmente em um campo limitado, a fim de serem desenvolvidos métodos que, posteriormente, sejam gradativamente estendidos. Julgam indispensável conhecer ao máximo o comportamento individual e as mais simples formas de troca. A seu ver, essa norma foi adotada com bons resultados pelos fundadores da escola marginal, embora não seja geralmente aceita pelos economistas que, via de regra, ambicionam demais.

Feitas estas considerações elucidativas da posição dos autores, vejamos algumas aplicações de sua teoria a problemas econômicos.

9. CASO $n = 1$: MODÊLO *ROBINSON CRUSOÉ*.

A hipótese $n = 1$ representa o jôgo de apenas *um* jogador. Corresponde em Economia ao habitualmente denominado modêlo

(*) "Na verdade, o passo decisivo da Física no século XVII, especialmente no campo da Mecânica, deve-se ao prévio desenvolvimento da Astronomia. Foi preparado por alguns milênios de observação astronômica, sistemática e científica, culminando com a figura ímpar de TYCHO DE BRAHE. Nada disto ocorreu na ciência econômica. Seria absurdo, em Física, esperar KEPLER e NEWTON sem TYCHO DE BRAHE, e não há razão para almejar desenvolvimento mais simples na Economia." (**Theory of Games and Economic Behavior**, pág. 4.)

ROBINSON CRUSOÉ. O problema de CRUSOÉ é ùnicamente o da "maximização" de sua utilidade, uma vez que controla tôdas as variáveis e não enfrenta a ação inteligente de competidor em sentido contrário ao de seus interêsses. A teoria dos jogos, neste caso, nada acrescentou aos resultados clássicos da análise econômica.

10. CASO $n = 2$: MONOPÓLIO BILATERAL.

Ao passar-se do caso $n = 1$ (jôgo de uma pessoa) para o caso $n = 2$ (jôgo de duas pessoas), perde-se o característico de um puro *problema de máximo*. A passagem de $n = 2$ para $n > 2$ elimina o aspecto de simples oposição de interêsses.

Para os autores, no mercado de duas ou mais pessoas há realmente problema de *máximos em conflito*: cada participante controla apenas algumas variáveis da função (utilidade ou lucro) que deseja "maximizar" e enfrenta outros agentes em posição similar com o contrôle de outras dessas variáveis. Não podem ser, pois, identificados com os clássicos problemas matemáticos de *máximos*, de *máximos condicionados* ou de *Cálculo das Variações*. Mais adequadamente do que os recursos empregados na Economia Racional, deveriam ser aplicados os princípios dos jogos de estratégia, que melhor analisam a atuação de cada participante (princípios do comportamento individual).

Vejamos, para ilustração da hipótese $n = 2$, o caso do *monopólio bilateral*, isto é, o mercado modêlo de um só vendedor e um só comprador.

10.1. *Caso de um bem único (indivisível)*. Um indivíduo A (vendedor) oferece à venda um bem indivisível, ao qual dá um valor de uso u. O indivíduo B (comprador) deseja adquirí-lo e, em face do uso alternativo de seu dinheiro, atribui-lhe um valor limite v.

Se u é inferior a v, a transação pode ser efetuada por um preço p $(u \leqslant p \leqslant v)$; nesse caso, $a_1 = p - u$ e $a_2 = v - p$ serão, respectivamente ,os ganhos de A e B. A análise das funções características mostra que a solução é o conjunto de imputações (a_1, a_2), sendo a_1 e a_2 não negativos e $a_1 + a_2 = v - u$. Chega, assim, à solução tradicional: p está compreendido entre u e v.

10.2. *Caso de s unidades indivisíveis e mùtuamente substitíveis de um bem.* Admitida a hipótese do decréscimo da utilidade marginal, a análise das funções características permite as seguintes conclusões:

a) o número de unidades transferidas coincide com o determinado pelo critério dos *pares marginais* de BÖHM-BAWERK;

b) o preço das unidades transferidas é determinado por um intervalo mais largo do que o estabelecido por aquêle critério.

Os autores justificam a discrepância esclarecendo que, para BÖHM-BAWERK, havia um único preço no mercado, válido para tôdas as transações ocorridas, enquanto a teoria dos jogos mostra a possibilidade de apreçar discriminatòriamente as várias unidades, sendo, portanto, maior seu campo de variação. "Nosso preço por unidade é simplesmente um preço médio" dizem êles.

11. CASO $n = 3$: MONOPÓLIO X DUOPSÔNIO.

Vejamos a aplicação dos resultados da teoria dos jogos de três pessoas ao caso do mercado-modêlo de um vendedor e dois compradores (monopólio x duopsônio).

11.1. *Caso de um bem único (indivisível).* Consideremos o seguinte exemplo dado por MARSCHAK (*): O indivíduo A tem uma propriedade (oferecida à venda)e estima em u = 9 seu valor em face do uso alternativo que dela poderá fazer, na hipótese de não a vender. Os possíveis compradores B e C, em vista do uso alternativo de seu dinheiro, não investirão mais do que v = 17 e w = 22, respectivamente.

A solução usual do problema (solução do *senso comum*) é assim apresentada: C paga a A mais do que 17 (e, no máximo, 22) e elimina B do mercado. É, todavia, incompleta, pois não prevê uma coalizão de compradores pela qual C pague uma compensação a B para retirar-se do mercado e consiga adquirir a propriedade por preço inferior a 17, no mínimo, porém, igual a 9.

Analisemos a função característica do problema.

$v(A) = v(B) = v(C) = 0$: Nenhum dos três, agindo só, pode assegurar a transferência da propriedade; A pode recusar-se a vendê-la, donde v (B) = v (C) = 0; B e C podem, de comum acôrdo, negar-se a adquirí-la, donde v (A) = 0.

$v(BC) = 0$: A coalizão BC não pode assegurar a transferência, pois A pode recusar-se a vendê-la.

$v(AB) = 8$: A e B podem assegurar a transferência por um preço p compreendido entre 9 e 17. Como os ganhos de A e C são, respectivamente, $p - 9$ e $17 - p$, sua soma é 8.

$v(AC) = 13$: A e C podem assegurar a transação por um preço p compreendido entre 17 e 22. Como os ganhos de A e C são, respectivamente, $p - 9$ e $22 - p$, sua soma é 13.

$v(ABC) = 13$: A coalizão dos três implica a transferência da propriedade a C e o pagamento de uma compensação a B. O ganho total dos três é 13.

(*) J. MARSHAK, Neuman's and Morgenstern's new approach to static economics, THE JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY, Vol. LIV, n.º 2, 1946.

É evidente que as coalizões BC e AB não devem ser consideradas, porque, na primeira, não há ganho e qualquer imputação resultante da segunda é dominada por uma imputação da coalizão AC. Por exemplo, se B compra a propriedade por 10, a imputação resultante é (1, 7, 0); se C a compra por 19, a imputação resultante é (10, 0, 3). Ora, a segunda domina a primeira porque nela A e C têm maiores ganhos e podem assegurá-la pela transação indicada.

Analisemos, então, o problema tratando apenas das coalizões AC e ABC. Para melhor esclarecê-la, consideremos os seguintes exemplos de solução e suas respectivas imputações:

a) *C compra a propriedade por 19.* O ganho de A é $p - u = 10$. O ganho de B é nulo (foi eliminado do mercado). A diferença $w - p = 3$ é o ganho de C. A imputação correspondente é I (10, 0, 3).

b) *C compra a propriedade por 21.* A imputação correspondente é J (12, 0, 1).

c) *C compra a propriedade por 12, mas paga a compensação 8 a B para retirar-se do mercado.* A imputação correspondente é K (3, 8, 2).

d) *C compra a propriedade por 12 e paga a B a compensação 2.* A imputação correspondente é L (3, 2, 8).

e) *C compra a propriedade por 13 e paga a B a compensação 3.* A imputação correspondente é M (4, 3, 6).

A análise dêsses exemplos permite as seguintes conclusões:

1) *Nenhuma das imputações I e J domina a outra.* I é mais favorável a C e J mais favorável a A; nenhum dêles, todavia, pode assegurar a imputação desejada (A pode recusar-se a vendê-la e C pode recusar-se a comprá-la).

2) *Nenhuma das imputações I e L domina a outra.* L é mais favorável aos compradores que não podem, porém, assegurá-la (A pode recusar-se a vender a propriedade). I é mais favorável ao vendedor que, todavia, não pode assegurá-la (os compradores, agindo de acôrdo, podem bloquear a venda).

3) *I domina K*, pois é mais favorável a A e a C, que podem assegurá-la.

4) *M domina L* por ser mais favorável a A e a B que estão em condições de assegurá-la.

Feitas estas observações, passemos à análise gráfica do problema. Baseia-se ela na seguinte propriedade geométrica: "a soma das distâncias de um ponto qualquer de um triângulo equilátero a seus lados é igual à altura do triângulo".

Uma imputação (α, β, γ) pode, então, ser representada pelo ponto I do triângulo equilátero ABC de altura $h = \alpha + \beta + \gamma$ (fig. 1), cujas distâncias aos lados $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ são, respectivamente, α, β, γ. Há, assim, correspondência biunívoca entre os ternos ordenados de números não negativos de soma h (imputações) e os pontos do triângulo equilátero de altura h.

Como nos interessam apenas as imputações para as quais $h = 13$, construamos o triângulo equilátero ABC de altura 13 (fig. 2).

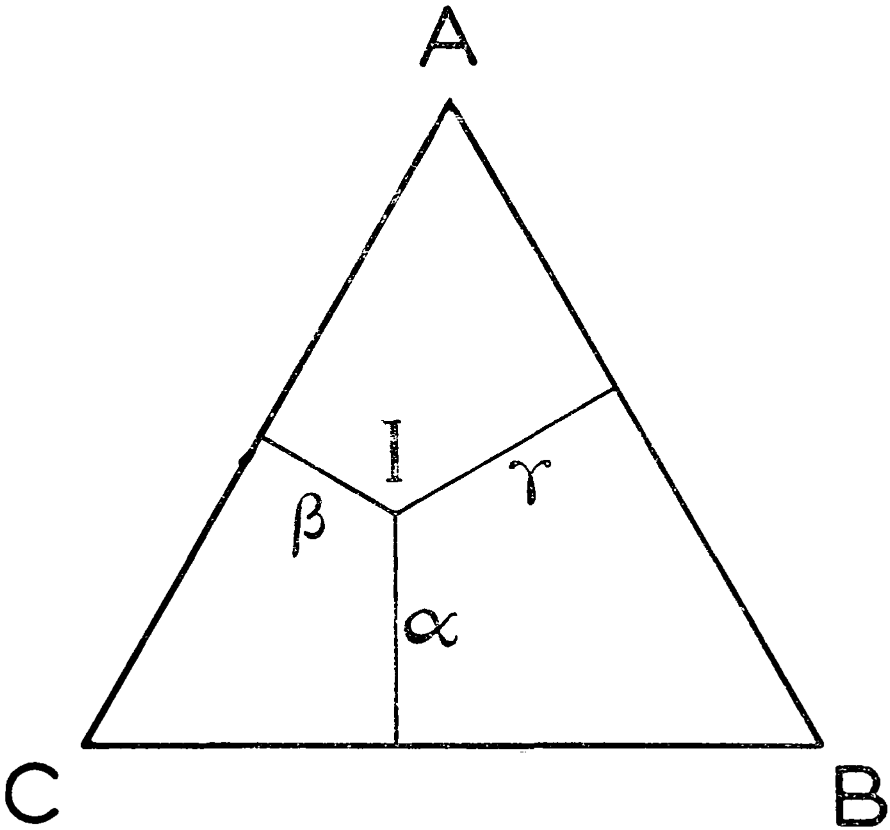

Fig. 1

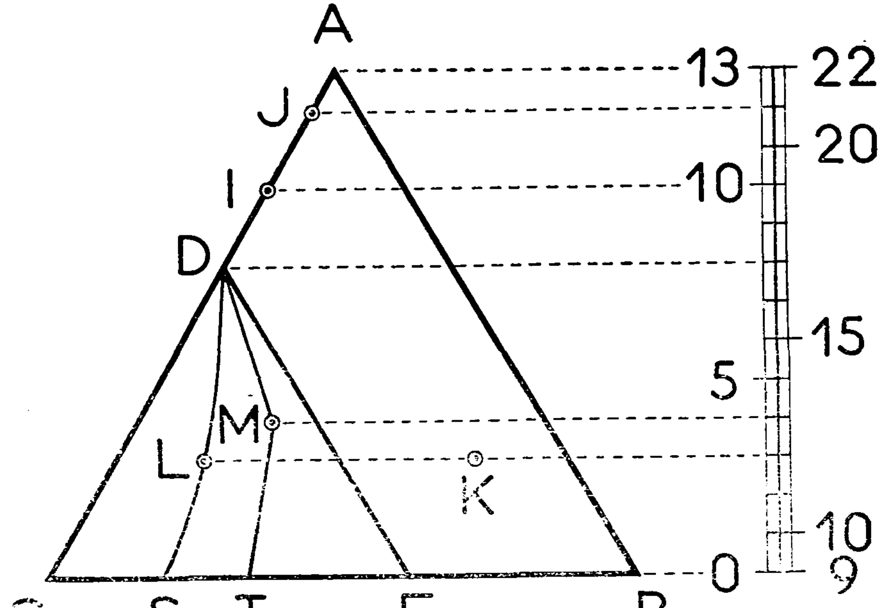

Fig. 2

Seja D o ponto do lado AC cuja distância a BC é 8. Tracemos a paralela DE ao lado AB.

Estabelecemos, assim, três regiões no triângulo ABC:

Região I: *Segmento AD* (excluído o ponto D).

Contém todos os casos em que C elimina B do mercado, adquirindo a propriedade por preço superior a 17 e, no máximo, igual a 22.

Região II: *Triângulo CDE* (incluindo seu contôrno).

Corresponde aos casos em que C, mediante equilibrada proporção entre o preço de aquisição e a compensação paga a B, aufere ganho não inferior a 5 (altura do trapézio ABED).

Região III: *Trapézio ABED* (excluído o contôrno ADE).

Contém os casos pouco lucrativos para C, cujo ganho é inferior a 5.

A aplicação dos critérios de dominância mostra que:

a) Nenhum ponto (*) da Região I domina qualquer outro ponto da mesma região. Como vimos, tal ocorre, por exemplo, em relação a I e J.

b) Nenhum ponto da Região II é dominado por qualquer ponto das Regiões I e III. Por exemplo, I não domina L.

c) Cada ponto da Região III é dominado por um ponto da Região I, o que exclui aquela Região do conjunto de soluções. Por exemplo, K é dominado por I.

d) Há pontos da Região II dominados por pontos da mesma região (por exemplo, M domina L). Logo, a Região II, totalmente, não constitui solução. Assim, J, I, L pertencem a uma solução; J, I, M pertencem a outra.

A teoria dos jogos mostra que qualquer solução do problema consta de duas partes:

1) o segmento AD;

2) uma linha que desce de D a um ponto do segmento CE e forma com a vertical sempre ângulos não superiores a 30 graus. Assim, por exemplo, as linhas ADC, ADLS, ADMT e ADE são soluções.

A parte (1) corresponde ao caso da eliminação de B do mercado e a parte (2) às soluções resultantes de coalizões.

Do exposto infere-se um elevado grau de *indeterminação* na *solução geral* apresentada. Consta ela de uma infinidade de linhas (ADC, ADLS, etc.) cada uma das quais contém uma infinidade de *pontos* (imputações), sendo cada imputação uma *solução particular* do problema.

Para os autores, a determinação de uma única *solução-linha* ou, possìvelmente, de uma única *solução-ponto* depende dos *padrões habituais de conduta* (*accepted standards of behavior*), vagamente identificados com os códigos legais e éticos do grupo econômico.

(*) Em virtude da correspondência biunívoca mencionada, diremos indiferentemente **ponto** ou **imputação** nesta análise gráfica.

11.2. *Caso de s unidades indivisíveis e mùtuamente substitíveis de um bem.* Pela análise teórica, os resultados são semelhantes aos da hipótese n = 2 (monopólio bilateral). Admitida a utilidade decrescente, os números de unidades transferidas correspondem aos estabelecidos pelo critério dos pares marginais de BÖHM-BAWERK, sendo, porém, o intervalo dos preços superior ao fixado pelo mesmo critério. Os autores acreditam, embora confessem não poder demonstrá-lo, que, na parte da solução onde não há coalizão de compradores, essa discrepância tende a desaparecer à medida que aumenta o número de compradores.

12. CRÍTICA E CONCLUSÕES.

Finalizemos esta exposição assinalando as principais críticas dos economistas à teoria dos jogos.

12.1. *Medida da utilidade.* Segundo vimos, a hipótese básica da teoria é a medida dos resultados dos jogos em têrmos numéricos (monetários), irrestritamente transferíveis de jogador a jogador. A aplicação de seus modelos aos mercados implica, pois, admitir a *medida* da utilidade a menos de transformações lineares arbitrárias o que representa um retrocesso face ao conceito moderno pelo qual, através da técnica das curvas de indiferença, a utilidade é determinada a menos de transformações monotônicas arbitrárias.

Para obter aquela *medida*, os autores estabeleceram uma *axiomática* baseada em um conjunto de *postulados sôbre a preferência*, como, por exemplo:

a) a preferência é uma relação transitiva;

b) se A é preferível a B, qualquer combinação aleatória de A e B, de probabilidades não nulas, é preferível a B.

O tratamento da utilidade pelos autores coloca-a no mesmo nível de certos conceitos físicos (como a temperatura), cuja medida é igualmente estabelecida a menos de transformações lineares arbitrárias, isto é, depende da fixação do zero e da unidade da escala escolhida (*).

Para C. KAYSEN (**), a axiomática da utilidade envolve uma afirmação sôbre o comportamento econômico contrária à experiência: não há utilidade específica ligada ao próprio risco. Os autores reconhecem a dificuldade, observando que para definir a utilidade do *jôgo* (no sentido do vocábulo inglês *gambling*) seria necessária uma alteração de sua axiomática, embora não

(*) "Poder-se-ia objetar que não é necessário penetrar no emaranhado de minúcias relativas à mensurabilidade da utilidade, uma vez que, evidentemente, o indivíduo comum, cujo comportamento se pretende descrever, não mede com precisão sua utilidade, mas, sobretudo, conduz suas atividades econômicas em uma esfera de considerável obscuridade. Tal ocorre, sem dúvida, com grande parte de sua conduta em relação à luz, ao calor, ao esfôrço muscular, etc. Todavia, a fim de ser construída uma ciência física, foi necessário medir tais fenômenos." (**Theory of Games and Economic Behavior**, pág. 20.)

(**) CARL KAYSEN, **A revolution in Economic Theory?**, THE REVIEW OF ECONOMIC STUDIES, Vol. XIV, 1946-7, pp. 1 a 15.

possam precisar quais os postulados ou grupos de postulados que seriam atingidos.

12.2. *Indeterminação das soluções.* Há, como vimos, alto grau de indeterminação nas soluções dos jogos de mais de dois jogadores. Em certos casos, como o do monopólio bilateral, a teoria pouco acrescenta aos resultados da análise econômica tradicional.

Nesse particular, C. KAYSEN (*) coloca-se em posição extremada de crítica. Para êle, uma teoria completa especificaria com minúcias o complexo de fôrças determinantes da capacidade de barganhar de vendedor e comprador e concluiria por um preço único como solução. A seu ver, ainda, o estudo do mercado de três pessoas (monopólio x duopsônio) pouca luz joga sôbre o problema geral. A verdadeira solução decorreria do conhecimento das causas que determinam as coalizões formadas e dos princípios que regulariam as compensações pagas a seus participantes. Requereria, ainda, uma análise do mercado real análoga à do mercado teórico de três pessoas, pois nenhuma especulação conduziria à estimativa das fôrças atuantes nas decisões do primeiro. Como a cada acréscimo de complexidade nos problemas corresponde aumento muito maior no grau de indeterminação e arbitrariedade das soluções, considera duvidoso o valor prático de seus resultados nos casos reais complexos.

12.3. *Ausência de parametrização.* Na análise dos mercados a legitimidade da parametrização é postulada em situações de competição perfeita, onde cada agente econômico, ao planejar sua ação, considera desprezível sua influência no resultado final. Em outras palavras, aceita, como *dadas*, quantidades variáveis do sistema. Assim, na teoria walrasiana do equilíbrio, cada consumidor age em função dos preços *dados* dos bens e dos serviços que, todavia, são afetados pela ação conjunta dos consumidores. O mesmo ocorre com o empresário face aos preços dos fatôres de produção e dos produtos finais.

Foi, em parte, a dúvida acêrca da validade de tal parametrização que levou os autores a procurar caminho inteiramente novo: estudar a atuação dos diversos agentes em situação de independência de ações. Não há na teoria possibilidade de parametrização que habilite cada agente (ou jogador) a agir como se as ações dos outros fôssem conhecidas. Essa ausência absoluta de parametrização é a essência da teoria dos jogos e, na opinião de alguns economistas, constitui um de seus aspectos positivos.

12.4. *Aplicação às ciências sociais.* Segundo R. C. SNYDER (**), embora a teoria dos jogos de estratégia tenha sido desenvolvida por matemáticos e economistas, a tese atual é que dela

---

(*) Art. cit.

(**) RICHARD C. SNYDER, **Game Theory and the Analysis of Political Behavior**. Artigo do livro **Research Frontiers in Politics and Government**, The Brookings Institution, Washington D. C., 1955.

está emergindo uma espécie de teoria geral do comportamento social, sobretudo na esfera dos fenômenos políticos.

Considera-a, porém, incipiente em face de duas razões fundamentais: a teoria matemática não é considerada completa e os problemas da ciência política ainda não estão preparados para tal tipo de análise.

A êsse respeito, K. J. Arrow (*) destaca a crítica habitual do cientista social "literário" ao modêlo matemático: "demasiadamente simplificado para representar as complexidades da realidade". Em seu juízo, tal objeção decorre da riqueza de significação da linguagem comum em contraste com o simbolismo perfeitamente definido da Matemática.

Há alguns pontos básicos de identificação da teoria com a Política:

a) as *decisões*;

b) as *coalizões* (coalizões legislativas, por exemplo);

c) os característicos das situações de *competição* ou de *conflito*: ninguém controla completamente a situação; há geralmente satisfação parcial ou nula de interêsses, etc.

De um modo geral, os princípios do *comportamento racional* nos jogos de estratégia assemelham-se aos observados no grupo social. As *regras do jôgo* corresponderiam às limitações básicas da sociedade (físicas, biológicas e possìvelmente psicológicas); a *solução* dependeria precìpuamente dos padrões estáveis de comportamento social.

Embora seja muito cedo para uma aplicação da teoria à Política, diz R. C. Snyder no artigo citado, é oportuna a discussão das possibilidades que oferecem suas novas concepções.

12.5. *Conclusões*. Desejamos encerrar esta exposição com uma comparação: em 1654, o famoso jogador De Méré propôs a Pascal um problema relativo a certo jôgo de azar. Pascal correspondeu-se com Fermat sôbre o assunto, sendo as cartas por êle então trocadas os primeiros ensaios sôbre o Cálculo das Probabilidades. Seria ocioso mencionar a importância atual dêsse ramo da Matemática para as demais ciências. É oportuno, porém, lembrar que, dos primeiros estudos daqueles matemáticos à publicação, em 1812, da *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace, decorreu mais de século e meio de pesquisas, consideradas, a princípio, como puro diletantismo intelectual. Não foram elas desprovidas de erros, de dúvidas — consubstanciadas nos famosos paradoxos, e da incerteza da própria estrutura lógica da teoria, aparentemente abalada pela crítica filosófica.

Há menos de trinta anos, Von Neumann lançou o seu primeiro ensaio sôbre os jogos de estratégia, início de uma teoria cujo grande desenvolvimento apareceu no consagrado volume *Theory*

(*) KENNETH J. ARROW, **Mathematical Models in the Social Sciences.** Artigo do livro **The Policy Sciences**, editado por DANIEL LERNER e HAROLD D. LASSWELL, Standford University, California.

of Games and Economic Behavior, que, segundo R. STONE (*), é a mais importante contribuição à Economia desde a publicação da Teoria Geral de KEYNES. Embora com resultados ainda insatisfatórios em certos aspectos, suas perspectivas futuras são promissoras. Obra de tal envergadura ultrapassa a capacidade de um só homem e exigirá certamente os esforços devotados de mais de uma geração para erigir-se definitivamente em monumento científico.

SUMMARY

This article is a reformulation of the inagural lecture of the 1957 academic year delivered at the Faculty of Economics of the University of Brazil. It pretends only to present the fundamentals of the theory games of strategy and it is, therefore, addressed specially to students. These games are subsequently illustrated with some applications to economic problems and in these applications it is retained the Robirsonian model and the case of bilateral monopoly, o pposing, finally, monopoly to duopsony.

RÉSUMÉ

Le présente travail est un exposé, sous une autre forme, du cours inaugural de l'année scolaire 1957, à la Faculté des Sciences Économiques de l'Université du Brésil. Il s'adresse donc spécialement aux étudiants, et s'efforce de leur présenter le mécanisme des jeux de stratégie. Quelques applications à des problèmes économiques en donnent ensuite une illustration. Parmi les diverses applications l'étude retient le modèle de Robinson Crusoe et le cas du monopole bilatéral, opposant finalement, monopole à duopsone.

(*) RICHARD STONE, **The Theory of Games**, THE ECONOMIC JOURNAL, Vol. LVIII, n.º 230, junho de 1948.