O CÁLCULO MATRICIAL E SUAS APLICAÇÕES À ECONOMIA

Michel Dupuy

A — Iniciação

O cálculo matricial tem hoje cêrca de cem anos de existência. Foi o inglês SYLVESTER, quem, em 1850, primeiro se ocupou dos matrizes, "quadros retangulares" onde se podem formar determinantes. SYLVESTER, seu compatriota CAYLEY e o irlandês HAMILTON obtiveram, logo na década seguinte, os teoremas fundamentais que têm seus nomes.

Êste novo cálculo permaneceu, entretanto, muito tempo sem suscitar interêsses. Foi preciso esperar o comêço do século XX e a Mecânica Ondulatória para que os físicos dêle fizessem um uso corrente. A importância dêste cálculo foi, concomitantemente, compreendida por diversos corpos técnicos, especialmente nas disciplinas da Mecânica (vibrações e problemas estáticos) e da Eletricidade onde, atualmente, é instrumento indispensável de formulação e tratamento dos problemas. Na Economia, o papel relevante ocupado hoje pelos modelos de interdependência linear justifica a utilização do cálculo ou notação matricial por autores cujo número é sempre crescente. Cria-se assim, para os economistas em geral, a necessidade de compreensão desta linguagem particular da matemática. O objetivo dêste trabalho, é, portanto, o de, lançando mão de algumas ilustrações econômicas, proporcionar uma iniciação rápida nas regras do cálculo matricial.

O ponto de partida será para nós a consideração dum quadro retangular de "coeficientes técnicos", que compreenda a fabricação de N produtos partindo de n matérias-primas — ou noutros têrmos — que dê conta da utilização destas para fabricar aquêles. Supondo uns e outros computados no sistema de medida que lhes é próprio (tonelada, barril, ou outro qualquer...), o *coeficiente técnico* a_{jk} será para nós o consumo da matéria-prima j necessário para fabricar uma unidade do produto k.

		(N) produtos			
		(1)	(2)	(k)	(N)
	(1)	a_{11}	a_{12}	a_{1k}	a_{1N}
(n)	(2)	a_{21}	a_{22}	a_{2k}	a_{2N}
Matérias-	(j)	a_{j1}	a_{j2}	a_{jk}	a_{jN}
primas	(n)	an1	an2	ank	anN

Constate-se que os elementos do quadro retangular anterior, são apresentados na ordem, *índice de linha* e *índice de coluna* primeira convenção imprescritível na notação matricial.

Notemos que o quadro pode ter forma qualquer, conforme os casos; pode ser eventualmente quadrado, se o número dos produtos fôr igual ao das matérias-primas; pode, também, conter um certo número de zeros.

O quadro ou matriz, dos a_{jk}, pode ser imediatamente utilizado para formar duas espécies de balanços :

Balanços de consumo / Balanços de preços

Em primeiro lugar, supondo conhecidos os *custos unitários de cada matéria-prima* — chamamo-los p_1, p_2 .... p_j .... p_n — podemos avaliar os *preços de custo* de cada produto π_k. Uma vez que êles são em número de N, escrevemos N equações semelhantes à seguinte:

$$(1) \qquad (N) \qquad \pi_k = \sum_{j}^{\rightarrow n} a_{jk}\, p_j$$

equações nas quais vemos aparecer, em conjunto, todos os coeficientes técnicos relativos a êste produto, isto é, todos os *elementos duma mesma coluna* da matriz.

Em segundo lugar, supondo conhecida a quantidade fabricada de cada produto y_k, vamos calcular o consumo total de cada matéria prima (x_j), escrevendo as seguintes equações:

$$(2) \qquad (n) \qquad x_j = \sum_{k}^{\rightarrow N} a_{jk}\, Yk$$

Há evidentemente n equações destas e vemos aparecer, em conjunto, todos os coeficientes técnicos relativos a uma matéria-prima, isto é, *todos os elementos duma mesma linha* da matriz.

Considerando a notação empregada acima para representar os sistemas de equações (1) e (2), vê-se, intuitivamente, o interêsse de uma grafia simbólica, abreviada quanto aos índices, que apresentaria os sistema (2) sob a forma:

$$(3) \qquad x_n = A_{nN} \, . \, y_N$$

esta é, precisamente a *formulação matricial,* com as convenções seguintes:

1) y é uma entidade matemática de N componentes, denominada *vetor* (sem que haja aqui uma relação direta com os "vetores" considerados em geometria). Anàlogamente x é um vetor de n componentes. Representam-se às vêzes, como $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e sempre com letra minúscula.

2) A equação matricial (3) equivale a n equações ordinárias (tantas quantas as componentes de x).

3) *A* representa a *matriz*, ou quadro, de duas dimensões, dos a_{jk}.

4) A interpretação de (3) é o sistema de equações (2). Êste constitui a *definição* do *produto* A.y.

Vê-se que a matriz A_{nN} é um *operador* que, de um vetor de origem N permite deduzir um vetor de ordem n; em cada componente dêste aparecem tôdas as componentes daquêle.

As convenções que acabam de ser enunciadas mostram que para simbolizar o sistema de equações (1) com uma grafia matricial análoga a (3), não pode ser utilizada diretamente a matriz A. Trata-se com efeito de passar, agora, de um vetor (n) a um vetor (N), o que exige uma matriz Nn. Esta é, neste caso, a matriz formada com os elementos a_{kj}, portanto os mesmos que os de A, mas permutadas as linhas e as colunas; chama-se esta matriz "transposta de A", e é representada por $A^{\#}$ (outras notações usadas : A'. A^T).

$$\underset{nN}{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nN} \end{vmatrix} \qquad \underset{Nn}{A^{\#}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{n1} \\ a_{12} & \ldots\ldots & a_{n2} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{1N} & \ldots\ldots & a_{nN} \end{vmatrix}$$

Com efeito, apercebemo-nos, aplicando as convenções matriciais indicadas, que a notação

$$\underset{N}{\pi} = \underset{Nn}{A^{\#}} . p_n$$

considera, perfeitamente as equações (1).

O interêsse essencial da notação matricial aparece a propósito das relações de interdependência em cadeia ou sucessivas, e, para dar uma idéia disso, tendo em vista sempre os nossos (N) produtos fabricados com as (n) matérias-primas, são utilizados, por sua vez, para a fabricação de (m) produtos terciários.

Esta segunda fase de produção será descrita por uma matriz de coeficientes técnicos $\underset{Nm}{B}$ e pelas equações matriciais correspondentes, balanços de consumo e balanços de preços. Em tôdas estas expressões vemos os produtos (N), as suas quantidades y_k e os seus preços π_k desempenharem papéis análogos aos das matérias-primas nas equações anteriores.

Tem-se pois :

$$\begin{array}{c|c} & \text{(m) produtos terciários)} \\ \hline \begin{array}{c}\text{(N)}\\ \text{produtos}\\ \text{intermediários}\end{array} & \begin{array}{lcl} b_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{1m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ b_{N1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{Nm} \end{array} \\ & \text{(matriz B)} \end{array}$$

Balanços de consumo — *Equações de Preço*

(5) $\underset{N}{y} = \underset{Nm}{B} . \underset{m}{z}$ — (6) $\underset{m}{q} = \underset{mN}{B^*} . \underset{N}{\pi}$

O problema que se estabelece é o de utilizar todos os dados já escritos, para formular, diretamente, a relação de interdependência entre os produtos terciários e as matérias-primas.

Esta é caracterizada por uma matriz de coeficientes técnicos C de *n* linhas e *m* colunas, que nos permitirá calcular cada elemento remontando à sua definição inicial.

Com efeito C_{j1} representa o número de unidades de (j) necessário para produzir uma unidade do produto terciário (1). Passa-se através dos produtos secundários, e cada um dêste é necessário à produção. Vem pois :

$$C_{j1} = \sum_{k}^{\rightarrow N} a_{jk} \; . \; b_{k1}$$

É bom determo-nos um pouco para ressaltar a significação de cada uma das equações em linguagem ordinária. Uma vez que se trata de obter o produto terciário (1), vamos utilizar necessàriamente os coeficientes b_{k1} da primeira coluna do quadro B. Anàlogamente, partindo da matéria-prima j, utilizaremos os coeficientes da j'ésima linha da matriz A. O símbolo $\sum_{k}^{\rightarrow N}$ significa que se considerou o papel intermediário desempenhado por *todos* os produtos secundários (N).

Esta forma de produto *acumulado* ou *condensado*

$$(7) \qquad C_{j1} = \sum_{k}^{\rightarrow N} a_{jk} \; . \; b_{k1}$$

chama-se produto *linha* por *coluna* (exige evidentemente, que elas tenham o *mesmo número de têrmos*).

Se agora examinarmos os balanços de consumo, teremos, partindo de (5) e (3) :

$$(8) \qquad \underset{n}{x} = \underset{nN}{A} \; . \; \underset{N}{Y} = \underset{nN}{A} \; . \; (\underset{Nm}{B} \; . \; \underset{m}{z})$$

e, por outro lado, utilizando diretamente C que acabamos de formar

$$(9) \qquad \underset{n}{x} = \underset{nm}{C} \; . \; \underset{m}{z}$$

Conciliando as duas fórmulas (8) e (9), podemos suprimir os parêntesis e escrever :

$$(10) \qquad A \cdot (B \cdot z) = A \cdot B \cdot z = C \cdot z$$

ou

$$(10) \qquad \underset{nN}{A} \cdot \underset{Nm}{B} = \underset{nm}{C}$$

Chama-se a *C matriz-produto* A.B. A equação (7) constitui a definição convencional que permite obter cada elemento de C; visto que ela introduz, essencialmente uma operação de produto condensado (linha de A coluna de B). De imediato é interessante notar que esta definição da multiplicação matricial permite englobar as operações de "multiplicação de vetores" pelas quais começamos. Com efeito, nota-se que estas entram nas convenções gerais, considerados os *vetores* como *matrizes de uma só coluna.* Assim, podemos escrever (3) da seguinte forma :

$$\underset{n1}{X} = \underset{nN}{A} \cdot \underset{N1}{Y}$$

(É preciso repetir, entretanto, que para bem evidenciar a natureza mais simples das "matrizes vetores", se lhes reserva uma grafia particular: letra minúscula...).

Sendo a definição de multiplicação matricial a base fundamental para tudo que se segue, parece-nos necessário ilustrá-la com alguns exemplos particulares. Seja primeiro um exemplo literal :

Dadas as matrizes

$$\underset{23}{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad e \quad \underset{32}{U} \begin{vmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{vmatrix}$$

calcule-se o produto D = AU. Têm-se então:

$$\underset{22}{D} = \underset{23}{A} \; \underset{32}{U} = \begin{vmatrix} au + bw + cy \\ du + ew + fy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} av + bx + cz \\ dv + ex + fz \end{vmatrix}$$

Consideramos, agora, um caso mais particular, importante para muitas aplicações: a multiplicação à esquerda de uma matriz (por ex., A acima) por uma *matriz linha* especial do tipo L = 1000.

Para que a operação seja possível, tomamos aqui L com 2 colunas:

(11) $\quad L = |1\,0| \quad A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad L \, . \, A = |a\,b\,c|$

O resultado apresenta *uma só linha*, que não é senão a reprodução da primeira linha de A.

Teríamos igualmente:

(12) $$|1\,0| \, . \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |d\;e\;f|$$

e assim por diante: a multiplicação à esquerda por uma matriz do tipo D é uma operação de *seleção de linha.*

Do mesmo modo, verifica-se que a multiplicação *à direita* por matrizes *colunas* particulares do tipo $C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ é uma operação de *seleção de colunas.*

Tem-se por exemplo :

(13) $$\begin{vmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \\ w \\ y \end{vmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v \\ x \\ z \end{vmatrix}$$

Notemos que nas equações (11) e (12), se se substitui 1 pelo valor numérico λ os resultados vêm multiplicados por λ ; têm-se pois :

(14) $$\begin{vmatrix} \lambda\,0 \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |\lambda a \;\; \lambda b \;\; \lambda c|$$ etc.

Prosseguindo na mesma via, e combinando as equações (11) e (12), obtem-se :

(15) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \; . \; A = A$$

Esta operação, que é a *reprodução pura e simples* de A, chama-se *multiplicação pela unidade* : chama-se *matriz unidade* às matrizes quadradas contendo 1 na sua diagonal principal e zero em tôdo o resto. Representam-se por I ou E. Também se consideram matrizes unidade por multiplicação à direita: quadradas, elas devem ser de ordem igual ao número de *colunas* da matriz proposta.

Generalizando um pouco êste resultado, partindo da equação (14) obtemos matrizes ditas *pseudo-escalares,* tais como :

(16) $\Lambda' = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix}$ tais que $\Lambda' \,.\, U = \begin{vmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \mu w & \mu x \\ \nu y & \nu z \end{vmatrix}$

A multiplicação à esquerda por estas matrizes tem pois como efeito multiplicador *linhas sucessivas* da matriz proposta pelos coeficientes λ, μ, ν. Usadas como *multiplicadores à direita,* as matrizes dêste tipo multiplicariam as *colunas* por êstes coeficientes:

(17) $A \,.\, \Lambda' = \begin{vmatrix} \lambda a & \mu b & \nu c \\ \lambda d & \mu e & \nu f \end{vmatrix}$

Mostraremos, pouco mais adiante, uma aplicação interessante das matrizes pseudo-escalares em Economia.

Convém que desde já notemos algumas observações importantes sôbre operações matriciais elementares.

Queremos falar, por um lado, da não comutatividade das multiplicações; por outro, da adição matricial.

Em primeiro lugar, devemos notar que a multiplicação matricial *não é comutativa.* Considerando o exemplo acima $A_{23} \,.\, U_{32} = D_{22}$, vemos que $U_{32} \,.\, A_{23}$ é uma matriz de ordem 3 3.

O resultado (que recomendamos ao leitor calcular completamente) mudou em vertude da comutação dos fatôres. No caso geral, $A_{in} \,.\, B_{nj}$, se $i \neq j$, a operação BA é mesmo impossível. Devemos, de resto, lembrarmo-nos que a ordem dos fatôres matriciais é imposta pelos fatos, e não de opção do calculista.

No entanto, se se encontrou a operação $A_{in} \,.\, B_{nj}$ com o resultado C podemos encontrar também a operação $B^{\#} \,.\, A^{\#}$ que dá o resultado $C^{\#}_{ji}$. É uma aplicação das propriedades da transposição.

Adição (matricial) de duas matrizes A e B

É a operação aparentemente trivial, que consiste em adicionar os elementos correspondentes, um a um.

(18) $C = A + B \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Esta operação exige pois que as duas matrizes A e B sejam exatamente da mesma ordem (mesmo número de linhas e de colunas).

Pertence evidentemente à mesma categoria a subtração (trata-se de adição algébrica) e as *equações matriciais* em geral.

A iguaddade $A = B$ significa que todos os elementos correspondentes de cada matriz são iguais.

Uma equação matricial de ordem *nm* equivale pois a n x m equações ordinárias. As equações de balanço de consumo (3), ou de balanço de preços (4), já forneceram exemplos dêste fato.

Um aspecto interessante da adição, consiste em encarar numa operação A . B, o produto final C como sendo a soma dos produtos de A por diversos elementos de B, tais que o conjunto dêstes constitui a matriz B. Foi assim que obtivemos há pouco :

$$\left|U\right| \cdot \left|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right| = \left|U\right| \cdot \left|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right| + \left|U\right| \cdot \left|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right|$$

Do mesmo modo pode-se escrever

$$\begin{aligned}|\lambda\ \mu| \cdot |A| &= |\lambda\ 0| \cdot |A| + |0\ \mu| \cdot A = \\ &= |\lambda a + \mu d \quad \lambda b + \mu e \quad \lambda c + \mu f|\end{aligned}$$

Tendo fonecido êstes complementos necessários, relativos à *multiplicação* e à *adição matriciais* que nos permitem agora compreender bem o significado de equações matriciais elementares do tipo :
$A X + B U = V$, terminaremos esta primeira parte com *um exemplo de emprêgo das matrizes pseudo-escalares em Economia.*

Voltemos ao exemplo inicial, isto é, o estudo de uma produção; conhecendo os *preços* e as *quantidades*, queremos descrever a operação em têrmos de *moeda.*

Os nossos dados suplementares são os preços p_j das matérias-primas e as quantidades y_k dos produtos fabricados. Se tomarmos a operação:

$$\underset{nN}{D} = \begin{vmatrix} p_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & p_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p_n \end{vmatrix}_{nn} \begin{vmatrix} a_{jk} \\ nN \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & y_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & y_N \end{vmatrix}_{NN}$$

o novo quadro n N obtido é composto de elementos de tipo

$$d_{jk} = p_j \quad a_{jk} \quad y_k$$

onde se vê logo, êste elemento representando a despesa monetária feita no decorrer da produção do produto (k) (em quantidade y_k) a partir da matéria-prima k. O quadro ou matriz D, assim obtido, é pois um *balanço geral das despesas* feitas para o conjunto de fabricações consideradas.

Encontram-se, dissemos inicialmente, múltiplos exemplos de utilização das matrizes em Economia :

a) estudos de preços de produção e balanços de consumo, que desenvolvem e aplicam o primeiro exemplo sôbre o qual raciocinamos;

b) matriz de propensão mútua a consumir de grupos consumidores que forma a base dos estudos de vários autores sôbre o "o multiplicador generalizado".

Os elementos ora apresentados devem permitir ao leitor compreender e interpretar as equações matriciais que encontradas nesses textos, sem no entanto o informar sôbre a sua resolução. É êste um problema diferente que passamos a examinar.

B — A Resolução dos Sistemas de Equações Lineares

O Problema

Trata-se aqui de um assunto matemático distinto, que poderia ser abordado "a priori", onde, todavia, o interêsse da notação matricial surge, logo, de maneira evidente. Vamos pois abordá-lo, mantendo uma ligação com a exposição anterior sôbre matrizes e considerando o mesmo sistema de equações (sistema 2 : Balanços de consumo objetivando uma produção).

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1N}\, y_N = x_1 \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2N}\, y_N = x_2 \qquad\qquad ay = x \\ a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \ldots + a_{nN}\, y_N = x_n \ \text{(notação matricial)} \end{array} \right.$$

Examinaremos, porém, estas relações dum ponto de vista novo:

Supondo conhecidas determinadas disponibilidades em matérias-primas x_1, x_2, ... x_n, veremos se é possível determinar as produções y_1, y_2, ... y_n, de cada indústria transformadora, de modo que tais disponibilidades sejam integralmente utilizadas.

Estudo direto da possibilidade de uma solução

A intuição nos dá algumas indicações apriorísticas sôbre o problema. Nota-se, desde logo, a importância da comparação $n > < N$, isto é, a relação entre o número de incógnitas e o número de equações.

Raciocinando passo a passo, suporemos primeiro que não há senão *um* produto, (1), e $n = 5$ matérias-primas.

Uma vez que o produto (1) consome as diversas matérias-primas nas proporções respectivas a_{11} a $_{21}$ ... a_{n1} (coeficientes técnicos) a absorção dos estoques $\underline{x}$ de matérias-primas só é possível se estas estiverem também na mesma proporção, isto é :

$$(3) \qquad \frac{x_1}{a_{11}} = \frac{x_2}{a_{21}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{x_n}{a_{n1}} = y_1$$

Se agora consideramos um segundo produto, (2), de duas uma:

a) ou os seus coeficientes técnicos são proporcionais aos precedentes

$$(4) \qquad \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{a_{n2}}{a_{n1}} = l$$

e, neste caso, as condições de proporcionalidade (3) subsistirão, ter-se-á uma flexibilidade entre o produto (1) e o produto (2) e suas produções serão condicionadas por *uma* equação de ligação (a primeira das 5 equações de consumo).

$$(5) \qquad a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 = a_{11}\,(y_1 + l\, y_2) = x_1$$

ou

$$(6) \qquad y_1 + l\, y_2 = \frac{x_1}{a_{11}}$$

b) ou os coeficientes técnicos são inteiramente diferentes dos primeiros.

Compreende-se, então, que os consumos

$$(7) \quad \left| \begin{array}{lll} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \,\ldots\ldots\ldots & \text{(a igualar a} & x_1) \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \,\ldots\ldots\ldots & (\text{" " "} & x_2) \\ a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 \,\ldots\ldots\ldots & (\text{" " "} & x_n) \end{array} \right.$$

já não estão tão rìgidamente ligados quanto anteriormente e, no entanto não podem ser igualados a quantidades arbitrárias.

Com efeito, as duas primeiras equações de consumo permitirão (em geral) determinar y_1 e y_2, o que, desde logo, fixará os (n - 2) demais consumos, e as disponibilidades correspondentes x_3, x_4 ... x_n não serão exatamente empregadas. (*)

E assim por diante.

O estudo matemático mostra que o problema *é determinado,* (i. e. os yy podem ser calculados *de uma só maneira,* em função de xx) no caso em que N = n i. e., onde as incógnitas e as equações são em número igual, e se os coeficientes das incógnitas satisfazem à condição

$$(8) \qquad \Delta_A \neq 0 \text{ (o seu determinante : } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0)$$

Se, progressivamente, a partir dêste caso, introduzirmos (1) ou (2), ou vários produtos suplementares, e N se tornar superior a n, chega-se à situação em virtude do teorema geral, que as n primeiras produções y_1 ... y_n podem ser determinadas a partir dos n segundos membros.

(*) Uma nota, *in fine,* traz alguns esclarecimentos ao leitor interessado neste problema.

$$x_1 - a_1\ (n+1)\ y\ (n+1) - a_1\ (n+2)\ y\ (n+2) - \ldots$$
$$x_2 - a_2\ (n+1)\ y\ (n+1) - a_2\ (n+2)\ y\ (n+2) - \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

O que mostra que as $(n+1)^a$, $(n+2)^a$, produções, podem, em princípio, ser escolhidas arbitràriamente.

Assim, quando o número das incógnitas *ultrapassa* o das equações, o problema é "indeterminado" (num certo sentido, que acabamos de precisar).

Um caso interessante é aquêle em que $n = N$ e o determinante é nulo. Demonstra-se que esta condição matemática

$$(9) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

conduz a que os coeficientes técnicos da última linha sejam dependentes dos anteriores, isto é da forma:

$$(10) \qquad \begin{array}{ccc} \lambda_1\ a_{11} & \lambda_1\ a_{12} & \lambda_1\ a_{1n} \\ +\ \lambda_2\ a_{21} & +\ \lambda_2\ a_{22} & +\ \lambda_2\ a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +\ \lambda(n\text{-}1)a(n\text{-}1)1 & +\ \lambda(n\text{-}1)a(n\text{-}1)2 & +\ \lambda(n\text{-}1)a(n\text{-}1)^n \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{array}$$

(cada a_{ni} é igual a uma combinação dos coeficientes superiores).

Em outras palavras, a última "forma linear" (chama-se assim aos primeiros membros das equações (2)), deduz-se das (n - 1) precedentes.

Desde logo, das duas uma:

— ou os segundos membros $\underline{x}$ são ligados por esta relação

$$(11) \qquad x_n = \lambda_1\ x_1 + \lambda_2\ x_2 + \ldots\ldots + \lambda_{n-1}\ x_{n-1}$$

de maneira que a n^a equação, inteiramente dedutível das anteriores, não traz nada de novo. O sistema não comporta de fato senão $(n - 1)$ equações, e a sua solução comportará, portanto, um grau de arbitrariedade;

— ou a relação (11) acima não é satisfeita, o que mostra que a n^a equação é *contraditória* às *precedentes*, e o problema é então impossível. (*)

Encontram-se, em várias aplicações, sistemas lineares cujos segundos membros são nulos.

$$(12) \qquad x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$$

Mostra-se que, se $\Delta \neq 0$ êstes sistemas não admitem senão a solução banal

$$(13) \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots\ldots = \gamma_n = 0$$

Por outro lado se $\Delta = 0$, vê-se pelo exposto, que êstes sistemas se reduzem a $(n - 1)$ equações independentes com as quais se podem determinar $(n - 1)$ das incógnitas em função de n^a, que é arbitrária.

De fato, as n variáveis são determinadas um fator a menos de proporcionalidade, e podemos representá-las da seguinte maneira

$$(14) \qquad \frac{\gamma_1}{1_1} = \frac{\gamma_2}{1_2} = \ldots\ldots = \frac{\gamma_{n-1}}{1_{n-1}} = \frac{\gamma_n}{1_n} = \text{K (arbitrário)}$$

Propriedade das funções dos sistemas "quadrados" (determinados)

Vamos agora concentrar a atenção sôbre os sistemas de equações lineares *determinados*, evidenciando primeiro, uma propriedade fundamental das soluções, que, a nosso ver, dominam êste assunto.

(*) Esta mesma condição, $\Delta = 0$, indica em que os coeficientes técnicos da última *coluna* sejam dependentes dos anteriores, isto é da forma:

$$a_{1n} = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \ldots\ldots + \mu_{n-1} a_{1\,n-1}$$
$$a_{2n} = \mu_1 a_{21} + \mu_2 a_{22} + \ldots\ldots + \mu_{n-1} a_{2\,n-1}$$
$$\vdots$$
$$a_{nn} = \mu_1 a_{n1} + \mu_2 a_{n2} + \ldots\ldots + \mu_{n-1} a_{n\,n-1}$$

Isto significa que o número produto é pràticamente um subproduto dos $(n - 1)$ antecedentes. A distribuição das n matérias-primas faz-se, pois apenas sôbre um conjunto de $(n - 1)$ produtos primários, o que explica intuitivamente porque o consumo exato não é, em geral, possível.

A propriedade é a seguinte:

Se denominamos "solução do sistema", para os segundos membros $x_1, x_2, \ldots x_n$, o conjunto dos n valores obtidos respectivamente para $y_1, y_2, \ldots y_n$, *esta "solução" é linear em relação a* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Pode escrever-se

$$(15) \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = \mu_1^1 x_1 + \mu_1^2 x_2 + \ldots\ldots + \mu_1^n x_n \\ y_2 = \mu_2^1 x_1 + \mu_2^2 x_2 + \ldots\ldots + \mu_2^n x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n = \mu_n^1 x_n + \mu_n^2 x_2 + \ldots\ldots + \mu_n^n x_n \end{array} \right.$$

sendo os

$$(16) \qquad \mu_1^1, \mu_2^1, \ldots \mu_n^1; \mu_1^2, \mu_2^2 \ldots \mu_n^2; \ldots ; \mu_1^n, \mu_2^n, \ldots \mu_n^n$$

que figuram nesta expressão, as soluções, que supomos obtidas por cálculo à parte, do sistema para os segundos membros abaixo.

$$(17) \qquad \underset{(\text{no caso dos } x_n^1)}{1, 0, 0, \ldots, 0} \quad ; \quad \underset{(\text{no caso dos } u^2)}{0, 1, 0, \ldots, 0} \quad ; \quad \underset{(\text{no caso dos } u^n)}{\text{etc. } 0, 0. \ldots, 1}$$

O teorema é de fácil verificação; constata-se primeiro que a solução $(x_1 u_1^1; x_1 u_2^1; \ldots ; x_1 u_n^1)$ verifica o sistema dos segundos membros $(x_1, 0, \ldots, 0)$; do mesmo modo que $(x_2 u_1^2 ; x_2 u_2^2 ; \ldots ; x_2 u_n^2)$ satisfaz o sistema de segundos membros $(0, x_2, 0, \ldots, 0)$; e enfim que a soma destas duas soluções

$$(x_1 \mu_1^1 + x_2 \mu_1^2; x_1 \mu_2^1 + x_2 \mu_2^2; \ldots ; x^1 \mu_n^1 + x_2 \mu_n^2$$

verifica o sistema de segundos membros $(x_1, x_2, 0, \ldots 0)$. Daí, por repetição do raciocínio, demonstra-se o teorema geral.

Transcrição matricial dos resultados — Matriz inversa

Consideremos primeiro as equações que definem os (u). Êstes, lembremos-nos, são soluções do sistema para segundos membros particulares. Temos assim uma equação matricial para cada (u).

$$(21) \qquad A\,u^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad A\,u^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ A\,u^n = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{vmatrix}$$

Estas n equações matriciais, que envolvem matrizes vectores ou matrizes *de uma coluna*, podem ser condensadas numa só (recordar a definição de equações matriciais dada na primeira parte dêste trabalho), se se justapõem os u^1 sob forma de uma matriz única U de *n colunas;* os segundos membros serão condensados, por sua vez, sob a forma de uma "matriz unidade". Têm-se pois

$${}_nA_n \mid u^1, u^2, \ldots, u^n \mid {}_nA_n \,.\, {}_nU_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & & & & 0 \\ 0 & 0 & . & & & 0 \\ 0 & 0 & & . & & 0 \\ 0 & 0 & & & & .1 \end{vmatrix}_{nn} = {}_nI_n$$

$$(22) \qquad A \,.\, U = I$$

Transcrevemos a seguir as equações (15), que exprimem a relação geral (y) e as soluções particulares (u). Reconhece-se em (15, equações semelhantes àquelas por meio das quais a notação matricial foi introduzida (ver parte A, equações (2) e (3)); podemos, portanto, escrevê-las sob forma condensada.

$$(23) \qquad y = U \,.\, x$$

Esta é a expressão matricial da solução do sistema dois.

$$(2) \qquad A \,.\, y = x$$

sendo definida a matriz U pela equação (22).

Pode, agora, *verificar-se* que a equação (2) é bem satisfeita

$$A \,.\, y = A \,.\, U \,.\, x = I \,.\, x = x \quad \text{(por causa de (22))}$$

Por outro lado, *se partimos da equação (23)* e nela substituimos (x) pela sua expressão em (2), vem

$$y = Ux = UAy = [UA]\; y = [I]\; y$$

que mostra que U.A é uma *matriz unidade* (uma vez que reproduz y pura e simplesmente). Isto se escreve

(24) $$U \, . \, A = [I]$$

equação que vem *juntar-se* à equação (22) citada. (*) A matriz U é pois tal que, multiplicando-a por A *à esquerda ou à direita,* se obtem a matriz unidade. Por esta razão convenciona-se chamá-la *matriz inversa* de A, com a notação

(25) $$U = A^{-1}$$

Baseando-nos nesta matriz diretamente a questão da resolução do sistema (2), duma maneira rápida e elegante, como se segue

(2) $$A \, . \, y = x$$

(multiplicar à esquerda por A^{-1})

$$A^{-1} \, . \, A \, . \, y = A^{1-} \, . \, x$$

ou

$$[I] \, . \, y = y = A^{-1} \, . \, x = U \, . \, x$$

(encontra-se pelo cálculo matricial a equação (23) que havia sido obtida diretamente).

Chega-se ao mesmo resultado, de maneira ainda mais direta partindo de (2) e *dividindo cada membro da equação por A.*

$$A \, . \, y = x$$

26) $$v = 1/A \, . \, x = A^{-1} \, . \, x$$

mas êste processo de notação não pode ser empregado antes de tôda a série de justificações anteriores: trata-se de um cálculo "formal" (ou "simbólico").

A conclusão interessante a inferir é a *completa reciprocidade* entre as equações (2) e (23)

(2) $$x = A \, . \, y$$

(23) $$y = U \, . \, x$$

(*) Note-se que a propriedade expressa pela equação (24) *não resulta* da equação (22), por causa da não comutatividade da multiplicação matricial. (Vide parte A dêste trabalho).

ou ainda, o caráter *reversível* da relação matemática entre os dois vetores x e y. (Esta propriedade, é preciso acentuar mais uma vez, só existe se x e y são *vetores da mesma ordem*, e se o determinante de A é diferente de zero).

Do ponto de vista prático, deve notar-se que o cálculo de A^{-1} resume-se a calucular efetivamente as n soluções para n sistemas de segundos membros particulares ((17) acima). É uma operação bastante longa e não há interêsse em empreendê-la, se se tratar sòmente de encontrar os valores numéricos da solução para um só sistema de segundos membros dados numèricamente. Mas, em muitos casos, não será assim e trataremos, de preferência, de calcular as soluções para várias séries de segundos membros, ou — o que equivale pràticamente ao mesmo — a dar as soluções y em função dos xx deixados sob a sua forma algébrica ($x_1, x_2, \ldots x_n$).

É preciso pois calcular a matriz A^{-1} *completamente*. Devemos dizer que a soma de trabalho necessária para calcular uma matriz inversa completa é no máximo da ordem de duas vêzes (e não n vêzes) o trabalho necessário para uma solução numérica isolada.

A procura da matriz completa A^{-1} é pois recomendável sempre que se disponha de um escritório de cálculo bem aparelhado e sempre que o problema apresentar um certo caráter de generalidade.

Processo de cálculo numérico da solução de um sistema linear.

Os processos utilizáveis para a execução dos cálculos numéricos de solução de um sistema de equações lineares são:

1) O método dos *determinantes* (ensinado nos cursos secundários) ; êste método não é de fato utilizado para os sistemas de ordem elevada;

2) O método de *eliminação sucessiva* das incógnitas e substituição sucessiva. As incógnitas são assim determinadas uma a seguir a outra.

Êste segundo método é aplicado para sistemas de ordem elevada, quer se trate de cálculos efetuados por calculadores humanos, quer de cálculos efetuados por conjuntos de máquinas automáticas.

Até agora, e mesmo tendo em conta os progressos realizados nesta última via, a resolução numérica de um sistema de ordem elevada (20 ou 30) é uma tarefa difícil, pesada e fastidiosa, do ponto de vista prático; são dezenas de hora-calculador, que que exigem minuciosas verificações.

Método das aproximações sucessivas

Vamos para terminar, dar uma idéia de um método que em certos casos, resulta numa apreciável economia de trabalho: é o método das *aproximações sucessivas,* também chamado *método de iteração.*

Começa-se por observar que, se o quadro dos coeficientes só tem têrmos diagonais, sendo do tipo

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_{11}\, y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & x_1 \\ \qquad a_{22}\, y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & x_2 \\ \qquad\qquad a_{33}\, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots & = & x_3 \end{array} \right.$$

a obtenção da solução é imediata. A matriz inversa não é senão

$$(28) \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{vmatrix}$$

Se agora o quadro contiver coeficientes extra diagonais *pequenos* (em relação aos coeficientes diagonais) . . .

$$(29) \qquad \begin{array}{l} a_{11}\ y_1 + \varepsilon_{12}\ y_2 + \varepsilon_{13}\ y_3 = x_1 \\ \varepsilon_{21}\ y_1 + a_{22}\ y_2 + \varepsilon_{23}\ y_3 = x_2 \\ \varepsilon_{31}\ y_1 + \varepsilon_{32}\ y_2 + a_{33}\ y_3 = x_3 \end{array}$$

podemos, de início, atribuir aos yy os valores y^o deduzidos do x_1, x_2, x_3 desprezando os ε, a saber

$$(30) \qquad y_1{}^o = \frac{x_1}{a_{11}} \quad , \quad y_2{}^o = \frac{x_2}{x_{22}} \quad , \quad \text{etc.}\ldots\ldots$$

introduzindo, depois, êstes valores y^o nos têrmos $\varepsilon_{12}\, y_2$ calculando, assim, novos valores y^1, pelas equações

$$(31) \qquad y_1^1 = \frac{1}{a_{11}} x_1 - \varepsilon_{12}\, y_2^0 - \varepsilon_{13}\, y_3^0$$

delineando assim um processo de aproximações sucessivas, cíclicas.

Termina-se o cálculo logo que a diferença entre duas soluções sucessivas y^n e y^{n+1} deixa de ser pràticamente sensível.

Êste método "converge" ràpidamente, se os ε são realmente pequenos em relação aos a_{ii}. No entanto, se êstes têrmos extra diagonais, ε, se bem que pequenos, forem *nmerosos*, a convergência pode desaparecer. A pesquisa precisa das condições da convergência, e o estudo da rapidez de convergência é um dos problemas mais difíceis dêste ramo da matemática. Foram-lhe consagrados esforços importantes porque, com os modernos aparelhos de cálculo (calculadores eletrônicos), o método de iteração é o mais simples de pôr em prática e pode ser desenvolvido numa cadência muito rápida. A justificação teórica dêste método reside na substituição do estudo do sistema inicial pelo de um sistema vizinho, que dêle, é deduzido dividindo-se as equações pelos coeficientes diagonais

$$(32) \qquad \left| \begin{array}{l} y_1 + \varepsilon_{12}\, y_2 + y_{13}\, y_3 = x_1^1 \\ \varepsilon_{21}\, y_1 + y_2 + \varepsilon_{23}\, y_3 = x_2^1 \\ \varepsilon_{31}\, y_1 + \varepsilon_{32}\, y_2 + y_3 = x_3^1 \end{array} \right.$$

ou

$$(33) \qquad [\, I + \varepsilon \,]\, y = [\, x \,]$$

e o problema está em obter a matriz inversa $[\, I + \varepsilon \,]^{-1}$

O método de iteração ora descrito, resume-se em calcular esta inversa pela forma *algébrica*

$$(34) \qquad 1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

utilizada simbòlicamente. Esta fórmula algébrica é verdadeira se x^{n+1} tende para zero; é, do mesmo modo, a fórmula simbólica de matriz

$$(35) \qquad [I + \varepsilon]^{-1} = I - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \ldots$$

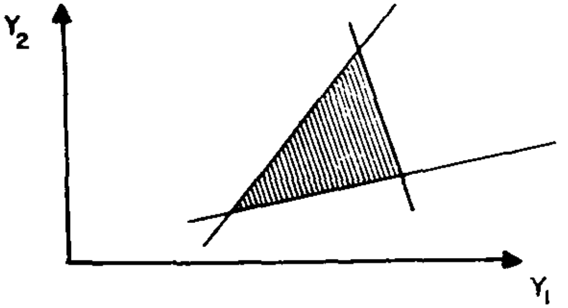
é verdadeira se ε^{n-1} tende para zero quando n aumenta.

A dificuldade à que aludimos, há pouco, consiste em prever para uma matriz dada, se suas potências sucessivas tendem ou não para zero, quando n aumenta indefinidamente.

O problema exposto apresenta um interêsse *prático* real, e, por esta razão, não é demais indicar como prossegue a discussão. Na hipótese feita, determinaram-se y_1 e y_2 esgotando inteiramente os estoques x_1 e x_2 das matérias-primas (1) e (2). Falta ainda para que esta solução seja viável, assegurar-se de que os consumos das outras matérias primas (3), (4), ..., (n), são *inferiores* aos estoques x_3, x_4, ..., x_n.

Eis pois (n — 2) condições suplementares que, *em geral*, não serão tôdas satisfatórias. Nesse caso, será preciso tentar determinar y_1 e y_2 por um outro par de equações, e repetir o teste "dos estoques restantes"... ; se êste teste é bem sucedido, teremos encontrado dois níveis de produção y_1 e y_2 que são aceitáveis; mas serão êles os únicos possíveis ? Finalmente, quais são as "margens de possibilidade" para y_1 e y_2 ?

Êste problema, como se vê, conduz a desenvolvimentos importantes mas que não apresentam dificuldades matemáticas especiais, é a teoria da "programação linear" ("linear programming"), que já suscitou uma abundante literatura, sobretudo nos Estados Unidos.



Resultado tipo de uma discussão de "linear programming". Área axuriada: zona de possibilidade para y_1, y_2.