A Desigualdade na Distribuição das Rendas

JORGE KINGSTON

INTRODUÇÃO

A teoria da distribuição compreende dois aspectos bem distintos, mas interdependentes: um considera o mecanismo remunerativo dos fatôres da produção, o outro os efeitos dessa remuneração, através da repartição da renda entre os componentes do grupo social.

A atenção dos economistas tem-se voltado precìpuamente para o primeiro aspecto, talvez pela sua ligação mais direta com o problema da produção. Já Adam Smith *acentuara, desde os primórdios de sua "Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations", que a pobreza ou riqueza de uma comunidade dependia da produtividade ânua de seus membros. A divisão do produto da indústria entre os que exercem diferentes funções, ou contribuem com diferentes fatôres, tornou-se o problema crucial dêste capítulo da teoria econômica. Mesmo* Karl Marx, *que tão grande ênfase pôs na* luta de classes *como elemento revolucionador da sociedade, pouco cuidou do nível de renda individual, mas esquadrinhando se a mesma provinha da terra, do capital ou do trabalho.*

Por que, entre os indivíduos de uma comunidade, há pobres e ricos? Por que aquêles são muito mais numerosos que êstes? São tão grandes as repercussões, sôbre todos os fenômenos econômicos e sociais, e mesmo biológicos, da forma pela qual a renda se reparte, que o seu estudo deve merecer uma atenção especial.

No complexo de problemas, que constituem a "questão social", uma das causas predominantes está na desigual repartição da riqueza entre os indivíduos. Os atritos e antagonismos entre as várias classes sociais se acerbam quando se tem de proceder à repartição do dividendo nacional.

O relacionamento dêste aspecto do problema distributivo com a questão social torna o seu estudo ainda mais árduo. Aqui, mais que em qualquer *outro setor, é preciso que o economista se dispa de todos os preconceitos para enfrentar a realidade dos fatos. As discussões doutrinárias, baseadas em vagos princípios de eqüidistribuição da riqueza ou de justiça social, serão vãs, e não conduzirão à melhoria do combalido organismo social. Todos são concordes em que a riqueza está desigualmente repartida; mas, quando se trata de precisar o conceito e a medida de desigualdade, as concordâncias desaparecem.*

A escola keynesiana pôs em proeminência o estudo de renda nacional e seu papel na formação das diretrizes de uma política de pleno emprêgo. Mas, não bastam as análises da produção nacional pelas categorias econômicas, o estudo estrutural da ecônomia do país, nem as análises funcionais, focalizando os fatôres que contribuem para a formação do dividendo. Urge completar tais estudos com a apreciação da distribuição individual dos réditos. Quando mais não fôsse, pela sua importância para a estruturação do sistema de taxação governamental, que tão profundas relações guarda, na moderna economia, com os problemas do desemprêgo e das flutuações da atividade dos negócios.

Os estudos da distribuição individual das rendas têm sido moldados em duas direções distintas. Primeiro, colimando estabelecer relações funcionais entre a renda e o número de indivíduos que a auferem, ou seja, buscando a expressão analítica da distribuição. Um prolongamento dêsses estudos procura encontrar, nos esquemas probabilitários, uma base racional das leis, determinadas empìricamente à luz dos fatos. A outra ordem de estudos prende-se à pesquisa de uma medida única da desigualdade das rendas, capaz de sumariar os aspectos essenciais da distribuição.

É essa a disposição da matéria aqui adotada. Depois de examinadas as teorias e resultados fundamentais conseguidos nas duas ordens de estudos mencionados, faremos sua aplicação à análise da distribuição das rendas no Brasil.

CAPÍTULO I

A LEI DE DISTRIBUIÇÃO DAS RENDAS

1.1 — A lei de Pareto.

As conseqüências socio-econômicas, implícitas no modo pelo qual o dividendo nacional se reparte entre os indivíduos, desde cedo atraíram a atenção dos economistas para o estudo da *forma* dessa distribuição. Entre outros, *Dudley Baxter* (1868) abordou o assunto relativamente aos réditos na Inglaterra, e *Ammon* (1895), procurando ligá-la à distribuição das habilidades individuais, estudadas por *Galton*, assinalou a similaridade das curvas de rendimentos sujeitos à taxação nos diversos países.

Mas coube a *Vilfredo Pareto* formular a primeira representação analítica da curva de rendimentos. Num dos capítulos de seu célebre "Cours d'Économie Politique" (1), analisa extensivas estatísticas de distribuição de rendas em vários países e diferentes épocas, concluindo ser a *forma* da curva invariante no espaço e no tempo.

Seja $n_x = f(x)$ a distribuição de freqüência das rendas x. Supomos que x se possa considerar como variável contínua, e $f(x)$ é uma função incógnita, cuja identificação decorre dos dados estatísticos. Então $n_x dx$ representa o número de indivíduos com renda entre x e $x+dx$. Se indicarmos por N_x o número de possuidores de rendas iguais ou superiores a x, teremos

$$N_x = \int_x^{\omega} f(x)\, dx \ ,$$

onde ω é a máxima renda possível. Em geral, considerar-se-á $\omega = \infty$.

(1) *Pareto, V.*, "Cours d'Économie Politique" (Lausanne, 1897), Livro III, cap. 1.º — "La courbe des revenus". Aliás, desde 1895 começara *Pareto* a expor suas idéias em "La legge della demanda", "Giornale degli Economisti" (1895), "La courbe de la répartion de la richesse" (Lausanne, 1896).

Foi sob essa forma integral que *Pareto* considerou o problema. concluindo que, a partir de um nível de renda adequado, N_x exprimia-se mediante uma função hiperbólica

$$N_x = \frac{A}{x^\alpha} \tag{1.1}$$

onde A e α são constantes positivas.

A evidência estatística aduzida por *Pareto* consta do quadro seguinte (2):

PAÍS	α	PAÍS	α
Inglaterra, 1843	1,50	Perusa (zona rural)	1,37
" 1879-80	1,35	Ancona, Arezzo, Parma e Pisa	
Prússia, 1852	1,89	(conjunto)	1,32
" 1876	1,72	Cidades italianas (conjunto)	1,45
" 1881	1,73	Basiléia, 1887	1,24
" 1886	1,68	Paris (aluguéis)	1,37
" 1890	1,60	Augsburgo, 1471	1,43
" 1894	1,60	" 1498	1,47
Saxe, 1880	1,58	" 1512	1,26
" 1886	1,51	" 1526	1,13
Florença	1,41	Peru (fim 18º séc.)	1,79
Perusa (cidade)	1,69		

Conclui, então, *Pareto* que "ces résultats sont très remarquables. Il est absolument impossible d'admettre qu'ils sont dus seulement au hasard. Il y a bien certainement une *cause* qui produit la tendence des revenus suivant une certaine courbe. La forme de cette courbe parait ne dépendre que faiblement des differentes conditions économiques des pays considerés" (3).

Investigações posteriores têm confirmado a relativa estabilidade da curva paretiana. *Lord Stamp* verificou que o coeficiente α permaneceu pràticamente constante na Inglaterra durante o século dezenove, embora sujeito a pequenas oscilações ocasionais. Apesar da elevação do padrão de vida, tôdas as classes mantiveram suas posições e

---

(2) *Pareto*, "Cours", vol. 2, pág. 312. Os dados do Peru são referentes a uma bula, dita das Cruzadas, que era adquirida pelos habitantes a preços correspondentes à sua hierarquia social.

(3) *Pareto*, "Cours", vol. 2, pág. 312.

proporções com notável estabilidade. Em têrmos semelhantes refere-se *Bowley* à permanente igualdade da repartição do dividendo nacional entre as várias classes econômicas na Inglaterra, de 1880 a 1913. *Bresciani-Turroni* (4) analisou as estatísticas prussianas de 1854 a 1928, obtendo os seguintes valores:

ANO	α	ANO	α	ANO	α
1854	1,78	1892	1,52	1918	1,35
1873	1,51	1913	1,51	1928	1,85
1875	1,78				

Há variações substânciais no valor do parâmetro, mas deve-se notar que as estatísticas abrangem o período da moderna industrialização da Alemanha, a grande crise de 1873-75 e a primeira guerra mundial. É curioso observar que o valor final de α quase repete o inicial.

Johnson (4) calculou o coeficiente para os Estados Unidos desde 1914 até 1943, um período que abarca a guerra mundial, uma época de grande prosperidade e outra de profunda depressão, mas α oscilou entre os limites 1,35 e 1,90, com maior concentração em tôrno de 1,71. Suas flutuações parecem acompanhar os movimentos cíclicos da conjuntura.

O exame desssa e outras fontes leva à conclusão (5) que, se se consideram intervalos suficientemente grandes, observa-se notável estabilidade no coeficiente angular da distribuição de rendas. Tudo parece indicar que há fôrças permanentes que tendem a restaurar a forma fundamental da curva de rendas, quando a mesma tenha sido desviada no sentido de uma maior ou menor desigualdade.

1.2 — *As leis de segunda aproximação.*

A lei de *Pareto* só é valida, em primeira aproximação, para as rendas globais dos indivíduos, isto é, para a soma de seus rendimentos derivados do trabalho e do capital. A anamorfoseada logarítmica da

(4) *Bresciani-Turroni*, C., "Pareto's Law and the index of inequality of incomes", "Econometrica" (1939), pág. 120; *Johnson*, N.O., "The Pareto Law", "Rev. Econ. Statistics" (1937), pág. 32.

(5) *Bresciani-Turroni*, loc. cit., pág. 124.

curva das rendas mobiliárias apresenta-se encurvada para o eixo das abcissas, a do produto do trabalho é convexa. A expressão mais geral da lei seria, segundo *Pareto*

$$N_x = \frac{A}{(x+a)^{\alpha}} e^{-\beta x} \tag{1.2}$$

Mas, apenas num caso (Grão-ducado de Oldenburgo), encontrou um valor apreciável para β; de modo que a lei geral se restringiria a

$$N_x = \frac{A}{(x+a)^{\alpha}} \tag{1.3}$$

Para o produto do trabalho, a constante a é negativa; para as rendas mobiliárias é positiva; é nula, ou da ordem de grandeza dos erros de observação, para a renda global. Essa última circunstância decorre das duas primeiras; e é de se esperar que uma coletividade onde predomina o esfôrço do trabalho, do comércio e da indústria, a constante a tenha um pequeno valor negativo, ao passo que uma coletividade onde predominam os capitalistas se caracteriza por pequeno valor positivo de a (6).

Para obter a função de freqüência dos rendimentos, diferenciemos a equação de *Pareto*. Temos

$$n_x = -\frac{dN_x}{dx} = \frac{A\alpha}{x^{\alpha+1}} \tag{1.4}$$

Por conseguinte, esta função é também de natureza hiperbólica, decrescendo para os valores crescentes de x, e tendo como assintota para o eixo dos x, $\lim\limits_{x \to \infty} - \frac{dN_x}{dx} = 0$.

É esta uma objeção que se pode levantar às leis de *Pareto*, e uma das razões que levaram à apresentação de outras fórmulas menos simples. Se se consideram tôdas as classes sociais, e não apenas a dos contribuintes do impôsto, constata-se que a taxa de crescimento de N_x por unidade de renda apresenta um máximo para uma renda diminuta, mas superior à necessária para assegurar o mínimo de subsistência. No trecho inicial, esta taxa é crescente, ao passo que a equação supra a indica como constantemente decrescente.

(6) *Pareto*, "Cours", vol. 2, pág. 308 e 310, nota 959_3.

Conclui-se que a lei paretiana é apta para representar apenas o ramo decrescente da curva dos réditos, que é a parte revelada pelas estatísticas fiscais. Mas já o próprio *Pareto*, em seu *Cours*, advertia que a curva, em sua extensão total, deveria apresentar uma forma semelhante à sugerida por *Ammon* em decorrência da distribuição das habilidades individuais, isto é, seria unimodal e assimétrica à direita. A falta de elementos adequados não permitiu, então, fixar a forma do ramo inicial; mas estatísticas recentes, abrangendo os proventos das classes mais pobres, têm confirmado a suposição (7).

1.3 — *A renda média.*

Retomemos a lei simples de *Pareto*, $N_x = Ax^{-\alpha}$. Nessa equação, os parâmetros α e A têm uma significação econômica precisa. O primeiro exprime ao mesmo tempo a riqueza e a desigualdade de sua distribuição. O segundo varia proporcionalmente à população, e é também função de α. Com efeito, denotando por N a população total e por x_o a renda mínima, temos $A = Nx_o^{\alpha}$.

A equação de *Pareto* pode ser posta sob outra forma. Referindo-a à renda mínima, temos $N = Ax_o^{-\alpha}$ e por divisão vem (8)

$$\frac{N_x}{N} = \left(\frac{x_o}{x}\right)^{\alpha} \tag{1.5}$$

Daí outra interpretação para o parâmetro α: êle é o expoente a que se deve elevar a fração que a renda mínima representa da renda em aprêço para obter a fração de contribuintes que a percebem.

Calculemos a renda média no intervalo de x_1 a x_2. O total das rendas nesse intervalo é expresso por

$$R_{12} = \int_{x_1}^{x_2} x\, f(x)dx = A\alpha \int_{x_1}^{x_2} x^{-\alpha} dx$$

(7) Por isso foi excessiva a crítica de *Edgeworth* ao trabalho do *Pareto:* "It may be objected that Professor Pareto's curve does not fit the phenomena at its lower extremity. For according to the formula given above there ought to be an infinite number of *null* incomes, and an indefinitely large number of incomes in the neighbourhood of zero". *F.Y. Edgeworth*, "Suplementary Notes on Statistics", "Jour. R. Stat. Soc." (1896), pág. 533.

Daí se originou vivaz polêmica entre *Pareto* e *Edgeworth*, conduzindo, ao que parece, à célebre nota 962_2 em apêndice ao 2.º volume do "Cours", que introduziu os esquemas probabilitários nesses estudos.

(8) Essa expressão foi dada contemporâneamente por *Furlan* e *Czuber*.

Se $\alpha=1$, essa integral vale $A\alpha(\log x_2 - \log x_1)$ e tendo para ∞ com x_2; *a fortiori* isso acontece se α é menor que 1. Para têrmos um valor finito de R_{12}, é preciso que seja $\alpha>1$, e é também suficiente, porque então

$$R_{12} = \frac{A\alpha}{\alpha-1}\left[\alpha^{-\alpha+1}\right]_{x_2}^{x_1} = \frac{A\alpha}{\alpha-1}\left[\frac{1}{x_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_2^{\alpha-1}}\right] \tag{1.6}$$

Para obter a renda média, dividamos pelo número de réditos compreendidos entre x_1 e x_2, donde

$$r_{12} = \frac{A\alpha}{(\alpha-1)(Nx_1 - Nx_2)}\left(\frac{1}{x_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_2^{\alpha-1}}\right)$$

ou ainda, em vista da equação de *Pareto*, pondo $\sigma = \frac{x_1}{x_2}$

$$r_{12} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, x_1 \,\frac{1-\sigma^{\alpha-1}}{1-\sigma^{\alpha}} \tag{1.7}$$

Supondo a distribuição ilimitada à direita, a renda média do grupo de renda igual ou superior a x decorre de se fazer $x_2=\infty$, donde

$$r_x = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, x \tag{1.8}$$

E possível, porém, obter um valor mais aproximado da renda global, levando em conta o rendimento máximo (9). Embora as estatísticas não forneçam êsse dado, podemos estimá-lo partindo da equação de *Pareto* posta sob a forma (1.5). É claro que a renda máxima cabe ao último indivíduo, para o qual $N_x=1$, e daí, $\frac{1}{N} = \left(\frac{x_o}{\omega}\right)^{\alpha}$, ou seja $w = x_o N^{\frac{1}{\alpha}}$

(9) Observa *Fréchet* ("Journ. Sté. Stat. Paris", 1941, pág. 102) que, se se considera a lei de *Pareto*, não como uma função de freqüência, mas como uma função de probabilidade, haverá certo inconveniente de princípio em supor que exista um máximo que a renda não pode ultrapassar, pois o conceito de probabilidade se refere a uma população fictícia ilimitada.

Fazendo x_2, crescer indefinidamente, podemos tornar tão pequena a probabilidade de uma renda superior a certo limite, que essa circunstância se torna pràticamente impossível. Noutros têrmos, asseguramos na prática um máximo de rendimento, sem ser necessário supor que a probabilidade seja nula além de certo limite que teria de ser arbitràriamente fixado.

Substituindo na equação anterior, vem (10)

$$r = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_o \frac{N}{N-1} \left(1 - \frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right) \tag{1.8}$$

ou aproximadamente

$$r = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_o \left(1 + \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right) \tag{1.9}$$

Em muitos casos será possível desprezar o têrmo $\left(1 + \frac{1}{N}\right)$.

1.4 — *Determinação dos parâmetros da lei de* Pareto.

Vários processos podem ser empregados na determinação dos parâmetros da lei de *Pareto*. A forma hiperbólica dessa lei sugere imediatamente uma anamorfose logarítmica (11), que conduz à forma linear

$$\log N_x = \log A - \alpha \log x$$

Em seu trabalho pioneiro, *Pareto* utilizou-se do método de *Cauchy*, julgando desnecessário recorrer ao dos mínimos quadrados.

Da equação

$$\Sigma \log N_x = \nu \log A - \alpha \Sigma \log x$$

onde ν é o número de classes, temos que

$$\log A = \frac{1}{\nu} \Sigma \log N + \frac{\alpha}{\nu} \Sigma \log x$$

---

(10) *Mourre* ("Joun. Sté. Stat. Paris", 1944, pág. 320), além da fórmula (1.8), dá outra em que não figura o fator $\frac{N}{N-1,}$ e justifica-a dizendo que "nous ne pouvons nous servir de la loi de Pareto pour la partie riche, même en admettant qu'elle s'applique rigoureusement, qu'en négligeant σ^{α}". Não é exato. Houve equívoco na dedução, pois que, ao calcular a renda média, utilisou o divisor N, quando deveria ser $N_m - N_M = N - 1$, que levaria também à fórmula (1.8).

(11) O emprêgo da anamorfose logarítmica não está, porém, isento de críticas. V. *Kingston*, "As Curvas Evolutivas em Estatística", "Rev. Econ. Est." (Out. 1936,) pág. 42.

Substituindo na transformada logarítmica, e pondo

$$\Delta \log N_x = \log N_x - \frac{1}{\nu} \Sigma \log N_x,\ \Delta \log x = \log x - \frac{1}{\nu} \Sigma \log x,$$

vem finalmente

$$\alpha = \frac{\Sigma \mid \Delta \log N_x \mid}{\Sigma \mid \Delta \log x \mid} \tag{1.10}$$

Também poder-se-ia considerar a lei de *Pareto* sob a forma diferencial

$$n_x = A\alpha x^{-\alpha-1}$$

Mas, como as estatísticas não dão o número de contribuintes n_x correspondentes a cada rendimento x, mas sòmente para classes de rendimentos, por vêzes muito amplas, é preferível utilizar a forma integral da distribuição.

Outro processo baseia-se na equação (1.5). Para cada uma das classes de renda temos

$$\frac{N_i}{N} = \left(\frac{x_o}{x_i}\right)^{\alpha}$$

ou seja, pondo $\log \frac{N_i}{N} = \eta_i$, $\log \frac{x_o}{x_i} = \xi_i$, que $\alpha_i = \frac{N_i}{\xi_i}$

Considerando (ξ_i, η_i) como coordenadas de um ponto P_i num sistema cartesiano, então α será o coeficiente angular da reta OP_i. Se as observações obedecessem rigorosamente à lei paretiana, todos os pontos seriam colineares. A determinação de α equivale, geomètricamente, a estimar o coeficiente angular da reta passando por O e se aproximando o mais possível dos pontos P_i.

Uma solução imediata é tomar a média dos valores, isto é,

$$\alpha = \frac{\Sigma\alpha_i}{\nu - 1}$$

Czuber, baseado no método dos mínimos quadrados, sugere a fórmula

$$\alpha = \frac{\Sigma \xi_i \eta_i}{\Sigma \xi_i^2} = \frac{\Sigma \alpha_i \xi_i^2}{\Sigma \xi_i^2}$$

Vê-se que α seria a média ponderada de α_i, os pesos sendo proporcionais ao quadrado de ξ_i, o que não tem justificação lógica (12).

1.5 — *Emprêgo do método dos momentos.*

Utilizemos agora o método dos momentos, que, como é sabido, deixa inalteradas as médias de potências. Como temos de determinar dois parâmetros, imponhamos as condições que a interpolatriz reproduza a freqüência total N e a renda média p da distribuição empírica.

Admitindo ilimitada à direita a distribuição, temos, de conformidade com a fórmula (1.8), que $\alpha = \frac{r}{r - x_o}$. Em seguida, A resulta da equação $A = N x_o^{\alpha}$.

Também seria possível utilizar as fórmulas anteriores, não mais para a distribuição total, mas para as distribuições parciais, que se obtêm suprimindo de cada vez uma classe inicial. Assim, a razão da média das rendas superiores a x para a renda x é, segundo a lei de *Pareto*, uma constante $\frac{r}{x} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. A distribuição fornece uma série de valores $\frac{r_i}{x_i}$, e podemos fazer corresponder a média dêsses valores a $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

Cumpre observar que a fórmula da renda média deixa de ser aplicável, se α tem um valor próximo da unidade. Com efeito, a renda média r tende para o infinito quando α tende para 1. Será então neces-

(12) Cf. *Savorgnan*, "Di alcuni metodi per misurare la distribuzione dei redditi in Austria" (Haya, 1930), pág. 6.

Mourre ("Journ. Sté. Stat. Paris , 1941, pág. 92), sugere calcular os α_i referindo-os, não ao mínimo x_0, mas ao limite da classe anterior; isto é, pondo $\eta_i = \log \frac{y_{i-1}}{y_i}$ $\xi_i = \log \frac{x_i}{x_{i-1}}$ e em seguida tomando a média ponderada dos x_i, os pesos sendo a soma das rendas compreendidas entre x_{i-1} e x_i.

sário utilizar a fórmula de *Pareto*, sob a hipótese de uma renda máxima finita. A renda média é, num intervalo determinado, dada pela equação (1.7), que se pode pôr sob a forma

$$r = \frac{\alpha}{1-\sigma^{\alpha}} \frac{1-\sigma^{\alpha-1}}{\alpha-1} x$$

Quando α tende para 1, o primeiro fator tende para $\frac{1}{1-\sigma}$ e o segundo para o logaritmo neperiano de $\frac{1}{\sigma}$; r tende, pois, para um valor finito. Admitindo assim que a distribuição tenha um limite superior finito w, podemos determinar α resolvendo uma das equações, (1.8) ou (1.9), por aproximações sucessivas.

1.6 — *Os parâmetros da segunda lei de* Pareto.

No caso da anaformoseada logarítmica não tornar os valores observadas aproximadamente colineares, costuma-se usar a lei de *Pareto* de segunda aproximação

$$N_x = A\alpha(x+a)^{-\alpha-1}$$

em que a é uma constante positiva, negativa ou nula.

A função de freqüência das rendas passa a ser

$$n_x = A\alpha\,(x+a)^{-\alpha-1}$$

e daí a renda global entre os limites x_1 e x_2,

$$R_{13} = A\alpha \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{(x+a)^{\alpha-1}}\, dx = \frac{A}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha x_1+a}{(x_1+a)^{\alpha}} - \frac{ax_2+a}{(x_2+a)^{\alpha}}\right] \quad (1.11)$$

Fazendo o limite superior tender para o infinito, o segundo têrmo, entre parênteses tende para zero, e vem

$$R = \frac{A}{\alpha-1}\frac{\alpha x+a}{(x+a)^{\alpha}} = Nx\,\frac{\alpha x+a}{\alpha-1}$$

A renda média acima do limite x é, pois,

$$r_x = \frac{ax+a}{\alpha-1} \quad (1.12)$$

Considerando, ao invés, um limite superior finito para as rendas, tomemos a equação (1.11) sob a forma

$$R_{12} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,(N_1 x_1 - N_2\, x_2) + \frac{a}{\alpha-1}\,(N_1 - N_2)$$

e introduzamos os valores $N_2 = 1$, $x_2 = x_o\, N^{\frac{1}{\alpha}}$, o que leva a

$$R = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, x_o N\left(1 - N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) + \frac{a}{\alpha-1}\,(N-1)$$

donde

$$r = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, x_o \frac{N}{N-1}\left(1 + N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) + \frac{a}{\alpha-1}$$

expressão semelhante a (1.8).

A determinação dos parâmetros da lei geral de *Pareto* pode ser feita por processos análogos aos anteriormente expostos. É claro que, procedendo por tentativas, podemos fixar o valor da constante a, e recaímos no caso da primeira lei.

Podemos também nos basear na renda média. Calculando-a para as distribuições truncadas, que se obtêm eliminando de cada vez a classe inicial, obtemos uma série de equações (1.12) ligando $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ e $\frac{a}{\alpha-1}$ (e portanto α e a), e o problema se reduz à interpolação de uma reta.

1.7 — *Fórmula de* Benini.

Um inconveniente da lei geral de *Pareto* é que contém dois parâmetros, α e a, o que torna difícil a comparação de distribuições referentes a diversos países ou diferentes épocas. Para levar em conta o encurvamento da transformada logartímica, utilizando apenas uma constante, *Benini* (13) adota a forma $N_x = Kx^{-\alpha \log x}$. Isso equivale a interpolar a reta, não entre os logaritmos de x, mas entre os quadrados dêsses logaritmos, de conformidade com a equação

(13) *Benini, R.*, "Principii di Statistica Metodologica" (Torino, 1906), pág. 190.

$$\log N_x = \log K - \alpha' \log^2 x \tag{1.13}$$

A elevação ao quadrado dos logaritmos da variável faz com que a interpolatriz se encurve, aproximando-se das observações empíricas. É óbvio que podemos determinar α' por processos semelhantes aos utilizados para α.

A solução de *Benini* apresenta, por sua vez, um sério inconveniente. Como α é uma medida de desigualdade das rendas, êsse parâmetro deve independer da unidade monetária em que se exprime x, ou do poder aquisitivo da moeda. De fato, a equação de *Pareto* mantém-se invariante para uma substituição de x por um valor proporcional, $x' = \gamma x$. Obtém-se $N_x = A'(x')^{-\alpha}$, onde $A' = A\gamma^{\alpha}$. Mas essa substituição, na equação de *Benini*, altera o valor de α', como é fácil de ver. Podemos assim concluir que, se a lei de *Pareto* é invariante em relação ao poder aquisitivo da moeda, a de *Benini* não o *é*.

1.8 — *A equação de* Gini.

Substancial melhoria na solução do problema da distribuição das rendas foi obtida por *Gini* (14) ao considerar, não apenas o número de contribuintes, senão também o quantitativo de suas rendas.

O rédito global dos possuidores de renda superior a x, suposto ilimitado o rédito máximo, é dado, segundo a equação (1.6) por

$$\log R_x = \log \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} A \right) - (\alpha - 1) \log x$$

Combinando essa equação com a de *Pareto*, temos que $\log N_x = \delta \log R_x - \log K$, ou seja

$$N_x = R_x^{\delta} K^{-1} \tag{1.14}$$

onde $\delta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$, $K = \delta^{\delta} A^{\delta - 1}$

A relação acima, entre os valores de α e δ, é apenas teórica. Calculados isoladamente tais valores, a partir da distribuição real, êles divergem, e às vêzes notàvelmente, dos resultados que se obteriam aplicando a dita relação. É fácil compreender que assim seja, porque

(14) *Gini, C.*, "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della richezza , "Giorn. Economisti", 1909; "Indici di concentrazione i di dipendenza (Torino, 1910), reproduzido nas "Memorie di Metodologia Statistica" (Milano, 1939).

BIBLIOTECA MARIO HENRIQUE SIMONSEN
FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

na dedução supusemos a continuidade dos valores de x e a inexistência de um limite superior para os réditos, hipótese que não corresponde à realidade.

O quadro seguinte contém alguns dos valores de δ e de $\frac{\alpha}{\alpha-1}$, calculados por *Gini* (15).

PAÍS		$\frac{\alpha}{\alpha-1}$	PAÍS	δ	$\frac{\alpha}{\alpha-1}$
Hamburgo, 1883..........	3,11	5,72	Hamburgo 1883...	3,60	7,80
Noruega, 1899-900........	2,95	3,13	Bremen, 1874.....	4,65	7,88
Áustria, 1904............	2,72	2,73	Bremen, 1905.....	4,58	3,77

Gini encontrou uma explicação parcial dêsse fato na diversa intensidade de evasão para os réditos de diferentes grandezas, e mostrou que, quando essa evasão é maior para as pequenas rendas do que para as grandes, há uma redução dos valores de α e um aumento dos de δ, e vice-versa. Mas essa conclusão só valeria se referida às rendas *reais*, podendo vir deturpada em relação às declaradas.

Nessas circunstâncias, a escolha entre um e outro parâmetro, como índice de desigualdade, deveria corresponder ao vinculado à fórmula que melhor reproduz os dados observacionais. Ora, a experiência tem mostrado que o melhor ajustamento da curva de réditos se obtém em função de δ (16).

Além disso, δ tem um campo de aplicabilidade mais extenso, sendo capaz de representar, não apenas as distribuições de rendas globais,

(15) *Geni*, "Memorie di Metodologia Statistica", pág. 268 Os valores da coluna à direita referem-se a distribuições compreendendo também as rendas das pessoas jurídicas.

(16) *Gini*, "Variabilità e Mutabilità", 1912, reprod. "Memorie di Metodologia Statistica", pág. 268.

As vantagens relativas dos índices α e δ deram lugar a recente polêmica entre *De Vergottini* e *Pizzetti* ("Giorn. Economisti", 1947-1948) que girou em tôrno da aplicação dos índices de variabilidade absoluta ou relativa na comparação dos aludidos parâmetros. *De Vergottini* ("Sugli indici alfa e delta", "Giorn. Economisti", 1948, pág. 419) assinala, porém, um defeito grave do índice δ: é que pode conduzir a valores médios teóricos das classes de freqüências externos às referidas classes. Por exemplo, na distribuição das rendas no Estado de Vitória (1907), baseada no valor $\delta = 3{,}39$ determinado por *Gini*, verifica-se que na classe de £900-1000 a renda média teórica é de £821 e na classe de £500-700 a renda média é de £497.

mas as de rendas parciais, de salários, de alugueis, etc. Finalmente, δ é muito mais sensível que α às diferenças nas distribuições de rendas; basta notar que α variando de 1,13 a 1,89, que foram os valores extremos encontrados por *Pareto*, δ varia (teòricamente) entre 2,12 e 8,69.

Da relação entre α e δ, e lembrando a fórmula (1.8), deduz-se $\delta = \frac{r_x}{x}$, isto é, δ é a relação entre a renda média superior a x e a renda x.

O índice δ adquire um novo significado (análogo ao do § 1.3 para o índice α), se compararmos os resultados da equação de *Gini* aplicada a uma renda qualquer e à renda mínima, isto é, $N = R^{\delta}K^{-1}$. Obtém-se

$$\frac{Nx}{N} = \left(\frac{Rx}{R}\right)^{\delta} \qquad (1.15)$$

o que significa que δ é o expoente ao qual se deve elevar a fração das rendas acima de certo limite para obter a fração dos contribuintes que a possuem. Assim, δ tem diretamente o significado de um índice de concentração, pois o seu valor cresce à medida que aumenta a parte da renda que cabe a uma dada fração dos contribuintes.

1.9 — *A lei de* Davis.

Uma nova forma da lei de distribuição das rendas foi dada por *Davis* (17), apoiando-se em considerações probabilitárias atinentes à mobilidade social.

Seja uma coletividade de tamanho N. Os recursos econômicos repartem-se em classes x_1, x_2, ..., a que correspondem as rendas globais R_1x, Rx_2, ... Se o tamanho das classes é suficientemente pequeno e N suficientemente grande, pode-se admitir a continuidade da distribuição. O número de lugares a ser preenchido em cada classe é dado por $P_x = \frac{Rx}{x}$. Ora, pelo cálculo combinatório sabemos que o número

(17) *Davis, H.T.*, "The Significance of the Curve of Income", Report of the Cowles Commission (1938), pág. 19; 'The Theory of Econometrics" (Bloomington, 1941), pág. 35.

de modos em que N indivíduos podem ser distribuídos por P lugares é dado por $Q = \dfrac{(N+P-1)!}{N!\,(P-1)!}$

Essa expressão pode ser simplificada, aproximando os fatoriais pela fórmula de *Stirling*. Tomando em seguida a derivada logarítmica, obtém-se

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP} \simeq \log (N+P-1) - \log (P-1) + \frac{1}{2\,(N+P-1)} + \frac{1}{2\,(P-1)}$$

Como N e P são em geral grandes números, podemos desprezar os dois últimos têrmos e substituir nos restantes $P-1$ por P. Daí

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP} \simeq \log (N+P) - \log P$$

Introduz agora *Davis* uma hipótese fundamental. E provável que a mobilidade dos indivíduos entre classes de renda seja mais rápida entre as classes contendo grande número de contribuintes que entre as de pequeno número, e que essa mobilidade seja menor nas classes de rendas vultosas. A tradução matemática mais simples dessas contingências é que

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{b\,Q}{z}$$

onde z é a renda em excesso do mínimo de subsistência, $z = x - x_0$, e b é um fator de proporcionalidade. Contudo, faltam investigações estatísticas em apoio dessa hipótese, e mesmo serão elas de difícil execução.

Eliminando Q entre as duas equações acima, obtém-se

$$P_2 = \frac{N_z}{e^{b/z} - 1}$$

Davis determina então N_z de modo que sua fórmula se aproxima assintòticamente da equação de *Pareto* para z tendendo para ∞. Utilizando a série

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{1}{2}\,t + B_1\,\frac{t^2}{2!} - B_2\,\frac{t^4}{!4} + \ldots$$

onde B_1, $B_2, \ldots$, representam os números de *Bernoulli*, reduz-se a equação acima a

$$P_z = N_z \frac{z}{b}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{z} + \frac{B_1}{2_1}\frac{b^2}{z^2} - \ldots\right]$$

Para que se tenha, com $z \to \infty$, a lei paretiana $A\alpha z^{-\alpha-1}$, é preciso que seja $N_z = A\alpha b z^{-\alpha-2}$. Substituindo Pz por $\phi(z)$, $A\alpha b$ por α, $\alpha+2$ por ν, obtém-se finalmente

$$\phi(z) = \frac{a}{z^\nu}\frac{1}{e^{b/z}-1} \tag{1.16}$$

É esta uma curva unimodal, tendendo a anular-se quando x se aproxima do ponto de mínimo de subsistência, com um máximo situado próximo a êsse ponto, e tendendo assintòticamente para a curva paretiana para valores crescentes de z.

Com efeito, para diminutos valores de z, podemos escrever aproximadamente $\phi(z) \simeq \frac{a}{z^\nu} e^{-b/z}$, e, para $z \to 0$ (ou seja, $x \to x_o$), tanto $e^{-b/z}$ como z^ν tendem para zero; mas como o primeiro decresce mais ràpidamente, ϕ tende para um limite nulo.

Para obter o valor modal, ponhamos $b/z = u$, e derivemos logarìtmicamente a função; vem

$$\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} = \frac{\nu}{u} - [1 - e^{-u}]^{-1}$$

e, anulando-a, temos a equação $e^{-u} = 1 - \frac{u}{\nu}$. Chamando $\bar{u}$ a raiz não nula dessa equação, teremos o valor modal (18) $\bar{x} = x_0 + \frac{b}{\bar{u}}$.

A determinação dos parâmetros faz-se pelo método dos momentos. O número de indivíduos na coletividade é dado por

$$\int_0^\infty \phi(z)\, dz = ab^{-\mu}\,\Gamma(\mu)\,\zeta(\mu) = N \tag{1.17}$$

---

(18) Esta é a solução de *D'Addario* ("Ricerche sulle curve dei redditi", "Giorn. Economisti", 1949, pág. 107); *Davis* dá outro valor, incorreto porém.

onde $\mu=\alpha+1$, $\Gamma(\mu)$ é a função gama e $\zeta(\mu)$ é a função zeta de *Riemann*. Quanto à renda global, é dada por

$$\int_o^\infty \phi(z)\, z\, dz = ab^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) = R \tag{1.18}$$

Eliminando-se a entre essas duas equações, obtém-se

$$b = \frac{\Gamma(\mu)\,\zeta(\mu)}{\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha)}\frac{R}{N}$$

e, entrando em (1.17), vem

$$a = \frac{Nb^\mu}{\Gamma(\mu)\,\zeta(\mu)}$$

Quanto ao valor de x, obtém-se igualando o valor modal observado à sua expressão teórica.

1.10 — *Equação de* Amoroso.

Embora as distribuições de renda oriundas das estatísticas fiscais, em vista do mínimo de isenção, sejam zeromodais, elas são efetivamente, quando consideradas em sua totalidade, unimodais; e essa mesma característica aparece em outras distribuições econômicas, como a de salários. Por isso, *Amoroso* (19) procurou uma função apta a representar, conforme os valores que assumem certos de seus parâmetros, distribuições de um e outro tipo.

A equação proposta por *Amoroso* é

$$y = k\, e^{-\gamma\,(x-x_0)^{1/s}}(x-x_o)^{p/s-1} \tag{1.19}$$

onde x varia no campo (x, ∞); k, x_o, γ e p são constantes essencialmente positivas; s é uma constante positiva, negativa ou nula, mas tal que $p+s>o$; enfim, no caso em que as potências admitem duas determinações reais diversas, deve-se escolher a positiva.

Se $p-s\leq 0$, a curva é sempre decrescente; se $p-s>0$, ela apresenta um máximo no ponto $\bar{x}=x_o+\left(\frac{p-s}{\gamma}\right)^s$

(19) *Amoroso, L.*, "Ricerche intorno alla curva dei redditi", "Annali di matematica pura ed applicada" (1924-25); *D'Addario, R.*, "Intorno alla curva dei redditi di Amoroso", "Riv. Ital. Stat., Econ. e Fin.", Mar. 1932.

A essa curva se reconduzem várias outras, que igualmente têm sido aventadas para representar as distribuições de renda.

Para $s=1$, tem-se uma equação do tipo III de *Pearson*

$$y = k\ e^{-\gamma(x-x_0)}(x-x_0)^{-p-1} \tag{1.20}$$

utilizada por *March* (20) em estudos de distribuições de salários. É sempre decrescente se $o \leq p \leq 1$, e se $p > 1$ tem um máximo no ponto $\bar{x} = x_0 + \frac{p-1}{\gamma}$. Como é sabido, uma equação do tipo III foi, em essência, sugerida por *Pareto* como fórmula de segunda aproximação. Sob êste ponto de vista, a equação de *Amoroso* pode-se considerar como uma generalização das equações paretianas.

Para $s = -1$, obtém-se uma equação do tipo *V* personiano

$$y = k\ e^{-\frac{\gamma}{x-x_0}}(x-x_0)^{-p-1} \tag{1.21}$$

deduzida por *Vinci* (21) dos princípios teóricos do cálculo de probabilidades (V. § 3.4). É sempre unimodal, caindo a moda no ponto $\bar{x} = x_0 + \dfrac{\gamma}{p+1}$

---

(20) *March, L.*, "Quelques exemples de distribution de salaires", "Journ. Sté. Stat." Paris, 1898.

(21) *Vinci, F.*, "Nuovi contrib. allo studio della distrib. dei redditi", "Giorn. Economisti", 1921.

Capítulo II

O MÉTODO DE TRANSLAÇÃO

2.1 — *O método de translação.*

Quando a curva característica de um fenômeno é algo complicada, pode-se às vêzes obter uma representação analítica satisfatória utilizando escalas funcionais para medir as variáveis, ou seja, *anamorfoseando* a curva representativa.

Seja $f(x)$ a distribuição de freqüência da variável x, definida no campo (x_o, x_n), e façamos a substituição $x = \Psi(z)$. Qual será a distribuição da variável z?

É claro que a probabilidade de que z esteja contido no intervalo z a $z+dz$ deve ser igual à probabilidade de que x esteja compreendido entre x e $x+dx$. Logo, devemos ter

$$f(x)\,dx = F(z)\,dz$$

o que exige

$$F(z) = f[\psi(z)]\,|\psi'(z)|$$

tendo-se tomado o valor absoluto da derivada porque $F(z)$, que se denomina *função geratriz*, é essencialmente positiva.

A *condição de área* deverá também ser satisfeita pela função $F(z)$. Se $f(x)$ fôr limitada, os limites se transformam consonantemente.

Considerando a função inversa de Ψ, isto é, $z = \varphi(x)$, que se denomina *função transformatriz*, teremos anàlogamente

$$f(x)\,dx = F[\varphi(x)]\,|\varphi'(x)|\,dx$$

ou seja

$$f(x) = F[\varphi(x)]\,|\varphi'(x)| \tag{2.1}$$

O processo permite, pois, reconduzir a pesquisa de $f(x)$ à de uma outra função $F(z)$, de propriedades conhecidas e mais simples. E, se a escolha de $F(z)$ se subordinar a critérios probabilísticos, será possível dar a $f(x)$ um fundamento racional.

A função de *Guass-Laplace* tem sido extensivamente usada como função geratriz. Sob essa forma é que o método foi originàriamente proposto por *Eygeworth*, e mais tarde, independentemente, por... *Kapteyn* (1).

Adotando, pois, $F(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z}$ teremos, pondo $z = \varphi(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi(x)^2} |\varphi'(x)| \tag{2.2}$$

o que permite transformar distribuições de tipo assimétrico em distribuições gaussianas

Como x varia no campo (x_o, x_n), teremos, notando que z varia entre $-\infty$ e ∞, que $\varphi(x_o) = -\infty$, $\varphi(x) = \infty$, de modo que seja satisfeita a condição de área

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1$$

O ajustamento opera-se sôbre a curva integral. Se $P(x)$ é a freqüência dos valores não superiores a x, temos, integrando, que

(1) *Edgeworth, F. Y.*, "On the Representation of Statistics by Mathem. Formulae", "Journ. Royal Stat. Soc.", 1898, 1899, 1900, e outros artigos; *Kapteyn, J. C.*, "Skew Frequency Curves in Biology and Statistics" (Groningen, 1903); *Kapteyn, J. C.*, and *Van Uven, M. J.*, "Skew Frequency Curves in Biology and Statistics" (2nd paper) (Groningen, 1916).

A idéia de translação parece ter surgido com *Edgeworth*, quando redigiu os célebres "Reports of the Committee of the British Association" (1887-89) sôbre índices de preços. Sabe-se que a distribuição dêstes se normaliza mediante uma anamorfose logarítmica. O método foi redescoberto por *Kapteyn*.

Observe-se que *Edgeworth* (*op. cit.*) não determinou $\varphi(x)$, mas a sua inversa $\psi(z)$, admitindo

$$x - M = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3,$$

onde M é o valor mediano de x, e α, β, γ são constantes. O exemplo foi seguido por *Bowley* ("The Action of Economic Forces in Producing Frequency Distributions of Income, Prices and other Phenomena", "Econometrica" 1933, pág. 358).

$$P(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varphi(x)} e^{-z^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \theta\ [\varphi(x)]\right\} \qquad (2.3)$$

em que θ indica a conhecida transcendente de *Kramp*,

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{z} e^{-z^2} dz$$

Dada uma distribuição estatística, determinam-se os valores de z_i definidos pela igualdade

$$P(x_i) = \frac{1}{2}\left\{1 + \theta(z)\right\}$$

em correspondência aos valores $P(x_i)$ observados. Obtidos os pares de valores (x_1, z_1), (x_2, z_2), ..., (x_n, z_n), fixemos, mediante um processo de interpolação adequado, a forma algébrcia de $z = \varphi(x)$, compatível com a distribuição em aprêço, e, em conseqüência, ficará determinada a função $f(x)$. É claro que o processo é vantajoso quando $\varphi(x)$ se adapta bem aos pontos (x_i, z_i) e tem uma forma simples.

2.2 — *A distribuição de* Kapteyn-Gibrat.

Em muitas distribuições clássicas da física, da biologia e da economia, observa-se que os pontos $(\log x_i, z_i)$, são aproximadamente colineares, o que leva à transformação

$$\varphi(x) = a \log x + b$$

isto é, z se exprime como uma função linear logarítmica da variável x. Segue-se que

$$f(x) = \frac{\alpha}{x\sqrt{\pi}} e^{-[\alpha \log x + b]^2} \qquad (2.4)$$

que é a conhecida função de *Galton-McAlister* (2).

---

(2) *Mc Alister*, "The Law of the Geometric Mean", *Proc. Royal Soc.* (1879) deu estrutura matemática às idéias expendidas por *Galton*.

Uma intensiva aplicação dessa função no domínio econômico foi feita por *Gibrat* (3). A ela se subordinam os mais variados fenômenos, como sejam, além das distribuições de rendas, as dos salários, dos operários segundo as emprêsas, da taxa de pauperismo, das sucessões, dos aluguéis, etc. Em muitos casos, porém, é necessário adotar uma transformatriz mais geral

$$\varphi(x) = a \log (x - x_o) + b$$

conduzindo à função

$$f(x) = \frac{a}{(x-x_0)\sqrt{\pi}} e^{-[a \log (x - x_0) + b]^2} \qquad (2.5)$$

que se denomina *distribuição de Kapteyn-Gibrat* (4).

É essa uma curva unimodal, de assimetria positiva, cujo primeiro ramo nasce no ponto de coordenadas (x_o, o), e o segundo tem por assíntota a direção positiva do eixo dos x. A moda cai no ponto $\bar{x} = x_0 + e^{-\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{a}{b}\right)}$.

Nas aplicações práticas convém utilizar, em vez dos logaritmos neperianos, os decimais. A equação passa a ser

$$f(x) = \frac{a \log_{10} e}{(x-x_0)\sqrt{\pi}} e^{-[a \log_{10} (x - x_0) + b]^2} \qquad (2.6)$$

A determinação da transformatriz torna-se muito expedita usando o "papel gausso-logarítmico" (5), em que uma das escalas é logarítmica e a outra corresponde à função de *Gauss-Laplace*.

2.3 — *Outra forma de equação de* Kapteyn-Gibrat.

A equação de *Gibrat* pode ser posta sob outra forma, que às vêzes é cômoda para a análise ou o cálculo das constantes (6).

(3) *Gibrat, R.*, "Une loi des repartitions économiques: l'effet proportionnel" ("Bul. Stat. Gén. France", 1930): idem, "Les Inégalités Économiques (Paris, 1911).

(4) Na realidade, *Gibrat* ("Les Inégalités Économiques", pág. 64 et passim) escreveu $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-[\alpha \log (x - x_0) + b]^2}$, embora tivesse feito aplicação correta às distribuições empíricas. O êrro foi assinalado por *D'Addario* ("Intorno ad una curva di ripartizione", "Riv. Ital. Stat. Econ.," Dez. 1932).

(5) *D'Harcourt, J.*, "La loi de l'effet proportionnel", "Jour. Soc. Stat.", *Paris*, Juin 1937, pág. 249.

(6) *D'Addario, R.*, "Intorno ad una curva di ripartizione", citado.

Seja μ a média dos log $(x-x_o)$, isto é, o logaritmo da média geométrica dos réditos $(x-x_o)$, σ o desvio quadrático médio dos log $(x-x_o)$ em tôrno de sua média μ. Teremos, fazendo em (2.5) $z=a \log (x-x_o)+b$, que

$$\mu = \int_{x_0}^{\infty} \log (x-x_0)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z-b)\, e^{-z^2}\, dz$$

$$= -\, b/a.$$

Por conseguinte, a constante $-b/a$ é o logaritmo da média geométrica dos réditos $(x-x_o)$.

Da mesma forma, temos

$$\sigma^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{[\log (x-x_0)-\mu]}{x-x_0}\, e^{-[a \log (x-x_0)+b]^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{a^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2\, e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2a^2}$$

donde $a = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, isto é, a varia inversamente com o desvio quadrático médio dos log $(x-x_o)$.

Substituindo êsse valor na equação (2.5), obtemos

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)\,\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\log (x-x_0)-\mu]^2} \tag{2.7}$$

que é a forma procurada.

2.4 — *Significação econômica dos parâmetros.*

A equação (2.3) pode ser escrita, passando das freqüências relativas para as absolutas, do seguinte modo

$$N_x = \frac{N}{2}\,[1-\theta\,(a \log (x-x_0)+b)] \tag{2.8}$$

Essa equação mostra que, quando x tende para x_o, a expressão $a \log (x-x_o)+b$ tende para $-\infty$, e portanto N_x tende para o seu máximo N. Logo, x_o representa a renda mínima, seja o mínimo taxável, e nesse caso N é o total dos contribuintes sujeitos ao impôsto de renda, seja o mínimo necessário para a subsistência, quando a distribuição se referir à população total (6a).

Ponhamos $b=-ac$, e, em vez do significado de b, procuremos o de c.

Determinemos o valor p que anula a expressão

$$a \left[\log (x-x_0)-c\right]=0 \tag{2.9}$$

isto é, $p-x_o=e^c$. Entrando com êsse valor na equação (2.8), temos $N_x = \frac{N}{2}$, de modo que p é a renda provável ou mediana. Dêste modo c é o logaritmo da diferença entre a renda provável e a renda mínima.

Quanto a a, desempenha na distribuição de *Kapteyn-Gibrat* o mesmo papel que α na equação de *Pareto;* êle mede a desigualdade da repartição das rendas. Podemos, contudo, precisar desde logo o seu significado (7), e para tal calculemos a renda média.

O total das rendas superiores a x é dado por

$$R_x = \int_\infty^x x\, dN_x = \int_\infty^x (x-x_o)\, dN + x_oN_x$$

Como $z=a\ [\log(x-x_o)-c\,]$, podemos escrever $x-x_o=e^{\frac{z}{a}+c}$ e portanto

$$R_x = x_oN_x + \frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-z^2+\frac{z}{a}+c}\, dz$$

(6a) *Gibrat* ("Les Inégailités Économiques", pág. 69) observa que, independente de sua significação natural, x_o pode ser utilizado para melhorar a aderência da curva teórica. Assim, no cálculo da renda inglêsa, cédula *D*, 1893-94, cujo mínimo taxável é £150, êle toma $x_o=475$, ou $x_o=220$, conforme o método empregado. Mas é claro que a fórmula teórica só é válida a partir de x_o, e obtém-se assim uma representação híbrida, em que se admite que os valores da função para $x<x_o$, são os próprios valores observados.

(7) *Fréchet, M.*, "Journ. Soc. Stat. Paris" (1941), pág. 104.

O expoente de e pode ser pôsto sob a forma $-\left(z-\frac{1}{2a}\right)^2+c+\frac{1}{4a^2}$

donde

$$R_x = x_o N_x + \frac{N}{\sqrt{\pi}} e^{c+\frac{1}{4a^2}} \int_{z-\frac{1}{2a}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= x_o N_x + \frac{N}{2} e^{c+\frac{1}{4a^2}} \left[1 + \theta\left(z - \frac{1}{2a}\right)\right]$$

ou seja

$$R_x = \frac{N}{2}\left\{x_o[1-\theta(z)]+e^{c+\frac{1}{4a^2}}\left[1+\theta\left(z-\frac{1}{2a}\right)\right]\right\}$$

A renda média da distribuição global será, pois,

$$r = \frac{R_x}{N} = x + e^{c+\frac{1}{4a^2}}$$

e, lembrando que $p-x=e^c$, conclui-se que $\frac{r-x_o}{p-x_o}=e^{\frac{1}{4a^2}}$ Daí,

$$a = \left[2\sqrt{\log\frac{r-x_o}{p-x_o}}\right]^{-1} \tag{2.10}$$

Temos assim o parâmetro a expresso em função da renda média e da renda provável.

2.5 — *Equação de* D'Addario.

Retomemos, sob a forma diferencial, a equação de *Kapteyn-Gibrat*

$$-dN_x = Ce^{-z^2}\, dz$$

com $z = a\log(x-x_o)+b$. Pondo $-\frac{b}{a} = \log(x_1-x_o)$, com $x_1>x_o$, temos $z = a\log\frac{x-x_o}{x_1-x_o}$, ou ainda $z = a\log u$, com $u = \frac{x-x_o}{x_1-x_o}$

Para que a função tenha valores reais, é preciso que seja $x \geq x_o$. *Kapteyn*, *Gibrat* e outros, determinaram a constante c pela condição de área, supondo prevalecer essa desigualdade, isto é, admitindo a variação de x no intervalo (x_o, ∞). Portanto,

$$C = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} yz \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

donde a função de freqüência

$$y = -\frac{dNx}{dx} = \frac{a}{(x_1 - x_o)\sqrt{\pi}} \frac{e^{-a^2 \log^2 u}}{u}$$

Ora, essa função tem um máximo, pois

$$\frac{d}{du} \frac{1}{u} e^{-a^2 \log u} = e^{-a^2 \log^2 u} \left[\frac{2a \log u + 1}{u^2} \right]$$

de modo que y cresce com $\log u < -\frac{1}{2a^2}$ ou $\frac{x - x_o}{x_1 - x_2} < e^{-\frac{1}{2u^2}}$, e decresce em seguida. O máximo corresponde a um valor ξ entre x_o e x_1.

Observa *D'Addario* (8) que as distribuições de rendas, obtidas através das estatísticas da taxação fiscal, não apresentam máximo, enquanto que as interpolatrizes de *Kapteyn-Gibrat* são unimodais. Para fazer desaparecer o intervalo de crescimento de x , devemos tomar um intervalo de variação (x_o, ∞) mais restrito, e tal que $x_2 > \xi$. A função será monòtonamente descrescente nesse intervalo.

Nessas condições, o valor da constante C será dado por

$$C = \left[\int_{z_2}^{\infty} e^{-z^2} dz \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\psi(z_2)}$$

---

(8) *D'Addario, R.*—"Sulla Rappresentazione Analitica delle Curve di Frequenza" (Bari, 1936), pág. 20. Aliás, *D'Addario* chegou à sua fórmula procurando levantar a restrição, decorrente da solução de *Kapteyn - Gibrat*, de ser a transformatriz $\varphi(x)$ uma função assintótica, atingindo os valores $-\infty$ e $+\infty$ nos extremos à esquerda e à direita do campo de variabilidade de x. Para utilizar funções limitadas, êle considerou uma geratriz mais geral $F(z) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{z^2}$, em que z varia no campo (α, β), e K é uma constante determinada pela condição de área. Fixando o campo de variação de z pelos limites de $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$, encontra $K = 2$, que é a solução referida no texto. Sôbre esta, ver *Fréchet*, "Rev. Inst. Internat. Stat" (1945), pág. 28.

Para simplificar o cálculo de $\Psi(z_2)$, podemos adotar para x_2 o valor de x que anula z_2, donde $\Psi(z_2) = \frac{1}{2}$. Por conseqüência, $C = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ e finalmente

$$y = \frac{2a}{(x_1 - x_0)\sqrt{\pi}} e^{-\left[a \log \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right]} \tag{2.11}$$

É essa equação de *D'Addario*, que a aplicou a diversas distribuições de renda, obtendo notáveis aproximações às distribuições empíricas. Por exemplo, o ajustamento à distribuição de rendas (cédula D, 1893-94) na Inglaterra, pela lei paretiana de segunda aproximação, dá um afastamento médio entre os valores observados e ajustados de 12,05%, enquanto que a nova equação apenas dá 0,50%. Para o clássico exemplo do Grão-Ducado de Oldenburgo, a interpolação de *Pareto* corresponde a um êrro de 15,55% e a de *D'Addario* a 1,28% (9).

Cumpre notar, contudo, que os levantamentos estatísticos fiscais apenas ignoram a parte inferior da distribuição. Se considerarmos esta em sua totalidade, uma interpolatriz unimodal sera preferível e deveria conduzir a melhor aderência.

2.6 — *Generalização do método.*

As diversas equações propostas para representar as distribuições de renda, que temos visto, podem-se reconduzir, segundo mostrou *D'Addario* (10), a uma única função geratriz, mediante transformatrizes satisfazendo à mesma relação diferencial.

Seja a geratriz

$$F(z) = K \left[e^{z \frac{1}{p}} + b \right]^{-1} \tag{2.12}$$

em que o parâmetro p é essencialmente positivo; b é positivo, negativo ou nulo; z varia no campo $(z_0, z\ )$, K é determinado pela condição de área (11).

(9) Aplicações têm sido feitas em outros campos científicos, por exemplo *D'Addario*, "Curve di freq. nelle assicuraz. di infortuni e di responsabilitá civile", "Riv. Ital. Stat., Econ. e Fin.", Mar. 1933.

(10) *D'Addario, R.*, "Richerche sulla curve dei redditi", "Giorn. Economisti' (1949), pág. 90-114.

(11) Assinala ainda *D'Addario* que essa função tem a mesma forma da equação da distribuição da estatística quântica de *Brillouin*. Nas distriubições de rendas, b tem os valores 0 ou -1; para tais valores particulares, a equação supra se reduz à distribuição mais provável das estatísticas de *Boltzmann* e *Bose-Einstein*, respectivamente. Êsse símile funcional permite interpretar, *mutatis mutandis*, o fenômeno econômico à luz dos esquemas probabilitários originados da física quântica.

Pelo método de translação teremos

$$f(x) = K\,|\varphi'(x)|\left\{e^{[\varphi(x)]^{1/p}} - b\right\}^{-1} \tag{2.13}$$

Para transformatrizes adotemos as funções $\varphi(x)$ satisfazendo à seguinte equação diferencial

$$\varphi'(x)\Big[\varphi(x)\Big]^q = \frac{\alpha}{x-x_o}$$

em que x varia no campo (x_o,∞), q é uma constante positiva, negativa ou nula; α é diverso de zero. Conforme os valores de q, essa equação admite duas soluções distintas:

1.°) se $q=0$, obtém-se por integração

$$\varphi(x) = \alpha \log (x-x_o)+d$$

2.°) se $q=-1$, vem

$$\varphi(x)=h\,(x-x\;)^{\alpha}$$

sendo d e h constantes arbitrárias.

Ora bem, as equações propostas por *Pareto* e *Kapteyn-Gibrat* correspondem aos valores $b=0$ e $q=0$; as de *Amoroso, March* e *Vinci* a $b=o$ e $q=-1$; a de *Davis* a $b=-1$ e $q=-1$.

Considerando o primeiro caso, $b=0$, $q=0$, temos, para

$$\varphi(x) = \alpha \log (x-x_o)+d, \quad \varphi'(x) = \frac{\alpha}{x-x_o} > o$$

e por conseguinte $f(x) = K\,\dfrac{\alpha}{x-x_o}\left\{e^{[\alpha \log (x-x_o)+d]^{1/p}}\right\}^{-1}$

Para $p=1$, a equação reduz-se a

$$f(x) = \frac{\alpha A}{(x+\alpha)^{x+1}}$$

onde $\alpha=-x_o$, $A=K\,e^{-d}$. É a equação paretiana de segunda aproximação. Para $p=1/2$, vem

$$f(x) = K\,\frac{\alpha}{x-x_o}\,e^{-[\alpha \log (x-x_o)+d]^2}$$

e, determinando K pela condição de área, encontra-se $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Cai-se na equação de *Kapteyn-Gibrat*.

Consideremos agora o caso de $b=0$, $q=-1$. Para $\alpha \neq 0$, temos

$$\varphi(x) = h(x-x_o)^{\alpha} > 0, \quad \varphi'(x) = h\alpha(x-x_o)^{\alpha-1} \gtrless 0$$

e daí

$$f(x) = K\, h\alpha(x-x_o)^{\alpha-1}\left\{e^{[h(x-x_0)]^{1/p}}\right\}^{-1}$$

Admitamos $p>0$, e façamos $\dfrac{\alpha}{p} = \dfrac{1}{s} \gtrless 0$, $h^{1/p} = \gamma > 0$. Determinando em seguida K pela condição de área, ou seja $K = [\Gamma(p+1)]^{-1}$, obtém-se fàcilmente

$$f(x) = \frac{\gamma^p}{|s|\Gamma(p)}(x-x_o)^{p/s-1}\, e^{-\gamma(x-x_0)^{1/s}}$$

que é a equação proposta por *Amoroso*, e que inclui como casos particulares, como vimos, as de *March* ($\alpha = +p$) e de *Vinci* ($\alpha = -p$).

Finalmente, para $b=-1$, $q=-1$ e $\alpha = -p$, temos

$$\varphi(x) = h(x-x_o)^{-p} > 0, \quad \varphi'(x) = -ph(x-x_o)^{-p-1} < 0$$

e, para $p>0$,

$$f(x) = \frac{C}{(x-x_o)^{p+1}} \, \frac{1}{e^{\frac{\gamma}{x-x_0}} - 1}$$

onde $C = Kph > 0$, $\gamma = h^{1/p} > 0$. É essa a equação derivada por *Davis* de considerações probabilitárias (12).

---

(12) Observa *D'Addário* que a equação acima é formalmente idêntica à célebre lei de irradiação de *Planck*, isto é, a equação da distribuição espectral da energia emitida pelo corpo negro a uma temperatura determinada. A equação de *Davis* se reduz, em primeira aproximação, para os pequenos valores de x, à equação de *Vinci*, e para os grandes valores, à de *Pareto*; essas duas equações encontram seus análogos respectivamente na equação de *Wien* e de *Rayleigh-Jeans*, que são os casos-limite da equação de *Planck* para baixas e grandes temperaturas. Parece, assim, o fenômeno econômico encontrar na nova macênica esquemas que esposam as formas reais observadas. *Amoroso* chega a prever que, tal como assistimos em nossa geração à identificação da física e da geometria, seja possível à geração que nos sucederá ver a identificação, ao menos parcial, da física e da economia.

Os resultados acima podem ser sumariados no seguinte esquema, onde se registram os valores especiais dos parâmetros da geratriz e transformatrizes referidas:

$$\begin{cases} b=0 & \begin{cases} q=0 & \begin{cases} p=1 & \textit{Pareto} \\ p=\frac{1}{2} & \textit{Kapteyn-Gibrat} \end{cases} \\ q=-1 & \begin{cases} \alpha\neq 0 & \textit{Amoroso} \\ \alpha=+p & \textit{March} \\ \alpha=-p & \textit{Vinci} \end{cases} \end{cases} \\ b=-1 & \{\, q=-1 \ \{\, \alpha=-p \qquad \textit{Davis} \end{cases}$$

D'Addario considera ainda transformatrizes mais gerais, satisfazendo à equação diferencial

$$\varphi'(x)[\varphi(x)]^q = \alpha\left[\frac{1}{x-x_o} + \frac{1}{x_1-x_o}\right]$$

As transformações obtidas são definidas no campo (x_o, x_1), e compreendem, como caso limite, para $x_1=\infty$, as equações de distribuições de rendas anteriormente referidas.

2.7 — *Outras geratrizes.*

A escolha da geratriz, no método de translação, é irrestrita. Condições de ordem prática, contudo, limitam essa escolha. Até agora têm sido utilizadas, além da distribuição normal, as seguintes:

I — A primeira função de *Laplace*

$$F(z) = \frac{1}{2}\, e^{-|z|}$$

em que z varia no campo $(-\infty, \infty)$, utilizada por *Fréchet* (13).

II — A equação das distribuições *semi-normais*

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(p)}\, e^{-z} z^{p-1}$$

(13) *Fréchet, M.*, "Sur les formules de répartition des revenus", "Rev. Inst. Internat. Stat"., 1939.

em que p é um parâmetro essencialmente positivo; z varia no campo $(0, \infty)$. Foi utilizada por *D'Addario* (14). Com oportunos valores de p e z podem-se obter dessa equação várias outras, como as de *Pareto* e *Amoroso*.

III — A função

$$F(z) = e^z\left(1 + \frac{e^z}{p}\right)^{-p-1}$$

sendo p positivo. Dá uma curva semelhante à normal, mas leptokúrtica. Foi utilizada por *Rhodes* (15), e goza de uma propriedade interessante: a transformação $z = \log \left\{ p \frac{x - x_o}{x_o} \right\}$ conduz a

$$\int_x^\infty f(x)dx = \left(\frac{x}{x_o}\right)^{-p}$$

que é a equação de *Pareto*.

(14) *D'Addario, R.*, "Le Transformate Euleriane" (Bari, 1936).

(15) *Rhodes, E. C.*, "The Distributions and Incomes", "Economica" (1942) pág. 251.

Capítulo III

INTERPRETAÇÃO PELOS ESQUEMAS PROBABILITÁRIOS

3.1 — *Os esquemas probabilitários.*

A lei paretiana é uma lei empírica, e não uma lei racional. Tal distinção foi focalizada na controvérsia *Pareto-Edgeworth* (1), e o próprio descobridor tentou a explicação de sua lei à luz do cálculo das probabilidades.

Tais pesquisas ampliaram-se posteriormente na tentativa de encontrar uma explicação racional para a forma de distribuição de rendas. Imaginaram-se esquemas probabilitários, em que a atuação das causas elementares não tinha a constância que conduz à conhecida distribuição gaussiana. Introduziram-se fôrças perturbadoras, provocando uma distorsão da curva fundamental, que resultaria da ação inordenada de inúmeras causas elementares. Essas fôrças traduziriam os obstáculos criados pela estrutura e organização social à aquisição da riqueza, e as circunstâncias pessoais favoráveis à sua obtenção. Entre estas últimas, além dos caracteres inerentes ao indivíduo, há a considerar a sua posição inicial na escala social, que determina uma desigual distribuição de oportunidades.

3.2 — *A repartição das rendas será efeito do acaso?*

Os dados estatísticos, sôbre os quais se apoiara *Pareto*, referiam-se a distribuições de contribuintes sujeitos à incidência do impôsto de renda; por conseguinte, abrangiam apenas parte da população. Adverte *Pareto* (2) que, se considerarmos a totalidade da população, é de se

---

(1) Vide nota 7, capítulo I.

(2) *Pareto*, V., "Manuel d'Économie Politique" (Paris, 1927), pág. 384. Em seu "Cours" (pág. 314), achava que a parte inferior da curva devia ter uma forma muito achatada, com um ponto de reversão, em contraposição às idéias de *Ammon;* mas no "Manuel" êle se aproxima dessas últimas.

presumir que a distribuição afetaria a forma de uma curva unimodal de assimetria positiva, forma esta já prevista por *Ammon*. Essa conformação sugere a curva de probabilidades, e *Pareto* (3) propõe-se a questão: a repartição das rendas é simplesmente efeito do acaso?

Suponhamos que se fazem extrações ao acaso entre os membros de uma coletividade, com reposição, e que se atribua a cada pessoa uma renda dependendo do número de tiragens de seu nome. A distribuição das rendas obedecerá, então, ao esquema de probabilidades de *Bernoulli*.

Seja N o número de membros da coletividade, e $p\ (t)$ a probabilidade que certo nome seja tirado t vêzes em ν provas. A probabilidade, suposta constante, de uma extração sendo $p = \dfrac{1}{N}$, segue-se que

$$p(t) = C_\nu^t p^t q^{\nu-t} \tag{3.1}$$

Por outro lado, a medida empírica dessa probabilidade é dada pelo quociente $\dfrac{n_x}{N}$, sendo n_x o número de possuidores da renda x. A distribuição de rendas será representada aproximadamente pela relação

$$n_x \cong Np(t) \tag{3.2}$$

Ora, $p(t)$ sendo definido pela lei binomial, temos que, quando x cresce, t crescendo também, a função supra começa por crescer até que t atinja o seu valor mais provável, para em seguida decrescer constantemente, tendendo para zero. Assim, $Np(t)$ corresponde à forma teórica da repartição atinente à população total.

Introduzindo a nova variável $z = t - p\nu$, e substituindo os fatoriais de C_ν^t pela fórmula de *Stirling*, temos aproximadamente

---

(3) *Pareto*, "Cours", pág. 315. A respeito dessa proposição, *Pareto* borda algumas considerações sôbre o método matemático em economia, que vale a pena transcrever: "Plusieurs personnes qui manquent des connaissances scientifiques nécessaires pour bien comprendre les nouvelles théories, affirment que l'usage des mathématiques n'ajoutent à nos connaissances en Économie politique, et elles croient le prouver en citant Cairnes. La seule preuve vraiment efficace serait de faire voir que l'on peut, sans recourir aux mathématiques, démontrer les théorèmes dont nous venons de parler et bien d'autres encore".

$$p(t) \cong K\left(\frac{p\nu}{p\nu+z}\right)^{p\,\nu+z+\frac{1}{2}}\left(\frac{q\nu}{q\nu-z}\right)^{q\,\nu-z+\frac{1}{2}}$$

onde K é uma constante.

Sendo muito pequena a probabilidade de se enriquecer, segue-se que $p\nu$ será muito pequeno e $q\nu$ muito grande, e portanto, ao menos nas proximidades do valor mais provável, o último fator dessa fórmula será aproximadamente constante. Podemos, assim, admitir que $p(t)$ seja proporcional ao segundo fator, isto é

$$n_x \cong K'\left(\frac{p\nu}{p\nu+z}\right)^{p\nu+z+\frac{1}{2}}$$

A forma dessa distribuição depende da lei de variação de x em função de t. Se admitirmos simplesmente, com *Pareto*, que a renda é proporcional ao número de tiragens, isto é, $x=t$, então a lei de distribuição será

$$n_x = K'\left(\frac{p\nu}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \qquad (3.3)$$

Ao contrário, a observação tem revelado que esta distribuição tem a forma

$$n = C\,\frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

ou senão

$$n = C\,\frac{1}{(x+\alpha)^{\alpha+1}}$$

Nenhuma confusão é possível, argui *Pareto* (4), entre as duas expressões e a (3.3), pois que nesta, x figura como expoente, enquanto que naquelas o expoente é constante.

E claro que, como as leis anteformuladas são apenas aproximadas, não é de se excluir a hipótese que as diferenças entre ambas sejam de uma ordem de grandeza inferior aos seus graus de aproximação; mas resta a objeção que as distribuições de rendas permanecem assimétricas, mesmo para grande número de observações, enquanto que

(4) *Pareto*, "Cours", pág. 317, nota.

a distribuição bernoulliana tende para a forma normal com o crescer do número de provas.

3.3 — *O esquema paretiano.*

Pareto conclui, assim, que a repartição de rendas não depende *ùnicamente* de acaso, mas que pressupõe uma heterogeneidade substancial na composição da coletividade (5). Com efeito, consideremos a coletividade formada por um certo número de estratos, de tamanhos q_i, e seja p_i a probabilidade, que se supõe constante, de extração de um indivíduo do estrato i^{esimo}. Mantendo a convenção de que a renda é proporcional ao número de extrações, $x = t$, a distribuição dos indivíduos no extrato obedecerá à lei binomial (3.2), e o número n_{xi} de indivíduos com renda x será dado por $n_{xi} = g_i p_i(t)$

Considerando agora todos os estratos, vemos que a distribuição da renda se assimila a um esquema de urnas, em que a probabilidade de extração é constante em tôdas as provas de uma série, mas varia de uma série a outra; noutros têrmos, à distribuição binominal se substitui outra de tipo lexiano.

O número total n_x de indivíduos com renda x será dado pelo somatório $n_x = \Sigma g_i p_i(t)$

Tratando-se de grandes números, será lícito substituir ao somatório uma integral. Notando que a probabilidade varia entre 0 e 1, donde os limites da integral 0 e 1 (na realidade, um pouco diferentes), podemos escrever, explicitando a função binomial e representando os fatoriais pela função Gama,

$$n_x = \int_o^1 g \frac{\Gamma(\nu+1) p^x q^{\nu-x}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-x+1)} \, dp$$

em que g se considera função de p.

Em seguida, *Pareto* determina a função g de modo tal que, para os grandes valores de x, ela se reduza à lei empírica $A\alpha x^{-\alpha-1}$. Pondo $g = Hp^{-\omega}$, obtém

$$n_x = H \int_o^1 \frac{\Gamma(\nu+1) p^{x-\omega} q^{\nu-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(\nu-x+1)} \, dp$$

(5) *Pareto*, "Cours", 2.º vol., "Additions", pág. 417.

ou seja, integrando,

$$n_x = H\,\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(x-\omega+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x-\omega+1)}$$

Substituindo às funções Gama seus valores aproximados, e desprezando as quantidades de ordem $\frac{1}{x}$, vem

$$n_x = Hx^{-\omega}\nu^{\omega-1}$$

que se reduz à lei paretiana com $A\alpha = H\nu^{\omega-1}$, $w=\alpha+1$.

Por conseqüência, para que n_x seja uma função hiperbólica, é preciso que g também o seja. Teríamos, assim, com g, a lei de distribuição das qualidades que permitiriam aos homens enriquecer desde que existisse perfeita mobilidade entre as diferentes camadas sociais. Mas essa mobilidade está longe de ser perfeita. A função g resulta, pois, da repartição das qualidades aludidas e da natureza dos obstáculos, oriundos da estrutura e instituições sociais, que se opõem ao pleno desenvolvimento daquelas faculdades.

3.4 — *O esquema de* Boltzmann.

As conclusões de *Pareto* importam em admitir que a distribuição de rendas é um fenômeno casual, compatìvelmente com um vínculo dependente das qualidades pessoais e dos obstáculos. Esquemas dessa natureza, mais gerais, tinham sido considerados desde 1877 por *Boltzmann* no estudo da teoria cinética dos gases.

Seja p a probabilidade de que, em n observações ,y_1, y_2, ... y_n observações *determinadas* tenham respectivamente os valores x_1, x_2, ... x_n. A probabilidade P de que se obtenha uma qualquer distribuição dessas observações, não importa quais delas possam pertencer aos grupos y_1, y_2, etc., é dada pela lei multinomial

$$P = \frac{N\,!}{y_1\,!\,y_2\,!\,y\,...\,y_n\,!}\,p \tag{3.4}$$

onde

$$N = y_1+y_2+...+y_n \tag{3.5}$$

Admitamos ainda que os números y_i satisfaçam a condição

$$H = y_1\,\varphi(x_1)+y_2\,\varphi(x_2)+...+y_n\,\varphi(x_n) \tag{3.6}$$

onde H é uma constante.

Supondo que as nossas observações sejam suscetíveis de se distribuir de todos os modos possíveis entre os n valores compatìvelmente com as condições (3.5) e (3.6), perquiramos a distribuição mais provável dos y_i. Ela corresponderá ao valor máximo de (3.4), que se obtém escolhendo os números (não negativos) $y_1, y_2, \ldots y_n$ que tornam mínimo o produto de seus fatoriais, ou respectivo logaritmo

$$\log(y_1!) + \log(y_2!) + \ldots + \log(y_n!) \tag{3.7}$$

compatìvelmente com as condições (3.5 e (3.6).

Para calcular êsse mínimo, substituamos os fatoriais pela fórmula de *Stirling*, obtendo, para cada um dos têrmos,

$$\begin{aligned} \log(y_i! &= y_i \log\ y_i - y_i + \tfrac{1}{2}\log 2\pi\ y_i \\ &= (y_i + \tfrac{1}{2}) \log y_i - y_i + \tfrac{1}{2} \log 2\pi \end{aligned}$$

Dêste modo, a expressão (3.7) se reduz a

$$\sum_i^n \left(y_i + \frac{1}{2}\right) \log\ y_i - N + \frac{n}{2} \log 2\pi$$

Na determinação do mínimo, podemos prescindir dos dois últimos têrmos, que são constantes, e ainda desprezar a fração 1/2 em face dos valores, geralmente muito grandes, dos y_i. Temos assim que minimizar a expressão $\sum_i^n y_i \log y_i$, compatìvelmente com as condições referidas.

Fazendo variar cada um dos y_i com continuidade, o diferencial dessa expressão é dada por $\sum_1^n (1 + \log y_i)\, dy_i$, enquanto que os dos vínculos são respectivamente, $\sum_1^n dy_i$ e $\sum_1^n \varphi(x_i)\, dy_i$, levando-se em conta que as funções $\varphi(x_i)$ se consideram como constantes.

Introduzindo os multiplicadores de *Lagrange* $-(\mu'+1)$ e λ, a condição de mínimo importa em se anular a expressão

$$\Sigma \left[(1+\log y_i-(\mu'+1)+\lambda\, \varphi(x_i)\right] dy_i$$

Deve ser, pois, para cada valor de i,

$$\log y_i-\mu'+\lambda\, \varphi(x_i)=0$$

e, tomando os antilogaritmos, resulta

$$y_i=\mu\epsilon^{-\lambda\varphi(xi)} \tag{3.8}$$

A vantagem do esquema de *Boltzmann* no estudo das causas influentes sôbre uma série de observações está em que, à base das mesmas, podemos determinar a expressão matemática do fenômeno, e, identificando-a com a expressão (3.8), fixar analìticamente as condições $\varphi(x_i)$ que figuram em (3.6). Isso importa em verificar a hipótese de que a distribuição sugerida seja a mais provável entre tôdas as possíveis formas, compatíveis com os vínculos.

Êste esquema pode se estender imediatamente ao caso de r condições

$$\begin{aligned}
H_1 &= y_1\, \varphi_1(x_1)+y_2\, \varphi_1(x_2)+\ldots+y_n\, \varphi_1(x_n)\\
H_2 &= y_1\, \varphi_2(x_1)+y_2\, \varphi_2(x_2)+\ldots+y_n\, \varphi_2(x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_r &= y_1\, \varphi_r(x_1)+y_2\, \varphi_r(x_2)+\ldots+y_n\, \varphi_r(x_n)
\end{aligned}$$

que levam à expressão geral

$$y_i = \mu\epsilon^{-\lambda_1\varphi_1(xi)-\lambda_2\varphi_2(xi)-\ldots-\lambda\nu\varphi\nu(xi)} \tag{3.9}$$

3.5 — *Aplicação à distribuição de rendas.*

O esquema de *Boltzmann* foi aplicado por *Cantelli* (6) ao estudo das distribuições de renda. A densidade de freqüência correspondente à lei paretiana é dada por

$$y_i = B\,(x_i+a)^{-\alpha-1}$$

---

(6) *Cantelli, F. P.*, "Sulla deduzione delle leggi di frequenza di considerazioni di probabilità", "Metron" (Abr. 1921), pág. 83.

e, igualando-a a (3.8), obtém-se

$$\varphi(x_i) = k \log (x_i+\alpha)+h \tag{3.10}$$

onde k e h são constantes.

Por conseguinte, na conformidade do esquema probabilitário adotado, a equação de *Pareto* é a mais provável entre as distribuições compatíveis com o vínculo (3.6), sendo $\varphi(x_i)$ definido pela equação (3.10).

Cantelli considerou em seguida a lei geral de *Pareto*

$$y_i = C\,(x_i+a)^{-\alpha-1}e^{-\beta x_i}$$

e, igualando-a à (3.9), limitada aos dois primeiros têrmos, obteve

$$\varphi_1(x_i) = k \log (x_i+a)+h, \; \varphi_2(x_i) = x_i$$

que determinam os vínculos a que deve obedecer a distribuição.

Volvendo à lei anterior, *Cantelli* observa que a lei paretiana é a mais provável, na suposição que: *a*) a aquisição de uma renda x depende de uma tal complexo de causas (habilidades, atividade, concorrência, etc.) de modo a parecer dependente do acaso; *b*) as condições econômicas, políticas e religiosas do ambiente impõem um só vínculo, isto é, que seja fixa a soma de utilidades (ofelimidades) das rendas possuídas. Indicando com $\varphi(x)$ a utilidade média, ela é definida pela equação (3.10), que apresenta notável analogia com a conhecida expressão do valor *moral* de uma fortuna x, dada por *D. Bernoulli*.

Essa última hipótese não parece, porém, plausível; além de que, reportando-se a equação de *Pareto* apenas ao ramo descendente da distribuição global das rendas, a forma do vínculo que dela decorra não pode coincidir com a correspondenote à curva completa.

Para obviar êsse inconveniente, *Vinci* (7) supõe que a distribuição completa pode ser representada por uma função do tipo V de *Pearson*, ou seja,

$$y = k\,x^{-r}e^{-\gamma/x} \tag{3.11}$$

(7) *Vinci, F.*, "Nuovi contrib. allo studio della distrib. dei redditi", "Giorn. Economisti", 1921; idem, "Calcolo delle probabilità e distribuzione dei redditi nel pensiero di Pareto", ibid., 1924.

a qual se anula para x igual a 0 e a ∞, e tem uma única moda em $x = \frac{\gamma}{p}$.

Igualando essa função à (3.9), limitada aos dois primeiros têrmos, obtém-se

$$\log \mu - \lambda_1 \varphi_1(x_i) - \lambda_2 \varphi_2(x_i) = \log k - p \log x - \frac{\gamma}{x_i}$$

que é òbviamente satisfeita por

$$\varphi_1(x_i) = h - q \log x_i, \quad \varphi_2(x_i) = t \frac{1}{x_i}$$

Daí a hipótese que a (3.11) fornece a distribuição mais provável, compatìvelmente com as condições

$$H_1 = y_1 \log x_1 + y_2 \log x_2 + \ldots + y_n \log x_n$$

$$H_2 = y_1 \frac{1}{x_1} + y_2 \frac{1}{x_2} + \ldots + y_n \frac{1}{x_n}$$

Dêste modo, a distribuição de rendas resultaria de um complexo de fatôres casuais, mas as condições ambientes impõem uma relativa constância à soma dos obstáculos e das qualidades pessoais predispondo à aquisição da fortuna.

Nos vínculos referidos, $\varphi_1(x_i)$ representa os obstáculos médios opostos, e $\varphi_2(x_i)$ as qualidades médias favoráveis ao conseguimento da fortuna, e se supõem expressas em unidades de medida comparável à das rendas. Dêste modo, o primeiro vínculo poder-se-ia interpretar como se os obstáculos médios crescessem menos velozmente que as próprias rendas, e o segundo como se as qualidades médias diminuíssem ao aumentarem as rendas.

3.6 — *Distribuições assimétricas.*

Consideremos um fenômeno sujeito a uma multiplicidade de causas elementares. É sabido que, se essas causas são em grande número, agindo independentemente umas das outras, e que o efeito de cada uma é diminuto em face do efeito global, a distribuição representativa do fenômeno é a normal (8).

(8) *Laplace*, "Théorie analytique des probabilités," livro II, cap. IV.

Mas, inúmeros fenômenos naturais e econômicos não revelam a simetria dessa lei. *Kapteyn* (9) procurou a explicação da assimetria observada na circunstância do efeito Δx das causas elementares não ser independente da grandeza x. Ao invés, admitiu que Δx fôsse proporcional a uma função $f(x)$, isto é, que $\Delta x = \epsilon f(x)$, onde ϵ depende sòmente das causas atuantes.

Nessas condições, a grandeza $\frac{f(x)}{\Delta x}$ será independente de; e, assimilando-a à variação Δz de uma grandeza z, segue-se que os efeitos das causas englobadas em z será independente de x. Por conseqüência, z apresentará uma distribuição normal. Aí o fundamento do método de translação.

Supondo-se, primeiramente, que o efeito das causas elementares é proporcional a x, ter-se-á $\Delta x = \frac{x\Delta z}{a}$, donde $\Delta z = a\frac{\Delta x}{x}$ Admitindo que x e z variam com continuidade, tem-se, integrando

$$z = a \log x + b$$

que leva à função de *Kapteyn-Gibrat* (2.4).

Por êsse motivo é que essa função foi denominada de *lei do efeito proporcional* (10). Ela se revela pelo fato de que são os *logaritmos* da variável que obedecem à distribuição normal.

Generalizando, podemos admitir que o incremento elementar de x, em decorrência de tôdas as circunstâncias que o influenciam, seja em parte proporcional, em parte independente de x; isto é, $\Delta x = \frac{a}{x} + h\Delta z$

Por integração obtém-se

$$z = a \log (x + ah) + b$$

e, pondo $ah = x_o$, recai-se na distribuição geral (2.5).

3.7 — *Interpretação probabilitária de* Kalecki.

A lei do efeito proporcional, vimos, caracteriza-se pelo fato da distribuição dos *logaritmos* da variável econômica ser aproximada-

(9) *Kapteyn, J. C.*, "Skew Frequency Curves in Biology and Statistics" (Groningen, 1903).

(10) *Gibrat, R.*, "Inégalités Économiques", pág. 62.

mente gaussiana. A explicação dêsse fenômeno, como decorrente da atuação de causas aleatórias, foi apresentada por *Gibrat* (11), estendendo o raciocínio da *Kapteyn*. Sob uma forma mais rigorosa, é a seguinte (12):

Seja X a variável em aprêço (por exemplo, renda individual ou número de empregados numa emprêsa), e X_o o seu valor em certa época. Subseqüentemente, X sofre choques de natureza casual, atuando independentemente uns dos outros, que ocasionam alterações $m_1, m_2, \ldots m_n$. Como se supõe que essas alterações são proporcionais à grandeza da variável, o valor atual dessa última será $X = X_o(1+m_1)(1+m_2)\ldots(1+m_n)$, ou seja

$$\log X = \log X_o + \log(1+m_1) + \log(1+m_2) + \ldots + \log(1+m_n)$$

Denotando por Y e y os desvios dos logaritmos em relação às suas médias, teremos $Y = Y_o + y_1 + y_2 \ldots + y_n$

Como se trata de choques erráticos, o valor de m_k é pequeno em comparação com a unidade; dêste modo, o valor absoluto de log $(1+m_k)$ e o de y_k também serão pequenos em comparação à unidade. A variância de Y é, pela propriedade aditiva que possui, a soma das variâncias de $y_1, y_2, \ldots y_n$ para n suficientemente grande, podemos admitir que seja igual ou superior à unidade, contanto que σ_{yk} não caia abaixo de certo nível para $k \rightarrow \infty$. Dêste modo, y_k é pequeno comparado com o desvio padrão de Y, e, de conformidade com o teorema de *Laplace-Liaponouff*, Y tende para a distribuição normal quando $n \rightarrow \infty$.

Ainda mais, se n é suficientemente grande para que a variância de $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ seja grande em face da de Y_o, então a distribuição de Y aproxima-se da normalidade. Isto é, qualquer que seja a distribuição de Y_o na época inicial, com o decorrer do tempo essa distribuição tende para a forma normal.

Observa *Kalecki* (13), contudo, que as condições implícitas na argumentação acima afastam-se da realidade. Com efeito, a normalização da distribuição implica que a variância do logaritmo da variável cresça contìnuamente; e, em vários fenômenos econômicos, como a distribuição de rendas, essa tendência não se revela. Também é de

(11) Idem, ibid., pág. 75.

(12) *Kalecki, M.*, "On the Gibrat Distribution", "Econometrica" (1945), pág. 161.

(13) Idem, ibid., pág. 166.

supor-se que nas alterações da variância dos logaritmos coparticipem, em larga escala, as fôrças *econômicas*. Por conseguinte, a variância de Y está, parcial ou totalmente, sujeita a vínculos, e os efeitos dos choques não são independentes dos valores da variável Y que os suporta.

Kalecki mostra em seguida que, se a variância de Y permanece constante, ou se varia de modo que suas alterações sejam da mesma ordem de grandeza das de y, então existe uma correlação negativa entre Y e y; e admite a de natureza linear, expressa pela regressão $y = -\beta Y + z$, em que β é constante e z é independente de Y. Nessas condições, a distribuição de Y também tende a normalizar-se.

De um modo geral, podemos considerar uma qualquer função U de Y tal que o acréscimo u da mesma para um acréscimo y de Y seja negativamente correlacionado com U, isto é, $u = -\lambda u - v$, sendo λ constante e v independente de U. Então, sujeita a uma longa série de choques, U tende, nas condições enunciadas, para a normalidade.

Sendo Y os desvios logarítmicos, $Y = \log \frac{x}{G}$, onde G é a média geométrica de x, teremos $U = f(Y) = f\left(\frac{x}{G}\right)$.

Segue-se que, pela ação de choques erráticos, tende para a forma normal a distribuição da variável $f\left(\frac{x}{G}\right)$. Se $f\left(\frac{x}{G}\right) = \frac{x}{G}$ recai-se no caso inicial.

3.8 — *Generalização de* Fréchet.

Referindo-se aos esquemas probabilitários sugeridas para interpretar as distribuições de rendas, assinala *Fréchet*(14) que têm sido construídos *ex-post*, para justificar alguma das fórmulas já propostas; e cuida de tratá-los sem a idéia de uma lei preconcebida, mas procurando apenas refletir a realidade dos fatos.

Retomemos a expressão binomial de $p(t)$, dada pela equação (3.2). É evidente que a hipótese de *Pareto*, de que a renda dos indivíduos fôsse proporcional ao número de tiragens, ou seja $x = t$, não se conforma com a realidade. A observação corrente mostra que uma pessoa com certos recursos tem maiores probabilidades de aumentá-los que outra de condições mais modestas. É pois natural admitir que as últi-

(14) *Fréchet, M.*, "Nouveaux essais d'explication de la répartition des revenus", "Rev. Inst. Internat. Stat." (1945), pág. 16.

mas tiragens contribuem mais para o aumento da fortuna do indivíduo do que as primeiras, ou seja, que a renda x correspondente a t tiragens do mesmo nome é mais que proporcional a t. Noutros têrmos, x deve ser uma função de t crescendo mais ràpidamente que uma função linear.

Sabe-se que, quando ν é grande, a lei binominal é representada aproximadamente pela lei gaussiana, de modo que, pondo

$$\xi = \frac{t - pr}{\sqrt{2\,\nu\, pq}}\,\frac{tN - \nu}{\sqrt{2(N-1)\nu}}$$

temos

$$p\,(t) \cong \frac{N}{\sqrt{2(N-1)\pi\nu}}\, e^{-\xi^2}$$

Como em geral as coletividades contêm uma grande massa de indivíduos, podemos substituir $N-1$ pela sua parte principal N, donde

$$\xi = \frac{t\,N - \nu}{\sqrt{2N\nu}}$$

e portanto

$$n_x = \sqrt{\frac{N^3}{2\,\pi\nu}}\, e^{\xi^2}$$

As vêzes é preferível utilizar a distribuição integral. O número de indivíduos com renda igual ou superior a x, a que corresponde o valor t, é dado por

$$N_x \cong \sqrt{\frac{N^3}{2\pi\nu}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(\tau N - \nu)^2}{2N\nu}}\, d\,\tau$$

ou ainda, pondo $\lambda = \dfrac{\tau N - \nu}{2N\nu}$

$$N_x \cong \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_{x\,\frac{\tau N - \nu}{2N\nu}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda$$

Definindo $\Psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda = \dfrac{1}{2}\left[\, 1 - \theta(x) \,\right]$

tem-se finalmente

$$N_x \cong N\,\Psi\left(\frac{t\,N - \nu}{\sqrt{2N\nu}}\right) \cong N\,\Psi\left[\sqrt{\frac{N}{2\nu}}\left(t - \frac{\nu}{N}\right)\right] \qquad (3.2)$$

Mas, o que importa não é conhecer a variação de n_x ou de N_x em função de t, mas sim de x, e para tal devemos estabelecer prèviamente a relação analítica que liga as variáveis x e t, isto é, fixar a forma da função $x=f(t)$. Como vimos, é plausível supor que a conjunção de um grande número de causas favoráveis determine um lucro que cresça mais ràpidamente que o seu número. Um dos modos simples de satisfazer essa condição é admitir que o lucro cresce em progressão geométrica quando o número de causas cresce em progressão aritmética, ou que ao menos tal aconteça a partir de um mínimo de renda necessária à subsistência. Então, será $x-x_o=e^{At+B}$, ou seja $t=a'\log(x-x_o)+b$, e, substituindo na expressão (3.12), vem $N_x \cong N\Psi(z)$ com $Z = \sqrt{\frac{N}{2\nu}}\left((a'\log(x-x_o)+b'-\frac{\nu}{N}\right)$. Recaímos, assim, na lei de distribuição de *Kapteyn-Gibrat.*

É claro que se poderão obter outras leis de distribuição, admitindo relações funcionais apropriadas entre x e t. Com efeito, se a expressão analítica de N_x fôr $N_x=Ng(x)$, ela corresponderá à relação

$$g(x) = \Psi\left[\sqrt{\frac{N}{2\nu}}\left(- \frac{\nu}{N}\right)\right] \tag{3.13}$$

onde g e Ψ são duas funções não crescentes e ≥ 0. Mas nem sempre se encontrará uma relação simples, nem de significação apropriada.

Assim, para a lei generalizada de *Pareto*, essa relação é de forma

$$A\,(x-x_o)^{-\alpha} \cong N\Psi\left[\sqrt{\frac{N}{2\nu}}\left(t - \frac{\nu}{N}\right)\right]$$

donde

$$x = x_o + \left[\frac{A}{N\Psi\left(\sqrt{\frac{N}{3\nu}}\left(t - \frac{\nu}{N}\right)\right)}\right]^{1/\alpha}$$

Mesmo admitindo o valor assintótico de $\Psi(\xi) \cong \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2}$, a relação entre x e t, para grandes valores desta última variável será da forma

$$x \cong x_o + B\left(t - \frac{\nu}{N}\right)^{1/\alpha} e^{-\frac{N}{2\nu\alpha}\left(t-\frac{N}{\nu}\right)^2}$$

sendo B uma constante positiva.

3.9 — *Análise das causas da repartição das rendas.*

Uma explicação mais racional das leis de distribuição das rendas obter-se-ia partindo das peculiaridades que caracterizam cada um dos membros da coletividade (aptidões mentais e manuais, caráter, estado social dos pais, etc.). Uma hipótese simples seria admitir que a renda de cada indivíduo seja perfeitamente determinada pelo número de características de que é dotado. Mas essa hipótese afasta-se da realidade, e será preferível supor que tais particularidades só determinam a probabilidade do indivíduo ser incluído numa dada classe de rendimento.

Uma exposição dêsse método foi feita por *Fréchet* (15), que a aplicou à distribuição de salários dos membros do ensino público francês, concluindo que a respectiva distribuição não se afasta muito da forma paretiana.

Outro estudo foi realizado por *Rhodes* (16), que supõe a população distribuída por grupos que possuem um, dois, três, ..."talentos" ou qualidades propícias à aquisição da renda. Admite que o número de indivíduos em cada um dêsses grupos diminui progressivamente, e que a renda média de cada grupo é inferior à do grupo seguinte Embora as pessoas em cada grupo possuam o mesmo número de ta. lentos, as suas rendas são variáveis, e se caracterizam por uma certa distribuição.

Supondo tal distribuição de forma normal, e que o coeficiente de variação permanece constante para os diversos grupos, *Rhodes* mostra que a distribuição global das rendas obedece à lei de *Pareto.* E mais, que a constante α é dada pela razão de dois fatôres $\log b/\log t$. Os grupos, em que se reparte a coletividade, caracterizam-se pela possessão de vários talentos, que são utilizados para a formação do dividendo nacional; e a retribuição pelo uso dêsses talentos constitui a quota individual nesse dividendo. Ora, o fator b indica a maneira como os membros da coletividade agrupam-se em consonância com os talentos que possuem; o fator t indica de que modo êsses grupos são, em média, remunerados. Seria, portanto, b um fator social e t um fator econômico.

---

(15) Idem, ibid., pág. 20.

(16) *Rhodes, E. C.*, "The Pareto Distribution of Incomes", "Economica", 1944, pág. 1.

Dêste modo, a desigualdade da distribuição, definida por $\alpha = \frac{\log b}{\log t}$, é devida tanto a fatôres sociais como econômicos. É de se presumir que êsses fatôres estejam relacionados entre si; isto é, para uma determinada população, a grandeza de b determina t, e vice-versa.

Capítulo IV

A MEDIDA DA DESIGUALDADE

4.1 — *A medida da desigualdade.*

Tão importante quanto a determinação da *forma* da distribuição de rendas é a de um índice sinalético, capaz de sumariar os aspectos relevantes da mesma, e que seja a tradução númerica do conceito econômico de desigualdade.

Diversas têm sido as medidas propostas com êsse objetivo, as quais se podem classificar do seguinte modo:

a) medidas baseadas na expressão analítica da distribuição, e, por conseguinte, dependentes do grau de aderência (*goodness of fit*) da função de freqüência aos dados empíricos;

b) medidas do tipo de desvio médio, que envolvem a média dos desvios em relação a um valor central;

c) medidas do tipo de diferença média, em que a média se relaciona às diferenças entre cada um dos pares de valores que se podem formar com os elementos da distribuição;

d) medidas baseadas em critérios teóricos atinentes à equivalência em utilidade das rendas individuais.

4.2 — *O coeficiente α.*

Para chegar ao conceito de desigualdade na distribuição das rendas, *Pareto* parte do caso ideal da equidistribuição. "On peut se rapprocher de cet état — diz — de deux manières essentiellement différentes: on s'en rapproche, aussi bien si les riches deviennet pauvres que si les pauvres deviennent riches" (1).

---

(1) *Pareto*, "Cours", pág. 318.

E claro que a primeira solução não corresponde ao ideal social, eassim *Pareto* conclui que a desigualdade decresce quando o número de "pobres" diminui relativamente ao número de "ricos". "En général, lorsque le nombre des personnes ayant un revenu inférieur à x *diminue* par rapport au nombres des personnes ayant an revenu supérieur à x, nous dirons que l'inégalité des revenus diminue" (2).

Considerando-se o número de indivíduos com renda superior respectivamente a x e h $(h<x)$, e pondo $U_x = \frac{Nx}{Nh}$, vê-se que a desigualdade diminui quando U_x cresce. Substituindo N_x e N_h pelos valores dados pela equação paretiana, temos

$$U_x = \left(\frac{h}{x}\right)^{\alpha} \tag{4.1}$$

Como $h<x$, segue-se que U_x varia inversamente com α, ou seja, a desigualdade aumenta ou diminui com α.

Anàlogamente, para a lei de segunda aproximação, temos

$$U_x = \left(\frac{h+a}{x+a}\right)^{\alpha}$$

e U_x decrescerá quando α crescer. Também aqui a desigualdade aumenta ou diminui com α.

4.3 — *O teorema de* Pareto.

Em decorrência dessa definição da desigualdade, *Pareto* formulou dois teoremas célebres. O que se refere mais diretamente à conceituação de desigualdade reza que: se a renda mínima h permanece constante, a diminuição geral da desigualdade das rendas só pode ocorrer se o total das rendas crescer mais ràpidamente que a população, ou seja, se a renda média crescer (3).

---

(2) Idem, ibid., pág. 320. No original está "augmente", o que foi corrigido no "Manuel", pág. 390. Aí também se esclarece que sua proposição deve ser interpretada como se se tratasse de "inegalité *de la proportion* des revenus".

(3) Idem, ibid., pág. 321. O outro teorema afirma que um aumento da renda mínima só pode se produzir (o grau de desiguladade permanecendo invariável) se a renda média aumentar. *D'Addario* ("Intorno alla validità dei due teoremi paretiani sulla dinamica distributiva", Roma, 1934; *Bresciani-Turroni*, "Pareto's Law and the Index of Inequality of Incomes", "Econometrica", 1939, pág. 109) mostrou que, aqui,

Com efeito, a renda média é definida no caso geral pela expressão (1.12), e derivando-a temos

$$dr = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,dh + \frac{1}{\alpha-1}\,da - \frac{h+a}{(\alpha-1)^2}\,d\alpha$$

Permanecendo h constante, será dh nulo, e como a diminuição da desigualdade se dá quando a cresce ou α decresce, dr crescerá então.

As conseqüências econômicas dessa proposição seriam da máxima importância. Ela afirmaria a solidariedade das classes sociais: o aumento da riqueza geral, que é de se esperar com o progresso técnico, atenuaria a desigualdade de sua repartição.

Infelizmente, a proposição é mera conseqüência da definição adotada. *Bortkiewicz* (4) assinalou mesmo que ela é independente da *forma* da lei de distribuição. Com efeito, denotemos por $P_1(x)$ e $P_2(x)$ o número relativo de pessoas com renda menor que x em duas distribuições supostas coincidentes nas extremidades, $P_1(h)=P_2(h)=0$ e $P_1(w)=$ $=P_2(w)=1$, e tais que, para os demais valores de x, se tenha $P_2(x)<$ $<P_1(x)$. A renda média é definida por $R=\int_h^\omega \frac{dP(x)}{dx}\,x\,dx$, que, integrada por partes, dá $r=h+\int_h^\omega \left\{1-P(x)\,dx\right\}$. É claro que, sendo $P_1(x)>P_2(x)$,será $r_1<r_2$.

4.4 — *Concordância de α om outras medidas.*

A improcedência do raciocínio de *Pareto* está em ter adotado uma definição inadequada da desigualdade. Sua proposição, na ver-

Pareto equivocou-se. De acôrdo com a sua definição, a desigualdade não depende apenas de α e a, mas também de h. Portanto, a invariabilidade do grau de concentração implica que α e h permanecem constantes na fórmula (4.1), ou α , h e a na fórmula seguinte. Mas, então, a renda média também não varia. As condições referidas por *Pareto* são incompatíveis.

As conclusões sociais dos teoremas paretianos têm sido exploradas largamente por vários autores, sem se aperceberem que elas dependem da particular definição de desigualdade adotada e só são válidas dentro do campo de observação da lei empírica. Mesmo um economista matemático do porte de *Barone* ("Principi di Economia Politica", ed. Bolonha, 1936, pág. 268; "Principi di Economia Finanziaria", ed. Bolonha, 1937, pág. 42) pôde iludir-se, e erguer um dos mais brilhantes capítulos de sua obra sôbre essa base falsa.

(4) *Von Bortkiewicz, L.*, "Die Disparitätsmasse der Einkommens Statistik", Haya, 1930, pág. 34.

dade, pode ser invertida; se o número de pobres decresce em face do número de ricos, êstes crescem em relação àqueles; isto é, a classe rica torna-se cada vez mais poderosa; a desigualdade acentua-se (5). O que *Pareto* fêz foi subentender uma *escala fixa* de réditos, quando a posição de cada renda na escala varia em consonância com o importe da renda média. Uma renda x, quando a renda média é r_1, é coisa muito diversa da mesma renda, numa escala em que a renda média seja r_2.

Como a observação corrente mostra a sociedade subdividida, *grosso modo*, na classe dos "ricos" e dos "pobres", é natural que se tome, como linha divisória entre ambos, a renda média. Daí surge uma nova medida da dessigualdade (6), que seria dada pela razão do número de indivíduos com renda acima da renda média para o número total de possuidores de renda. Nessas condições, a desigualdade diminui quando os indivíduos acima da média se tornam mais numerosos relativamente à população total.

Designando por N_m o número de indivíduos acima da média, teremos, no caso da lei de *Pareto* (com $\alpha > 1$ e $\omega = \infty$), que

$$\frac{N_m}{N} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha} \tag{4.2}$$

expressão que também é valida para a lei de segunda aproximação.

Vê-se que a desigualdade depende apenas de α; mais precisamente, que $\frac{N_m}{N}$ é uma função crescente de α. Noutros têrmos, a desigualdade diminui quando α cresce e aumenta quando α decresce, conclusão oposta à de *Pareto*.

Quando α varia entre 1,2 e 1,9, que são aproximadamente os ex-

---

(5) Já *Benini* ("Principi di Statistica Metodologica", Turim, 1906) e *Bresciani-Turroni* ("Di un indice misuratore della disuguaglianza nella distribuzione della ricchezza", Palermo 1910) haviam assinalado a necessidade de interpretar o coeficiente α no sentido inverso do de *Pareto*, isto é, como variando na razão inversa do aumento da desigualdade, interpretação essa que veio a ser confirmada pelas demais medidas referidas no texto.

(6) *Bresciani-Turroni* "On Pareto's Law", "Journ. Royal Stat. Soc.", 1937, pág. 428. *Amoroso* ("O índice de concentração das rendas segundo *Pareto*", "Rev. Bras. Estatística", Abr. 1948, pág. 158) considera a razão do número dos indivíduos que têm renda inferior e o número dos que têm renda igual ou superior à renda média.

tremos observados na prática, a razão $\frac{N_m}{N}$ varia de [11,6% a 24,2%. Para o valor médio de $\alpha = 1{,}5$, ela é de 19.2%.

Observemos que a fórmula (4.2) depende ùnicamente de α, e, portanto, nas distribuições obedecendo à lei paretiana, a proporção dos indivíduos é a mesma, quer se considere a série global, quer se eliminem as classes mais pobres (como se dá nas estatísticas fiscais).

Contudo, a repartição dos indivíduos é apenas um aspecto da questão; importa também considerar a repartição da renda que lhes cabe. Podemos, assim, obter outro índice de desigualdade comparando a soma das rendas auferidas pelos indivíduos acima da média, R_m, com a renda total R (7). Para a distribuição paretiana, será

$$\frac{R_m}{R} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \tag{4.3}$$

A percentagem da renda total também só depende de α, e segue a mesma lei da percentagem dos indivíduos, modificado apenas o expoente. Também se conclui que essa percentagem, na hipótese figurada, é a mesma para as distribuições truncadas que para a total.

Quando se trata da lei geral de *Pareto*, porém, essa razão tem uma expressão mais complexa (8)

$$\frac{R_m}{R} = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}} \frac{\alpha^2 h + a\,(2\alpha-1)}{\alpha h + a}$$

Logo, a percentagem da renda total depende também da renda mínima; mais exatamente, como em geral a é positivo, a percentagem decresce quando h cresce. Essa circunstância torna difícil o aproveitamento dêsse índice na comparação da desigualdade entre vários países, ou, num mesmo país, entre diferentes épocas, pois as estatísricas não cobrem a população total, mas excluem, de modo variável, as classes mais pobres.

(7) Idem, ibid., pág. 429. Essa medida foi primeiro introduzida por *Herzen* em 1900. *Moore* ("Définitions de l'inégalité des revenus et utilisation de la formule de Pareto", "Journ. Soc. Stat. Paris", 1943, pág. 233) sugere também tomar a razão da soma das rendas acima da renda *mediana*, possuída pelos indivíduos mais ricos, para a soma das rendas abaixo dêsse nível, possuída pelos mais pobres. Para a distribuição de *Pareto* (suposto $\omega = \infty$), êsse índice equivale a $\left[2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\right]^{-1}$

(8) Idem, ibidem, pág. 431.

Ainda outro índice de desigualdade resulta da comparação da renda média do sub-grupo de renda superior a x com a renda média do grupo total. E claro que, mantendo constante a razão $\frac{N_x}{N}$, a distribuição será tanto mais desigual quanto maior fôr a razão entre as rendas médias dos dois grupos. De acôrdo com a lei de *Pareto* temos, aplicando a fórmula (1.8), que

$$\frac{r_x}{r} = \frac{x}{h} = \sqrt[\alpha]{\frac{N}{N_x}} \tag{4.4}$$

Logo, quando α diminui, a desigualdade das rendas cresce. Também aqui obtém-se uma interpretação contrária à de *Pareto.*

Esse tipo de comparação tem sido usado por vários autores. Seja $\frac{N_x}{N} = p$ o número relativo de pessoas com rendas iguais ou superiores a x; conforme o valor de p, será x uma das separatrizes: percentil, decil ou quartil superior. É claro que o aumento da percentagem da renda total cabendo a $p\%$ dos indivíduos colocados no tôpo da distribuição é um indício do aumento da desigualdade. O *National Bureau for Economic Research* (9) estudou a concentração nos Estados Unidos baseando-se na percentagem da renda total auferida por 5% dos indivíduos de rendas mais altas; o *Temporary National Economic Committee* (10) apreciou as rendas de 1% dos indivíduos mais ricos, e mesmo percentagens menores (0,5%, 0,1% e 0,01%). Vigorando a lei de *Pareto* teríamos de um modo geral, $\frac{R_p}{R} = \sqrt[\alpha]{p}$, e essa razão diminui para valores crescentes de α.

4.5 — *O indice δ de* Gini.

O índice δ é, ao mesmo tempo, como vimos no § 1.8, um valor ligado à representação analítica da distribuição de rendas, e um índice de concentração, independente da forma dessa curva.

---

(9) National Bureau of Economic Research, "Income in the United States", vol. 2.° (1922).

(10) Temporary National Economic Committee, Mon. n.° 4: "Concentration and Composition of Individual Incomes" (1941).

Uma das vantagens da introdução dêsse índice foi mostrar que a estabilidade do valor de α, que *Pareto* vislumbrara, decorria apenas da pouca sensibilidade do mesmo.

Com efeito, da relação teórica entre os dois índices, constatamos que, dentro do campo de observação de *Pareto* (α variando entre 1,13 e 1,89), δ variava de 2,12 a 8,69. Ora, a diferenças relativamente pequenas no valor de δ correspondem grandes diferenças na distribuição das rendas (11). Para um dado valor δ, a fração $\frac{1}{S}$ da renda corresponde à fração $\frac{1}{S^{\delta}}$ dos indivíduos. A variação de δ entre 2 e 8 significa que a metade da renda total se concentra numa fração de contribuintes que varia de 1/4 a 1/256.

4.6 — *O coeficiente C de* Gibrat.

Para obter uma medida da desigualdade baseada na lei do efeito proporcional, *Gibrat* (12) observa que o coeficiente de variação, o desvio interquartílico e a razão entre o 3.° e 1.° quartis, calculados para uma distribuição obedecendo àquela lei, variam inversamente com o parâmetro a. Em conseqüência, adota para índice de desigualdade a expressão $C = \frac{100}{a}$.

A desigualdade cresce com o aumento dêsse valor. Porém, só no caso de $h=0$, constitui C um verdadeiro índice de concentração; no caso geral, $h \neq 0$, o valor de a também depende desse parâmetro (13).

Aliás, utilizando os resultados do § 2.3, podemos escrever

$$C = 100\sqrt{2}\,\sigma_{\log(x-h)}$$

O índice C tem, pois, a natureza de um desvio médio relativo, não da variável, mas do seu logaritmo. Como a transformação logarítmica atenua as flutuações da variável, C tem diminuta sensibilidade.

(11) *Gini*, "Memorie di Metodologia Statistica, pág. 31.

(12) *Gibrat*, "Les Inégalités Économiques", pág. 88.

(13) As conclusões contrárias de *Gibrat* (pág. 262; loc. cit.), decorrem de, em vez de dividir σ por M, $Q_3 - Q_1$ por Md, Q_3 por Q_1, ter dividido respectivamente por $M' = M - h$, $Md' = Md - h$, $Q_3 - h$ por $Q_1 - h$. Ora, dessas condições, o que se mede é a concentração, não da distribuição real, mas a dos réditos desfalcados de uma quantidade constante, vale dizer, êle efetua a medida sôbre uma distribuição hipotética que tivesse a concentração aumentada. O êrro foi assinalado por *D'Addario* ("Intorna ad uma curva di repartizione", cit., pág. 30), que dá as fórmulas exatas.

Utilizando a fórmula 2.10, teriamos também

$$C = 200 \sqrt{\log \frac{r-h}{p-h}}$$

Ora, a desigualdade será tão mais pronunciada quanto maior fôr a renda média relativamente à renda provável. A razão $\frac{r}{p}$, ou, generalizando, $\frac{r-h}{p-h}$, é proporcional à concentração; e, por conseqüência, também o é o coeficiente C.

4.7 — *Desvio médio ou média de diferenças?*

Na medida da desigualdade com que um atributo se reparte entre os indivíduos, podemos utilizar dois critérios (14). Pelo primeiro, define-se a *desigualdade* como o desvio de cada um dos dados em questão de um único nível hipotético de igualdade, coincidente com uma das médias dos próprios dados. Em geral, essa média é a aritmética, porque é uma função simétrica de todos os dados da série, e porque representa o caso ideal da equidistribuição da soma dos atributos. Pelo segundo, define-se a desigualdade como o desvio de cada um dos elementos sob exame de cada um dos restantes. Dêste modo, elimina-se a arbitrariedade na escolha do nível de referência. As medidas baseadas no primeiro critério são do tipo do *desvio médio;* as do segundo, do tipo da *diferença média.*

O conceito, porém, que se tem em vista nas aplicações econômicas é um pouco mais particularizado que o conceito de variabilidade em geral. Dizer que o caráter global, expresso pela soma Σx_i, é distribuído pouco uniformemente entre os n elementos x_i, equivale a dizer que essa soma está, na maior parte, concentrada em poucos dêsses elementos. Os índices de variabilidade podem, assim, ser utilizados como medida da *concentração* (15).

Diversas medidas de variabilidade têm sido sugeridas dentro dos grupos citados. Para a análise das distribuições de rendas exige-se,

---

(14) *Mortara, G.*, "Misure ed indici delle disuguaglianze statistiche", — "Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano", vol. 8, 1934, pág. 83.

(15) *Young* estabelece a distinção entre os dois conceitos; "concentração" significaria desigualdade "indevida ou excessiva".

porém, que elas satisfaçam certos critérios a *priori* (16). Primeiramente, elas devem ser independentes do número de indivíduos abrangidos na distribuição, e, depois, devem ser independentes da unidade em que a renda, ou a riqueza, é expressa. Essa última condição equivale a dizer que adições proporcionais às rendas devem deixar a desigualdade inalterada. É claro que êsses critérios eliminam tôdas as medidas de variabilidade absoluta, devendo-se considerar apenas as de variabilidade relativa (17).

Confrontemos, pois, as seguintes medidas:

1) S = desvio médio relativo, referido à média aritmética:

2) V = coeficiente de variação pearsoniana;

3) Δ = diferença média relativa, sem repetições, referida à média aritmética (18).

As medidas 1) e 2) pertencem ao primeiro grupo, a 3) ao segundo. Note-se que, quando elevamos os desvios ao quadrado para obter índices com V, a diferença entre os dois critérios é de somenos importância, pois os coeficientes empregando diferenças são múltiplos dos correspondentes coeficientes empregando desvios (19).

Para a escolha entre êsses índices, faz-se mister introduzir critérios suplementares. Um dêles é o chamado *principio das transferências*. Estabelecida a graduatória, em sentido crescente, dos valores do

---

(16) Referimo-nos a medidas de variabilidade traduzidas num único coeficiente; afastamos assim os processos, muito utilizados nos primórdios dos estudos sôbre a renda, de comparar os números proporcionais de indivíduos com rendas de diferentes categorias (*Leroy-Beaulieu, Schmoller*, etc., ou suas variantes: *Wolf, Kiaer*, etc.).

(17) As medidas de variabilidade relativa obedecem ao princípio de acréscimos proporcionais só formalmente. Se procurarmos ligar as variações na repartição da renda às variações do bem estar econômico, o princípio não se verifica, pelo menos para as duas medidas referidas no § 4.10, como mostra *Dalton* "The Inequality of Incomes", Londres, 1935, Apend., pág. 10).

(18) A *diferença média* entre n quantidades foi instituída por *Gini* ("Variabilità e Mutabilità". Bolonha, 1912, pág. 20, e tem por expressão $\Delta = \frac{2}{n(n-1)}$ $\Sigma(n+1-2_i)\ (x_{n-1+} - x_i)$ o somatório estendendo-se de $i=1$ a $i = \frac{n+1}{2}$

(19) Assim, designando por Δ_2 a diferença quadrática média, *Gini* "Variabilità e Mutabilità", pág. 37) mostra que $\Delta_2 = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\,\sigma$.

atributo x_i, se de cada elemento $x_i \leq x_j$ subtrairmos uma quantidade constante ϵ (sendo $\epsilon < 0$), transferindo-a a x_i, isto é, se a x_i e x_j substituirmos as grandezas $x_i - \epsilon$ e $x_j + \epsilon$, é óbvio que a concentração aumenta, e portanto o índice deve acusá-lo.

Por outro lado, a concentração será máxima quando, entre os n indivíduos em questão, só o último possui a totalidade do caráter considerado. A graduatória será 0, 0, 0, ..., x_n. O índice deverá, então, atingir o seu valor máximo.

Examinemos, com referência a êsse critério, o desvio médio relativo $S = \dfrac{\Sigma|x-M|}{M}$. Êle é sensível às transferências de x_i a $x_j \geq x_i$ sòmente se M cai no intervalo $(x_i - \epsilon, x_j + \epsilon)$, porque, em tal caso, o numerador aumenta de $2\,\epsilon$ enquanto que o denominador não varia. No caso de concentração máxima, o seu valor é $\dfrac{2(n-1)}{n}$.

Sob o ponto de vista do critério aludido, êste índice é imperfeito. Mas êle o satisfaz se interpretarmos o critério no sentido das transferências se realizarem dos indivíduos mais ricos aos mais pobres, de modo a obter a equipartição da renda. Na realidade, S corresponde ao duplo da quantidade, ajustada segundo o número de casos, do caráter possuído em excesso, relativamente à distribuição uniforme, pelos elementos em que é superior à média.

O desvio médio também tem sido empregado sob outra forma (20). A metade de S equivale à diferença entre a percentagem de renda acima da média $\dfrac{R_m}{R}$ e a percentagem de indivíduos $\dfrac{N_m}{N}$ que a possuem; essa diferença é chamada "índice de desigualdade D".

Para as leis paretianas de 1.º e 2.º aproximação, temos, de acôrdo com o § 4.4,

$$D = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha} \qquad \text{e} \qquad D = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \frac{h+a}{\alpha h+a}$$

O índice D oscila entre 0, no caso de equidistribuição, e 1, para o máximo de desigualdade.

---

(20) *Bresciani-Turroni* (*Pareto*'s Law and the Index of Inequality of Incomes", cit., pág. 110, nota.

Quanto ao coeficiente de variação, $V = \frac{\sigma}{M}$, observe-se que

$$(x_i - \epsilon)^2 + (x_j + \epsilon)^2 - (x_i^2 + x_j^2) = 2\epsilon\,(x_j - x_i) + 2\epsilon^2,$$

e, como $x_i \leq x_j$ e $\epsilon > 0$, segue-se que as transferências fazem aumentar o momento de segunda ordem. Como, por outro lado, a média aritmética permanece imutável, V crescerá. O seu valor máximo é $\sqrt{n-1}$.

Com referência à diferença média, vamos apreciá-la sob a forma de outro índice, a razão de concentração, que a ela se liga diretamente.

4.8 — *A razão da concentração.*

Consideremos a graduatória, em sentido crescente, das quantidades x_i do atributo possuído por n indivíduos, e seja $Q_i = \Sigma x_i$ a soma dos atributos até o elemento de ordem i. As razões $q_i = \frac{Q_i}{Q_n}$ e $p_i = \frac{i}{n}$ nos dão, a primeira a percentagem do atributo possuído pelos primeiros indivíduos sôbre o total correspondente à coletividade, a segunda a percentagem de indivíduos que a possuem. A concentração do atributo será tanto maior quanto o forem as desigualdades $p_i > q_i$. Subsistem $n-1$ dessas desigualdades, pois $p_n = q_n = 1$, e podemos considerar a concentração como proporcional ao somatório $\sum_1^{n-1} (p_i - q_i)$.

Para ter um índice que seja independente da unidade de medida, e atinja o valor máximo igual à unidade, *Gini* (21) adota como *razão de concentração* a expressão

$$\rho = \frac{\sum_1^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_1^{n-1} p_i}$$

(21) *Gini* ("Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei carateri", Veneza, 1914, pág. 1207), para as distribuições de freqüência dá a fórmula seguinte $\rho = \frac{\Sigma\, k\,(P_k + P_{k-1} - 1)\,R_k}{(n-1)\,R} - 1$. Para aproveitar a tabelação dos dados em sentido cumulativo decrescente, necessária ao cálculo da equação de *Pareto*, transformados essa fórmula, nas aplicações feitas no capítulo V, em $\rho = \frac{n}{(n-1)} - \frac{\Sigma k (X_{k-1} + X_k) R_k}{(n-1)\,R}$.

Demonstra-se (22) que êsse coeficiente é a metade da diferença média relativa, $\rho = \frac{\Delta}{2}$. O valor máximo de ρ é a unidade, que corresponde a $q_1 = q_2 = ... = q_{n-1} = 0$; então, todo o atributo se concentra no n^{esimo} indivíduo. Transferindo uma quantidade ϵ de x_i a x_j (com $i < j$), diminuem as razões $q_j, q_{i+1}, ..., q_{j-1}$, e permanecem invariáveis as razões $q_j, q_{j+1}, ..., q_{n-1}$; o índice ρ aumenta, isto é, êle satisfaz o princípio das transferências.

Passando ao contínuo, seja $f(x)$ a função de distribuição do atributo x. Então, será

$$p_t = \frac{1}{N}\int_0^t f(x)\,dx, \quad q_t = \frac{1}{R}\int_0^t x\,f(x)\,dx$$

com t variando entre 0 e 1. Essas duas equações constituem um sistema paramétrico, que possibilita a determinação da relação funcional porventura existente entre as variáveis q e p.

Tracemos a curva $L(x)$, lugar geométrico dos pontos de coordenadas (p_t, q_t). É a chamada *curva de Lorenz*, que a introduziu na Estatística precisamente para o estudo das distribuições de renda (23). A reta $q_t = p_t$ denomina-se *linha de equidistribuição*, porque significa a igual repartição do atributo entre os indivíduos. A área compreendida entre esta e a curva de *Lorenz* denomina-se *área de concentração*. No caso de concentraãço máxima a curva de *Lorenz* acomapnha o eixo das abcissas até o valor $p_n = 1$, e completa-se com a ordenada q_n; isto é, a área de concentração máxima é a área triangular assim determinada.

A razão de concentração é definida por

$$\rho = \frac{\int_0^1 (p-q)\,dp}{\int_0^1 p\,dp}$$

sendo, pois, a razão da área de concentração para a área de concentração máxima. Podemos escrever ainda $\rho = 2\int_0^1 (p+q)\,dp$, isto é, ela é o dôbro da área de concentração.

(22) *Gini*, "Sulla misura della concentrazione...", cit.

(23) *Lorenz, M. O.*, "Methodes of measuring the concentration of wealth" "Journ. Amer. Stat. Assoc."; 1905.

Calculemos a razão de concentração correspondente à lei de *Pareto*. Temos $p_t = 1 - \frac{N_t}{N}$, $q_t = 1 - \frac{R_t}{R}$. Ora, vimos que

$$\frac{N_t}{N} = \left(\frac{R_t}{R}\right)^{\delta}$$

donde se conclui $q_t = 1-(1-p_t)^{1/\delta}$. Como $\int_0^1 [1-(1-p)^{1/\delta}]\, dp = \frac{1}{1+\delta}$,

obtém-se

$$\rho = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\delta}\right] = \frac{\delta-1}{\delta+1} = \frac{1}{2\alpha-1}$$

Como ρ varia entre 0 e 1, δ varia entre 1 e ∞. Para o valor paretiano de $\alpha = 1{,}5$, temos $\delta = 3$ e $\rho = 1/2$.

4.9 — *A renda equatorial.*

Diversas medidas têm sido propostas na mensuração da desigualdade econômica, envolvendo diferenças ou razões entre valores sinaléticos da distribuição. Algumas dessas fórmulas introduzem a chamada *renda equatorial*, que é a renda que, numa distribuição cumulativa, divide a renda global em duas partes iguais.

Gumbel (24) adota a fórmula $1 - 2\,\frac{N'}{N}$, em que N' é o número de indivíduos da coletividade que têm renda superior à equatorial.

Mendershausen (25) sugere o índice β, que é a razão da diferença entre a renda equatorial e a renda mediana para a renda equatorial, $\beta = \frac{E - M_d}{E}$. Êsse índice tem tido larga aceitação, porque reflete tão satisfatòriamente as características da distribuição como a razão de concentração, e é de cálculo mais expedito.

Essa medida varia entre 0 e 1. No caso de equidistribuição, as duas medianas coincidem, e $\beta = 0$; se $\beta = 1$, a mediana deve-se anular,

(24) *Gumbel*, "Ein Mass der Konzentration bei pekunieren Verteilungen", "Archiv f. Sozialwiss". 1927.

(25) *Mendershausen, H.*, "On the measurement of the degree of inequality of income distributions", "Report of Cowles Commission", 1939, p. 63.

isto é, ao menos 50% dos indivíduos não têm renda, e a renda global se reparte entre os restantes.

4.10 — *Medidas baseadas no bem-estar econômico.*

O quarto grupo de medidas da desigualdade compreende aquelas que presupõem uma relação funcional entre a grandeza da renda e o *bem-estar econômico* (*economic welfare*) dela derivante. Para estabelecer essa relação, admitem-se os seguintes postulados (26): a) o bem-estar econômico é uma grandeza aditiva; *b*) a relação entre a renda e o bem-estar é a mesma para todos os indivíduos; *c*) para cada indivíduo, o bem-estar marginal decresce quando a renda cresce. Nessas condições, o rateio de uma soma de rendimentos pelos membros da coletividade produz o máximo bem-estar para uma distribuição eqüitativa da renda. A desigualdade na distribuição será medida pela razão do bem-estar máximo, correspondente à eqüirrepartição, para o bem-estar efetivamente realizado. Essa razão é igual à unidade, no caso de repartição uniforme, e cresce com o aumento da desigualdade (27).

As medidas de desigualdade irão, pois, depender da relação funcional que se adote, de acôrdo com o item *c*), entre a renda e o bem-estar. Supondo-se, de conformidade com as idéias de *Daniel Bernoulli*, que acréscimos proporcionais à renda x, além do mínimo exigido para a subsistência, produzam acréscimos iguais do bem-estar econômico u, teremos $du = \frac{dx}{x}$, ou, integrando, $u = \log x + c$, sendo c uma constante.

No caso de eqüidistribuição, cada um dos indivíduos possui a mesma renda x_a, que corresponde à média aritmética. O bem-estar daí decorrente será $\Sigma \log x_i + nc = n\,(\log x_a + x)$. Para a distribuição real, o bem estar corresponderá a $\Sigma \log x_i + nc = n\,(\log x_g + c)$, sendo x_g a média geométrica das rendas. Por conseguinte, a medida da desigualdade será $\frac{\log x_a + c}{\log x_a + c}$ ou mais simplesmente

$$\frac{\log x_a}{\log x_g}$$

tendo-se admitido que, para $x = 1$, $u = 0$, e portanto $c = 0$.

---

(26) *Dalton, H.*, "The Inequality of Incomes", cit., Apend., pág. 3.

(27) *Dalton* observa que, para fazer corresponder o zero da escala à eqüidistribuição, pode-se tomar a razão referida menos a unidade.

A hipótese de *Bernoulli* conduz a uma taxa de crescimento do bem-estar excessivamente rápida para as grandes rendas. Por isso, *Dalton* (28) sugere uma segunda hipótese, de que os acréscimos do bem-estar variam na razão inversa do quadrado da renda, $du = \frac{dx}{x^2}$, donde $u = c - \frac{1}{x}$, sendo c uma constante.

Nessas condições, o bem-estar tende para um máximo quando $x \to \infty$; anula-se para $x = \frac{1}{c}$, e torna-se negativo para valores de $x < \frac{1}{c}$. O bem-estar atual e o correspondente à eqüipartição serão respectivamente $n\left(c - \frac{1}{x_h}\right)$ e $n\left(c - \frac{1}{x_a}\right)$, sendo x_h a média harmônica das rendas; e daí a medida da desigualdade

$$\frac{c - 1/x_a}{c - 1/x_h}$$

Essas expressões não têm tido aplicação prática e mesmo sua fundamentação teórica deixa muito a desejar. A utilidade (ofemilidade) é uma grandeza incomensurável, e, por isso, são precárias as tentativas de deduzir, pelo seu cálculo, as leis de distribuição das rendas.

(28) *Dalton*, loc. cit., pág. 4. A sugestão é originàriamente devida a *Cramer* (cf. *Marschall, A.*, "Principles of Economics", 8.ª ed., pág. 843).

Capítulo V

A DISTRIBUIÇÃO DAS RENDAS NO BRASIL

5.1 — *O impôsto de renda no Brasil.*

O impôsto de renda foi instituído no Brasil pela Lei n.º 4.625, de 1932, começando a ser cobrado no exercício de 1924. Era apenas um impôsto cedular, e só com a legislação de dezembro de 1925 adquiriu as características que, através várias reformas posteriores, ainda hoje conserva.

O impôsto incide sôbre as pessoas físicas (*individual income tax*) e as jurídicas (*corporation profits tax*). Estas últimas estão sujeitas a um impôsto proporcional sôbre os lucros apurados em balanço. Quanto às pessoas físicas, os seus rendimentos são subdivididos em diversos categorias (salários e vencimentos, exercício de profissões liberais, capitais imobiliários, etc.), cada uma sujeita a uma taxa proporcional específica.

A renda global do contribuiente, depois de deduzidas as quotas proporcionais do impôsto de renda, os juros de dívidas pessoais, prêmios de seguro de vida e contribuições a instituições filantrópicas, e, finalmente, os encargos de família (cônjuge e filhos menores), constitui a sua *renda líquida*, a qual fica sujeita à parte complementar e progressiva do impôsto. Ficam isentos de tributação aquêles cuja renda líquida não atinge certo mínimo.

5.2 — *As estatísticas do impôsto de renda.*

Apesar do longo período de arrecadação dêsse impôsto, mais de 4 lustros, os dados estatísticos sôbre a distribuição individual da renda são, entre nós, quase inexistentes. O Relatório de 1928 (1), publicou a distribuição referentes a Rio de Janeiro e São Paulo, naquele ano.

(1) *Souza Reis, F. T.*, "O impôsto de renda: Exercício de 1928", pág. 14.

O Relatório de 1942 (2) fornece as distribuições para o Distrito Federal, correspondentes aos anos de 1934 a 1942. A Divisão do Impôsto de Renda vem ùltimamente aperfeiçoando o seu aparelhamento estatístico, de modo que já dispõe de uma grande massa de informes, que breve serão dados à luz. Mas as falhas na apuração dos exercícios mais distantes parecem insanáveis; assim, para os rendimentos em conjunto do Brasil, parece que não se conseguirão dados anteriores a 1946.

Da aludida Divisão (3) obtivemos as distribuições do Brasil no período 1946-1948, e as do Distrito Federal e São Paulo no de 1944-1948 (tabelas 1 e 2). Como a arrecadação nessas duas unidades constitui a maior parte da arrecadação geral no Brasil (em 1948, 68% da renda líquida concentrava-se nas duas unidades mencionadas), as conclusões baseadas nas mesmas refletem bem a situação das demais unidades federativas.

TABELA 1

RENDAS DE PESSOAS FÍSICAS

BRASIL

Classes	1946		1947		1948	
	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)
24—	21.879	588.621	32.137	879.423	31.161	844.056
30—	51.577	2.172.240	76.433	3.210.140	76.657	3.203.641
60—	17.684	1.290.791	23.733	1.867.199	25.808	1.901.013
90—	8.934	924.364	12.483	1.297.342	12.247	1.267.712
120—	4.754	636.670	7.070	951.187	7.291	976.261
150—	4.571	788.308	6.717	1.156.215	6.665	1.153.499
200—	4.120	996.416	5.731	1.382 449	5.750	1.400.542
300—	1.844	635.542	2.457	846.836	2.480	854.689
400—	981	435.748	1.348	597.189	1.267	564.669
500—	595	326.488	766	416.599	734	400.153
600—	402	260.075	483	309.638	433	280.196
700—	506	410.234	765	631.824	627	515.565
1.000—	375	491.802	509	678.184	480	643.062
2.000—	61	144.384	116	277.156	78	180.670
3.000—	59	348.218	68	400.285	43	180.089
	118.342	10.449.901	170.816	14.901.666	171.821	14.365.817

(2) Divisão do Impôsto de Renda, "Relatório", 1942.

(3) Consignamos os nossos agradecimentos ao Dr. Augusto de Bulhões, então Diretor da Divisão do Impôsto de Renda, que obsequiosamente nos antecipou o acesso a êsses dados estatísticos.

TABELA 2

RENDAS DE PESSOAS FÍSICAS

DISTRITO FEDERAL

Classes	1944		1946		1947		1948	
	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)	Contribuintes	Renda (Cr$ 1.000)
12-	16.055	249.856	—	—	—	—	—	—
24-	9.698*	237.321*	8.228	220.929	12.207	327.750	10.785	291.156
30-	10.476	437.725	17.509	728.076	26.985	1.119.814	26.749	1.111.448
60-	3.483	254.647	5.689	414.387	8.085	589.221	8.090	589.765
90-	1.708	177.105	2.900	300.341	3.746	387.534	3.820	395.626
120-	1.041	139.474	1.587	212.411	2.182	292.568	2.278	305.253
150-	982	169.406	1.479	254.922	2.101	361.908	2.155	372.152
200-	1.034	252.394	1.433	346.722	1.799	435.863	1.776	434.251
300-	484	166.491	626	215.833	817	282.041	808	279.393
400-	250	112.073	334	147.594	445	197.388	405	179.842
500-	201	109.814	212	115.616	247	135.403	232	126.042
600-	88	57.059	153	99.242	166	107.585	152	98.227
700-	336	500.920	174	141.530	234	193.486	214	175.257
1000-	—	—	159	204.718	187	248.466	177	239.444
2000-	—	—	32	75.570	50	122.729	33	79.037
3000-	—	—	32	152.416	42	226.701	23	97.874
TOTAL	45.836	2.864.285	40.547	3.630.307	59.293	5.028.457	57.697	4.774.767
				SÃO PAULO				
12-	12.386	192.972	—	—	—	—	—	—
24-	8.293*	202.504*	6.402	172.978	9.262	253.489	10.231	277.736
30-	9.955	419.176	16.837	713.821	23.858	1.011.984	25.870	1.086.793
60-	3.816	278.673	6.202	453.547	8.601	643.225	9.105	666.414
90-	2.012	209.194	3.135	324.497	6.351	452.860	4.575	474.462
120-	1.115	149.333	1.644	220.091	2.480	332.019	2.582	345.952
150-	1.183	204.588	1.600	276.319	2.357	405.450	2.292	396.793
200-	1.195	290.629	1.448	350.434	2.046	491.096	2.116	516.818
300-	542	186.580	652	225.716	857	296.167	852	293.596
400-	298	133.176	335	149.086	498	217.648	437	194.549
500-	174	95.355	199	109.300	254	137.905	280	152.824
600-	101	65.254	128	82.924	138	88.046	152	98.797
700-	328	490.822	156	126.091	246	200.214	218	178.773
1000-	—	—	97	129.863	139	181.495	156	207.675
2000-	—	—	21	48.952	26	61.421	23	52.646
3000-	—	—	14	76.492	20	84.053	16	67.232
TOTAL	41.398	2.918.256	38.920	3.460.111	55.133	4.848.072	58.905	5.011.059

(*) Refere-se à classe 20-30.

Advirta-se que, entre nós, a tributação da renda é ainda um imperfeito indicador do movimento da Renda Nacional. Em 1946, por exemplo, esta orçava às voltas de 90 bilhões de cruzeiros (4), enquanto que a renda líquida apurada pelo impôsto de renda era de pouco mais de 10 bilhões, ou seja, apenas 11%.

Mas há outras circunstâncias que tornam as nossas estatísticas um instrumento imperfeito para a análise do processo econômico-

(4) United Nations, "Preliminary Memorandum on the Measurement of the National Income of Brazil", por *J. B. D. Derksen.*

-distributivo. É que, em vez de se referirem à renda *real* dos contribuintes, elas dizem respeito à sua renda *líquida*, conforme as definições regulamentares.

Ora, abatendo da renda global dos indivíduos prêmios de seguro de vida, contribuições filantrópicas, e, sobretudo, os encargos de família, o conceito de *renda* implícito em nossas estatísticas difere muito do de *renda econômica*, o "earning power" (5) que, na realidade, se pretende avaliar.

As deduções por encargos de família, por si só, provocam uma distorção da curva de rendimentos. Para uma família média, compreendendo o cônjuge e 4 filhos, elas podem eliminar da incidência do impôsto indivíduos até à terceira classe de rendas (6). A observação mostra que as famílias mais numerosas são as de menor rendimento; mas, "ad argumentandum", podemos admitir constante a distribuição por número de dependentes, dentro de cada classe de renda *real*. Isso equivaleria a abater, de todos os indivíduos, uma quota constante, e sabe-se que, então, *a concentração aumenta*. Nestas condições, os índices calculados sôbre as nossas distribuições dão idéia de uma maior concentração do que a efetiva.

Por outro lado, maior distorsão, e em sentido inverso, decorre do dispositivo legal que exclui os títulos ao portador do impôsto complementar progressivo, para sujeitá-lo a uma alíquota fixa arrecadada na fonte. É claro que serão os capitalistas de maior porte que procurarão se beneficiar dessa *evasão legal*, e daí uma aparência de menor desigualdade na distribuição das rendas do que a efetiva.

5.3 — *Renda média, mínima e máxima.*

O período abrangido pelas estatísticas em foco (1944-48) é de franco surto inflacionista e excepcional atividade de negócios em conseqüência da segunda guerra mundial. Era pois de se esperar uma elevação da renda média tributada, confirmada na tabela 3.

Para o Distrito Federal, elas abarcam ainda o fim da grande depressão, porquanto a recuperação no Brasil só veio a verificar-se de 1935 em diante. Há um aumento contínuo de rendas, que se torna

(5) Temporary National Economic Committee, "Concentration and Composition of Individual Incomes", pág. 9.

(6) A dedução aludida, de Cr$ 36,000, reduz uma renda de Cr$ 60.000 ao mínimo não tributável.

TABELA 3
RENDA MÉDIA
(Cr$ 1.000,00)

Anos	Brasil	D. Federal	S. Paulo
1948	83,6	82,8	85,1
1947	87,2	84,8	87,9
1946	88,3	89,4	88,9
1944	—	62,5	70,4
1942	—	51,1	—
1940	—	38,5	—
1938	—	38,3	—
1936	—	36,7	—
1934	—	33,3	—
1928	—	26,6	30,9

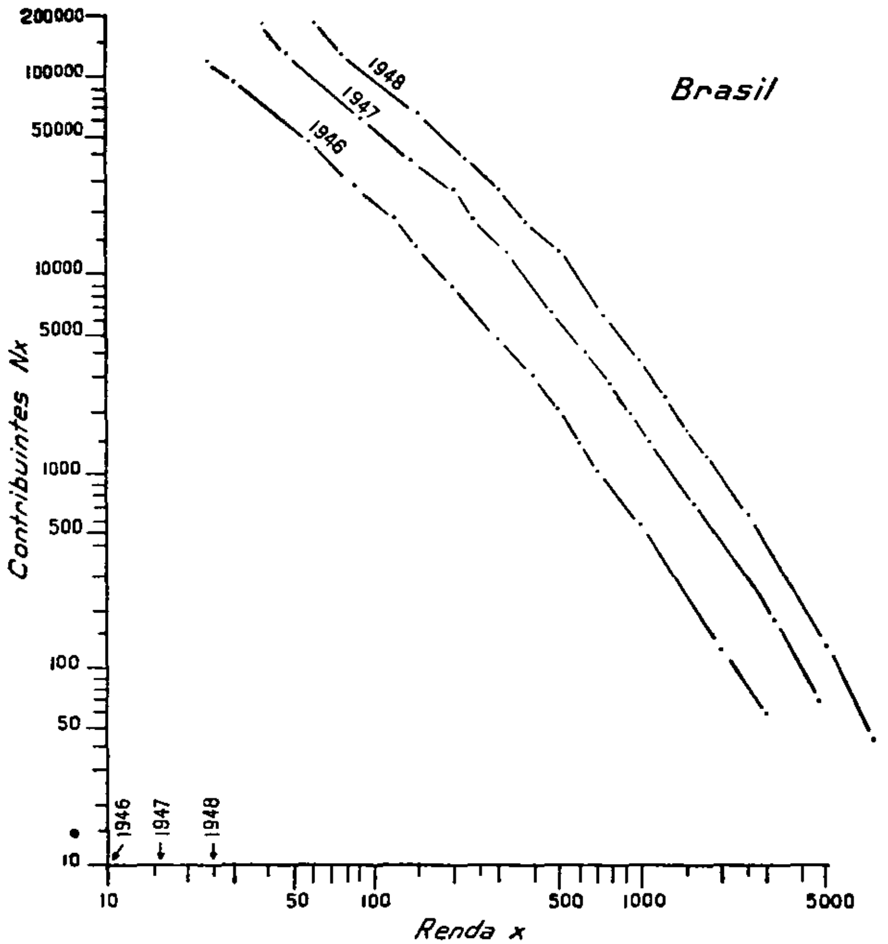

Figura 1

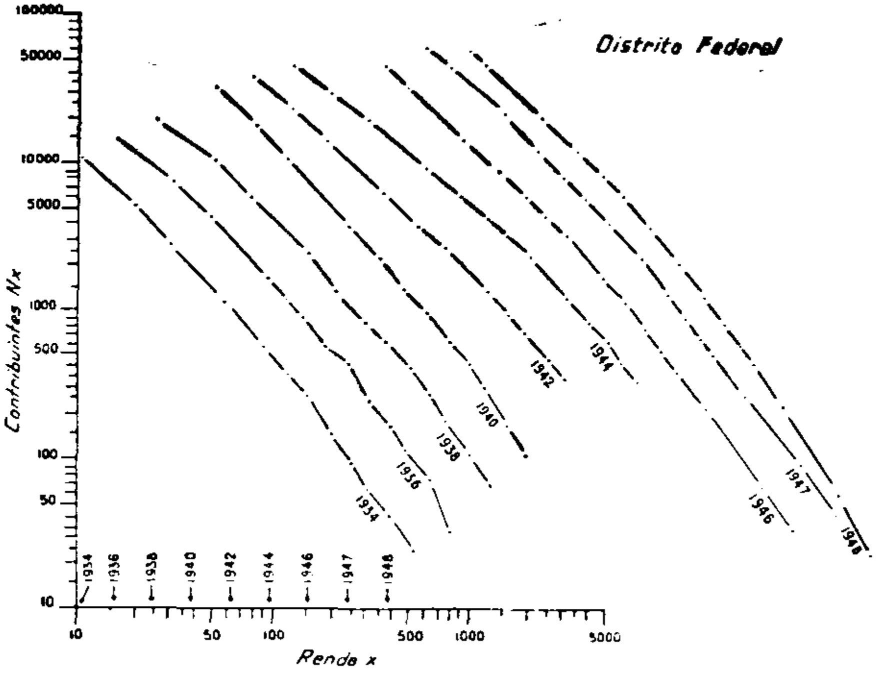

Figura 2

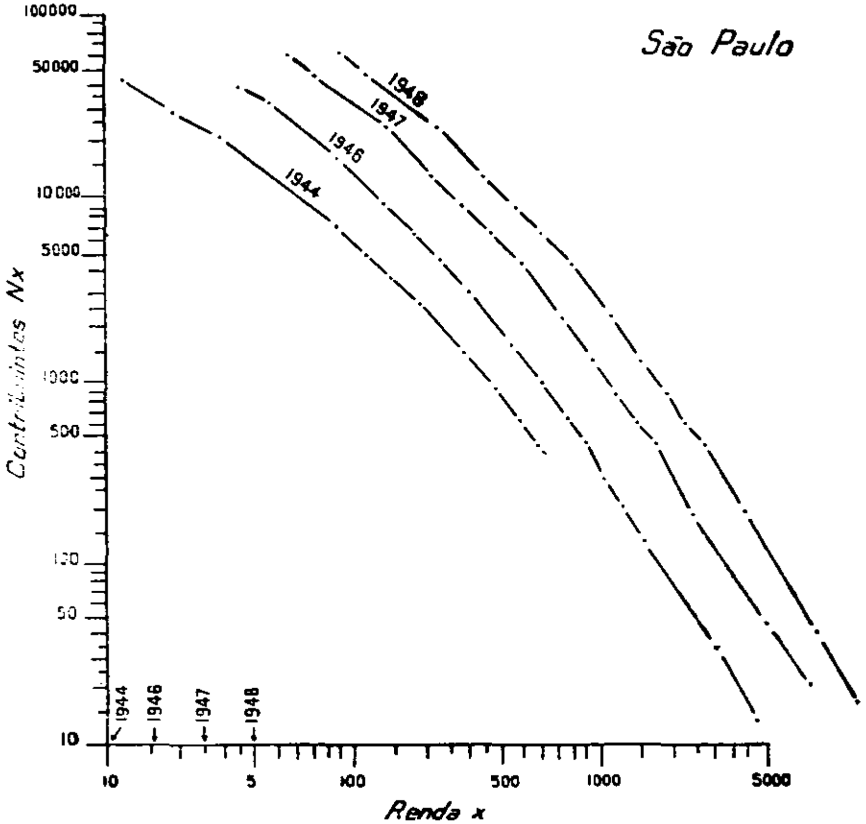

Figura 3

notável depois de 1944, sobretudo em decorrência do aumento do mínimo tributável. No período de 1946-48, nota-se um uniforme decréscimo da renda média, na União e nos dois Estados considerados, sendo que os valores daquela não diferem muito dos dêsses, como era de se esperar.

Os gráficos 1 a 3 (7) representam as anamorfoseadas logarítmicas das curvas de distribuição das rendas. Vê-se imediatamente que nenhuma delas obedece à lei de *Pareto*, que exigiria a representação me-

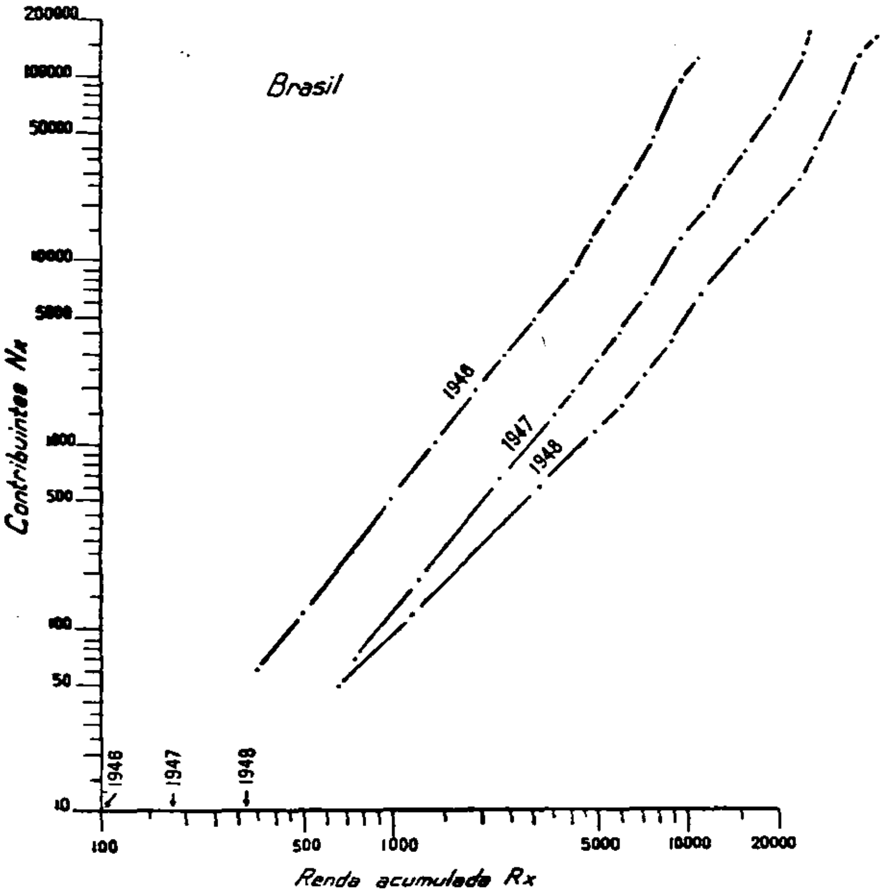

Figura 4

(7) Nos gráficos, a escala das abcissas se desloca de modo a coincidir a sua origem com o ponto assinalado para cada um dos anos sucessivamente.

diante uma reta. Há um evidente encurvamento para o eixo das abcissas, fato aliás já observado em outros países (8).

O gráfico do Distrito Federal, que abrange maior período, é ilustrativo em mostrar progressivo aumento do número dos contribuintes, quer na classe mínima, quer na máxima. O corte na extremidade superior, e extensão na inferior, que se observa de 1946 em diante, traduz a alteração do mínimo taxável, que de Cr$ 12.000 passou a Cr$ 24.000 e o desdobramento das classes superiores a Cr$ 500.000.

No gráfico 4 (7) traçamos, para o Brasil, as curvas de *Gini*. Há uma melhoria de retilinariedade, mas ainda não satisfatória. Por conseguinte, a equação de *Gini* não representa bem a distribuição de nossas rendas, embora se possa conservar como um índice de concentração, como vimos.

5.4 — *Indices de concentração para o Brasil.*

Para as distribuições em foco, calculamos os índices α de *Pareto* e δ de *Gini*, e ainda a razão de correlação ρ. Tais valores constam da

TABELA 4

ÍNDICES DE CONCENTRAÇÃO NO BRASIL

Anos	BRASIL					SÃO PAULO				
	α	α'	δ	ρ	c	α	α'	δ	ρ	c
1948	-1,685	-2,302	1,939	46,8	84,4	-1,697	-2,238	1,927	46,6	82,6
1947	-1,594	-2,116	2,156	49,5	88,4	-1,665	-2,125	1,965	47,0	83,3
1946	-1,585	-1,970	2,187	49,1	88,1	-1,659	-2,199	2,046	47,7	83,1
1944	—	—	—	—	—	-1,240	-1,731	2,592	59,4	93,0

	DISTRITO FEDERAL								
Anos	α	α'	δ	ρ	c	Anos	α	δ	ρ
1948	-1,602	-2,075	2,063	47,6	88,3	1940	-1,515	2,123	46,2
1947	-1,505	-1,753	2,354	49,9	91,4	1938	-1,467	2,226	48,8
1946	-1,484	-1,764	2,260	50,9	92,1	1936	-1,540	2,132	47,5
1944	-1,224	-1,506	2,700	59,3	96,8	1934	-1,576	2,100	45,3
1942	-1,266	—	2,776	55,6	—	1928	-1,486	2,363	46,9

(8) *Shirras, G. F.*, "The Pareto Law and the Distribution of Income", "Economic Journ", (1935), pág. 663; *Johnson, N. O.*, "The Pareto Law", "Rev. of Econ. Stat.", (1937), pág. 20.

tabela 4. Utilizamos o método de *Cauchy* para o cálculo de α e δ, e a fórmula indicada no cap. IV, nota 21, para ρ.

Em vista da insuficiência da representação pela lei simples de *Pareto,* calculamos também, por via gráfica, os parâmetros da lei de segunda aproximação.

As equações obtidas foram as seguintes:

Brasil	— 1946	$\log N_x = -1{,}970 \log (x+40) + 8{,}631$
	1947	$\log N_x = -2{,}116 \log (x+60) + 9{,}277$
	1948	$\log N_x = -2{,}302 \log (x+70) + 9{,}755$
D. Federal	— 1944	$\log N_x = -1{,}506 \log (x+20) + 6{,}887$
	1946	$\log N_x = -1{,}764 \log (x+30) + 7{,}646$
	1947	$\log N_x = -1{,}753 \log (x+25) + 7{,}724$
	1948	$\log N_x = -2{,}075 \log (x+50) + 8{,}620$

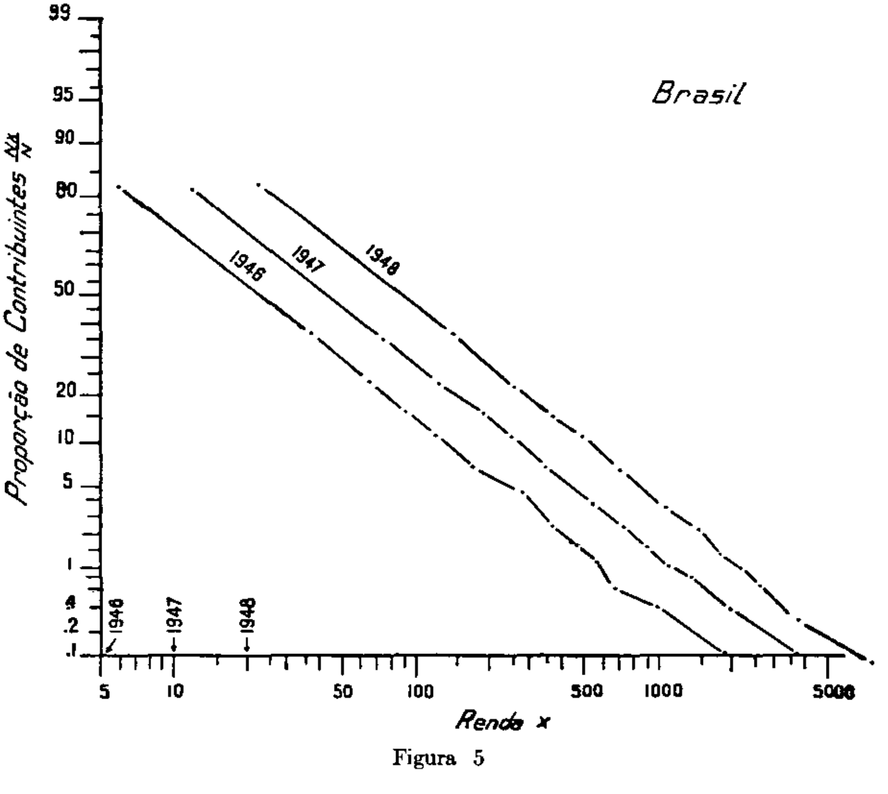

Figura 5

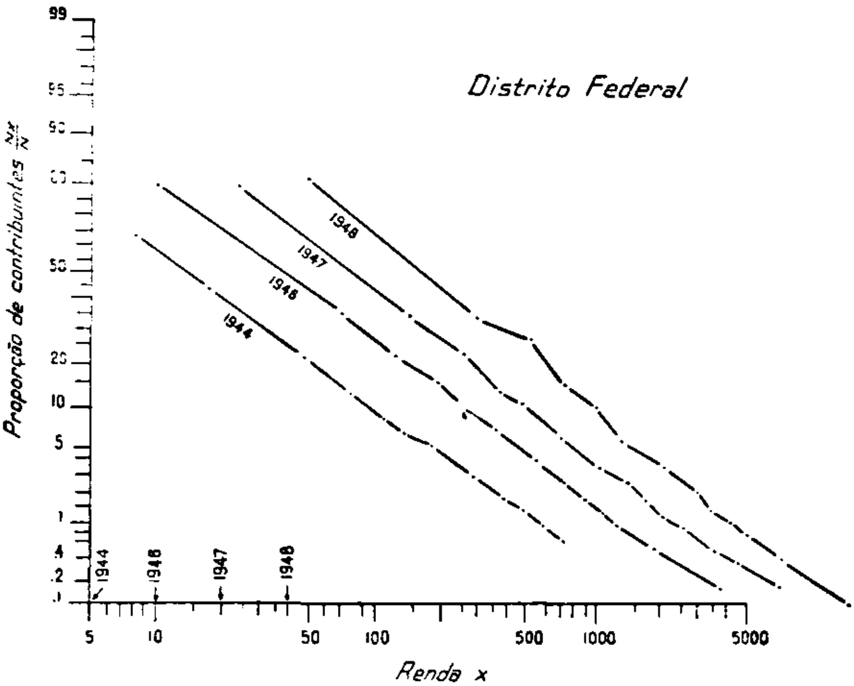

Figura 6

São Paulo — 1944	$\log N_x = -1{,}731 \log (x+40) + 7{,}510$
1946	$\log N_x = -2{,}199 \log (x+60) + 8{,}822$
1947	$\log N_x = -2{,}125 \log (x+50) + 8{,}701$
1948	$\log N_x = -2{,}238 \log (x+60) + 9{,}061$

Os coeficientes angulares dessas interpolatrizes, que representamos por α', figuram também na tabela 4. Embora a aderência dessas retas aos dados empíricos seja bem satisfatória, o coeficiente α' não constitui uma medida adequada da desigualdade, pois esta também depende dos outros parâmetros, que constam das equações acima (§ 4.4).

Um exame da tabela 4 revela, para o Brasil assim como o Distrito Federal e São Paulo, uma diminuição da desigualdade na repartição das rendas de 1946 para 1948. Para o Distrito Federal, observa-se um ligeiro aumento da concentração entre 1934 e 1940, atingindo valores marcadamente altos em 1942 e 1944.

O quadro contém ainda os valores para o Distrito Federal e São Paulo referentes a 1928. Tais valores diferem dos anteriormente publicados pelo Dr. Souza Reis no Relatório já referido e que estão errôneamente calculados.

Para obter uma melhor aderência aos valores observados, traçados em gráfico [illegible] as distribuições [illegible] gráficos 5-7) [illegible]. Para o Brasil [illegible], encontrando:

$$\textit{Brasil} — 1946 \qquad N_x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\theta\left[1{,}135 \log (x-24) - 1{,}517\right]$$

$$1947 \qquad N_x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\theta\left[1{,}131 \log (x-24) - 1{,}106\right]$$

$$1948 \qquad N_x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\theta\left[1{,}185 \log (x-24) - 1{,}613\right]$$

TABELA 5

VALÔRES DO ÍNDICE α DE PARETO

PAÍSES	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1942	[illegible]	[illegible]
Brasil				—	—	—	—	1,79
Distrito Federal	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,47	1,52	1,57	[illegible]	1,48
São Paulo		[illegible]		—	—	—	[illegible]	1,66
Canadá		—	[illegible]	[illegible]*	—	—	[illegible]	—
Estados Unidos	[illegible]	1,7[illegible]	1,73	1,77	1,83*	[illegible]	[illegible]	[illegible]*
Argentina			—	—	—	[illegible]		
Venezuela		[illegible]	[illegible]		—	—	[illegible]	[illegible]*
Alemanha	[illegible]	[illegible]	1,67	[illegible]	—			[illegible]
Dinamarca		[illegible]			—			—
Finlândia	[illegible]	[illegible]	—		—	[illegible]		—
França		[illegible]			—	[illegible]	[illegible]	—
Holanda		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]
Hungria		[illegible]			[illegible]	—	—	—
Inglaterra	[illegible]		[illegible]	1,77	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
Suécia		—			—	—	[illegible]	—
África do Sul		[illegible]		—	—	—	[illegible]	—
Austrália	—	[illegible]	1,84	[illegible]			[illegible]	—
Índia	[illegible]	—	[illegible]		—	—		1,79
Japão	[illegible]	—	[illegible]	—	—	—		—
Nova Zelândia		[illegible]	[illegible]	2,46	[illegible]	[illegible]	—	—

* O índice refere-se a ano [illegible] ao mencionado na coluna

Daí se concluem os valores do índice C de *Gibrat*: $C = 88{,}1$, $88{,}4$ e $84{,}4$, respectivamente.

Os resultados desses cálculos dos índices de desigualdade estão sumariados na tabela 4. Aí também figuram os índices de *Gibrat* calculados para o Distrito Federal e São Paulo desde 1944.

Um cotejo com os valores dos índices de desigualdade calculados para outros países, torna-se difícil, primeiramente por causa das restrições expostas no capítulo IV, e, depois, pela falta de dados atualizados. Contudo, aproveitando os valores do índice α de Pareto, dados por *Colin Clark* (9), podemos organizar o quadro 5. O Brasil, e as duas unidades federadas sob estudo, apresentam uma desigualdade maior, em geral, que a dos países aí mencionados. Em 1928, a concentração

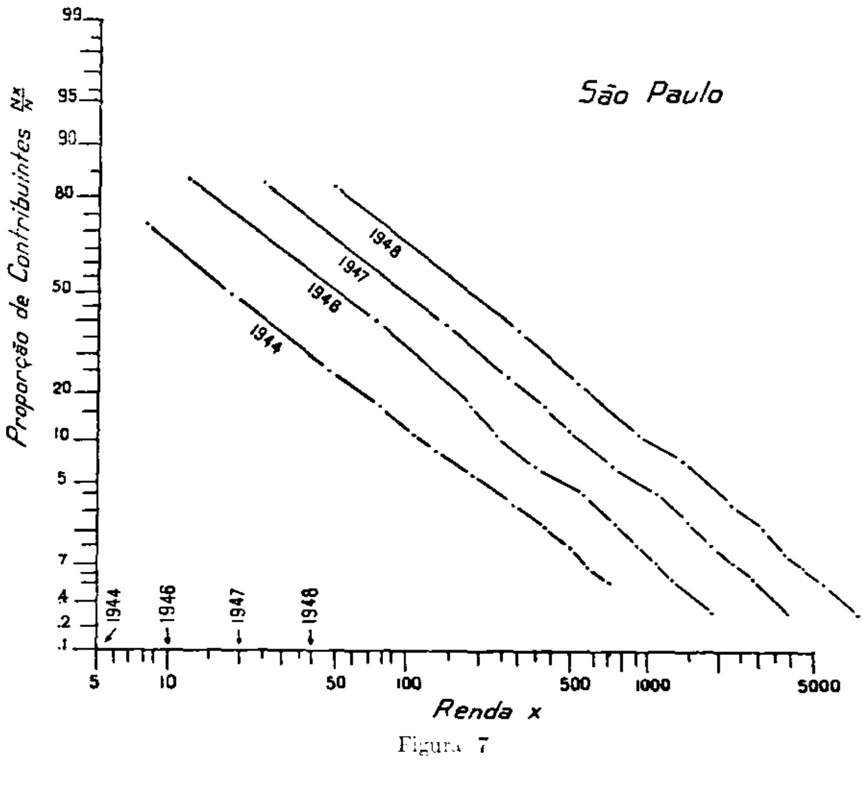

Figura 7

(9) [illegible] *Clark*, "The Conditions of Economic Progress" (2.ª ed., Londres, 1951, [illegible]).

no Distrito Federal era menor que nos Estados Unidos; mas, de então por diante, a desigualdade diminuiu nesse último país mais ràpidamente que entre nós. É flagrante a discrepância entre a nossa situação e a dos países de colonização anglo-saxônica: Canadá, Africa do Sul, Austrália, Nova Zelândia, cujos problemas de desenvolvimento econômico não tem sacrificado a igualdade de acesso às oportunidades econômicas. Aqui continua em aberto o problema de, sem prejuízo de nossa expansão econômica, acelerar a tendência, já visível a partir de 1944, para uma mais equitativa distribuição da renda nacional.

SUMMARY

INEQUALITY OF INCOME DISTRIBUTION

The theory of distribution comprises two distinct aspects, which are, however, inter-dependent: one considers the mechanism by which the remuneration of the factors of production is determined while the other considers the effects of this mechanism on the distribution of income between the individuals composing the community.

Economists have dealt mainly with the first aspect, perhaps because of its intimate connections with the problem of production. However, repercussions on economic, social and even biological phenomena of the distribution of income among individuals are equally important and thus should merit special attention. The study of individual income distribution has been undertaken in two distinct ways. In the first place an attempt has been made to establish a functional relationship between income and the number of individuals participating in the distribution process, that is to say, an attempt has been made to find an analytical expression of distribution. An extension of this type of study seeks to find, in probability schemes, a rational basis of the laws, which have been formulated empirically. The second direction in which the study of distribution has proceeded seeks to find a single measure of inequality of income, which would be able to summarize the essential aspects of the distribution.

The 1st. chapter analyses the famous law of Pareto, *giving the statistical basis on which he founded his conclusion that the form of the distribution curve is invariant in time and space.*

Pareto *himself generalized his law in order to deal, not only with total income, but also with property and labour income, obtaining better approximations. The several procedures used to determine statistically the parameters of these functions are examined.*

There are also examined the investigations of Gini *who considers not only the number of individuals in each class but also the amount of their income, and the results obtained by* Davis *which are based on probability considerations. Finally there is considered the expression found by* Amoroso *who takes into account the unimodal characteristic of the distribution curve when the latter is considered in its entire extension.*

The second chapter is dedicated to the "method of translation" introduced by Edgeworth *and* Kapteyn. *In many classical distributions, in physics, biology and economics it is found that the points (log x_i, z_i) are approximately collineal, which suggests a logarithmic anamorphosis. One thus arrives at the well-known function of* Galton-McAllister, *application of which in economics has been made particularly by* Gibrat. *The most diverse economic phenomena obey this distribution, such as the distribution of wages, of workers by firms, of the rate of pauperism, of successions, and of rents, in addition to the distribution of income. After studying the mathematical basis of* Gibrat's *procedure, the economic significance of the parameters is examined. The paper then deals with the generalization of the method in accordance with* D'Addario. *It is shown that the various types of equation which have been proposed can be reduced to a single generating function by means of transformations which satisfy the same differential relationship.*

Pareto's *Law is originally an empirical and not a rational law. Nevertheless* Pareto *himself tried to explain it in the light of the calculus of probability. In the 3rd. chapter the various attempts made to find a rational explanation of the distribution function are discussed. Probability schemes were constructed in which the elementary factors did not behave with the regularity which leads to the well known Gaussian distribution. Disturbing factors were introduced which led to a distortion of the fundamental curve. These reflected the obstacles created by the structure and organization of society to the acquisition of wealth as well as the personal circumstances which favour its obtention.*

The third chapter also appraises the analysis of Boltzmann's *scheme, and its application by* Cantelli, *the "law of proportional effect" by* Gibrat *and the studies of* Kalecki *and* Rhodes.

The fourth chapter deals with the second aspect of the study of income distribution, i. e., with the search for a statistical parameter, capable of summarizing the relevant aspects of distribution and which would yield the numerical representation of the economic concept of inequality. The various measures which have been proposed can be classified in 4 groups, according as they are based on the analytic expression of the distribution, or correspond to the mean deviation type, or to the mean difference type, or finally are based on a criterion related to the utility equivalents of individual incomes.

Consequently there are stated in the first place Pareto's *α index,* Gini's *δ index, and* Gibrat's *C index. These are then compared with the advantages of the use of the mean deviation and mean difference. Finally the chapter describes the measures which presuppose a functional relationship between the size of income and economic welfare.*

In the last chapter the proceding theories are applied to the study of income distribution in Brazil. After explaining the peculiarities of our income tax legislation, income tax data are used to measure the inequalities of income distribution in Brazil as a whole in the years 1946/1948, in the Federal District between ' 34 and ' 48 and in São Paulo between ' 44 and ' 48. The results of these calculations are summarized in table 4. For Brazil as a whole as well as for the Federal District and São Paulo there is observed a diminution of inequality of income distribution between ' 46 and ' 48. For the Federal District there is a slight increase in income concentration between 34 and 40, and very high values are attained in ' 42 and ' 44.

Table 5 compares the value of the α index for Brazil with the value of the same index for other countries. Brazil and the two subdivisions mentioned appear to present an index of inequality higher in general than that of the countries mentioned there. In 1928 the concentration of income was less in the Federal District than in the United States; but since then the inequality of incomes has decreased more rapidly in the latter country than here. The discrepancy between our situation and *that of the countries of Anglo-saxon colonization: Canada, South Africa, Australia and New Zeeland, is very great. In these countries economic development has not involved sacrifice of progressive equalization of wealth. Here in Brazil there remains the problem, of accelerating without prejudice to our economic expansion, the tendency, which has already been evident since 1944, towards a more equitable distribution of the national income.*

RÉSUMÉ

L'INÉGALITÉ DE LA DISTRIBUTION DU REVENU

La théorie de la distribution présente deux aspects qui, quoique différents, sont en même temps interdépendants: le prémier considère la formation de la rémunération des facteurs de la production tandis que le deuxième s'occupe des effets de ce mécanisme sur la distribution individuelle du revenu total dans la société. C'est peut-être à cause de sa rélation intime avec le problème de la production que les économistes se sont occupés surtout de ce premier aspect. Cependant les répercussions de la distribution individuelle du revenu sur les phénomènes économiques, sociaux et biologiques méritent autant notre attention.

L'étude de la distribution individuelle du revenu a été entamée de deux manières. On a tâché d'abord d'établir une relation fonctionelle entre le revenu et le nombre de personnes participant au processus de la distribution, c.-a-d., on a tâché de trouver une expression analytique de la distribution. C'est en continuant dans cette direction que l'on a tâché de trouver dans des schémas de probabilité une base rationelle pour les lois que l'on avait formulées empiriquement.

Une autre direction de l'étude de la distribution du revenu s'est efforcée à trouver une mesure simple de l'inégalité du revenu qui en même temps résumerait les aspects essentiels de la distribution.

Le premier chapitre analyse la loi de Pareto *indiquant la base statistique sur laquelle il a basé sa conclusion que la forme de la courbe de la distribution de revenu est invariable dans le temps et dans l'espace.* Pareto *lui-même a gé-*

néralisé cette loi dans le but de la faire applicable non seulement au revenu total mais aussi au revenu de travail et revenu de capital. Le résultat en était des approximations plus serrées; aussi les méthodes employées à déterminer les paramètres de ces fonctions à l'aide des statistiques sont examinées en detail.

L'auteur examine ensuite les recherches de Gini qui considère non seulement le nombre de personnes dans chaque interval mais aussi la somme de leurs revenus, ainsi que les résultats obtenus par Davis qui s'est basé sur des considérations de probabilité.

L'article s'occupe aussi des résultats obtenus par Amoroso qui tient compte de la caractéristique "unimodale" de la courbe de la distribution quand celle-ci est considérée en entier.

Le deuxième chapitre est dédié à la "méthode de translation" introduite par Edgeworth et Kapteyn. Dans beaucoup de distributions classiques en physique, biologie et économie on trouve que les points (log x_i, z_i) prennent approximativement la forme d'une colline ce qui suggère une anamorphose logarithmique. C'est ainsi que l'on arrive à la fonction bien connue de Galton -Mc Allister qui a été appliquée en économie surtout par Gibrat.

Des phénomènes économiques les plus variés obéissent à cette distribution, par exemple, la distribution des salaires, du nombre d'ouvriers par firme, du taux du pauperisme, des successions, des loyers et aussi la distribution du revenu. Ayant étudié la base mathématique des méthodes de Gibrat, la signification économique des paramètres est analysée. L'article discute ensuite la généralisation de la méthode en accord avec D'Addario. L'auteur prouve que les divers types d'équation qui ont été proposés peuvent être réduits à une seule fonction genératrice à l'aide de transformations qui satisfont la même relation différentielle. La loi de Pareto est dans son origine empirique et non pas rationelle. Cependant Pareto lui-même a tâché de l'expliquer à l'aide du calcul de probabilité.

Le troisième chapitre discute les tentatives faites dans le but de trouver une explication rationelle de la fonction de la distribution. Des schémas de probabilité ont été construits dans lesquels les facteurs élémentaires n'ont pas la régularité qui mêne à la distribution bien connue de Gauss. Des facteurs perturbateurs *menant à une distortion de la courbe fondamentale ont été introduits. Ceux-ci reflétaient les obstacles crées par la structure et l'organisation de la société à l'acquisition de richesse ainsi que les circonstances personnelles qui y peuvent être favorables.*

Ce chapitre passe en revue aussi l'analyse du schéma de Boltzmann *et son application par* Cantelli, *la loi de l'effet proportionnel de* Gibrat *et les études de* Kalecki *et* Rhodes.

Le quatrième chapitre s'occupe de l'autre aspect de l'étude de la distribution du revenu, c.-a.-d., la recherche d'un paramètre statistique qui pourrait résumer les aspects importants de la distribution et qui aboutirait à la présentation numérique du concept économique de l'inégalité. Les différentes mesures qui ont été proposées peuvent être classifiées en quatre groupes selon le critérium qu'elles ont leur base dans l'expression analytique de la distribution, la déviation moyenne, la différence moyenne ou l'utilité équivalente de revenus individuels. De cette manière ce sont surtout l'indice α *de* Pareto, *l'indice* δ *de Gini et l'indice C de* Gibrat *qui demandent l'attention. L'avantage de ces indices est comparé à l'emploi de la déviation moyenne ou de la différence moyenne. Finalement, ce chapitre donne une description des mesures qui présupposent une relation fonctionelle entre le niveau du revenu et le bien-être économique.*

Dans le dernier chapitre l'auteur applique les théories précédentes à l'étude de la distribution de revenu au Brésil. Après une explication des particularités de la legislation de l'impôt sur le revenu au Brésil, les données de l'impôt sur le revenu sont employées à mesurer l'inégalité de la distribution du revenu au Brésil pendant les années 1946/48, au District Fédéral entre 1934 et 1948 et à São Paulo entre 1944 et 1948. Les résultats sont présentés au Tableau 4. Pour le Brésil en général, ainsi que pour le District Fédéral et pour São Paulo on constate une diminution de l'inégalité de distribution du revenu entre 1946 et 1948. Dans le District Fédéral on constate une petite augmentation de la concentration du revenu entre 1934 et 1940 tandis que la concentration était très élévée de 1942 à 1944.

Le tableau 5 compare la valeur de l'indice α *du Brésil avec celui d'autres pays. Il paraît que cet indice d'inégalité est plus haut en général pour le Brésil, le District Fédéral et São Paulo que pour les autres pays mentionnés dans ce tableau.*

En 1928 la concentration du revenu était moins élévée au District Fédéral qu'aux États Unis, mais depuis lors l'inégalité de la distribution du revenu a diminué plus rapidement dans ce pays qu'ici. Il y a une grande différence entre la situation aux pays colonisés par les Anglo-Saxons (Canada, Afrique du Sud Australie et la Nouvelle Zélande) et la nôtre: le développement économique de ces pays n'a pas mené au sacrifice d'équalisation progressive de richesse. Ici au Brésil nous rencontrons toujours le problème de stimuler sans préjudice à l'expansion économique la tendance à une répartition plus équitable du revenu national que l'on a déjà pu constater depuis 1944.