

# Representação analítica das distribuições dos contribuintes e das respectivas rendas líquidas determinadas para a aplicação do imposto de renda, em função do valor da renda líquida

GIORGIO MORTARA

**SUMARIO :** 1. Observações sobre a representação analítica das distribuições de rendas. A fórmula simplificada de PARETO e a sua aplicação. — 2. Tentativa de aplicação dessa fórmula à representação de estatísticas brasileiras, por SOUZA REIS. — 3. Dados sobre a distribuição dos contribuintes para o imposto complementar progressivo de renda, e das respectivas rendas, no Brasil, nos exercícios de 1945 e 1946, e advertências para a sua interpretação. — 4. Inaplicabilidade da fórmula simplificada de PARETO para a representação dessas distribuições. Fórmula geral, proposta por esse economista. Outra fórmula geral, preferida pelo autor. — 5. Aplicação desta fórmula à representação da distribuição dos contribuintes segundo a renda individual, nos exercícios de 1945 e 1946. — 6. Aplicação da mesma fórmula à representação da distribuição das rendas segundo a renda individual do contribuinte, nesses exercícios. — 7. Cálculo da renda média individual dos contribuintes com renda superior a dados limites; comparação entre os valores obtidos pelas fórmulas interpoladoras e os obtidos pelos dados observados. — 8. Aproveitamento das fórmulas interpoladoras para a determinação aproximativa de dados não constantes das apurações. — 9. Considerações finais.

1. Depois que VILFREDO PARETO descobriu a notável regularidade da distribuição das rendas, em épocas e em populações diferentes, <sup>(1)</sup> inúmeros estudos foram dedicados à apli-

---

(1) Veja-se, acerca das fórmulas de PARETO, a apresentação do artigo de L. AMOROSO, *O índice de concentração das rendas segundo Pareto*, publicado na "Revista Brasileira de Estatística", n. 34, 1948, págs. 157 a 161.

cação das fórmulas empíricas propostas por êsse grande economista para a representação da referida distribuição, e à busca de fórmulas mais gerais, ou diversas, apropriadas para a representação de distribuições às quais não se adapte o critério paretiano.

Tendo a experiência demonstrado que não existe uma lei geral de distribuição das rendas e que as várias fórmulas aplicadas para representar as distribuições observadas têm apenas o caráter de descrições aproximativas e simplificadas da realidade, as pesquisas nesse domínio tendem a assumir cada vez mais o caráter de exercícios de estatística matemática, antes do que o de investigações de ciência econômica.

Quando essas descrições podem ser feitas, com suficiente aderência à realidade, mediante funções caracterizadas por um pequeno número de parâmetros, como a paretiana de primeira aproximação, (2)

$$\log y = a - b \log x \quad (1)$$

(onde  $y$  representa o número das pessoas com renda individual superior a  $x$  e  $a$  e  $b$  são constantes), então elas, embora não simbolizando regularidades de caráter permanente, podem servir para o objetivo, importante nos estudos de economia aplicada, de comparar reciprocamente distribuições de rendas observadas em diversos tempos ou lugares.

Mas quando as funções adotadas para a descrição são caracterizadas por maior número de parâmetros, êsse aproveitamento das respectivas fórmulas torna-se muito laborioso e até praticamente impossível, sendo bem difícil, via de regra, atribuir significação intuitiva aos diversos parâmetros. É justamente por isso que, embora tenham sido propostas fórmulas apropriadas para representar dadas distribuições observadas de rendas com aproximação maior do que a conseguida pela fórmula (1), ainda são realizadas com certa fre-

(2) O parâmetro  $b$  da fórmula (1), aqui discriminado mediante êsse símbolo por razão de coerência com outra fórmula que será exposta, é o que PARETO representou pela letra grega *alfa*. A significação dêsse parâmetro foi muito discutida entre cultores da estatística econômica; veja-se, sobre o assunto, o artigo de AMOROSO citado na nota 1.

quência aplicações desta, que possui em alto grau a rara virtude da simplicidade.

2. No Brasil, desde que foram disponíveis as primeiras estatísticas da distribuição das rendas, foi experimentada a sua representação analítica.

O próprio Diretor dos serviços do impôsto de renda, F. T. DE SOUZA REIS, no seu relatório sôbre a atividade dêsses serviços no exercício de 1928, <sup>(3)</sup> depois de ter analisado o desenvolvimento da arrecadação nos cinco primeiros anos de aplicação dêsse impôsto (1924-1928) e a marcha das respectivas despesas, apresentou as distribuições das pessoas físicas contribuintes do impôsto complementar progressivo, no exercício de 1928, segundo a renda líquida individual, tanto no Distrito Federal como no Estado de São Paulo, e tentou aplicar à representação analítica dessas distribuições a fórmula (1).

Conforme os diagramas de dupla escala logarítmica, que ilustram essa tentativa (págs. 14 e 15 do citado relatório), a fórmula paretiana pode parecer adequada para a representação das duas distribuições consideradas, pelo menos em via de primeira aproximação.

Infelizmente, os diagramas e os cálculos de que eles dão a imagem estão errados, em consequência de um lapso do calculador. Êste tomou sucessivamente como valores dados de  $x$  não os limites inferiores das classes de renda e sim os limites superiores; assim, para o Distrito Federal, onde se encontravam 20 518 contribuintes com renda superior ao limite de isenção do impôsto complementar progressivo (6 000 cruzeiros), dos quais 16 666 com rendas de 6 000 a 30 000 cruzeiros, 2 292 com rendas de 30 000 a 60 000 cruzeiros, 678 com rendas de 60 000 a 90 000 cruzeiros, etc., êle fêz corresponder o valor  $y = 20\,518$  (contribuintes com renda superior a  $x$ ), não ao valor  $x = 6\,000$ , como devia, e sim ao valor  $x = 30\,000$ ; e, prossequindo, fêz corresponder o valor  $y = 3\,852$  não a

(3) F. T. DE SOUZA REIS, *Impôsto de renda, Exercício de 1928*, Rio de Janeiro, 1930.

$x = 30\,000$ , e sim a  $x = 60\,000$ , etc. Em conseqüência dêsse engano, o cálculo perde qualquer significação razoável.

Deve-se, entretanto, reconhecer a SOUZA REIS o mérito não somente de ter sido pioneiro dessas pesquisas no Brasil, como também de ter pôsto em evidência a regularidade das distribuições das rendas apresentadas no seu estudo.

Em consideração ao seu significado histórico e ao seu interesse econômico, acho interessante reproduzir aqui as duas distribuições referidas, seja em forma numérica, na tabela I, seja em forma gráfica, na figura 1.

A condição indispensável para que se possa experimentar com esperança de êxito a aplicação da fórmula (1) é a de que, no diagrama em dupla escala logarítmica, o andamento da linha quebrada que representa os resultados da observação seja aproximativamente retilíneo. Agora, basta um olhar aos diagramas da figura 1 para revelar que, tanto para o Distrito Federal como para o Estado de São Paulo, êsse andamento é nitidamente curvilíneo. Fica, portanto, excluída a aplicabilidade, no caso, da fórmula paretiana de primeira aproximação. (4)

3. Os dados mais recentes disponíveis, acêrca da distribuição das rendas das pessoas físicas contribuintes do imposto complementar progressivo, referem-se ao exercício de 1946. Foram, também, publicados dados para o exercício de 1945, porém incompletos porque não abrangem o Estado de Sergipe. (5) Todavia, em vista da escassa importância dêsse Estado, que em 1946 contribui apenas com 0,41 % para o número dos contribuintes e com 0,44% para a renda líquida total, podem-se comparar os dados referentes aos dois exercícios, desprezando-se a lacuna dos de 1945.

(4) Provavelmente, obter-se-ia uma aproximação satisfatória pela aplicação da fórmula (3). Mas, em vista da evasão muito elevada que se verificava nos primeiros anos de aplicação do imposto complementar progressivo, parece desprovida de interesse a representação analítica de dados que de certo se afastam fortemente da realidade.

(5) Os dados referidos foram publicados no "Boletim Estatístico" do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística; os de 1945 no n. 22, abril-junho de 1948, págs. 103 e 104, e os de 1946 no n. 24, outubro-dezembro de 1948, págs. 93 e 94.

A comparação torna-se especialmente interessante, porque o limite de isenção do imposto foi elevado de 12 000 cruzeiros, no exercício de 1945, para 24 000 cruzeiros, no de 1946.

TABELA I

DISTRIBUIÇÃO DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUINTES DO IMPOSTO COMPLEMENTAR PROGRESSIVO DE RENDA, SEGUNDO A RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL, NO DISTRITO FEDERAL E NO ESTADO DE SÃO PAULO, NO EXERCÍCIO DE 1928 (6)

RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Cruzeiros) $x$	CONTRIBUINTES COM RENDA LÍQUIDA SUPERIOR A $x$ $y$		$\log x$	$\log y$	
	Distrito Federal	São Paulo		Distrito Federal	São Paulo
6 000 ...	20 518	11 549	3,77815	4,31214	4,06254
30 000 ...	3 852	2 654	4,47712	3,58569	3,42390
60 000 ...	1 560	1 095	4,77812	3,19312	3,03941
90 000 ...	882	619	4,95424	2,94547	2,79169
120 000 ...	545	400	5,07918	2,73640	2,60206
150 000 ...	390	307	5,17609	2,59106	2,48714
200 000 ...	239	186	5,30103	2,37840	2,26951
250 000 ...	166	118	5,39794	2,22011	2,07188
300 000 ...	120	84	5,44712	2,07918	1,92428
400 000 ...	70	46	5,60206	1,84510	1,66276
500 000 ...	38	37	5,69897	1,57978	1,56820
600 000 ...	22	27	5,77815	1,32442	1,43136
700 000 ...	16	21	5,84510	1,20412	1,32222
800 000 ...	13	16	5,90309	1,11394	1,20412
900 000 ...	12	15	5,95424	1,07918	1,17609
1 000 000 ...	11	12	6,00000	1,04139	1,07918
1 500 000 ...	4	6	6,17609	0,60206	0,77815
2 500 000 ...	2	2	6,30103	0,30103	0,47712

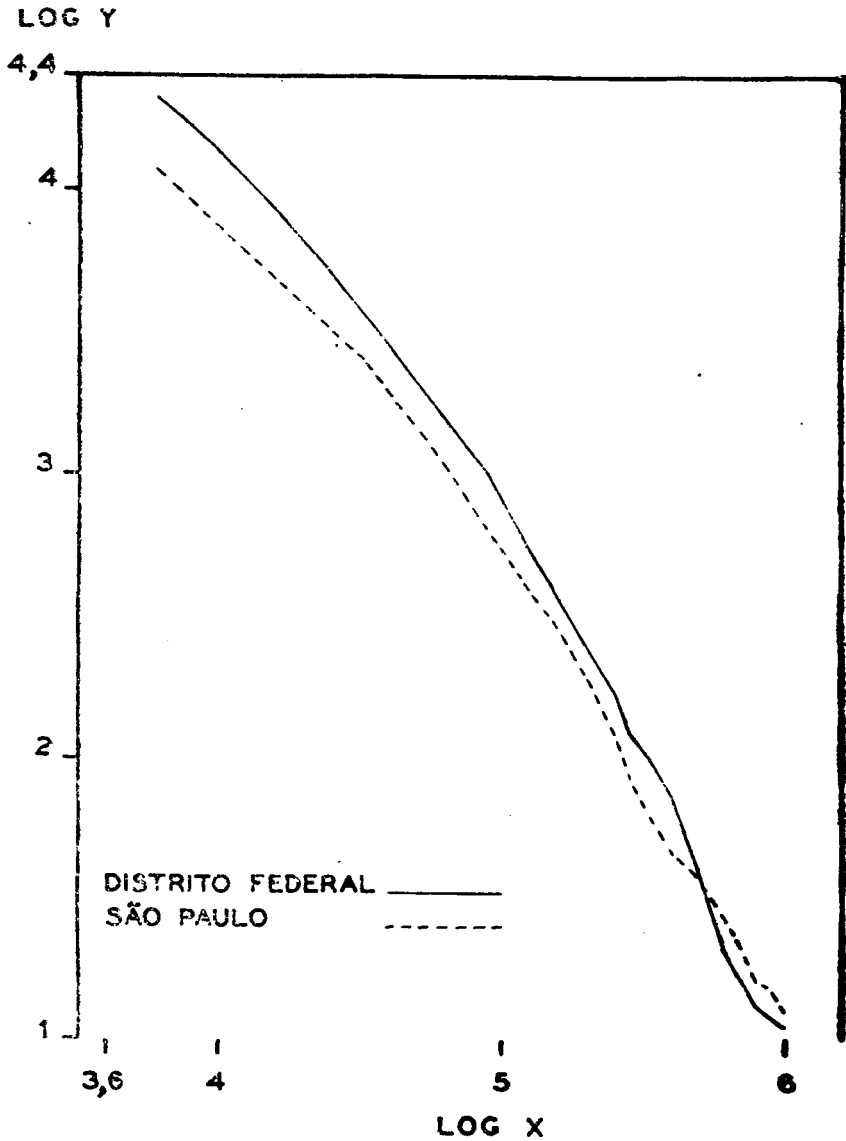
A distribuição das pessoas físicas contribuintes do imposto complementar progressivo, e das respectivas rendas líquidas,

(6) Souza Reis especifica, também, o número das pessoas físicas com rendas líquidas até 6 000 cruzeiros, isentas do imposto complementar progressivo, mas sujeitas ao imposto proporcional: 29 053 no Distrito Federal e 7 513 no Estado de São Paulo.

A renda líquida total das pessoas físicas contribuintes do imposto complementar progressivo, discriminadas na tabela I, ascendia a 544 881 471 cruzeiros no Distrito Federal (média individual, 26 556 cruzeiros) e a 356 602 201 cruzeiros no Estado de São Paulo (média individual, 30 877 cruzeiros).

FIGURA 1

DIAGRAMA LOGARÍTMICO DA DISTRIBUIÇÃO CUMULATIVA DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUINTES DO IMPOSTO DE RENDA NO DISTRITO FEDERAL E NO ESTADO DE SÃO PAULO, NO EXERCÍCIO DE 1928



segundo a renda líquida individual, consta das tabelas II (1945) e III (1946).

Em 1945, os contribuintes ascendiam a 171 761; em 1946, reduziram-se a 118 342, em consequência da elevação do limite de isenção.

A renda líquida total desses contribuintes, determinada para a aplicação do imposto de renda, ascendia a 9 997,1 milhões de cruzeiros em 1945 e subiu para 10 449,9 milhões em 1946.

O número dos contribuintes é muito pequeno em relação ao total das pessoas físicas que percebem rendas, não atingindo, em 1946, a quota de 1 % desse total; e a renda líquida sujeita ao imposto constitui uma pequena fração — decerto inferior a 10 % — da soma das rendas das pessoas físicas. (7)

Cumpre, também, advertir que a “renda líquida” determinada para a aplicação do imposto complementar progressivo não coincide com a “renda líquida” que se poderia determinar conforme critérios econômico-contábeis, deduzindo da renda bruta os elementos do respectivo custo de produção. Com efeito, de um lado, alguns desses elementos não são deduzidos, na determinação da renda líquida para os efeitos fiscais; e, do outro, são deduzidas partes da renda gasta, pelos abatimentos correspondentes a encargos de família, etc., ou da renda economizada, pelos abatimentos correspondentes a prêmios de seguro de vida, contribuições de previdência social, etc. Creio que o total das rendas líquidas, no sentido fiscal, fica sensivelmente inferior ao total das rendas líquidas, no sentido econômico.

(7) Sobre as relações entre os números dos contribuintes, e respectivas rendas, de um lado, e o número das pessoas que percebem rendas, ou a população total, do outro, veja-se meu estudo *Dados e observações sobre a distribuição das rendas das pessoas físicas contribuintes do imposto de renda no Brasil*, publicado na “Revista Brasileira de Estatística”, n. 38, 1949.

As declarações de rendimentos apresentadas em cada exercício referem-se às rendas auferidas pelo declarante no exercício (ano) anterior; de modo que as rendas determinadas para a aplicação do imposto no exercício de 1945 devem ser comparadas com a renda nacional de 1944, etc.

TABELA II

DISTRIBUIÇÃO DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUENTES DO IMPÓSTO COMPLEMENTAR PROGRESSIVO DE RENDA, E DAS SUAS RENDAS LÍQUIDAS, SEGUNDO A RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL, NO BRASIL, (8)  
NO EXERCÍCIO DE 1945

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	CONTRIBUENTES		RENDAS LÍQUIDAS (Milhares de cruzeiros)	
	Na classe especificada	A partir do limite inferior da classe especificada	Na classe especificada	A partir do limite inferior da classe especificada
De mais de 12 a 20 .....	56 092	171 761	879 166	9 997 098
De mais de 20 a 30 <sup>(9)</sup> .....	36 355	115 669	893 473	9 117 932
De mais de 30 a 60 .....	42 212	79 314	1 775 172	8 224 459
De mais de 60 a 120 .....	21 409	37 102	1 786 890	6 449 287
De mais de 120 a 200 .....	7 793	15 693	1 194 362	4 662 397
De mais de 200 a 400 .....	5 324	7 900	1 461 968	3 468 035
De mais de 400 a 600 .....	1 362	2 576	655 118	2 006 067
Mais de 600 .....	1 214	1 214	1 350 949	1 350 949
<b>Mais de 12 (Total) .....</b>	<b>171 761</b>	<b>171 761</b>	<b>9 997 098</b>	<b>9 997 098</b>

Portanto, as distribuições de rendas constantes das tabelas II e III descrevem apenas uma pequena parte das correspondentes distribuições totais, e, ainda, a descrevem de maneira incompleta. Entenda-se “pequena parte”, em relação às áreas das curvas de distribuição; no que diz respeito à extensão destas curvas, é claro que essas descrições abrangem a maior parte dela, ficando excluído apenas o intervalo correspondente às rendas até 12 000 cruzeiros em 1945 e até 24 000 em 1946; intervalo relativamente curto, mas que compreende a grande maioria dos que percebem rendas.

(8) Exclusive o Estado de Sergipe.

(9) Para facilitar a comparação com os dados do exercício de 1946, os quais têm como classe inicial de renda a de mais de 24 a 30 milhares de cruzeiros, discriminaram-se os dados de 1945 para a classe de mais de 20 a 30 milhares de cruzeiros, mediante interpolação, nas duas subclasses de mais de 20 a 24 e de mais de 24 a 30 milhares de cruzeiros.

O processo aplicado está descrito mais adiante, no § 8 do texto, onde estão também expostos os resultados obtidos.



TABELA III

DISTRIBUIÇÃO DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUINTES DO IMPÓSTO COMPLEMENTAR PROGRESSIVO DE RENDA, E DAS SUAS RENDAS LÍQUIDAS, SEGUNDO A RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL, NO BRASIL, NO EXERCÍCIO DE 1946

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	CONTRIBUINTES		RENDAS LÍQUIDAS (Milhares de cruzeiros)	
	Na classe especificada	A partir do limite inferior da classe especificada	Na classe especificada	A partir do limite inferior da classe especificada
De mais de 24 a 30 .....	21 879	118 342	588 621	10 449 901
De mais de 30 a 60 .....	51 577	94 463	217 240	9 861 280
De mais de 60 a 90 .....	17 684	44 886	1 290 791	7 639 040
De mais de 90 a 120 .....	8 934	27 202	924 364	6 398 249
De mais de 120 a 150 .....	4 754	18 268	636 670	5 473 885
De mais de 150 a 200 .....	4 571	13 514	788 308	4 837 215
De mais de 200 a 300 .....	4 120	8 943	994 416	4 048 907
De mais de 300 a 400 .....	1 844	4 823	635 542	3 052 491
De mais de 400 a 500 .....	981	2 979	435 748	2 416 949
De mais de 500 a 600 .....	595	1 998	326 488	1 981 201
De mais de 600 a 700 .....	402	1 403	260 075	1 654 713
De mais de 700 a 800 .....	272	1 001	201 937	1 394 638
De mais de 800 a 900 .....	129	729	109 501	1 192 701
De mais de 900 a 1 000 .....	105	600	98 796	1 083 200
De mais de 1 000 a 2 000 .....	375	495	491 802	984 404
De mais de 2 000 a 3 000 .....	61	120	144 384	492 602
De mais de 3 000 a 4 000 .....	28	59	93 594	348 218
De mais de 4 000 a 5 000 .....	11	31	48 990	254 624
Mais de 5 000 .....	20	20	205 634	205 634
<b>Mais de 24 (Total) .....</b>	<b>118 342</b>	<b>118 342</b>	<b>10 449 901</b>	<b>10 449 901</b>

4. Desde PARETO, tornou-se prática usual, entre os cultores da estatística econômica, traduzir em diagrama de dupla escala logarítmica as distribuições cumulativas dos contribuintes e de suas rendas, em função da renda individual, para julgar à primeira vista se pode ser tentada com esperança de êxito a interpolação de uma função do tipo (1) para descrever essas distribuições. (10)

(10) Na representação cumulativa das rendas, a variável  $y$  da fórmula (1), número dos contribuintes com renda individual superior a  $x$ , é substituída pela variável  $z$ , soma das rendas dos contribuintes com renda individual superior a  $x$ .

Os diagramas assim delineados conforme as estatísticas dos exercícios de 1945 e 1946 são comparados nas figuras 2 (contribuintes) e 3 (rendas). Ainda mais do que na figura 1, o andamento dos diagramas nas figuras 2 e 3 afasta-se da linha reta, apresentando-se marcadamente curvilíneo.

É preciso, entretanto, lembrar que a fórmula (1) corresponde apenas, segundo PARETO, a uma primeira aproximação, como salientei desde o comêço. Ele sugere <sup>(11)</sup> a fórmula geral

$$\log y = a - b \log (x + c) - dx \quad (2)$$

caracterizada por quatro parâmetros. Em quase todos os casos por êle estudados o valor do parâmetro  $d$  resultava desprezível, e, nos casos de distribuições de rendas totais, <sup>(12)</sup> também  $c$  em geral resultava muito pequeno, de modo que a fórmula (2) podia ser reduzida sem inconveniente à forma da (1).

Quando isso não acontecer, como no caso atual, pode-se tentar a aplicação da fórmula (2). O valor desta é apenas descritivo, porque, pelo próprio número dos parâmetros e pela dificuldade de se atribuir a alguns deles uma significação intuitiva, ela se torna de escasso auxílio nas comparações. Aliás, mesmo no caso da fórmula (1), as discussões intermináveis, que se desenvolveram e ainda se estão desenvolvendo, entre estatísticos e economistas, sôbre a significação do parâmetro  $b$ , mostram as dificuldades que podem surgir na interpretação de fórmulas aparentemente bem simples.

Em vista do caráter puramente descritivo que só resta à fórmula nos casos acima considerados, eu preferi, desde

(11) Veja-se a nota 1.

O parâmetro  $c$  é o que PARETO simboliza pela letra  $a$  e o  $d$  é o que êle simboliza pela letra grega  $\beta$ .

(12) "Rendas totais", em contraste com rendas de determinadas categorias (distribuição de salários, de rendas do capital, etc.).

1917, <sup>(13)</sup> adotar, em lugar da (2), uma fórmula apropriada para a aplicação sistemática por aproximações sucessivas, isto é, a seguinte :

$$\log y = a + b \log x + c \log^2 x + d \log^3 x + \dots \quad (3)$$

Trata-se, apenas, da generalização da fórmula (1), de modo que a (3) pode ser considerada como implicitamente contida no grupo das fórmulas paretianas para a descrição de distribuições de rendas. Com efeito, é óbvio que, quando resultarem desprezíveis os valores dos parâmetros  $c$ ,  $d$ , etc., a fórmula (3) se reduz à forma da (1).

5. No caso atual, o exame dos diagramas permitiu esperar que se tornasse suficiente a aplicação da fórmula (3) limitada aos três primeiros termos (isto é, levada até o termo em  $\log^2 x$ ) para se obter uma aproximação satisfatória. De outro lado, êsse exame, evidenciando algumas menores irregularidades no andamento das curvas de distribuição observadas, acon-

---

(13) Em *Elementi di Statistica*, Roma, Athenaeum, 1917, págs. 84 a 96.

Não conheço outras aplicações anteriores dessa fórmula; mas não ou-  
saria excluir a possibilidade da sua existência, sendo implícita na (1)  
de PARETO a sugestão da mesma como extensão desta.

Estudos posteriores às pesquisas fundamentais do economista ita-  
liano foram dirigidos, amiúde, para a busca de fórmulas empíricas cor-  
respondentes a determinadas hipóteses probabilísticas, ou mesmo eco-  
nômicas, antes do que de fórmulas apropriadas para assegurar a maior  
aproximação na descrição dos dados observados ou a maior facilidade de  
comparação entre séries diversas.

Sobre os resultados dessas tentativas, informam os estudos de R. M.  
FRÉCHET, *Nouveaux essais d'explication de la répartition des revenus*, "Re-  
vue de l'Institut International de Statistique", 1945, págs. 16 a 32, e de  
R. D'ADDARIO, *Ricerca sulla curva dei redditi*, "Giornale degli Economisti e  
Annali di Economia", 1949, págs. 91 a 114.

Na aplicação citada no início desta nota, a fórmula (3) inclui quatro  
parâmetros, sendo levada até o termo em  $\log^3 x$ , e assegura uma re-  
presentação muito aproximada da distribuição observada, enquanto a fór-  
mula (1) não dava uma aproximação satisfatória. Mostrei, todavia, em  
outra elaboração dos mesmos dados (*Lezioni di Statistica Metodologica*,  
Città di Castello, Edizione del "Giornale degli Economisti", 1922, pági-  
nas 235 a 241), que um simples artifício de interpolação permite obter uma  
aproximação já satisfatória pela fórmula (1).

FIGURA 2

DIAGRAMA LOGARÍTMICO DA DISTRIBUIÇÃO CUMULATIVA DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUENTES DO IMPOSTO DE RENDA NO BRASIL, NOS EXERCÍCIOS DE 1945 E 1946

LOG Y

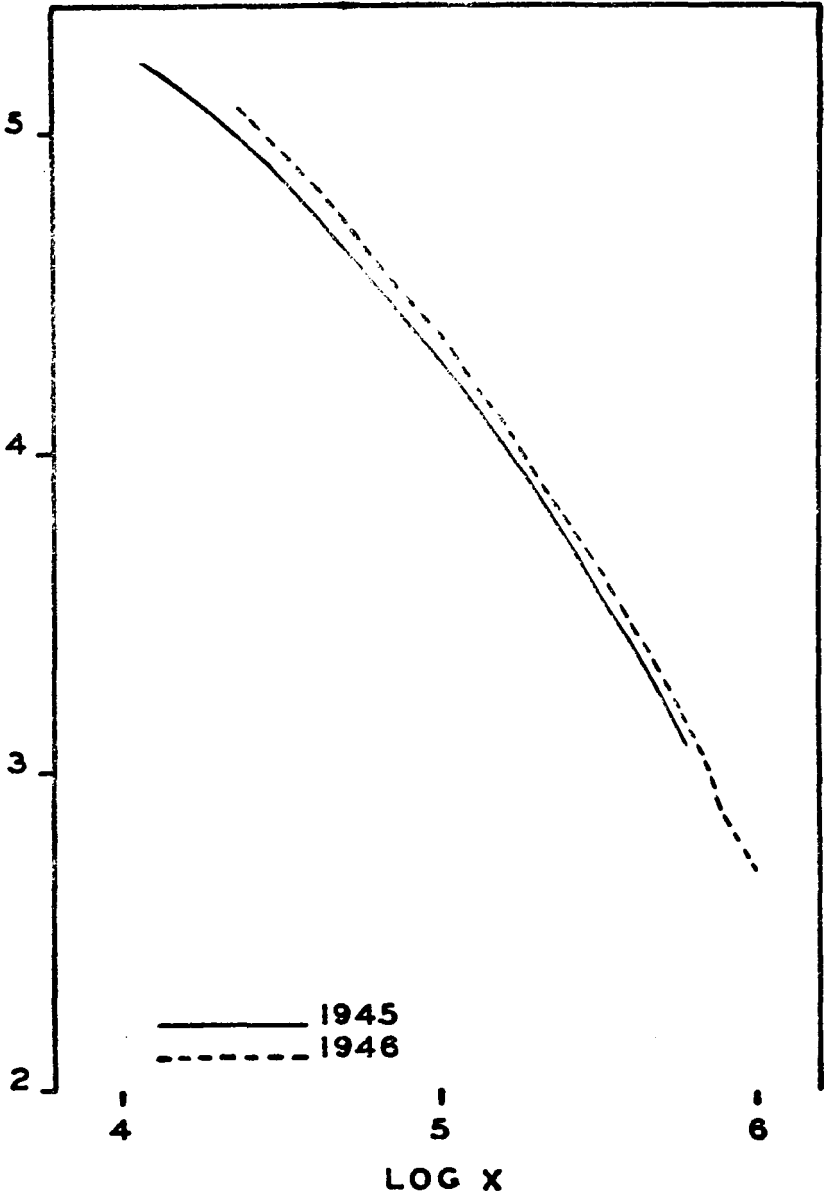
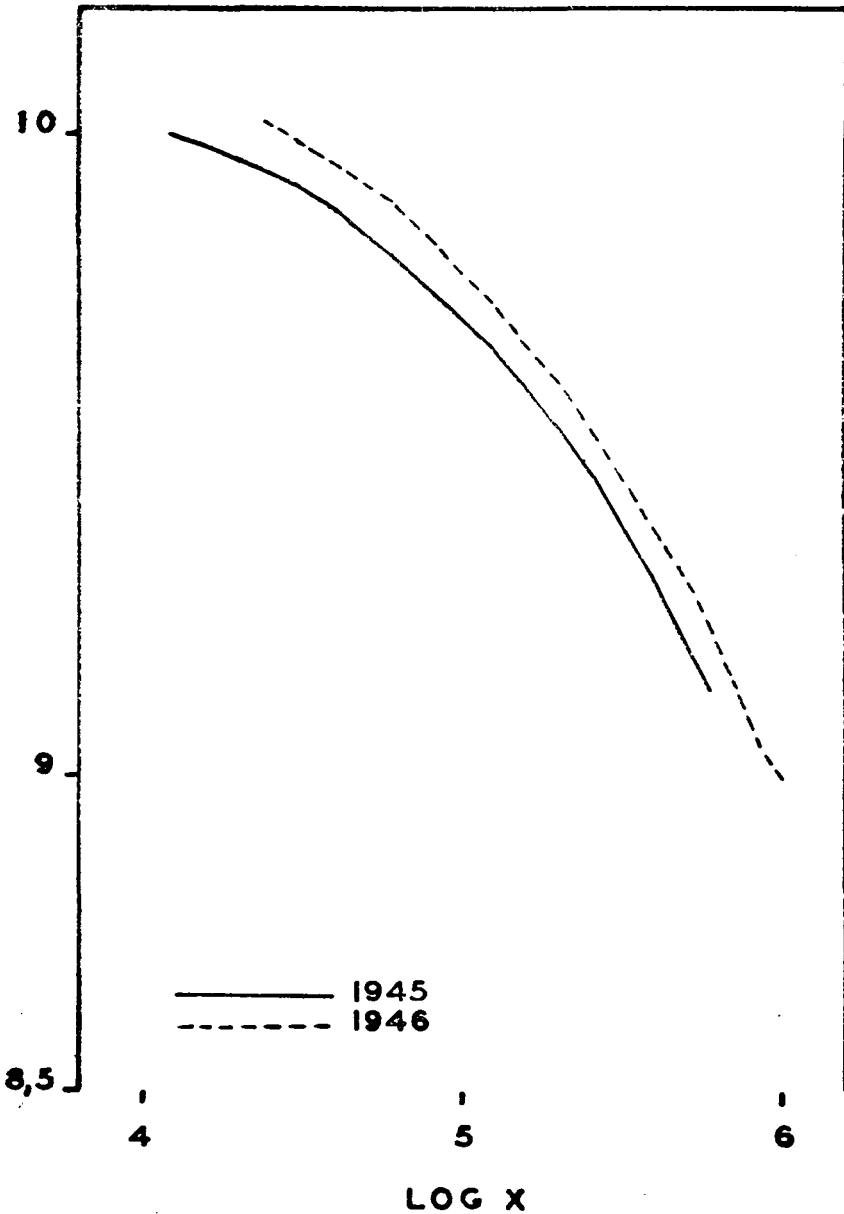


FIGURA 3

DIAGRAMA LOGARÍTMICO DA DISTRIBUIÇÃO CUMULATIVA DAS RENDAS LÍQUIDAS DAS PESSOAS FÍSICAS CONTRIBUINTES DO IMPOSTO DE RENDA NO BRASIL, NOS EXERCÍCIOS DE 1945 E 1946

LOG Z



selhou a execução da interpolação *por alguns* dos pontos dados, e não conforme uma condição de aderência *a todos* os pontos dados.

Achei conveniente escolher dois dos três pontos pelos quais deveria passar a curva interpoladora, de maneira a manter inalterado o número total dos contribuintes (isto é, o valor de  $y$  correspondente ao valor de  $x$  igual ao limite de isenção) e o número dos contribuintes no degrau mais elevado da escala (isto é, o valor de  $y$  correspondente ao mais elevado dos limites inferiores das classes de  $x$ ). Escolhi, com critério empírico, sugerido pelo exame visual dos diagramas, outro ponto, intermédio aos dois acima referidos.

Para o exercício de 1945, a equação da curva do tipo (3), que mantém inalterados os valores de  $y$  (número dos contribuintes com renda superior a  $x$ ) correspondentes aos valores de  $x$  (renda individual) de 12 000, 120 000 e 600 000 cruzeiros, é a seguinte : <sup>(14)</sup>

$$\log y = 2,75513 + 1,93075 \log x - 0,32429 \log^2 x \quad (4)$$

Os valores de  $\log y$  e de  $y$  calculados por essa equação constam da tabela IV, onde figuram ao lado dos correspondentes valores observados.

A aproximação obtida na representação da curva parece suficiente para a descrição que visa pôr em relêvo o caráter geral do seu andamento sem reproduzir suas menores irregularidades.

Para melhor julgar a aproximação obtida, convém considerar comparativamente os dados observados da distribuição dos contribuintes segundo classes de renda e os que podem ser obtidos, mediante subtrações, dos dados calculados da última coluna acima. Segue-se essa comparação, na tabela V.

A comparação entre as distribuições de freqüência, em alguns casos, revela ser efetivamente insatisfatória a aproximação obtida mediante interpolações executadas sôbre as respectivas distribuições cumulativas. Mas, no caso atual, a com-

(14) Os logaritmos referidos nas fórmulas são sempre os decimais.

paração confirma que a representação analítica dá uma descrição aceitável da distribuição observada.

O desvio médio absoluto entre os dados interpolados e os observados corresponde a 2,05 % da média destes; a média dos valores absolutos dos desvios relativos atinge apenas 3,09%.

TABELA IV

INTERPOLAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS CONTRIBUINTES  
NO EXERCÍCIO DE 1945

$x$ (Cruzeiros)	$\log x$	$\log y$		$y$	
		Observado	Calculado	Observado	Calculado
12 000 ....	4,07918	5,23492	5,23492	171 761	171 761
20 000 ....	4,30103	5,06322	5,06034	115 669	114 905
30 000 ....	4,47712	4,89935	4,89907	79 314	79 263
60 000 ....	4,77815	4,56940	4,57677	37 102	37 737
120 000 ....	5,07918	4,19571	4,19571	15 693	15 693
200 000 ....	5,30103	3,89763	3,87724	7 900	7 538
400 000 ....	5,60206	3,41095	3,39409	2 576	2 478
600 000 ....	5,77815	3,08422	3,08422	1 214	1 214

TABELA V

COMPARAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA DOS CONTRIBUINTES SEGUNDO CLASSES DE RENDA E A CALCULADA  
(1945)

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	CONTRIBUINTES	
	Observados	Calculados
De mais de 12 a 20 .....	56 092	56 856
De mais de 20 a 30 .....	36 355	35 642
De mais de 30 a 60 .....	42 212	41 526
De mais de 60 a 120 .....	21 409	22 044
De mais de 120 a 200 .....	7 793	8 155
De mais de 200 a 400 .....	5 324	5 060
De mais de 400 a 600 .....	1 362	1 264
Mais de 600 .....	1 214	1 214

Na interpolação dos dados para o exercício de 1946, mantive os critérios acima esclarecidos; mas, em consequência da elevação do limite de isenção e da modificada discriminação das classes, <sup>(15)</sup> determinei a função interpoladora de maneira a manter inalterados os valores de  $y$  correspondentes aos valores de  $x$  de 24 000, 400 000 e 5 000 000 de cruzeiros.

A equação da curva interpoladora é a seguinte :

$$\log y = 3,69076 + 1,58564 \log x - 0,28995 \log^2 x \quad (5)$$

Os valores de  $\log y$  e de  $y$  calculados por essa equação são comparados com os observados, na tabela VI.

TABELA VI

INTERPOLAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS CONTRIBUINTES  
NO EXERCÍCIO DE 1945

$x$ (Cruzeiros)	$\log x$	$\log y$		$y$	
		Observado	Calculado	Observado	Calculado
24 000 ...	4,38021	5,07314	5,07314	118 342	118 342
30 000 ...	4,47712	4,98436	4,97792	96 463	95 043
60 000 ...	4,77815	4,65211	4,64742	44 886	44 404
90 000 ...	4,95424	4,43460	4,42973	27 202	26 899
120 000 ...	5,07918	4,26169	4,26436	18 268	18 381
150 000 ...	5,17609	4,13078	4,12986	13 514	13 485
200 000 ...	5,30103	3,95148	3,94842	8 943	8 880
300 000 ...	5,47712	3,68332	3,67733	4 823	4 757
400 000 ...	5,60206	3,47407	3,47407	2 979	2 979
500 000 ...	5,69897	3,30060	3,31021	1 998	2 043
600 000 ...	5,77815	3,14706	3,17226	1 403	1 487
700 000 ...	5,84510	3,00043	3,05278	1 001	1 129
800 000 ...	5,90309	2,86273	2,94720	729	886
900 000 ...	5,95424	2,77815	2,85245	600	712
1 030 000 ...	6,00000	2,69461	2,76640	495	584
2 000 000 ...	6,30103	2,07918	2,17004	120	148
3 000 000 ...	6,47712	1,77085	1,79684	59	63
4 000 000 ...	6,60206	1,49136	1,52115	31	33
5 000 000 ...	6,69897	1,30103	1,30103	20	20

Também neste caso, a curva interpoladora apresenta uma descrição suficiente do andamento geral da distribuição. A

(15) Comparem-se as discriminações de classes constantes das tabelas II e III.



aproximação obtida é menor, porém, do que a da aplicação precedente. Nota-se, em particular, que os valores calculados de  $y$  ficam inferiores aos observados em correspondência a todos os valores dados de  $x$ , de 30 000 a 300 000, e superiores em correspondência a todos os de 500 000 a 4 000 000.

Sem dúvida, fazendo-se passar a curva por três pontos escolhidos com critério diverso, ou adotando-se outro processo de interpolação, poder-se-ia obter uma aproximação maior; preferi, entretanto, não alterar o critério adotado, para manter a coerência com as outras elaborações realizadas.

Assim como foi feito para a interpolação dos dados de 1945, também para esta dos dados de 1946 podem ser útilmente comparados os números de contribuintes discriminados segundo classes de renda, calculados e observados. A comparação é realizada na tabela VII, reduzindo-se um pouco o número das classes em confronto com a discriminação constante da tabela III.

TABELA VII

COMPARAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA DOS CONTRIBUINTES SEGUNDO CLASSES DE RENDA E A CALCULADA (1946)

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	CONTRIBUINTES	
	Observados	Calculados
De mais de 24 a 30 .....	21 879	23 299
De mais de 30 a 60 .....	51 577	50 639
De mais de 60 a 120 .....	26 618	26 023
De mais de 120 a 200 .....	9 325	9 501
De mais de 200 a 400 .....	5 964	5 901
De mais de 400 a 600 .....	1 576	1 492
De mais de 600 a 800 .....	674	601
De mais de 800 a 1 000 .....	234	302
De mais de 1 000 a 3 000 .....	436	521
De mais de 3 000 a 5 000 .....	39	43
Mais de 5 000 .....	20	20

Os desvios entre a distribuição calculada e a observada são moderados nos intervalos de 24 000 a 400 000 cruzeiros e de 3 000 000 e mais; relativamente elevados especialmente no

intervalo de 800 000 a 3 000 000 de cruzeiros. Em virtude do próprio critério adotado na interpolação, a soma dos dados calculados coincide com a dos observados, tanto no intervalo de 24 000 a 400 000 cruzeiros como no de 400 000 e mais.

O desvio médio absoluto entre os dados interpolados e os observados corresponde a 2,96 % da média destes; a média dos valores absolutos dos desvios relativos, porém, atinge 8,04 %.

Querendo-se confrontar entre si as distribuições dos contribuintes nos dois exercícios, com o auxílio das fórmulas interpoladoras, pode-se calcular, pela diferença entre a (5) e a (4), o logaritmo da razão  $R(y)$  entre o número de contribuintes com rendas superiores a cada valor de  $x$  em 1946 e o número correspondente em 1945.

Obtém-se :

$$\log R(y) - 0,93563 = 0,34511 \log x + 0,03434 \log^2 x \quad (6)$$

Calculando-se, pela precedente equação, os valores de  $R(y)$ , para alguns valores de  $x$  em correspondência aos quais é conhecido o valor de  $y$  para ambos os exercícios, de 1945 e de 1946, obtêm-se os resultados que na tabela VIII são comparados com os obtidos pelo cálculo das respectivas razões de acôrdo com os dados observados.

TABELA VIII

RAZÃO ENTRE O NÚMERO DOS CONTRIBUINTES COM RENDA SUPERIOR A  $x$  EM 1946 E O EM 1945

$x$	$R(y)$	
	Observado	Calculado
30 000 .....	1,216	1,199
60 000 .....	1,210	1,177
120 000 .....	1,164	1,171
200 000 .....	1,132	1,178
400 000 .....	1,156	1,202
600 000 .....	1,156	1,225

Os valores calculados não diferem muito dos observados; a média dos primeiros é 1,192, a dos segundos, 1,172. Mas a

marcha das razões calculadas não reflete com suficiente aderência a das observadas, acentuando demasiado o crescimento nos últimos intervalos e, de outro lado, mostrando variações menos amplas do que as observadas (razões observadas : mínimo 1,132, máximo 1,216; razões calculadas : mínimo 1,171, máximo 1,225).

6. A representação analítica da renda total  $z$  dos contribuintes com renda individual superior a  $x$  pode ser realizada rigorosamente por uma fórmula do tipo (1),<sup>(16)</sup> se a distribuição dos contribuintes segue rigorosamente êsse tipo,<sup>(17)</sup> e, ainda, aproximativamente, se ela o segue com boa aproximação. Nos demais casos, de acôrdo com o tipo de fórmula que se demonstrar apropriado para representar a distribuição dos contribuintes, deverá ser escolhido o tipo, relacionado com o primeiro, presumivelmente mais apropriado para representar a distribuição das rendas.

A experiência demonstra que a fórmula geral (3) é suscetível de aplicação também para a representação da distribuição das rendas. E o exame dos diagramas da figura 3 sugere que no caso atual pode ser tentada essa aplicação, limitando-se inicialmente a fórmula aos primeiros três termos.

Interpolando a curva pelos pontos correspondentes aos valores de  $x$  de 12 000, 120 000 e 600 000 cruzeiros, obtém-se, para o exercício de 1945, a equação

$$\log z = 6,00480 + 2,03197 \log x - 0,25804 \log^2 x \quad (7)$$

Os valores de  $\log z$  e de  $z$  calculados mediante essa equação são comparados com os valores observados, na tabela IX. Como primeira aproximação, a descrição da distribuição das rendas dada pela função interpoladora pode ser considerada suficiente.

Creio útil repetir a advertência de que seria possível, e não difícil, obter maior aproximação pelo mesmo tipo de curva interpoladora, apenas escolhendo diversamente os três pontos dados ou adotando outro processo de interpolação.

(16) Repete-se a advertência exposta na nota 10.

(17) Todos os valores são arredondados em centenas de cruzeiros.

TABELA IX

INTERPOLAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DAS RENDAS LÍQUIDAS  
NO EXERCÍCIO DE 1945

z (Cruzeiros)	log z		z (Milhões de cruzeiros)	
	Observado	Calculado	Observado	Calculado
12 000 .....	9,99987	9,99987	9 997,1	9 997,1
20 000 .....	9,95990	9,97091	9 117,9	9 352,1
30 000 .....	9,91511	9,92986	8 224,5	8 508,6
60 000 .....	9,80951	9,82262	6 449,3	6 646,9
120 000 .....	9,66861	9,66861	4 662,4	4 662,4
200 000 .....	9,54008	9,52517	3 468,0	3 351,0
400 000 .....	9,30248	9,28993	2 006,1	1 949,5
600 000 .....	9,13064	9,13064	1 350,9	1 350,9

A fim de que possa ser melhor avaliada a aproximação conseguida, compararam-se, na tabela X, os dados observados com os calculados, segundo classes de renda líquida individual. A interpolação dá valores superiores aos observados, nas classes centrais, e inferiores, nas iniciais e finais (exceto a última, onde, pelo próprio critério adotado, fica assegurada a igualdade entre o dado interpolado e o observado).

O desvio médio absoluto entre os dados interpolados e os observados corresponde a 8,02 % da média destes; a média dos valores absolutos dos desvios relativos ascende a 8,84 %.

Aplicando-se a mesma fórmula para a representação da distribuição das rendas no exercício de 1946, e interpolando-se a curva pelos pontos correspondentes aos valores de  $x$  de 24 000, 400 000 e 5 000 000 de cruzeiros, obtém-se a equação

$$\log z = 7,48092 + 1,43944 \log x - 0,19633 \log^2 x \quad (8)$$

Os valores de  $\log z$  e de  $z$  calculados mediante essa equação são comparados com os observados, na tabela XI. A adaptação da equação (8) para a descrição dos dados de 1946 é ainda menos satisfatória do que a da (7) para os dados de

TABELA X

COMPARAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA DAS RENDAS LÍQUIDAS SEGUNDO CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL E A CALCULADA (1945)

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	RENDAS LÍQUIDAS (Milhões de cruzeiros)	
	Observadas	Calculadas
De mais de 12 a 20 .....	879,2	645,0
De mais de 20 a 30 .....	893,4	843,5
De mais de 30 a 60 .....	1 775,2	1 861,7
De mais de 60 a 120 .....	1 786,9	1 984,5
De mais de 120 a 200 .....	1 194,4	1 311,4
De mais de 200 a 400 .....	1 461,9	1 401,5
De mais de 400 a 600 .....	655,2	598,6
Mais de 600 .....	1 350,9	1 350,9

TABELA XI

INTERPOLAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DAS RENDAS LÍQUIDAS NO EXERCÍCIO DE 1946

z (Cruzeiros)	log z		z (Milhões de cruzeiros)	
	Observado	Calculado	Observado	Calculado
24 000 .....	10,01911	10,01911	10 449,9	10 449,9
30 000 .....	9,99393	9,99009	9 861,3	9 774,4
60 000 .....	9,88587	9,87640	7 689,0	7 523,2
90 000 .....	9,80606	9,79340	6 398,2	6 214,4
120 000 .....	9,73830	9,72713	5 473,9	5 334,9
150 000 .....	9,68460	9,67151	4 837,2	4 693,6
200 000 .....	9,60734	9,59435	4 048,9	3 929,6
300 000 .....	9,48465	9,47520	3 052,5	2 986,8
400 000 .....	9,38327	9,38327	2 416,9	2 416,9
500 000 .....	9,29693	9,30775	1 981,2	2 031,2
600 000 .....	9,21872	9,24331	1 654,7	1 751,1
700 000 .....	9,14446	9,18690	1 394,6	1 537,8
800 000 .....	9,07653	9,13662	1 192,7	1 369,7
900 000 .....	9,03471	9,09117	1 083,2	1 233,4
1 000 000 .....	8,99317	9,04964	984,4	1 121,1
2 000 000 .....	8,69250	8,75594	492,6	570,1
3 000 000 .....	8,54185	8,56765	348,2	369,2
4 000 000 .....	8,40590	8,42667	254,6	267,1
5 000 000 .....	8,31309	8,31309	205,6	205,6

1945; todavia ela pode ser considerada aceitável como primeira aproximação, pois que indica claramente o andamento geral da distribuição.

TABELA XII

COMPARAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA DAS RENDAS LÍQUIDAS SEGUNDO CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL E A CALCULADA (1946)

CLASSES DE RENDA LÍQUIDA INDIVIDUAL (Milhares de cruzeiros)	RENDAS LÍQUIDAS (Milhões de cruzeiros)	
	Observadas	Calculadas
De mais de 24 a 30 .....	588,6	675,5
De mais de 30 a 60 .....	2 172,3	2 251,2
De mais de 60 a 120 .....	2 215,1	2 188,3
De mais de 120 a 200 .....	1 425,0	1 405,3
De mais de 200 a 400 .....	1 632,0	1 512,7
De mais de 400 a 600 .....	762,2	665,8
De mais de 600 a 800 .....	462,0	381,4
De mais de 800 a 1 000 .....	208,3	248,6
De mais de 1 000 a 3 000 .....	636,2	751,6
De mais de 3 000 a 5 000 .....	142,6	163,9
Mais de 5 000 .....	205,6	205,6

A comparação, feita na tabela XII, entre os dados observados da distribuição das rendas segundo classes de renda individual do contribuinte e os calculados, mediante subtrações, pelos dados interpolados da última coluna da tabela XI, põe em evidência que êstes ficam inferiores àqueles nas classes centrais e superiores nas iniciais e finais (exceto a última), justamente ao contrário do que se verifica na interpolação para o exercício anterior.

O desvio médio absoluto entre os dados interpolados e os observados corresponde a 6,56 % da média dêstes; a média dos valores absolutos dos desvios relativos ascende a 10,07 %.

Em virtude da divergência no sentido dos afastamentos entre os dados interpolados e os observados nos dois exercícios, calculando-se a razão  $R$  ( $z$ ) entre a renda total dos con-

tribuintes com renda superior a  $x$  no exercício de 1946 e a no exercício de 1945, pela equação, obtida como diferença das (8) e (7),

$$\log R(z) = 1,47612 - 0,59253 \log x + 0,06171 \log^2 x, \quad (9)$$

chega-se a valores dessa razão diferentes em medida não desprezível dos que se podem obter comparando diretamente os valores de  $z$  observados nos dois exercícios.

TABELA XIII

RAZÃO ENTRE A RENDA TOTAL DOS CONTRIBUINTES  
COM RENDA SUPERIOR A  $x$  EM 1946 E A EM 1945

$x$	$R(z)$	
	Observado	Calculado
30 000 .....	1,199	1,149
60 000 .....	1,192	1,132
120 000 .....	1,174	1,144
200 000 .....	1,168	1,173
400 000 .....	1,204	1,240
600 000 .....	1,225	1,296

A média das razões calculadas, 1,189, difere bem pouco da média das observadas, 1,194; mas a marcha das duas séries é diferente e a variação das razões calculadas (mínima 1,132, máxima 1,296) mais ampla do que a das observadas (mínima 1,168, máxima 1,225).

7. A razão entre os valores de  $z$ , soma das rendas dos contribuintes com renda superior a  $x$ , e de  $y$ , número destes contribuintes, correspondentes ao mesmo valor de  $x$ , dá a renda média individual do grupo considerado.

Essa razão pode ser calculada diretamente, pelos dados observados, ou indiretamente, pelas funções interpoladoras.

TABELA XIV

COMPARAÇÃO ENTRE A RENDA MÉDIA INDIVIDUAL DOS CONTRIBUINTES COM RENDA SUPERIOR A  $x$  OBSERVADA E A CALCULADA (1945 E 1946)

$x$ (Cruzeiros)	$M_{45}$ (Cruzeiros)		$M_{46}$ (Cruzeiros)	
	Observada	Calculada	Observada	Calculada
30 000 .....	103 700	107 300	102 200	105 200
60 000 .....	173 800	176 100	171 300	169 400
120 000 .....	297 100	297 100	299 600	290 300
200 000 .....	439 000	444 600	452 700	442 500
400 000 .....	778 800	786 800	811 300	811 300
600 000 .....	1 112 800	1 112 800	1 179 400	1 177 800

Simbolizando-se por  $M_{45}$  o valor dessa razão considerada como função de  $x$ , para o exercício de 1945, obtém-se, pela diferença entre as equações (7) e (4), a sua representação analítica :

$$\log M_{45} = 3,24967 + 0,10122 \log x + 0,06625 \log^2 x. \quad (10)$$

O cálculo paralelo para o exercício de 1946 dá :

$$\log M_{46} = 3,79016 - 0,14620 \log x + 0,09362 \log^2 x. \quad (11)$$

Comparam-se, na tabela XIV, alguns valores observados das razões  $M_{45}$  e  $M_{46}$  com os calculados, respectivamente, pela equação (10) e pela (11).

A aproximação é suficiente para o objetivo da descrição geral; as equações (10) e (11) permitem calcular os valores, respectivamente, de  $M_{45}$  e de  $M_{46}$ , também em correspondência a valores de  $x$  intermédios aos dados pela observação. Advirta-se que a coincidência entre os valores calculados e os observados, em correspondência aos valores de  $x$  de 120 000 e 600 000 cruzeiros em 1945 e de 400 000 em 1946 não é casual, sendo consequência necessária do próprio critério adotado para a interpolação.



8. A representação analítica das distribuições de contribuintes e de rendas pode ser aproveitada para a determinação de valores de  $y$  e de  $z$  não constantes das apurações disponíveis.

Na aplicação atual, por exemplo, torna-se interessante determinar o número  $y$  e a renda total  $z$  dos contribuintes com renda individual superior a  $x = 24\ 000$  cruzeiros, no exercício de 1945, para poder compará-los com os correspondentes dados conhecidos para o exercício de 1946, no qual o limite de isenção foi elevado justamente para 24 000 cruzeiros.

A estatística de 1945 (tabela II) não fornece êstes dados, só permitindo determinar os valores de  $y$  e de  $z$  em correspondência aos valores de  $x$  de 12 000, 20 000 e 30 000 cruzeiros.

Interpolando, pelos pontos correspondentes a êsses três valores dados, curvas do tipo (3), obtêm-se, respectivamente, as equações <sup>(18)</sup>

$$\log y = 1,48369 + 2,52578 \log x - 0,39375 \log^2 x, \quad (12)$$

$$\log z = 7,46479 + 1,38177 \log x - 0,18639 \log^2 x, \quad (13)$$

as quais, para  $x = 24\ 000$ , dão, respectivamente <sup>(19)</sup>:

$$y = 98\ 301 \qquad z = 8\ 733,5 \text{ milhões de cruzeiros.}$$

(18) Se a adaptação da fórmula empírica (3) para a representação das distribuições observadas fôsse perfeita, dever-se-ia obter a mesma equação de qualquer maneira que fôsse efetuada a interpolação, e, em particular, a equação (12) deveria ser idêntica à (4), e a (13) à (7).

A comparação mostra que, pelo contrário, os valores dos parâmetros correspondentes diferem fortemente em ambos êsses pares de equações.

As equações (12) e (13), especialmente apropriadas para representar o intervalo inferior das distribuições, tornam-se insuficientemente aproximadas para representar o intervalo superior. Por exemplo, para  $x=600\ 000$ , a (12) dá  $y=855$ , enquanto o valor observado é 1 214; e a (13) dá  $z=1\ 682,1$  milhões de cruzeiros, enquanto o valor observado é 1 350,9 milhões.

(19) Os resultados expostos são os aludidos na nota 9.

Mediante os resultados desses cálculos podem-se comparar as situações nos dois exercícios.

ESPECIFICAÇÃO	1945	1946
Contribuintes com renda superior a 24 000 cruzeiros .....	98 301	118 342
Renda total desses contribuintes (milhões de cruzeiros) .....	8 733,5	10 449,9
Renda média individual desses contribuintes (milhares de cruzeiros) .....	88,8	88,3

Naturalmente, os valores para o exercício de 1945, determinados pela interpolação, não coincidem exatamente com os que seriam dados pela apuração dos elementos coletados pela Divisão do imposto de renda, mas parece provável que os representem com suficiente aproximação.

A comparação <sup>(20)</sup> mostra que o número dos contribuintes com renda superior a 24 000 cruzeiros aumentou fortemente (de 20,39%) de 1945 a 1946, mas que a sua renda total aumentou em proporção levemente menor (de 19,65%), justamente porque a larga afluência de contribuintes dos degraus não superiores a 24 000 cruzeiros para os superiores a esse limite fez baixar ligeiramente (de 0,61%) a renda média individual dos contribuintes com renda superior a 24 000 cruzeiros.

Cumprе lembrar que o aparente rápido aumento dos contribuintes com rendas elevadas é, totalmente ou pelo menos em parte preponderante, apenas um efeito da subida dos preços dos bens materiais e dos serviços, determinada pela inflação monetária e por outras circunstâncias características da economia do período bélico, representando um aumento nominal mas não real.

Não quero aprofundar aqui a análise desse assunto, tendo já em outro estudo <sup>(21)</sup> examinado comparativamente as distribuições dos contribuintes e das rendas em 1945 e em 1946.

(20) Fica desprezado nessa comparação, em consideração à sua escassa relevância, o fato de que os dados de 1945 não abrangem o Estado de Sergipe.

(21) Estudo já citado na nota 7.

9. As elaborações realizadas nos parágrafos anteriores mostram que as distribuições, constantes das estatísticas do Brasil, das pessoas físicas contribuintes para o impôsto de renda, e das respectivas rendas, segundo a renda individual, apresentam andamentos tendencialmente regulares. As apurações brasileiras, portanto, oferecem aos estudiosos das ciências sociais mais um exemplo dessa regularidade, observada em muitos países e em diferentes épocas.

A regularidade das referidas distribuições torna possível e útil a sua representação analítica aproximativa. A descrição conseguida pelas fórmulas empíricas facilita as comparações e permite obter discriminações que não constavam da apuração.

Para a representação das distribuições observadas no Brasil revela-se insuficiente a fórmula de primeira aproximação de PARETO. Obtém-se, porém, aproximação suficiente, para fins descritivos, mediante a aplicação de outra fórmula, que pode ser considerada uma generalização daquela proposta pelo grande economista italiano.

### SUMMARY

*In the author's opinion, empirical formulas, in the field of economic phenomena, may be considered as a useful but only descriptive process, not being apt to lead to the determination of real laws. According to this conception, he tests the possibility of representing by an empirical formula, with a sufficient approximation for the end of description, the distributions of the taxpayers and of their incomes assessed for the income tax in Brazil, as functions of the individual income.*

*The logarithmic diagram of these distributions, being curvilinear, makes evident that PARETO's first approximation formula, to which, in this type of diagram, corresponds a straight line, is unsuitable for their representation, and suggests the application of a function of the second grade (in lo-*

garithms). By this formula, a sufficient approximation of the description is obtained.

The data of the income tax statistics are those for the financial years 1945 and 1946.

### RESUMÉ

L'auteur — en considérant la détermination de formules empiriques propres pour la représentation de séries statistiques, dans le domaine des phénomènes économiques, comme un procès simplement descriptif, utile mais non susceptible de révéler de vraies lois — examine la possibilité de représenter par une formule empirique, avec une approximation suffisante au but de la description, les distributions, observées au Brésil, des contribuables de l'impôt sur le revenu, et de leurs revenus totaux, en fonction du revenu individuel.

Ayant exclu, par l'examen des diagrammes logarithmiques, la possibilité d'application de la formule de première approximation de PARETO, à laquelle correspond une ligne droite dans ce type de diagramme, il fait un essai d'application d'une fonction, représentée, dans cette expression graphique, par une courbe parabolique, obtenant ainsi des approximations qu'il juge suffisantes pour l'objectif de la simple description.

Les données élaborées par l'auteur sont celles observées dans les exercices financiers de 1945 et de 1946.