Algoritmos para determinação de taxas internas de retorno de projetos de investimento simples: uma comparação das primeiras iterações*

Domingos Romualdo**
Flavio Auler**

Este artigo compara as primeiras iterações de diferentes algoritmos para determinação da taxa interna de retorno de projetos de investimento simples. São examinados os algoritmos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado e Boulding. Conclui-se que todos fornecem aproximações por falta para a taxa interna de retorno, sendo que a mais precisa das três é a do algoritmo de Boulding, seguida pela do algoritmo de Newton-Raphson modificado.

1. Introdução; 2. Os algoritmos; 3. Resultados preliminares; 4. Resultados principais; 5. Conclusão.

1. Introdução

O problema fundamental da análise de investimentos consiste em avaliar a economicidade de um projeto de investimento usualmente caracterizado pela sua seqüência de fluxos esperados, $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$. Admite-se, sem perda de generalidade, que $a_0 < 0$ e $a_n \neq 0$. Um dos critérios mais utilizados nesta avaliação é o da taxa de retorno, por definição igual à taxa de desconto que anula o valor atual da seqüência de rendimentos esperados do projeto. Analiticamente, se

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j}$$

é o valor atual do projeto à taxa de desconto i, i^* é a taxa interna de retorno do projeto se e só se $V(i^*) = 0$. De acordo com tal critério, o projeto deve ser realizado quando a taxa de desconto de mercado for inferior à taxa interna de retorno. Uma discussão completa deste assunto, no que concerne às condições para sua aplicabilidade, encontra-se em Faro (1985). Devemos mencionar, entretanto, que é necessário que a taxa de retorno exista e seja única, para que possamos cogitar de analisar o projeto desta maneira.

* Os autores agradecem a Clovis de Faro pela assistência e orientação durante a elaboração deste trabalho.

** Da EPGE/FGV.

Assegurada a aplicabilidade deste critério, defrontamo-nos com um problema de ordem prática: calcular o valor númerico da (única) taxa interna de retorno $i*$. Uma vez que $V(i)$ é um polinômio em $(1+i)^{-1}$, este problema se reduz à determinação de raízes de polinômios. Esta não é possível por meios elementares senão para polinômios de grau menor do que 5. Descartada a busca das raízes exatas de $V(i)$, só resta ao analista a determinação de valores aproximados de i^*, o que usualmente se faz por métodos numéricos iterativos.

Dentre os algoritmos disponíveis, destaca-se o de Newton-Raphson, de grande eficiência e, por isso mesmo, muito empregado. Sua convergência, entretanto, está condicionada a certas características do formato do gráfico da função $V(i)$, que não se verificam para todos os projetos de investimento. Um outro procedimento, proposto por Boulding (1936), de maneira geral produz aproximações melhores do que as de Newton-Raphson, como constatou empiricamente Faro (1978, 1983). Entretanto, a literatura concernente ao algoritmo de Boulding é escassa, e a demonstração de sua convergência, ao que sabemos, foi feita apenas para objetos de investimento simples (sobre isto, ver Klinger, anexo a Faro, 1983).

Objetivamos apresentar alguns resultados iniciais a este respeito. Para o caso de projetos de investimento simples com taxa interna de retorno positiva, (isto é, $i* > 0$) compararemos a qualidade das primeiras iterações dos dois algoritmos e de uma versão algo modificada do algoritmo de Newton-Raphson. O artigo está dividido do seguinte modo: na seção 2, apresentam-se os pré-requisitos à leitura do texto; a seção 3 contém os temas usados na demonstração dos resultados principais, que estão na seção 4; a seção 5 conclui o artigo.

2. Os algoritmos

Inicialmente, caracterizamos os projetos de investimento do tipo simples. Diz-se que um projeto de investimento com fluxos de caixa esperados $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ é do tipo simples se:

i) $a_0 < 0$

ii) $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1} \geqslant 0$

iii) $a_n > 0$

O valor atual deste projeto depende da taxa de juros i, de acordo com a relação:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} ; i > -1$$

Utilizando as regras do cálculo diferencial, é fácil verificar que V é função estritamente decrescente e convexa de i.

Como

$$\lim_{i \to -1} V(i) = +\infty \qquad ; \lim_{i \to +\infty} V(i) = a_0 < 0,$$

concluímos imediatamente a existência e a unicidade da taxa interna de retorno i^*, o que justifica a utilização de algoritmos para sua determinação.

Neste trabalho, nos restringimos ao caso $i^* > 0$, não levando em conta aqueles em que $i^* < 0$. Ou seja, levamos em conta os casos em que $V(i)$ tem o gráfico da figura 1*a*, e excluímos a possibilidade da ocorrência de 1*b*.

Figura 1*a*

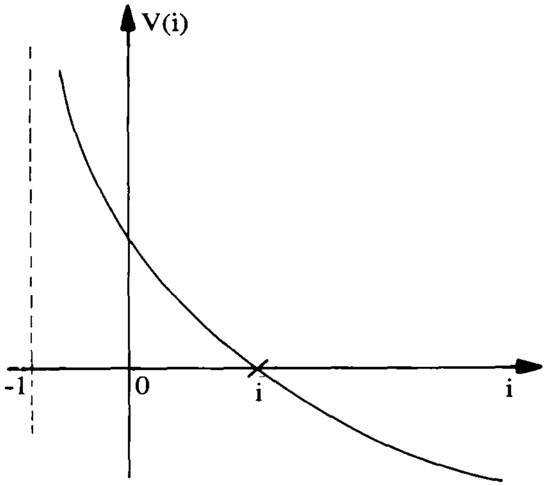
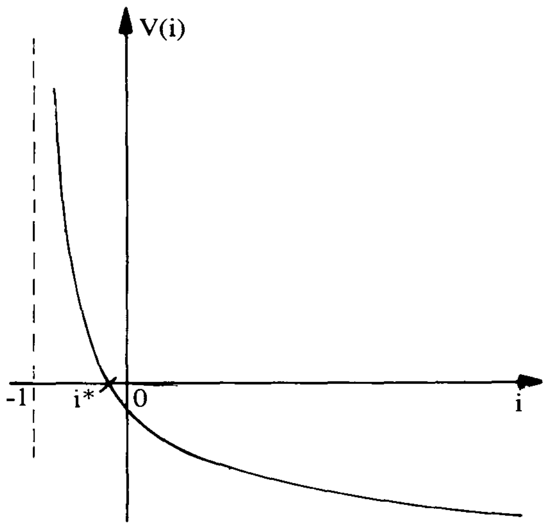


Figura 1*b*

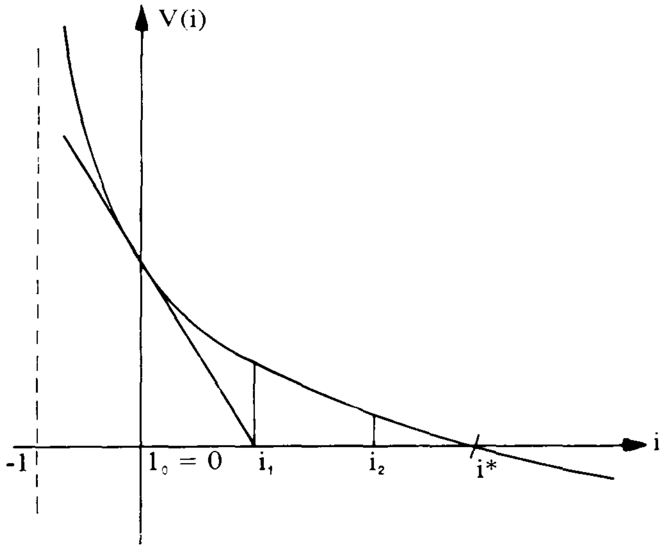


Uma condição necessária e suficiente para que $i* > 0$ é que $V(0) > 0$, ou seja, $\sum_{j=0}^{n} a_j > 0$. Daqui por diante, supomos válida esta relação.

Passemos agora à descrição dos algoritmos. Antes, frisamos que, como em todo processo iterativo é preciso ter uma condição inicial, arbitramos como primeira aproximação, o valor $i_0 = 0$, e a partir deste valor calculamos as iterações seguintes.

A idéia geométrica que motiva o algoritmo de Newton-Raphson está apresentada na figura 2.

Figura 2



A partir de $i_0 = 0$, traçamos a reta tangente ao gráfico de $V(i)$; i_1 será o ponto em que esta reta cortar o eixo $0i$. De modo geral, i_{k+1} será o ponto onde a tangente ao gráfico $V(i)$ no ponto $(i_k, V(i_k))$ corta o eixo $0i$. É fácil perceber (e demonstrar, o que não faremos) que, no nosso caso, devido às características particulares de $V(i)$, este processo produz uma seqüência crescente que converge para $i*$.

O valor de i_1 (NR) (símbolo que significará a primeira iteração do algoritmo de Newton-Raphson) pode ser determinado pelo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{V(i_1(NR)) - V(0)}{i_1(NR) - 0} = V'(0) \\ V(i_1(NR)) = 0 \end{cases}$$

o que implica:

$$i_1\ (NR) = -\ \frac{V(0)}{V'(0)}$$

ou seja:

$$i_1\ (NR) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{\sum_{j=0}^{n} j a_j}$$

No nosso problema, o algoritmo de Newton-Raphson modificado consiste na aplicação do processo de Newton-Raphson não a *V(i)*, mas a uma função diferente. Mais especificamente, se efetuarmos a mudança de variável

$$x = (1+i)^{-1}$$

concluiremos que ao valor $i_0 = 0$ corresponde $x_0 = 1$. O processo de Newton-Raphson aplicado à função $F(x)$ dada por:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = F(x)$$

com aproximação inicial $x_0 = 1$ produz uma seqüência $\{ x_k \}$, à qual corresponde uma seqüência $\{i_k\}$ de aproximações para i^*, onde

$$x_k = (1+i_k)^{-1}$$

O valor da primeira iteração deste algoritmo de Newton-Raphson modificado será denotado por i_1 (NRM). Trataremos, pois, de calcular seu valor. Temos que X_1 está determinado por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \dfrac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = F'(x_0) \\ F(x_1) = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$x_1 = -\ \frac{F(1)}{F'(1)} + 1 = \frac{-\sum_{j=0}^{n} a_j}{\sum_{j=0}^{n} j a_j} + 1$$

Uma vez que

$$x_1 = \frac{1}{1+i_1 \text{ (NRM)}}$$

temos

$$i_1 \text{ (NRM)} = \frac{1-x_1}{x_1} = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j / \sum_{j=0}^{n} ja_j}{1 - (\sum_{j=0}^{n} a_j \ / \ \sum_{j=0}^{n} ja_j)}$$

ou

$$i_1 \text{ (NRM)} = i_1 \text{ (NR)}/\{1-i_1 \text{ (NR)}\}$$

Não apresentaremos aqui a descrição completa do processo de Boulding para a determinação da taxa de retorno do projeto; o leitor interessado pode se referir a Faro (1983). Nos limitaremos a apresentar a expressão para o valor de sua primeira iteração, que se garante válida apenas para o caso de projeto de investimento simples:

$$i_1 \text{ (B)} = \left(- \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_0} \right)^{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \ / \ \sum_{j=1}^{n} ja_j \right)} - 1$$

3. Resultados preliminares

Nesta seção, demonstramos dois lemas utilizados na seção seguinte. Para sua compreensão, é necessário apenas que o leitor conheça resultados elementares do cálculo integral e o fato que o gráfico de uma função convexa se situa abaixo da corda traçada por dois de seus pontos.

Lema 1:

Se $x > 1$, então
$$x-1 > \ln x > 1 - \frac{1}{x},$$

onde: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

Demonstração:

Se $t \in (1,x)$, temos:

$$0 < 1 < t < x \Rightarrow$$

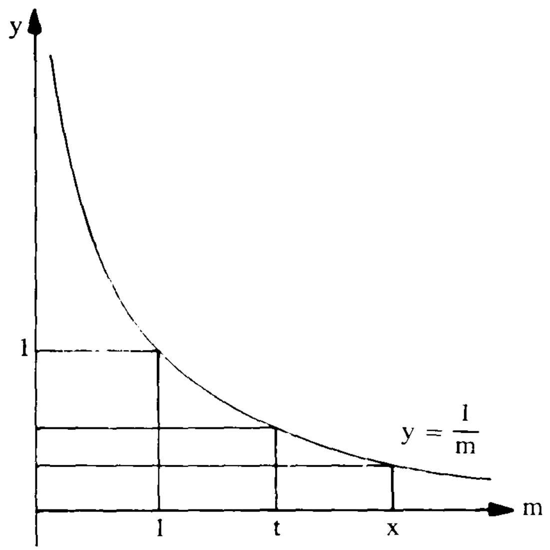
$$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{t} < 1.$$

Integrando de 1 a x temos:

$$\int_1^x \frac{1}{x}\,dt < \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < \int_1^x 1\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}(x-1) < \ell n t \Big|_1^x < 1.(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 > \ell n\, x > 1 - \frac{1}{x} \quad \square$$



O lema a seguir também é conhecido como desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Lema 2:

Se $x_1, x_2, \ldots x_n$ são números reais positivos $(n \geq 2)$,

$t_j \in [0,1]$ para $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ℓ $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, então:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n$$

Demonstração:

Seja $y_j = \ell n\, x_j$. De acordo com Lima (1978, p. 237), a convexidade da função $f(y)=e^y$ implica as seguintes hipóteses:

$$f(t_1 y_1 + t_2 y_2 + \ldots + t_n y_n) \leqslant t_1 f(y_1) + t_2 f(y_2) + \ldots + t_n f(y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 y_1 + t_2 y_2 + \ldots + t_n y_n \leqslant t_1 e^{y_1} + t_2 e^{y_2} + \ldots + t_n e^{y_n}$$

$\Rightarrow e$

como $e^{y_i} = x_i$, e $t_1 y_1 + t_2 y_2 + \ldots + t_n y_n = t_1 \ell n x_2 + \ldots + t_n \ell n x_n$

$$= \ell n x_1^{t_1} + \ell n\, x_2^{t_2} + \ldots + \ell n x_n^{t_n} = \ell n\, (x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}),$$ temos:

$$\ell n\, (x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}) \leqslant t_1\, x_1 + t_2\, x_2 + \ldots + t_n\, x_n \rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} \leqslant t_1\, x_1 + t_2\, x_2 + \ldots + t_n\, x_n \square$$

4. Resultados principais

Nesta seção, demonstramos o teorema 1: se $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ é a seqüência de rendimentos esperados de um projeto de investimento do tipo simples, com taxa interna de retorno $i^* > 0$, então:[1]

$$i_1\,(NR) < i_1\,(NR) < i_1(B) \leqslant i^*$$

Demonstração

Temos:

$$i_1(NR) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{\sum_{j=0}^{n} j a_j} > 0, \text{ pois } \sum_{j=0}^{n} a_j > 0 \text{ e } \sum_{j=0}^{n} j a_j > 0$$

[1] O fato de que $i_1\,(NR) < i_1\,(NRM)$ e $i_1(NR) < i_1\ (B)$ já havia sido demonstrado, de uma maneira alternativa, em Faro (1978), para uma determinada classe de projetos de investimento simples.

Além disso.

$$0 < \sum_{j=0}^{n} a_j < \sum_{j=1}^{n} a_j < \sum_{j=1}^{n} ja_j \Rightarrow \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{\sum_{j=0}^{n} ja_j} < 1$$

Assim,

$$0 > i_1(NR) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > 1\text{-}i_1(NR) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1\text{-}i_1(NR)} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{i_1(NR)}{1\text{-}i_1(NR)} > i_1(NR)$$

Como $i_1(NRM) = \dfrac{i_1(NR)}{1\text{-}i_1(NR)}$, temos $i_1(NRM) > i_j(NR)$

Sejam:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} ja_j}$$

$$X = - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_0}$$

então, $0 < C < 1$ e $X > 1$.

Temos

$$i_1(NR) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} ja_j} = \frac{a_0}{\sum_{j=1}^{n} ja_j} + \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} ja_j} = - \frac{1}{X}.C + C = C\left(\frac{X-1}{X}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1(NRM) = \frac{i_1(NR)}{1-i_1(NR)} = \frac{C(X-1)}{X} \cdot \frac{1}{1-\frac{C(X-1)}{X}} = \frac{C(X-1)}{X-CX+C}$$

Como i_1 (B) = X^c-1, a desigualdade $i_1(B) > i_1$ (NRM) equivale a:

$$X^c - 1 > \frac{C(X-1)}{(X-1)(1-C)+1}, \text{ com } C \in (0,1) \text{ e } X > 1,$$

ou, o que é o mesmo

$$\left[\frac{(X-1)(1-C)+1}{C}\right]\left(\frac{X^c-1}{X-1}\right) > 1, \text{ para } X > 1.$$

Definindo

$$f(X) = \begin{cases} 1, X=1 \\ \left[\dfrac{(X-1)(1-C)+1}{C}\right]\left[\dfrac{X^c-1}{X-1}\right], X > 1, \end{cases}$$

temos de provar que $f(X) > 1$ para $X > 1$. Procederemos em dois passos:

i) f é contínua para $X = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{X\to 1}\left[\dfrac{(X-1)(1-C)+1}{C}\right] = \dfrac{1}{C} \\ \\ \lim\limits_{X\to 1}\dfrac{X^c-1}{X-1} = C \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{X\to 1} f(X) = \frac{1}{C} \cdot C = 1 = f(1)$$

(O segundo limite é, por definição, a derivada de X^c para X=1.)

ii) $f'(X) > 0$ para $X > 1$:

Temos:

$$f'(X) = \frac{(X-1)\{(1-C)(X^c-1)+[(X-1)(1-C)+1]CX^{c-1}\}-[(X-1)(1-C)+1](X^c-1)}{C(X-1)^2} =$$

$$= \frac{(X-1)[(X-1)(1-C)+1]CX^{c-1}-(X^c-1)}{C(X-1)^2} =$$

$$= \frac{X^{c-1}[C(1-C)(X-1)^2 - (1-C)(X-1) - 1] + 1}{C(X-1)^2} =$$

Devemos então provar que, para $X > 1$,

$$g(X) = X^{c-1}[C(1-C)(X-1)^2 - (1-C)(X-1)-1]+1 > 0 \text{ para } X > 1$$

Como $g(1) = 0$,

$$g'(X) = X^{c-1}[2C(1-C)(X-1) - (1-C)] +$$

$$+ (C-1)X^{c-2}[C(1-C)(X-1)^2 - (1-C)(X-1) - 1] =$$

$$= X^{c-2}[2C(1-C)(X-1)^2 - (1-C)(X-1)+2C(1-C)(X-1)-(1-C)+$$

$$- C(1-C)^2 (X-1)^2+(1-C)^2(X-1) + (1-C)] =$$

$$= X^{c-2}[C(1-C)(1+C)(X-1)^2 + C(1-C)(X-1)] > 0,$$

concluiremos que $g'(X) > 0$ para $X > 1$. Desse modo,

$f'(X) = \dfrac{g(X)}{C(X-1)^2} > 0$ se $X>1$, e assim $f(X) > f(1) = 1$, para todo $X > 1$.

Quanto à última desigualdade, pelo exposto na seção 2 sobre as propriedades da função $V(1)$, concluímos que

$$i_1(B) \leqslant i^* \Leftrightarrow V(i_1(B)) \geqslant 0$$

Passemos agora à demonstração desta desigualdade.

Temos:

$$\left.\begin{array}{c} i_1(B) = X^c-1 \\ \hline V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(i_1(B)) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^{-jc}$$

logo

$$V(i_1(B)) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j X^{-jc} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j X^{-jc} \geq -a_0$$

Defina-se

$t_j = \dfrac{a_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$; então $t_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$. Pelo lema 2 da seção anterior.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j X^{-jc} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k} X^{-jc} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \sum_{j=1}^{n} t_j X^{-jc} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \prod_{j=1}^{n} (X^{-c})^{jt_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) (X^{-c})^{\sum_{j=1}^{n} jt_j}$$

mas:

$$\sum_{j=1}^{n} jt_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} ja_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{C}, \text{ logo:}$$

$$\sum_{j=k}^{n} a_j X^{-jc} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \frac{1}{X} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \frac{(-a_0)}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)} = -a_0$$

portanto, $i_1(B) \leq i^*$ □

Embora tenha ficado demonstrado que $i_1(NR) < i_1(B)$ (pois $i_1(NR) < i_1(NRM) < i_1(B)$ é possível dar uma demonstração direta desse fato. É o que fazemos a seguir, embora incorrendo em redundância, em virtude da simplicidade da demonstração.

Teorema 2:

Nas condições acima,

$$i_1(NR) < i_1(B)$$

demonstração:

Temos:

$$i_1(NR) = \frac{C(X-1)}{X}$$

$$i_1(B) = X^c - 1.$$

Então, pelo lema 1 da seção anterior:

$$\left.\begin{matrix} X > 1 \\ C > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow X^c > 1 \quad i_1(B) = X^c - 1 > \ell n X^c = C \ell n X >$$

$$> \frac{C(X-1)}{X} = i_1 (NR)$$

5. Conclusão

Os resultados apresentados indicam que o algoritmo de Boulding provê uma melhor aproximação inicial do que as duas formas do algoritmo de Newton-Raphson. Assim, temos uma razão para preferi-lo, quando do cálculo da taxa interna de retorno.

Três questões, no entanto, ficam em aberto. Em primeiro lugar, deve-se perguntar se esta maior velocidade de convergência do algoritmo de Boulding em relação aos de Newton-Raphson se mantém nas iterações subseqüentes. Em segundo lugar, caso a resposta à primeira questão seja sim, devemos ponderar os custos de determinação dos valores das diversas iterações dos algoritmos. As aproximações dos algoritmos de Newton-Raphson (tradicional e modificado) se determinam com as quatro operações, enquanto as aproximações do algoritmo de Boulding envolvem uma exponenciação com expoente de maneira geral não-inteiro, sendo portanto uma operação mais complicada e custosa. Além disso, resta a questão da convergência do algoritmo de Boulding.

De qualquer modo, os teoremas demonstrados constituem um primeiro argumento teórico a favor do algoritmo de Boulding, para a classe de projeto do tipo investimento simples.

Abstract

This paper compares the first iterations of different algorithms to determi-

ne the internal rate of return on simple-investment projects. Newton-Raphson, modified Newton-Raphson, and Boulding algorithms are studied. The conclusion reached is that all of them provide approximations that are smaller than the actual internal rate of return, the most precise of the three being the Boulding algorithm, followed by the modified Newton-Raphson.

Referências bibliográficas

Boulding, K.E. *Time and Investment Economic,* *3*(10):196-200, May 1936.

Faro, Clovis de. Determinação da taxa de juros implícita em esquemas genéricos de financiamento: comparação entre os algoritmos de Wild e Newton-Raphson. Rio de Janeiro, FGV/EPGE, *Ensaios Econômicos,* n. 25, out. 1978.

——. Determinação numérica da taxa interna de retorno: confronto entre os algoritmos de Boulding e de Wild. *Revista Brasileira de Economia,* Rio de Janeiro, FGV, *37*(3):279-311, jul./set. 1983.

——. *A eficiência marginal e capital como critério de avaliação de projetos de investimentos.* Rio de Janeiro, Ibmec, 1985.

Lima, E.L. *Curso de análise.* Impa/CNPq, 1978. v. 1, Projeto Euclides.