Teoria econômica e caos

A. Araujo*

Sumário: 1. Introdução; 2. A teoria dos preços de ativos financeiros e o movimento browniano; 3. A indeterminação do equilíbrio geral walrasiano; 4. Teoria do capital; 5. Observações finais.

1. Introdução

De tempos em tempos aparece uma novidade científica que encontra popularidade junto ao grande público. Assim foi pelo menos com a geometria não-euclidiana e a teoria da relatividade, com a teoria das catástrofes, e agora com a teoria do caos. Infelizmente a ciência econômica se presta muito a esse tipo de atitude pseudocientífica. É fácil fazer associações superficiais entre caos e economia, principalmente em um país como o Brasil. Contudo, este perigo não deve nos impedir de estudar a teoria econômica tendo em mente os desenvolvimentos recentes da teoria matemática do caos, que tem sem dúvida alto conteúdo científico.

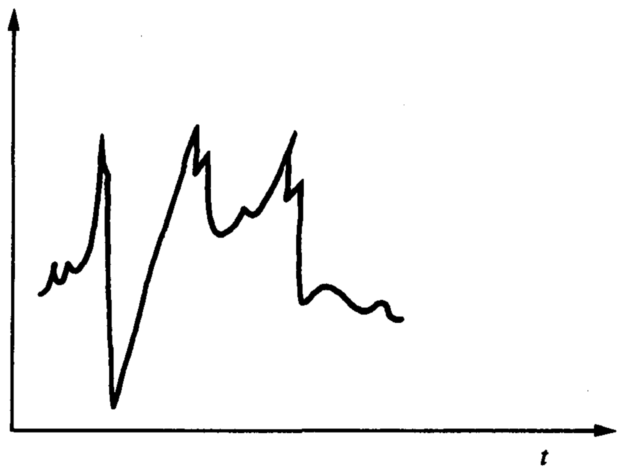
Vamos explorar aqui três aspectos distintos da teoria econômica em sua relação com a teoria do caos: a teoria dos preços de ativos financeiros, o equilíbrio geral econômico de Walras e a teoria do capital.

2. A teoria dos preços de ativos financeiros e o movimento browniano

Um fato notável, que pouca gente conhece, é que o matemático francês Louis Bachalier, em sua tese de doutorado de 1900 intitulada *Théorie de la spéculation*, tenha antecipado entre outros fatos matemáticos o movimento browniano e as equações de difusão. Mas, o que nos interessa aqui é a modelagem de preços de ações da Bolsa de Paris por uma transformação do movimento browniano.

É interessante notar que o grande matemático francês H. Poincaré, um dos precursores da teoria matemática do caos, era o principal examinador da tese. Na ocasião, ao não reconhecer plenamente a originalidade da tese e dar demasiada ênfase a um erro matemático, a banca examinadora cometeu grande injustiça com Bachalier. O movimento browniano possui algumas propriedades chamadas de caos probabilístico, e essa conexão entre movimento browniano e preço de ações pode ser considerada a primeira manifestação da idéia de caos em teoria econômica. Nos últimos 20 anos, a modelagem de preço de ativos financeiros por processos de difusão tem sido um dos pilares da teoria financeira moderna que tem proporcionado muitas aplicações de cunho prático, permitindo inclusive grande desenvolvimento do mercado de derivados financeiros. Para concluir esta seção devemos mencionar o fato de que tem havido tentativas de descrever o preço de ações por uma modelagem caótica determinística, que, embora altamente interessante inclusive do ponto estatístico, ainda não apresentou conclusão definitiva.

* Do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa) e da EPGE/FGV.



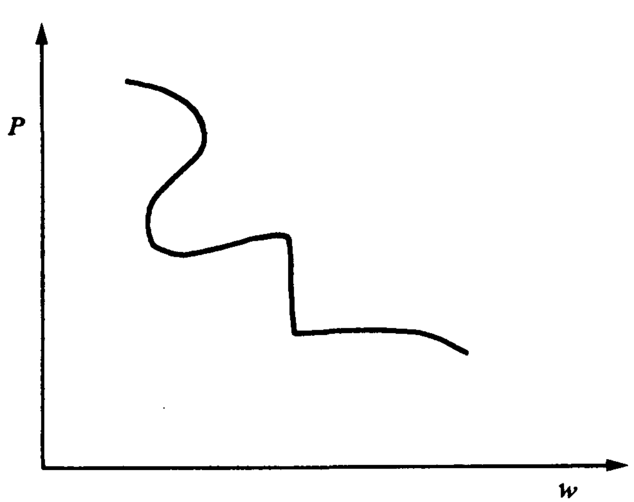
Nota: p_t é o preço da ação no tempo t.

3. A indeterminação do equilíbrio geral walrasiano

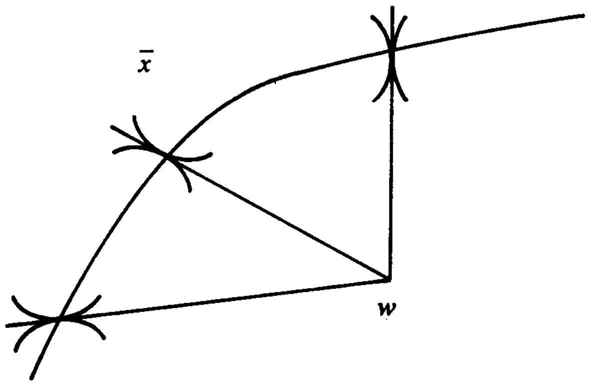
É bem conhecido o fato de que só com restrições muito fortes às utilidades dos agentes econômicos se consegue que o equilíbrio walrasiano seja único. Contudo, um resultado de grande importância, devido a G. Debreu, diz que os equilíbrios são em número finito, mais precisamente se u: $\mathbf{R}^l_+ \rightarrow \mathbf{R}$ são funções de utilidade do consumidor $i = 1, ..., I$, supostas de classe C^2, estritamente crescentes e quase-côncavas e tais que $\overline{\{x \in \mathbf{R}^l_+, u(x) = x\}} \subset \mathbf{R}^l_{++} = \{x \in \mathbf{R}^l, x = (x_1,..., x_l)\, x_i > 0, i = 1,...,l\} \forall c \in \mathbf{R}$. Então, temos o teorema:

Teorema. Existe um conjunto de medida nula $C \subset \mathbf{R}^{lI}_+$ tal que, se $w \notin C$, então a economia com dotações iniciais w e utilidades u_i descritas acima possui um número finito de equilíbrios.

Pode-se obter uma representação gráfica deste teorema:



A seguir, temos uma ilustração com a caixa de Edgeworth:



onde $\bar{x}_j^i$ representa o consumo do bem j pelo consumidor $i, i, j = 1, 2$ $\bar{x}_j^1 + \bar{x}_j^2 = w_j^1 + w_j^2$.

Contudo, se abandonamos a hipótese de mercados completos feita nas economias walrasianas, perdemos também a finitude do equilíbrio e, mais ainda, a unicidade local do equilíbrio. Isso torna extremamente difícil interpretar vários modelos nos quais aparece a noção de equilíbrio. Pois, nesse caso, arbitrariamente próximos de um equilíbrio P existem outros equilíbrios, o que faz com que seja pouco realista supor que P venha a ser obtido através de algum processo evolutivo ou mesmo de expectativas racionais. Essa idéia foi muito desenvolvida nos modelos de gerações justapostas. Outra idéia correlata é a de equilíbrio de manchas solares, que diz que a idéia de expectativas racionais é compatível com a idéia de os agentes tomarem suas decisões com base em uma observação exógena ao sistema econômico.

4. Teoria do capital

Um problema clássico econômico é estudar a trajetória ótima da acumulação de capital da economia. Isto é, estamos interessados no problema:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t)$$

$$f(k_t) = k_{t+1} + c_t \qquad t = 0, 1, \ldots, k_0 \text{ dado;}$$

onde k_0 é o capital inicial, u, f as funções de utilidade e de produção, respectivamente, e $0 < \delta < 1$ a taxa de desconto da economia.

A solução desse problema, a trajetória ótima de acumulação de capital, é denotada por $\{\tilde{k}_t(k_0)\}_{t=1}^{\infty}$. Dizemos que a propriedade de Turnpike é verdadeira se $\tilde{k}_t(k_0) \underset{t \to \infty}{\to} k^{\delta}$ para todo k_0, onde k^{δ} é o estado estacionário ótimo associado a δ. Um teorema clássico, ao qual direta ou indiretamente podemos associar os nomes de Von Neumann, Ramsey, Cass e Koopmans, diz que:

Teorema A. Se $u' > 0$, $u'' < 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$, então a propriedade de Turnpike é verdadeira.

Consideremos o caso mais geral:

$$P_{V,\delta} \qquad \max \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t V(k_t, k_{t+1}),\ k_0 \ \text{dado},$$

com $V\ C^2$ estritamente côncava. O caso anterior se obtém deste ao se fazer

$$V(k_t, k_{t+1}) = u(f(k_t) - k_{t+1}).$$

Então, temos o teorema:

Teorema B. Seja K compacto, convexo $\subset \mathbf{R}^{2n}$. Seja $f: K \to K\ C^2$. Então existe $V\ C^2$, estritamente côncava, e $0 < \delta < 1$ tal que a solução de $P_{V,\delta}$ seja $\tilde{k}_t(k_0) = f^{(t)}(k_0)$; o t-ésimo iterado de f.

Assim é que qualquer função de classe C^1 pode ter seus iterados como solução de um problema de otimização dinâmica. Dessa forma, se a função for caótica, seus iterados comportam-se como se fossem aleatórios. Isto é, um problema de otimização dinâmica não conduz a um comportamento regular da trajetória de capital como o *teorema A* sugeriu. Contudo o teorema a seguir coloca um limite no grau de caoticidade da solução de $P_{V,\delta}$.

Teorema C. Existe $M > 0$ tal que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left| \tilde{k}_t(k_0) - \tilde{k}_t(k_0') \right|^2 \leq M \, | k_0 - k_0' |^2 .$$

Este resultado acarreta, em particular, que duas trajetórias, uma começando em k_0 e outra em k_0', não podem se afastar a uma taxa maior que $\partial^{-1/2}$. Isto é, as trajetórias têm uma sensibilidade razoável em relação às condições iniciais, uma vez que $\delta = \frac{1}{1+r}$ e r, a taxa de juros real, é relativamente pequena.

5. Observações finais

Existem outras situações econômicas em que podemos observar o fenômeno do caos, tais como o modelo de gerações justapostas e os modelos de aprendizado econômico. Contudo, existe uma observação que podemos fazer em relação a todos eles. O rigor imposto pela racionalidade econômica e pelas equações de equilíbrio não é suficiente para evitar a irregularidade das trajetórias econômicas ou mesmo a caoticidade.

Resta, contudo, saber se isso traduz propriedades dos modelos teóricos de economia ou algo mais profundo, ou seja, a irregularidade do processo econômico real. E, mais ainda, caso existam essas irregularidades no processo econômico real, são elas passíveis de correção por parte das autoridades econômicas, como se assume no caso keynesiano? Estas são questões fundamentais para os economistas na atualidade.

Bibliografia

Anderson, P.; Arrow, K. & Pines, D. *The economy as an evolving complex system*. Redwood City, California, Addison Wesley, 1988. Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, v. V.

Ashley, R. & Patterson, D. Linear versus nonlinear macroeconomies; a statistical test. *International Economic Review, 30* (3): 685-704, 1989.

Azariadis, Costas. Self-fulfilling prophecies. *Journal of Economic Theory, 25*: 380-96, 1983.

——— & Guesnerie, Roger. Sunspots and cycles. *Review of Economic Studies, 53*: 725-36, 1986.

——— & ———. Sunspots and cycles. *Journal of Economic Theory, 40*: 725-37, 1986.

Bachalier, L. Théorie de la speculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, troisième série (17): 21-88, 1900. Versão para o inglês: Cootner, Paul (ed.). The random character of stock market prices. Cambridge, MA, MIT Press.

Bak, P. et alii. Self organized criticality. *Physical review A*, July 1988. p. 364-73.

Barnett, W. & Hinich, M. (1991), Empirical chaotic in economics. Apresentado na International Conference on Operations Research, Viena, Áustria, 28-31 ago. 1990, a sair em breve nos *Annals of Operations Research*.

Baumol, W. & Benhabib, J. Chaos: significance, mechanism, and economic applications. *Journal of Economic Perspectives, 3* (1): 77-105, Winter 1989.

Benhabib, J. & Day, R. Erratic accumulation. *Economic Letters* (6): 113-7, 1980.

——— & ———. Rational choice and erratic behavior. *Review of Economic Studies, 48*: 459-71, 1981.

——— & ———. A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model. *Journal of Economics Dynamics and Control* (4): 37-55, 1982.

——— & Laroque, G. On competitive cycles in productive economies. *Journal of Economic Theory* (45): 145-70, 1988.

——— & Nishimura, K. The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisector models of optimal economic growth. *Journal of Economic Theory* (21): 421-44, 1979.

——— & ——— Competitive equilibrium cycles. *Journal of Economic Theory* (35): 284-306, 1985.

Boldrin, M. & Woodford, M. Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos. *Journal of Monetary Economics*, 1991.

——— & Montrucchio, L. Cyclic and chaotic behavior in intertemporal optimization models. *Mathematical Modelling* (8): 627-700, 1986a.

——— & ———. On the indeterminacy of capital accumulation paths. *Journal of Economic Theory* (40): 26-39, 1986b.

Brock, W. Distinguishing random and deterministic systems: abridged version. *Journal of Economic Theory* (40): 168-95, 1986.

———. *Nonlinearity in finance and economics*. Madison, University of Wisconsin, 1987.

———. Nonlinearities and complex dynamics in economics and finance. In: Anderson, P.; Arrow, K. & Pines, D. (eds.). *The economy as an evolving complex system*. New York, Addison Wesley, 1988.

——— & Dechert, W. D. Theorems on distinguishing deterministic and random systems. In: Barnett, W.; Beerndt, E. & White, H. 1988.

——— & ———. Non-linear dynamical systems: instability and chaos in economics. Hildenbrand & H. Sonnenschein (eds.). *Handbook of mathematical economics*. Elsevier, 1991, v. IV.

———; ——— & Scheinkman, J. *A test for independence based on the correlation dimension*. Madison, Department of Economics, University of Wisconsin, University of Houston, University of Chicago, 1986.

———; ———; ——— & LeBaron, B. *A test for independence based upon the correlation dimension*. Madison, University of Wisconsin, University of Houston, University of Chicago, Department of Economics, 1988 (working paper).

———; Hsieh, D. & LeBaron, B. *Nonlinear dynamics, chaos and instability, statistical theory and economic evidence*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1991.

——— & Malliaris, A. *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics*. Amsterdam, North Holland. 1989.

——— & Sayers, C. Is the business cycle characterized by deterministic chaos? *Journal of Monetary Economics* (22): 71-90, July 1988.

Cass, D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* (32): 233-40, 1965.

Cugno, F. & Montrucchio, L. Stability and instability in a two-dimensional dynamical system: a mathematical approach to Kaldor's theory of the trade cycle. In: Szego, G. P. (ed.). *New quantitative techniques for economics*. New York, Academic Press, 1982.

Day, R. Irregular growth cycles. *American Economic Review*, *72*(3): 406-14, 1982.

———. The emergence of chaos from classical economic growth. *Quarterly Journal of Economics* (98): 201-13, 1983.

Deneckere, R. & Pelikan, S. Competitive chaos. *Journal of Economic Theory* (40): 13-25, 1986.

Goodwin, R. M. *Essays in economic dynamics*. London, Macmillan, 1982.

Gori, F.; Geronazzo, L. & Galeotti, M. (eds.). Nonlinear dynamic in economics and social sciences, proceedings. Siena, Italy. Springer-Verlag, 1991. (Lecture notes in economics and mathematical systems, 399.)

Grandmont, J. M. On endogenous competitive business cycles. *Econometrica* (53): 995-1.046, 1985.

——— & Laroque, G. Stability of cycles and expectations. *Journal of Economic Theory* (40): 138-51, 1986.

Grandmont, J. M. (ed.). Symposium on Nonlinear Economic Dynamics. *Journal of Economic Theory*, *40* (1), Oct. 1986.

———. *Nonlinear economic dynamics*. New York, Academic Press, 1987.

Grassberger, P. & Procaccia, I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, *9D*: 189-208, 1983.

McKenzie, L. W. Turnpike theory. *Econometrica* (44): 841-55, 1976.

——. Optimal economic growth, turnpike theorems and comparative dynamics. In: Arrow, K. J. & Intriligator, M. D. (eds.). *Handbook of Mathematical Economics*. Amsterdam-NY, North Holland, 1986. v.3.

Mirowski, P. From Mandelbrot to chaos in economic theory. *Southern Economic Journal, 57* (2): 289-307, Oct. 1990.

Neftci, S. & Policano, A. Can chartists outperform the market: market efficiency tests for "technical analysis". *The Journal of Futures Markets, A* (4): 465-78, 1984.

Prescott, D. & Stengor, T. Do asset market overlook exploitable nonlinearities? The case of gold. Department of Economics, University of Guelph, 1988.

Scheinkman, J. & LeBaron, B. Nonlinear dynamics and GNP data. In: Barnett, W.; Geweke, J. & Shell, K. (eds.). Economic complexity: chaos, sunspots, bubbles and nonlinearity. *Proceedings of the Fourth International Symposium in Econometric Theory and Econometrics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

—— & ——. Nonlinear dynamics and stock returns. *Jornal of Business, 62* (3): 311-37, 1989.

Stein, D. (ed.). Lectures in the sciences of complexity. Redwood City, Calif., Santa Fe Institute Studies in The Sciences of Complexity, Addison Wesley, 1989.

Sterman, J. Deterministic chaos in an experimental economic system. *Journal of Economic Behavior and Organization, 12*: 1-28, 1989.

Torre, V. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations. *Econometrica* (45): 1.457-66, 1977.

West, K. Bubbles, fads, and stock price volatility tests: a partial evaluation. *Journal of Finance* (43): 639-55, July 1988.

Woodford, M. Indeterminacy of equilibrium in the overlapping generations model: a survey. Columbia University, May 1984 (unpublished manuscript).

——. Stationary sunspot equilibria in a finance constrainted economy. *Journal of Economic Theory* (40): 128-37, 1986.

——. Three questions about sunspot equilibria as an explanation of economic fluctuations. *American Economic Review*. May 1987. p. 93-8.