O Teorema de Vincent e o Problema de Multiplicidade de Taxas Internas de Retorno *

Clovis de Faro **

Como o problema de determinação da taxa interna de retorno associada a um dado empreendimento é matematicamente equivalente ao da busca das raízes reais e não-negativas de um polinômio, é efetuada uma investigação da aplicação do chamado Teorema de Vincent. É mostrado que tal teorema, relativamente obscuro e originalmente publicado em 1836, fazendo uso tão-somente de adições dos termos da seqüência de fluxos de caixa líquidos que caracterizam o projeto, provê uma interessante condição de suficiência para a unicidade da taxa interna.

1. Introdução

Seja um empreendimento, ou projeto, caracterizado pela seqüência de fluxos de caixa líquidos periódicos $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_0 a_n \neq 0$. Sem perda de generalidade, pois, se necessário, podemos multiplicar a seqüência por -1, fixemos atenção ao caso onde $a_0 < 0$, com o empreendimento sendo dito do tipo investimento. Sendo i uma taxa de juros por período, consideremos a função valor atual $V(i)$ associada ao projeto:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, (1+i)^{-j}, \; i \geqslant -1 \tag{1}$$

* Agradecemos o patrocínio do PNPE.

** Da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas.

Um dos mais populares critérios de avaliação econômica de projetos é o da taxa interna de retorno (cf. Schall et alii), que é definida como sendo uma taxa periódica de juros i^* tal que anule a função valor atual associada ao empreendimento. Ora, como discutido em de Faro e Soares (1976), o critério só faz sentido se: a) existir uma, e somente uma, distinta solução $i^* \geqslant -1$ para a equação $V(i) = 0$; e b) ficar assegurada uma avaliação que seja consistente com a que seria obtida mediante o emprego do método do valor atual à taxa periódica de juros r tomada para comparação.

A possibilidade de múltiplas e distintas taxas internas i^*, que se apresenta toda vez que ocorre mais de uma variação de sinal na seqüência de fluxos de caixa líquidos, tem levado a que o assunto venha sendo intensivamente investigado por vários autores (Cf. Aucamp & Eckardt, 1976; Buckley & Ryan, 1976; de Faro, 1975; de Faro &Soares, 1978; de Faro &Soares, 1978 *b;* Hosterbach &Seifert, 1971; Jean, 1968; Norstrom, 1972; Teichroew et alii, 1965; Witten &Zimmermann, 1977). O objetivo de tais investigações tem sido, primordialmente, fornecer condições de suficiência para a unicidade da taxa interna de retorno associada a um dado projeto. Dentre as diversas condições que foram apresentadas, destacam-se, sob o prisma de abrangência, dois tipos básicos. O primeiro tipo, originalmente sugerido por Kaplan (1965), e para o qual Panton e Verdini (1981) recentemente desenvolveram um programa escrito em Fortran,[1] faz uso do chamado Teorema de Sturm (cf. Turnbull, 1957, p. 103-6). O Teorema de Sturm, embora seja, rigorosamente do ponto de vista teórico, um método exato de contar o número de distintas raízes de um polinômio em um dado intervalo, não só encerra, potencialmente, como apontado por Bernhard (1967), o risco de indicar a unicidade de taxas internas inconsistentes, como, devido ao fato de ser baseado em divisões sucessivas de polinômios, pode, numericamente, apresentar erros por problemas de truncamento. No segundo tipo, isento de problemas numéricos, mas contando uma única raiz distinta tantas vezes quanto seu respectivo grau de multiplicidade,[2] temos as condições baseadas em simples sucessivas adições dos fluxos de caixa líquidos.

Por sua vez, as condições do segundo tipo mencionado podem ser classificadas em dois grupos. No primeiro grupo, temos os trabalhos de Hammond (1974) e de Pratt e Hammond (1979). As condições apresentadas, além de, como formuladas, só dizerem respeito à unicidade de taxas não-negativas, apresentam ainda dois inconvenientes: a) nunca serão satisfeitas no caso em que a taxa interna de retorno, embora única, tenha multiplicidade igual ou superior a 2; b) podem envolver seqüências cujo número de termos cresce indefinidamente. No segundo grupo, temos os trabalhos — quase que simultaneamente desenvolvidos — de de Faro

[1] Cumpre mencionar aqui que, embora com cunho acadêmico e em escala de laboratório, um programa com a mesma finalidade foi anteriormente elaborado por Ferreira (1975).

[2] i^* é dita ser de multiplicidade $k > 1$ se anular a função valor atual e também as suas $k - 1$ sucessivas primeiras derivadas.

(1978) e de Bernhard (1979), que resultaram no que tem sido cognominado na literatura de condição de Bernhard-de Faro. (Cf. Bernhard, 1980; e Clarke, 1982).

Embora a condição de Bernhard-de Faro bem como a extensão sugerida por Bernhard (1980) estejam sujeitas, tal como apresentadas, a alguns dos inconvenientes apontados para as condições do primeiro grupo, iremos mostrar aqui como, fazendo uso repetido do Teorema de Vincent (cf. Uspensky, 1948, p. 127-36), praticamente eliminá-las.

2. A condição de Bernhard-de Faro

Dado um projeto do tipo investimento, forme a seqüência $\{A_0^{(n+1)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n-1)}, \ldots A_n^{(1)}\}$ que denominaremos de primeira diagonal à direita (ou para a frente) de Vincent, cujos termos são definidos de tal forma que:

$$A_k^{(\ell)} = \begin{cases} a_0, k = 0 \text{ e } \ell = 1, 2, \ldots \\ \sum_{j=0}^{k} a_j, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ e } \ell = 1 \\ A_{k-1}^{(\ell)} + A_k^{(\ell-1)}, \; k = 1, 2, \ldots, n \text{ e } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

Observe-se que, procedendo-se por indução, pode-se verificar que, sendo $\binom{n}{j} = n! \,/\, [j!\,(n-j)!]$, podemos também escrever:

$$A_k^{(\ell)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{\ell + k - j - 1}{k - j} a_j, \; \ell = 1, 2, \ldots \text{e } k = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

Atente-se também que, fixando-se $\ell = 1$, obtém-se de (2) a seqüência de fluxos de caixa acumulados $\{A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)}\}$ de Norstrom (1972); e que, fixando-se $\ell = 2$, obtém-se a chamada seqüência ξ, $\{A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, \ldots, A_{n-1}^{(2)}\}$, originalmente apresentada em de Faro e Soares (1976).

Então, se $A_0^{(n+1)} A_n^{(1)} < 0$ e se houver exatamente uma variação de sinal na primeira diagonal à direita de Vincent,[3] existirá uma única taxa interna de retorno $i^* > 0$, no campo das taxas de juros não-negativas, associada ao projeto em causa.[4] Esta condição, denominada de Bernard-de Faro, foi originalmente enunciada por de Faro (1978), com base no Teorema de Vincent, e, independentemente e logo após, fazendo uso de um caminho alternativo, por Bernhard (1979).

Como sugerido por Clarke (1982), a condição de suficiência de Bernhard-de Faro pode ser facilmente demonstrada. Para tanto, fazendo-se $x = 1 + i$, define-se a função valor futuro associada ao projeto:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}, \quad x \geqslant 0 \tag{4}$$

Expandindo-se $P(x)$ em série de Taylor em torno de x_0, tem-se:

$$P(x) = P(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot \frac{d^k P(x)}{dx^k} \right]_{x_0} \tag{5}$$

Ora, é fácil verificar que:

$$\frac{d^k P(x)}{dx^k} = k! \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} a_j x^{n-j-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Logo, fixando-se $x_0 = 1$, vem que:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j + \sum_{k=1}^{n} (x-1)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} a_j \right\} i^k \tag{7}$$

[3] Termos nulos são contados como continuação de sinal.

[4] Observe-se que em face do apresentado em de Faro (1982), pode-se assegurar que essa única taxa interna positiva será inferior a $\min \{ \max \{a_j\} / |a_0|; \ (\sum_{j=1}^{n} |a_j| - |a_0|) / |a_0| \}$

Ora, de (3) decorre que o termo de ordem $n - k + 1$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, na primeira diagonal à direita de Vincent é:

$$A_{n-k}^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{[n-j]}{n-k-j} a_j = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} a_j \qquad (8)$$

Por outro lado, note-se que, alternativamente, uma taxa interna de retorno pode também ser definida como uma taxa de juros que anule a função valor futuro. Então, dado que $P(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j = A_n^{(1)}$ e que $P(x)$, quando x tende a infinito, fica infinitamente grande com o sinal de $a_0 = A_0^{(n+1)}$, decorre de (7) e de (8) que, em face da chamada "regra de sinais de Descartes" (cf. MacDuffee, 1954, p. 60), $P(x)$ anular-se-á uma, e somente uma vez, no intervalo definido por $x \geqslant 1$, se houver exatamente uma variação de sinal na primeira diagonal à direita de Vincent.[5]

A título de ilustração, considere-se o caso do projeto de investimento que denominaremos de A: $\{-100, 50, 204 - 200, 784\}$. Como indicado a seguir, a diagonal de Vincent é facilmente construída. Basta formar, sucessivamente, as seqüências cumulativas, a partir da seqüência de fluxos de caixa líquidos, eliminando-se sempre, a partir da primeira cumulação, o último termo. Lendo-se da esquerda para a direita (de baixo para cima), a primeira diagonal à direita de Vincent é formada pelos elementos sublinhados, e é representada por D_d^A.

$$\begin{array}{lllll}
-100, & -50, & 204, & -200, & 784 \\
\hline
-100, & -50, & 154, & -46, & \underline{738} \\
-100, & -150, & 4, & -\underline{42,} & \\
-100, & -250, & -\underline{246} & & \\
-100, & -\underline{350} & & & \\
-\underline{100,} & & & &
\end{array}$$

No caso, como só temos uma variação de sinal na primeira diagonal de Vincent, $\{-100, -350, -246, -42, 738\}$, concluímos que ao projeto A se associa uma única taxa interna de retorno não-negativa; que é fácil de comprovar ser $i^* = 100\%$ por período.

[5] É interessante observar que, como apontado por de Faro (1978), a condição de Bernhard-de Faro domina completamente a de Norstram e a baseada na seqüência ξ

O caso do projeto A exemplifica uma interessante propriedade do processo de construção da diagonal de Vincent. Como a terceira cumulação, quarta linha do quadro apresentado, não apresenta variação de sinal, o processo pode ser interrompido neste ponto, já que os demais elementos não causarão mudança adicional de sinal em relação a subseqüência de Vincent até então formada.

3. Unicidade no campo das taxas com significação econômica

Uma vez satisfeita a condição de Bernhard-de Faro, vimos que fica assegurada a existência e unicidade de uma taxa interna de retorno no campo das taxas de juros não-negativas. Embora seja este o campo de real interesse prático, a existência de taxas de juros negativas não inferiores à unidade faz com que, ao menos do ponto de vista teórico, investigue-se também a unicidade da taxa interna no chamado campo de significação econômica, definido por $i = \geqslant -1$.

Para este efeito, como originalmente mostrado por de Faro (1978), podemos também fazer uso do Teorema de Vincent. Para tanto construa-se a função $H(x)$, recíproca de $P(x)$; isto é, cf. Turnbull (1957, p. 97-8):[6]

$$H(x) = x^n P(x^{-1}) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{9}$$

Forme-se agora a primeira diagonal de Vincent à direita para a função H (x) recíproca de P (x), que chamaremos de primeira diagonal à esquerda (ou para trás) de Vincent em relação à função original P (x). Pela regra de sinais de Descartes, o número de variações de sinal na primeira diagonal à esquerda nos fornece um limite superior para o número de raízes de H (x) no intervalo definido por $x > 1$. Logo, pelas propriedades de funções recíprocas (cf. Turbull, 1957, p. 97-8), temos um limite superior para o número de raízes de P (x) no intervalo $0 < x < 1$.

Assim, tendo sido satisfeita a condição de Bernhard-de Faro, existirá somente uma (e simples) taxa interna de retorno $i^* \geqslant -1$ se não existir variação de sinal na primeira diagonal à esquerda de Vincent.[7]

Como indicado a seguir para o caso do projeto A, a construção da primeira diagonal à esquerda pode ser efetuada a partir da própria seqüência de fluxos de caixa líquidos original. Basta que se efetuem as cumulações da direita para a es-

[6] Observe-se que $H(x)$ é formada simplesmente invertendo-se a ordem dos coeficientes de $P(x)$. Note-se também que se α é raiz de $P(x)$ então α^{-1} será raiz de $H(x)$.

[7] Dado que, por hipótese, $P(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j > 0$, que é o primeiro termo da diagonal à esquerda, segue-se que só não haverá variação de sinal se o último termo, a_n, também for positivo.

querda. A diagonal à esquerda, formada pelos elementos com barra, deve ser lida da direita para a esquerda (de baixo para cima).

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & \overline{784} \\
 & & & \overline{2936} & 784 \\
 & & \overline{4308}, & 2152, & 784 \\
 & \overline{2994}, & 2156, & 1368, & 784 \\
\overline{738}, & 838, & 788, & 584, & 784 \\
\hline
-100, & 50, & 204, & -200, & 784
\end{array}
$$

Como não existe variação de sinal na primeira diagonal à esquerda de Vincent para o projeto A, que representaremos por D_e^A e que é $\{784, 2936, 4308, 2994, 738\}$, concluímos que o projeto A não se anula para taxas de juros negativas.[8]

Deste modo, fica assegurada a unicidade da taxa interna $i^* = 100\%$ por período, no campo de significação econômica.

Seja agora o caso do projeto B: $\{-2, 3, -5, 2\}$. Como indicado a seguir, D_d^B e D_e^B podem ser geradas em um mesmo *tableau*.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & & \overline{2} \\
 & & \overline{1} & 2 \\
 & -\overline{1}, & -1, & 2 \\
-\overline{2}, & 0, & -3, & 2 \\
\hline
-2, & 3, & -5, & 2 \\
\hline
-2, & 1, & -4 & -\underline{2} \\
-2, & -1, & -\underline{5} & \\
-2, & -\underline{3}, & & \\
-\underline{2}, & & &
\end{array}
$$

Como não existe variação de sinal em $D_d^B \equiv \{-2, -3, -5, -2\}$ e como $V(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j = -1$, segue-se que não existe taxa interna de retorno não-ne-

[8] Obviamente, como a primeira cumulação não apresenta variação de sinal, o processo poderia ter sido truncado já neste ponto.

gativa associada ao projeto B. Por outro lado, como existe uma variação de sinal em $D_e^B \equiv \{2, 1, -1, -2\}$, conclui-se que existe uma taxa interna de retorno negativa (que é de -50% por período).

Denotando por Sinal (Y) o número de variações de sinal numa seqüência Y, é interessante notar que só poderá haver unicidade de taxa interna de retorno no campo das taxas de juros com significação econômica se Sinal (D_d) Sinal $(D_e) = 0$. Se Sinal $(D_d) \geqslant 1$ e Sinal $(D_e) \geqslant 1$, haverá ao menos uma taxa interna positiva e uma negativa. Tal é o caso do projeto C:$\{-2, 5, -2\}$. Visto que $D_d = D_e^C \equiv$ $\equiv \{-2, 1, 1\}$, ao projeto C se associa uma taxa interna positiva ($i^* = 1$) e uma negativa ($i^* = -0,5$).

Observe-se ainda que, mesmo que Sinal (D_d) + Sinal $(D_e) = 0$, ainda assim poderemos ter uma única taxa interna de retorno no campo das taxas de juros com significação econômica, basta que $\sum_{j=0}^{n} a_j = 0$, o que significa que a taxa interna é nula.

4. Extensão da condição de Bernhard-de Faro

Como ilustrado na própria apresentação do Teorema de Vincent, em Uspensky (1948, p. 127-36), este é um valioso método de separar as raízes reais de uma equação. Deste modo, fazendo sua transposição para o problema relativo à unicidade da taxa interna de retorno, segue-se que, como iremos mostrar, podemos estender, de uma maneira iterativa, a condição de Bernhard-de Faro.

No que se segue, em face do maior interesse prático, iremos limitar a análise ao campo das taxas não-negativas.[9] Na realidade, tal não implica perda de generalidade. Se for de interesse estender a análise ao campo das taxas negativas, basta tomar como ponto de partida a primeira diagonal à esquerda de Vincent.

4.1 *Primeiro nível de extensão*

Dado um projeto, formemos a primeira diagonal à direita D_d. Tomando D_d como ponto de partida, isto é, tratando D_d como se fosse a seqüência de fluxos de caixa líquidos de um projeto, formemos suas primeiras diagonais à direita e à esquerda, respectivamente designadas por D_{dd} e D_{de}.

[9] Note então que, excetuando o caso trivial de taxa interna nula, a aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno exige que se tenha

$$\sum_{j=0}^{n} a_j > 0.$$

Como, por hipótese, devemos ter Sinal $(D_d) \geqslant 1$, o que implica haver ao menos uma taxa interna de retorno positiva associada ao projeto, poderemos ter uma das seguintes possibilidades:

a) Sinal $(D_{de}) = 0$; e

a.1) Sinal $(D_{dd}) = 0$.

Neste caso, existe uma única taxa interna de retorno, cujo valor (exato) é 100% por período. Deve-se ressaltar que a presença da solução $i^* = 1$ é sinalizada pelo fato de que o último termo de D_{dd}, representado por $U(D_{dd})$, bem como o último termo de D_{de}, são nulos.[10]

a.2) Sinal $(D_{dd}) = 1$.

Se o último termo de D_{dd} for nulo, então existem duas taxas internas não-negativas, sendo uma igual a 100% e a outra superior a 100% por período. De outro modo, se $U(D_{dd}) \neq 0$, ao projeto considerado se associa uma única taxa interna de retorno não-negativa, cujo valor é maior do que 100% por período.

a.3) Sinal $(D_{dd}) > 1$.

Haverá mais de uma taxa interna de retorno se $U(D_{dd}) = 0$. Por outro lado, se $U(D_{dd}) \neq 0$, embora possamos assegurar que não existe taxa interna no intervalo $[0,1]$, poderá haver mais de uma taxa interna superior a 100% por período. Para saber se existe somente uma, é necessário que se prossiga com a análise, passando ao segundo nível de extensão.

b) Sinal $(D_{de}) = 1$; e

b.1) Sinal $(D_{dd}) = 0$

Se $U(D_{dd}) = 0$, existem duas taxas internas não-negativas, sendo uma $i^* = 1$ e a outra pertencendo ao intervalo $(0,1)$. Existirá uma única taxa interna de retorno não-negativa, que será inferior a 100% por período, se $U(D_{dd}) \neq 0$.

b.2) Sinal $(D_{dd}) \geqslant 1$.

Agora, independentemente de que $U(D_{dd})$ seja ou não nulo, teremos mais de uma taxa interna de retorno não-negativa.

[10] Ainda mais, se o penúltimo termo também for nulo, $i^* = 1$ terá multiplicidade 2. De um modo geral, $i^* = 1$ será de multiplicidade k se os k últimos termos de D_{dd} forem nulos.

c) Sinal $(D_{de}) > 1$; e

c.1) Sinal $(D_{dd}) = 0$

Se $U(D_{dd}) = 0$, existem pelo menos duas taxas internas não-negativas, sendo uma exatamente igual a 100% e a outra inferior a 100% por período. Se $U(D_{dd}) \neq 0$, não existe taxa interna maior ou igual a 100% por período, podendo haver mais de uma em (0,1). Para que se assegure a possível unicidade de i^*, é necessário que se prossiga ao segundo nível de extensão.

c.2) Sinal $(D_{dd}) \geqslant 1$.

Existem no mínimo duas taxas internas não-negativas.

Focalizando somente o caso de interesse no presente contexto, isto é, aquele em que há unicidade da taxa interna de retorno, suponhamos que o Sinal $(D_d) > 1$ (se houvesse exatamente uma variação poderíamos ter parado já no primeiro nível); ilustremos cada uma das cinco possibilidades que se apresentam através dos seguintes projetos:

$$
\begin{array}{lrrrr}
D: & \{-2, & 12, & -24, & 16\} \\
 & -2 & 10, & -14, & \underline{2} \\
 & -2 & 8, & -\underline{6} & \\
 & -2 & \underline{6,} & & \\
 & -2 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & & & \overline{2} \\
 & & \overline{0}, & 2 \\
 & \overline{0}, & -2, & 2 \\
\overline{0}, & 2, & -4, & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
D^D_d: \{2, \; 6, \; -6, \; 2\}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
-2, & 4, & -2, & \underline{0} \\
-2 & 2, & \underline{0} & \\
-2 & \underline{0} & & \\
-\underline{2} & & &
\end{array}
$$

$$D^D_d : \{-2, \; 6, \; 6, \; 2\}$$

Sinal $(D^D_d) = 3$

$$D^D_{dd} : \{-2,0,0,0\} \text{ e } D^D_{de} = \{2,0,0,0\}$$

Como Sinal (D^D_{dd}) = Sinal $(D^D_{de}) = 0$, estamos no caso a.1; logo, existe uma única taxa interna não-negativa que é $i^* = 1$.

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
E: & \{-2, & 8, & -10, & 6, & -14, & 10, & 42\} \\
 & -2, & 6, & -4, & 2, & -12, & -2, & \underline{40} \\
 & -2, & 4, & 0, & 2, & -10, & \underline{-12} & \\
 & -2, & 2, & 2, & 4, & \underline{-6,} & & \\
 & -2, & 0, & 2, & \underline{6} & & & \\
 & -2, & -2, & \underline{0} & & & & \\
 & -2, & \underline{-4,} & & & & & \\
 & \underline{-2} & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
\underline{22} & 24, & 28, & 28, & 22, & 28, & 40 \\
\{-2, & -4, & 0, & 6, & -6, & -12, & 40\} \\
-2, & -6, & -6, & 0, & -6, & -18, & \underline{22} \\
-2, & -8, & -14, & -14, & -20, & \underline{-38} &
\end{array}
$$

D^E_d: $\{-2, -4, 0, 6, -6, -12, 40\}$

Sinal $(D^E_d) = 3$

Como Sinal $(D^E_{de}) = 0$ e Sinal $(D^E_{dd}) = 1$, com $U(D^E_{dd}) \neq 0$, existe somente uma taxa interna não-negativa cujo valor é $i^*_E \simeq 132,84\%$ por período.

F: $\{-2, 18, -54, 54\}$

Temos que $D^F_d = \{-2, 12, -24, 16\}$ com Sinal $(D^F_d) = 3$.

Como $D^F_{de} = \{16, 24, 12, 2\}$ não apresenta variação de sinal e Sinal (D^F_{dd}) = Sinal ($\{-2, 6, -6, 2\}$) = 3, com $U(D^F_{dd}) \neq 0$, temos um exemplo do caso a.3. É, então, necessário prosseguir até o segundo nível de extensão, quando então veremos que o valor exato da taxa interna única é $i^*_F \doteq 200\%$ período.

G: $\{-200, 400, 100, -800, 696\}$

Como Sinal (D^G_d) = Sinal ($\{-200, -400, 100, -200, 196\}$) = 3, Sinal $(D^G_{dd}) = 0$ e Sinal (D^G_{de}) = Sinal ($\{196, 584, 676, -16, -504\}$) = 1, com $U(D^G_{dd}) \neq 0$, conclui-se que ao projeto G se associa somente uma taxa interna não-negativa, e que é inferior a 100% por período($i^*_G \simeq 59,95\%$).

H: $\{-16, 72, -108, 54\}$

Agora, como Sinal $(D^H_d) = 3$, com Sinal $(D^H_{dd}) = 0$ e Sinal (D^H_{de}) = Sinal $(\{2, -6, 6, -2\}) = 3$, com $U(D^H_{dd}) \neq 0$, temos um exemplo característico do caso c.1. Precisamos, pois, prosseguir até o segundo nível de extensão, quando então veremos que o valor exato da taxa interna única é $i^*_H = 50\%$ por período.

4.2 *Segundo nível de extensão*

Como acabamos de ver, o teste do primeiro nível de extensão da condição de Bernhard-de Faro será inclusivo (no sentido de ainda persistir a possibilidade da existência de uma única taxa interna de retorno não-negativa se, com $U(D_{dd}) \neq 0$, tivermos

$$\begin{cases} \text{Sinal}\,(D_{dd}) + \text{Sinal}\,(D_{de}) > 1 \\ \text{Sinal}\,(D_{dd}) \,.\, \text{Sinal}\,(D_{de}) = 0 \end{cases}$$

Nesta eventualidade, precisamos passar ao segundo nível de extensão, do que trataremos agora. Similarmente ao caso do primeiro nível, tudo o que precisamos fazer é tratar D_{dd} (ou D_{de}), como se um projeto fosse, construindo as correspondentes primeiras diagonais, à direita e à esquerda, de Vincent. Tais diagonais serão, respectivamente, representadas por D_{ddd} e D_{dde} (ou D_{ded} e D_{dee}).

Em função dos números de variações de sinal nessas novas diagonais, teremos uma das seguintes possibilidades:

a) se Sinal $(D_{de}) > 1$

a.1) Sinal $(D_{dee}) = 0$

a.1.1) Sinal $(D_{ded}) = 0.$

Nesse caso, existe uma única taxa interna cujo valor exato é de 50% por período, o que é também sinalizado pelo fato de que $U(D_{dee}) = U(D_{ded}) = 0$.[11]

a.1.2) Sinal $(D_{ded}) = 1.$

[11] Tal é o caso do projeto H, pois Sinal (D^H_{dee}) = Sinal $(\{-2,0,0,0\}) = 0$ e sinal (D^H_{ded}) = Sinal $(\{2,0,0,0\}) = 0$. Observe-se que $i^* = 1/2$ é raiz de multiplicidade 3, pois que os três últimos termos em D^H_{ded} e em D^H_{dee} são nulos.

Se $U(D_{ded}) \neq 0$, existe uma única taxa interna não-negativa i^* é tal que $i^* \in (0, 1/2)$. Se $U(D_{ded}) = 0$ existem duas distintas taxas internas não-negativas, i^*_1 e i^*_2, como $i^*_1 \in (0, 1/2)$ e $i^*_2 = 1/2$.

a.1.3) Sinal $(D_{ded}) > 1$.

Se $U(D_{ded}) \neq 0$, o teste do segundo nível de extensão da condição de Bernhard-de Faro é inconclusivo, pois poderá haver mais de uma taxa interna no intervalo definido por $i \in (0, 1/2)$. É necessário que se prossiga até o terceiro nível de extensão. Por outro lado, se $U(D_{ded}) = 0$, temos um caso de mais de uma taxa interna não-negativa.

a.2) Sinal $(D_{dee}) = 1$.

a.2.1) Sinal $(D_{ded}) = 0$.

Existe uma única taxa interna de retorno não-negativa, sendo que $i^* \in (1/2, 1)$, desde que $U(D_{ded}) \neq 0$. Se $U(D_{ded}) = 0$, existem duas taxas internas, sendo $i^*_1 = 1/2$ e $i^*_2 \in (1/2, 1)$.

a.2.2) Sinal $(D_{ded}) \geqslant 1$.

Teremos mais de uma taxa interna não-negativa.

a.3) Sinal $(D_{dee}) > 1$.

a.3.1) Sinal $(D_{ded}) = 0$.

Se $U(D_{ded}) = 0$, teremos mais de uma taxa interna não-negativa.

Se $U(D_{ded}) \neq 0$, pode haver mais de uma taxa interna, que estará contida em $(1/2, 1)$. Deve-se proceder ao exame do terceiro nível de extensão.

a.3.2) Sinal $(D_{ded}) \geqslant 1$.

Detectada a existência de mais de uma taxa interna.

b) se Sinal $(D_{dd}) > 1$

b.1) Sinal $(D_{dde}) = 0$

b.1.1) Sinal $(D_{ddd}) = 0$.

Taxa interna única e exatamente igual a 200% por período, o que é também indicado pelo fato de que $U(D_{ddd}) = U(D_{dde}) = 0$.

b.1.2) Sinal $(D_{ddd}) = 1$.

Se $U(D_{ddd}) \neq 0$, ter-se-á uma única taxa interna de retorno não-negativa, que será superior a 200% por período. Se $U(D_{ddd} = 0)$, $i^* = 2$, será também solução, de modo que haverá mais de uma taxa interna não-negativa.

b.1.3) Sinal $(D_{ddd}) > 1$.

Se $U(D_{ddd}) \neq 0$, será necessário que se prossiga até o terceiro nível de extensão, já que pode haver mais de uma taxa interna $i^* > 2$. Caso contrário, $U(D_{ddd}) = 0$, estará configurada a existência de mais de uma taxa interna não-negativa.

b.2) Sinal $(D_{dde}) = 1$.

b.2.1) Sinal $(D_{ddd}) = 0$.

Taxa interna única $i^* \in (1,2)$, se $U(D_{ddd}) \neq 0$. Se $U(D_{ddd}) = 0, i^* = 2$ também será solução, havendo, pois, mais de uma taxa interna de retorno não-negativa.

b.2.2) Sinal $(D_{ddd}) \geqslant 1$.

Caso de múltiplas taxas internas de retorno. Uma em $(1,2)$ e ao menos uma superior a 200% por período. Ainda mais, $i^* = 2$ também será solução se $U(D_{ddd}) = 0$.

b.3) Sinal $(D_{dde}) > 1$.

b.3.1) Sinal $(D_{ddd}) = 0$.

Desde que $U(D_{ddd}) \neq 0$, deve-se prosseguir ao menos até o terceiro nível de extensão, pois pode haver mais de uma taxa interna em $(1,2)$. Se $U(D_{ddd}) = 0$, haverá mais de uma taxa interna não-negativa.

b.3.2) Sinal $(D_{ddd}) \geqslant 1$.

Constatada a presença de múltiplas taxas internas de retorno não-negativas.

4.3 *Caso geral*

Tomando por base o visto na apresentação dos dois primeiros níveis de extensão, é fácil generalizar como se passa de um nível qualquer para o imediatamente subseqüente. Basta que, tomando como ponto de partida a diagonal que, no nível considerado, apresenta mais de uma variação de sinal, sejam construídas as respectivas diagonais à direita e à esquerda a ela associadas. A análise estará terminada se:

a) não houver variação de sinal em nenhuma das duas novas diagonais. Nesse caso a taxa interna é única e exatamente igual à extremidade de fronteira comum aos intervalos respectivamente associados às duas diagonais;

b) ocorrer exatamente uma variação em uma das novas diagonais, e nenhuma variação de sinal na outra. Desde que não sejam nulos os respectivos últimos termos das diagonais em apreço, haverá uma única taxa interna, que pertencerá ao intervalo associado à diagonal com a única variação de sinal. Se os últimos termos forem nulos, teremos mais de uma taxa interna não-negativa.

c) ambas as diagonais apresentarem ao menos uma variação de sinal, o que configura a presença de múltiplas soluções.

De outro modo, havendo uma diagonal com mais de uma variação de sinal, sem variação na outra, e sem que sejam nulos os últimos termos do par de diagonais,[12] a primeira deve ser tomada como ponto de partida para a construção de mais de um nível de extensão; e assim por diante.

Resta saber se o processo é finito, e como especificar o intervalo de taxa de juros associado a cada uma das diagonais pertencentes a um dado nível de extensão.

Quanto à primeira pergunta, a resposta é, em geral, afirmativa. A única exceção diz respeito ao caso em que ao projeto considerado se associe uma única taxa interna que seja um número irracional e com multiplicidade maior do que 1, quando então o processo de construção de novos níveis de extensão prosseguirá indefinidamente. Em qualquer outro caso, o processo terminará após um número finito, mas possivelmente muito grande, de níveis de extensão.

[12] Se esses termos forem nulos, teremos o caso de múltiplas taxas internas não-negativas.

Com relação à segunda indagação, reportando-nos à apresentação em Uspensky (1948, p. 127-36) e partindo da função valor futuro $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$, para $x = 1 + i$, a determinação dos intervalos de interesse é feita a partir de sucessivas mudanças de variáveis. De maneira geral, sendo μ a variável associada a uma dada diagonal, para a sua diagonal à direita se associa a variável ν tal que $\mu = 1 + \nu$; ao passo que, para o caso de sua diagonal à esquerda, ν deve ser tal que $\mu = 1/(1 + \nu)$. As extremidades dos respectivos intervalos são obtidas fazendo-se, em cada caso, $\nu = 0$ e $\nu \to \infty$.

Assim, partindo de $P(x)$, nível zero, tem-se:

a) diagonal à direita

$$x = 1+i = 1 + y \Rightarrow i = y \therefore i \in (0, \infty)$$

b) diagonai à esquerda

$$x = 1 + i = 1/(1 + y) \Rightarrow i = 1/(1 + y) - 1 \therefore i \in (-1, 0)$$

Para o caso do primeiro nível de extensão, tem-se:

a) diagonal à direita

$$\left\{ \begin{array}{l} i = y \\ y = 1 + t \end{array} \right\} \Rightarrow i = 1 + t \therefore i \in (1, \infty)$$

b) diagonal à esquerda

$$\left\{ \begin{array}{l} i = y \\ y = 1/(1 + t) \end{array} \right\} \Rightarrow i = 1/(1 + t) \therefore i \in (0, 1)$$

Para o segundo nível de extensão, procedendo-se recursivamente, tem-se:

a) partindo da diagonal à esquerda relativa ao nível anterior;

a.1) diagonal à esquerda

$$\left.\begin{cases} i = 1/(1+t) \\ t = 1/(1+\beta) \end{cases}\right\} \Rightarrow i = 1/[1 + 1/(1+\beta)] \therefore i \in (1/2, 1)$$

a.2) diagonal à direita

$$\left.\begin{cases} i = 1/(1+t) \\ t = (1+\beta) \end{cases}\right\} \Rightarrow i = 1/(2+\beta) \therefore i \in (0, 1/2)$$

b) partindo da diagonal à direita relativa ao nível anterior:

b.1) diagonal à direita

$$\left.\begin{cases} i = 1 + t \\ t = 1 + \beta \end{cases}\right\} \Rightarrow i = 2 + \beta \therefore i \in (2, \infty)$$

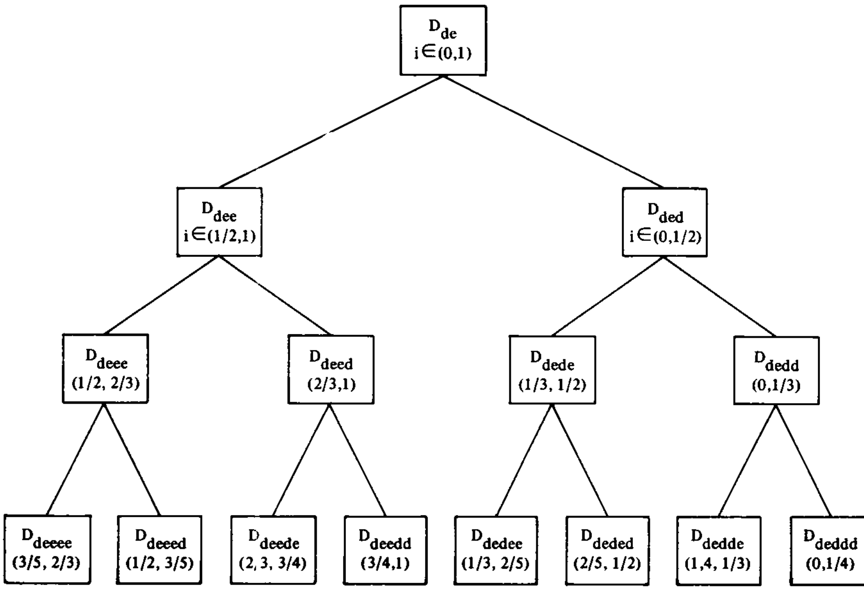
b.2) diagonal à esquerda

$$\left.\begin{cases} i = 1 + t \\ t = 1/(1+\beta) \end{cases}\right\} \Rightarrow i = 1 + 1/(1+\beta) \therefore i \in (1, 2)$$

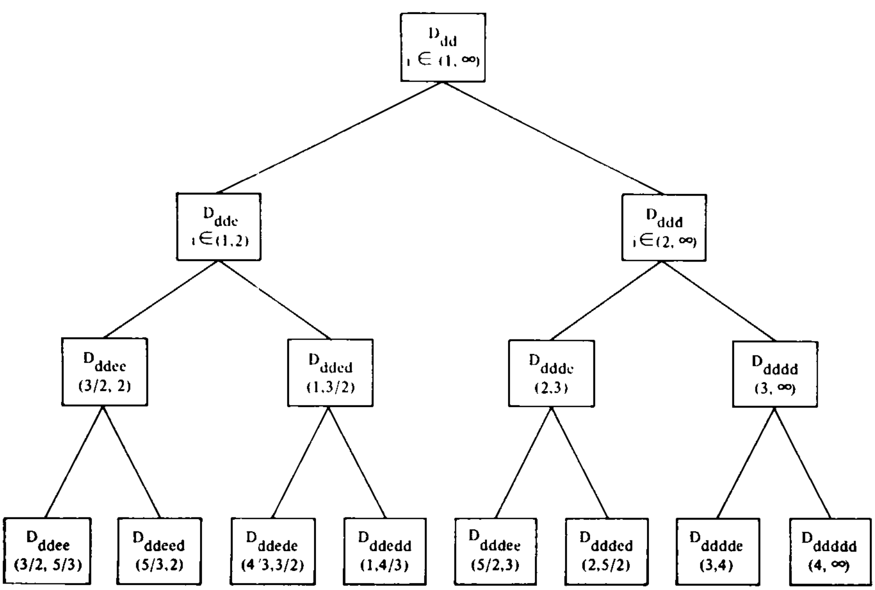
Procedendo-se recursivamente, apresentamos na figura 1 os intervalos associados a cada uma das diagonais relativas aos quatro primeiros níveis de extensão. Subsidiariamente, são apresentados no quadro 1 os intervalos relativos às 32 diagonais de Vincent referentes ao quinto nível de extensão da condição de Bernhard-de Faro.

Figura 1

Parte a: *Árvore de níveis de extensão a partir de* D_{de}



Parte b: *Árvore de níveis de extensão a partir de* D_{dd}



Quadro 1

Tabela de intervalos de taxas de juros para o quinto nível de extensão

Diagonal	Expressão para *i*	Intervalo
D_{deeeee}	$i = 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \mu)))))$	(3/5,5/8)
D_{deeed}	$i = 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(2 + \mu))))$	(5/8, 2/3)
D_{deeede}	$i = 1/(1 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + \mu))))$	(4/7, 3/5)
D_{deeedd}	$i = 1/(1 + 1/(1 + 1/(3 + \mu)))$	(1/2, 4/7)
D_{deedee}	$i = 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + \mu))))$	(5/7, 3/4)
D_{deeded}	$i = 1/(1 + 1/(2 + 1/(2 + \mu)))$	(2/3, 5/7)
D_{deedde}	$i = 1/(1 + 1/(3 + 1/(1 + \mu)))$	(3/4, 4/5)
D_{deeddd}	$i = 1/(1 + 1/(4 + \mu))$	(4/5, 1)
D_{dedeee}	$i = 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \mu))))$	(3/8, 2/5)
D_{dedeed}	$i = 1/(2 + 1/(1 + 1/(2 + \mu)))$	(1/3, 3/8)
D_{dedede}	$i = 1/(2 + 1/(2 + 1/(1 + \mu)))$	(2/5, 3/7)
D_{dededd}	$i = 1/(2 + 1/(3 + \mu))$	(3/7, 1/2)
D_{deddee}	$i = 1/(3 + 1/(1 + 1/(1 + \mu)))$	(1/4, 2/7)
D_{dedded}	$i = 1/(3 + 1/(2 + \mu))$	(2/7, 1/3)
D_{deddde}	$i = 1/(4 + 1/(1 + \mu))$	(1/5, 1/4)
D_{dedddd}	$i = 1/(5 + \mu)$	(0,1/5)
D_{ddeeee}	$i = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1 + 1/1 + \mu)))$	(8/5, 5/3)
D_{ddeeed}	$i = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(2 + \mu)))$	(3/2, 8/5)
D_{ddeede}	$i = 1 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + \mu)))$	(5/3, 7/4)

(*Continuação*)

Diagonal	Expressão para *i*	Intervalo
D_{ddeedd}	$i = 1 + 1/(1 + 1/(3 + \mu))$	(7/4,2)
D_{ddedee}	$i = 1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + \mu)))$	(4/3, 7/5)
D_{ddeded}	$i = 1 + 1/(2 + 1/(2 + \mu))$	(7/5, 3/2)
D_{ddedde}	$i = 1 + 1/(3 + 1/(1 + \mu))$	(5/4, 4/3)
D_{ddeddd}	$i = 1 + 1/(4 + \mu)$	(1,5/4)
D_{dddeee}	$i = 2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \mu)))$	(5/2, 8/3)
D_{dddeed}	$i = 2 + 1/(1 + 1/(2 + \mu))$	(8/3, 3)
D_{dddede}	$i = 2 + 1/(2 + 1/(1 + \mu))$	(7/3, 5/2)
D_{dddedd}	$i = 2 + 1/(3 + \mu)$	(2, 7/3)
D_{ddddee}	$i = 3 + 1/(1 + 1/(1 + \mu))$	(7/2, 4)
D_{dddded}	$i = 3 + 1/(2 + \mu)$	(3,7/2)
$D_{dddddde}$	$i = 4 + 1/(1 + \mu)$	(4,5)
D_{dddddd}	$i = 5 + \mu$	(5, ∞)

5. Conclusão

Mostramos aqui como, fazendo uso do Teorema de Vincent, podemos, somente com adições, estabelecer, com exceção do caso apontado, se a um dado projeto se associa somente uma taxa interna de retorno. Ainda mais, o procedimento descrito tem a virtude adicional de delimitar o intervalo ao qual pertence a taxa interna.

O processo de geração do que chamamos de níveis de extensão da condição de Bernhard-de Faro é de fácil implementação e livre de problema de estabilidade numérica. Porém, além de não ser possível *a priori* assegurar-se que o procedimento é finito, poderemos ter casos onde se faça necessária a determinação de um número excessivamente grande de níveis de extensão. Deste modo, do ponto de vista prático, recomenda-se que se estabeleça um limite ao número de níveis de extensão; digamos cinco. Se após o exame do último nível ainda persistir a presença de uma única diagonal com mais de uma variação de sinal, diremos que a aplicação do Teorema de Vincent se revelou inconclusiva. De qualquer maneira, teremos delimitado o intervalo que contém uma ou mais taxas de juros que anulam a função valor atual associada ao projeto em exame. Nessa eventualidade, para que se determine se existe somente uma distinta taxa interna de retorno, será necessário que, restringindo-se a atenção ao intervalo delimitado, ou se faça uso do Teorema de Sturm, ou se recorra a uma análise gráfica.

Abstract

Taking advantage of the mathematical equivalence between the separation of the real roots of a polynomial and the determination of the internal rate of return associated to a given project, the paper investigates the use of a litle known theorem due to Vincent. It is shown that Vincent's Theorem, originally published in 1836, provides an interesting sufficient condition for a unique internal rate. This sufficient condition is particularly appealing, as it is based only in additions of the project's net cash flows.

Referências bibliográficas

Aucamp, Donald C. & Eckardt, Jr., Walter L. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return-comment. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 11* (2): 329-32, June 1976.

Bernhard, Richard H. On the inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan conditions for uniqueness of the internal rate of return. *The Journal of Industrial Engineering, 18* (8): 499-500, Aug. 1967.

________________. A more general sufficient condition fo a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 14* (2): 337-41, June 1979.

________________. A simplification and an extension of the Bernhard-de Faro sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis. 15* (1): 201-9, Mar. 1980.

Buckley, James J. & Ryan, Michel J. *Conditions for the existence of a unique rate in the discounting mechanism.* Trabalho apresentado ao Philadelphia Joint National Meeting of TIMS/ORSA, Mar. 31 – Apr. 3, 1976.

Clarke, Arthur C. M. Complete extension of the Bernhard-de Faro Test for a unique nonnegative internal rate or return. Submetido ao *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 1982.

de Faro, Clovis. Sobre a unicidade de taxas internas de retorno positivas. *Revista Brasileira de Economia, 29* (4): 57-66, out./dez. 1975.

____________. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: further comments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13* (3): 577-84, Sept. 1978.

____________. Limites superiores para a taxa de rentabilidade de um empreendimento. *Revista Brasileira de Mercado de Capitais, 8* (23): 157-9, maio/ago. 1982.

____________ & Soares, Luiz. A aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno. *Pesquisa e Planejamento Econômico, 6* (3): 587-617, dez. 1976.

____________ & __________. A flexible sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *The Engineering Economist, 23* (2): 117-27, Fall 1978 *a*.

____________ & __________. A eficiência marginal do capital: as condições de Soper revisitadas. *Revista Brasileira de Economia, 32* (1): 93-103, jan./mar. 1978.

Ferreira, José Alberto A. M. *Estudo de um algoritmo formal para a aplicação do critério da taxa interna de retorno.* Tese de mestrado apresentada à PUC/RJ, 1975.

Hammond, John S., III *Bounding the numbers of rates of return of a project.* Trabalho apresentado ao Boston Joint National Meeting of TIMS/ORSA, 22-24 abr. 1974.

Hosterbach, E. & Seifert, O. Zur mehrdeutigkeit des internen Zinsfubes. *Zeitschrift* für *Betriebswirtschaft, 41* (12): 867-80, Dec. 1971.

Jean, William H. On multiple rates of return. *The Journal of Finance, 23* (1): 187-91, Mar. 1968.

Kaplan, Seymour. A note on a method for precisely determining the uniqueness or nonuniqueness of the internal rate of return of a proposed investment. *The Journal of Industrial Engineering, 16* (1): 70-1, Jan./Feb. 1965.

MacDuffee, Cyrus Colton. *Theory of Equations.* John Wiley, 1954.

Norstrom, C. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7* (3): 1.835-9, June 1972.

Panton, Don B. & Verdini, William A. A Fortran program for applying Sturm's Theorem in counting internal rates of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 16* (3): 381-8, Sept. 1981.

Pratt, John W. & Hammond, John S., III. Evaluating and comparing projects: simple detection of false alarms. *The Journal of Finance, 34* (5): 1.231-42, Dec. 1979.

Schall, Lawrence D.; Sundem, Gary L. & Geijsbeek, Jr., William R. Survey and analysis of capital budgeting methods. *The Journal of Finance, 33* (1): 281-7, Mar. 1978.

Soper, C. S. The marginal efficiency of capital: a further note. *The Economic Journal, 69* (273): 174-7, Mar. 1959.

Teichroew, Daniel; Robichek, Alexander A. & Montabano, Michael. Mathematical analysis of rates of return under certainty. *Management Science, 11* (3): 395-403, Jan. 1965.

Turnbull, H. W. *Theory of equations,* 5. ed. rev. Oliver & Boyd, 1957.

Uspensky, J. V. *Theory of equations.* McGraw-Hill, 1948.

Witten, Peer & Zimmermann, Horst Günther. Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und seiner numerischen Bestimmung. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 47* (2): 99-114, Feb. 1977.