Número especial sobre Marx e a revolução de Von Neumann

Mario Henrique Simonsen

Introdução

Não há livro de economia que tenha aturdido os sismógrafos da História como *O Capital* de Karl Marx. Isso não se deve à sua contribuição à teoria econômica, mas à sua dimensão evangélica: para um comunista ortodoxo, *O Capital* é a Bíblia; e é blasfêmia dissecá-lo como um texto de economia pura, como se faz com Adam Smith, Ricardo, Walras, Marshall ou Keynes.

Para quem não gosta de engolir dogmas, essa dissecação é imperativa. Há, no entanto, muitas dificuldades a transpor, e a primeira é a isenção emocional. Pelo seu conteúdo ideológico, *O Capital* é um livro que se pode estudar com simpatia ou antipatia, mas não com indiferença. Num caso, exaltam-se os acertos de Marx; noutro, os seus erros. Qualquer grande economista, aliás, pode ser focalizado sob esses dois ângulos. Com boa vontade, há quem conclua que quase tudo o que há de relevante em matéria de economia se encontra ou nas linhas ou nas entrelinhas de *A Riqueza das nações*. Com má vontade, Adam Smith pode ser apresentado como um habilíssimo teorizador de obviedades.

Em Marx, o espectro das avaliações não apenas é magnificado pela carga emocional, mas por duas outras razões.

Primeiro, *O Capital* é obra inacabada, e durante sua elaboração as concepções de Marx evoluíram consideravelmente. O Livro I, publicado em 1867, possui extraordinária unidade e força dogmática, e é muito fácil de criticar. Mas os Livros II e III, editados por Engels após a morte de Marx, contêm inúmeras idéias novas, muitas das quais contradizem a primeira parte da obra. A mensagem ideológica é a mesma, mas a teoria subjacente é outra. Marx não viveu o bastante para unificar a sua doutrina econômica, e isso é o suficiente para que ela admita mais de uma interpretação. Seguindo o Livro I, pode-se afirmar, como Samuelson, que Marx postulou que os preços de mercado eram proporcionais às quantidades de trabalho socialmente necessárias à produção de cada mercadoria. Lendo-se o Livro III, pode-se asseverar, como Morishima, que Marx reconheceu que numa economia capitalista não há paridade entre preços e valores.

Segundo, ao contrário de muitos economistas hodiernos, Marx teve muito mais idéias do que capacidade analítica para as desenvolver. Como a maioria dos economistas de seu tempo, onde Cournot e Walras eram a exceção, Marx era um grande erudito em história, filosofia e economia, mas apenas um principiante em matemática. Assim, muitas das idéias contidas em *O Capital*, sobretudo nos Livros II e III, foram bloqueadas pela insuficiência dos meios de expressão. Aliás, ainda que Marx conhecesse toda a matemática de seu tempo, o impasse não seria resolvido, pois a linguagem formal de que *O Capital* necessitava só veio a desenvolver-se no século XX.

O objetivo do presente texto é reexaminar a obra de Marx com o auxílio dessa linguagem matemática. Esse tipo de exame, embora só gere ceticismo para os interessados na dimensão evangélica de *O Capital*, é profundamente gratificante para quem deseja compreender a teoria econômica marxista.

Como economista puro, Marx dispôs-se a enfrentar um programa ciclópico, e que reduziria o equilíbrio geral walrasiano a simples miniatura. *O Capital* apresenta uma teoria geral de formação dos preços fundada no valor-trabalho; uma teoria de exploração do homem pelo homem cujo fulcro é o fenômeno da mais-valia: nas regras do jogo capitalista, uma hora de trabalho se compra por muito menos do que aquilo que o trabalhador produz em uma hora; uma teoria da acumulação e do crescimento assentada no reinvestimento da mais-valia apropriada pelos capitalistas; uma teoria de inovações poupadoras de trabalho e que se encarregariam de aferrar os salários ao nível de subsistência; uma teoria das crises alicerçada na contradição entre subconsumo e acumulação contínua de capital; uma teoria de concentração monopolista que deixaria os poucos ricos cada vez mais ricos e o proletariado cada vez mais pobre. E, como fecho apocalíptico, uma teoria da taxa decrescente de lucro que levaria o capitalismo à autodestruição pelas suas contradições internas.

Lutando em tantas frentes de trabalho com modesto equipamento bélico, Marx só podia construir uma teoria econômica repleta de erros. Com um mínimo de cálculo diferencial, Böhm-Bawerk e seus discípulos não tiveram dificuldade em refutar, ponto por ponto, as teses de Marx. Uma religião, no entanto, não se derruba com alfinetadas lógicas. Além do mais, a réplica marginalista se baseava num modelo de produção com funções diferenciáveis e ampla substitutibilidade dos fatores, uma invenção dos economistas que jamais foi aprovada pelos engenheiros, e que os marxistas não tinham por que engolir. Por certo tempo, as diferenças ideológicas entre os economistas se traduziam nos seus modelos de produção: a esquerda trabalhava com proporções fixas, a direita com funções de produção diferenciáveis. O modelo de Arrow-Debreu mostrou que essa controvérsia não passava de grossa tolice. Marx, realmente, abstraiu qualquer efeito-substituição, tanto na produção quanto no consumo, mas não é por aí que se pegam as falhas da sua teoria.

O Capital foi gerado sob duas grandes influências, a lógica de Hegel e a economia clássica inglesa. Embora ideologicamente rebelde, Marx nunca deixou de ser um economista clássico, e é impossível entendê-lo sem conhecer a obra de pelo menos dois de seus antecessores, Adam Smith e Ricardo. Essa obra é resumida no item 1 da presente publicação. A pregação marxista nada tem a ver com a dos clássicos ingleses, mas a sua teoria é uma ramificação de um tronco comum.

O item 2 resume *O Capital*, encarando-o como livro de economia e deixando de lado a sua dimensão evangélica. O resumo cobre apenas as idéias centrais de Marx, deixando de lado os atalhos menos inspirados, como a teoria da circulação das riquezas e a da rotação do capital. Não há aqui a preocupação de descobrir o que há ou não nas entrelinhas de *O Capital* por uma razão bastante objetiva: as entrelinhas jamais foram escritas, e cada um as interpreta como bem deseja.

O item 3 apresenta o modelo de Von Neumann, devidamente estilizado por Gale, Kemeny, Morgenstern e Thompson. O modelo fornece a teoria da produção de que Marx precisava e não conseguiu descobrir. As trajetórias geométricas de crescimento competitivo resolvem o problema da reprodução num caso particular, aquele em que os capitalistas reinvestem todos os seus lucros. Esse é o fulcro da teoria marxista do crescimento apresentada com muitas imperfeições no Livro II de *O Capital.*

O item 4 descreve o modelo aberto de Leontief. A preocupação do autor era construir matrizes de relações interindustriais capazes de auxiliar o planejamento econômico e o estudo das contas nacionais. Um subproduto do modelo, no entanto, é um sistema de preços que corresponde a valores marxistas, isto é, a horas de trabalho cristalizadas na produção.

O item 5 introduz o modelo fechado de Leontief, um caso particular do modelo de Von Neumann em que cada produto se obtém por uma única técnica de produção sem o emprego de bens duráveis de capital. Esse modelo se ajusta como uma luva à teoria marxista. No seu contexto é possível resolver a charada do Livro III de *O Capital*, a transformação de valores marxistas em preços de mercado competitivo. A solução desse problema, que tantas dores de cabeça trouxe a Marx, deve-se a Morishima, Seton e Okishio. A idéia central é estabelecer duas contabilidades separadas, uma em horas de trabalho, outra em preços de mercado. Na primeira contabilidade as taxas de exploração se nivelam nos vários setores da economia. Na segunda, a equalização se processa nas taxas de lucro. Algumas fórmulas não muito indigestas e com algum sabor marxista interligam as duas contabilidades. Não há evidência de que Marx tenha pensado nesse sistema dual de contas. Também é de se indagar da utilidade das contas em horas de trabalho. De qualquer forma, os teoremas de transformação são um achado brilhante dos neomarxistas. Infelizmente, eles se restringem ao modelo fechado de Leontief. No caso geral do modelo de Von Neumann, nem sempre é possível definir valores marxistas.

O item 6 segue um outro atalho, dissecando a teoria dos preços de Piero Sraffa. Essa teoria, meio ricardiana, meio marxista, mistura alguns lances brilhantes com várias elaborações bizarras. Para os interessados em economia marxista, ela traz uma novidade, a redução dos preços a quantidades datadas de trabalho, uma maneira alternativa e muito interessante de focalizar o problema da transformação.

Por último, o item 7 introduz o consumo dos capitalistas no modelo de Von Neumann. Trata-se de uma sofisticação devida a Morishima, e que permite um reexame mais fiel dos problemas de crescimento e reprodução.

Cem anos após a morte do autor de *O Capital*, é fácil criticar as suas construções teóricas. O valor-trabalho é um fundamento frágil para uma teoria de preços; a lei férrea de salários é uma conjectura sem apoio empírico; as inovações numa economia com rendimentos constantes não podem, simultaneamente, deprimir salários e taxas de lucro, e assim por diante. Pode-se daí concluir que, como economista puro, Marx errou na tese. Mas certamente construiu a mais provocadora antítese de toda a história do pensamento econômico.

Requisitos para a leitura do texto

Do ponto de vista estritamente formal, o presente texto dispensa qualquer conhecimento prévio de análise econômica. A familiaridade com as teorias do crescimento econômico e do equilíbrio geral é desejável apenas para que o leitor possa bem situar as limitações dos modelos de inspiração marxista. A mais séria dessas limitações é a hipótese de proporções fixas no consumo dos trabalhadores: presume-se que uma hora de trabalho se compre por uma cesta de mercadorias dada. O que acontece quando se muda essa cesta é o ponto central da teoria de Sraffa.

A leitura dos dois primeiros itens poucos conhecimentos pressupõe, em matéria de matemática: álgebra elementar e rudimentos de cálculo diferencial. O modelo ricardiano, na formalização de Pasinetti, apresentado no item 1, leva a um sistema de equações diferenciais. A convergência para o estado estacionário, no entanto, pode ser entendida com um simples diagrama de fase.

Os demais itens presumem algumas noções de álgebra linear, topologia do R^n e análise convexa. Em matéria de álgebra linear, supõe-se apenas que o leitor conheça as operações elementares com matrizes. Os modelos de Leontief envolvem vários teoremas mais ou menos sofisticados sobre matrizes não negativas, mas tais teoremas são demonstrados nos itens 4 e 5. No R^n, um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dito não-negativo quando todas as suas coordenadas são maiores do que ou iguais a zero; semipositivo, quando for não-negativo, com pelo menos uma coordenada positiva; positivo, quando todas suas coordenadas forem positivas.[1]

O produto interno de dois vetores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ é o número real $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$. A norma de um vetor x é indicada por $\| x \|$, sendo o real não-negativo dado por:

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

(1) R^n_+ é o conjunto dos vetores não negativos do R^n.

R^n_{++} o conjunto dos vetores positivos do R^n.

correspondendo, geometricamente, à distância do ponto x à origem. A distância $d(x, y)$ entre os pontos ou vetores x e y é dada por $d(x, y) = \|y-x\|$. Uma seqüência $[x_m]$ de pontos do R^n diz-se convergente para o ponto $x \in R^n$ quando a todo $\epsilon > 0$ corresponder um inteiro positivo $M = M(\epsilon)$, tal que $m > M$ implique $\|x_m - x\| < \epsilon$. Intuitivamente, isso equivale a dizer que, a partir de certa ordem, os elementos da seqüência se tornam todos tão próximos de x quanto se queira. Uma função $f(x)$ definida num subconjunto C do R^n e com valores no R^p diz-se contínua no ponto $x_o \in C$ quando a todo real $\epsilon > 0$ corresponder um real $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x \epsilon C$ e $\|x - x_o\| < \delta$ implique $\|f(x) - f(x_o)\| < \epsilon$. Isso significa que é possível tornar $f(x)$ tão próxima quanto se queira de $f(x_o)$, desde que se tome x convenientemente próximo de x_o. Um subconjunto C do R^n diz-se limitado quando existe um real positivo M tal que para todo $x \epsilon C$ se tenha $\|x\| < M$. Isso é o mesmo que dizer que C está contido em alguma bola de centro na origem e raio finito. Um conjunto C de pontos do R^n é dito fechado quando toda seqüência convergente $[x_m]$ de pontos de C tiver o seu limite x pertencente a C. Conclui-se trivialmente que a intersecção de uma coleção de conjuntos fechados é um conjunto fechado. C diz-se compacto se for ao mesmo tempo fechado e limitado (definição que só serve ao R^n).

A partir dessas definições provam-se os poucos teoremas de topologia do R^n usados no texto. O ponto inicial para as demonstrações é o teorema do supremo no conjunto dos reais. Seja G um conjunto de reais limitado superiormente, isto é, tal que exista um real M tal que $x \leqslant M$, qualquer que seja $x \epsilon G$. Diz-se que o real z é supremo de G quando: a) $z \geqslant x$, para todo $x \in G$; b) a todo $\epsilon > 0$ corresponder um ponto $x(\epsilon) \epsilon G$ tal que $x(\epsilon) > z - \epsilon$. Isso é o mesmo que dizer que z é o menor limite superior para os pontos de G. O teorema do supremo afirma que todo conjunto de reais limitado superiormente possui um e um único supremo (o qual pode pertencer ou não ao conjunto).

Com o teorema do supremo, demonstra-se, primeiro, para o conjunto dos reais, e depois, por indução finita, para o R^n, a seguinte proposição: no R^n, de toda seqüência limitada é possível extrair uma subseqüência convergente. Segue-se daí que se C é um subconjunto compacto do R^n, e se $[x_m]$ é uma seqüência de elementos de C, então de $[x_m]$ é possível extrair uma subseqüência que convirja para um ponto $x \in C$.

Um outro resultado que será utilizado é o teorema do máximo: toda função contínua $f(x)$ definida num subconjunto compacto C do R^n e com valores reais admite um máximo. Em outras palavras, existe $x_o \epsilon C$ tal que $f(x_o) \geqslant f(x)$ para todo $x \epsilon C$.

Em matéria de análise convexa usaremos apenas as definições básicas de conjunto convexo e de função côncava, o teorema de separação e o teorema de Kuhn e Tucker.

Um subconjunto C do R^n diz-se convexo quando, para quaisquer x e y pertencentes a C e para qualquer real $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, se tiver $(1-\alpha)x + \alpha y \epsilon C$. Isso equivale a dizer que o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de C está inteiramente contido em C. Um cone K é um subconjunto do R^n tal que se $x \epsilon K$, então $\lambda x \epsilon K$ para todo $\lambda \geqslant 0$, isto é, um conjunto que contenha toda a semi-reta partindo da origem e passando por um qualquer de seus pontos. Verifica-se que K é um cone convexo se e somente se $x \epsilon K$ e $y \epsilon K$ implicar $\alpha x + \beta y \epsilon K$ para quaisquer reais $\alpha \geqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$.

O teorema de separação afirma que se C_1 e C_2 são dois conjuntos convexos disjuntos no R^n, então existe um vetor n-dimensional $p \neq 0$ tal que, quaisquer que sejam $x \epsilon C_1$ e $y \epsilon C_2$, $(p, x) \leqslant (p, y)$. Geometricamente, isso equivale a dizer que existe um hiperplano, de normal p, tal que C_1 e C_2 se situem em lados fechados opostos do hiperplano.

Seja $G(x)$ uma função definida no subconjunto convexo C do R^n e com valores no R^p. Diz-se que $G(x)$ é côncava quando, para quaisquer x e y pertencentes a C e para qualquer $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:

$$G((1-\alpha) x + \alpha y) \geqslant (1-\alpha) G(x) + \alpha G(y)$$

a desigualdade vetorial exprimindo que cada coordenada do primeiro membro é maior ou igual à coordenada correspondente do segundo membro. Geometricamente, isso significa que a corda que une dois pontos quaisquer do gráfico de $G(x)$ se situa abaixo ou sobre o gráfico.

O teorema de Kuhn e Tucker é uma extensão do método dos multiplicadores de Lagrange para o cálculo do máximo de uma função real côncava condicionada por desigualdades côncavas. O teorema fornece máximos globais (e não apenas locais) e não depende da diferenciabilidade das funções. Seu enunciado é o seguinte:

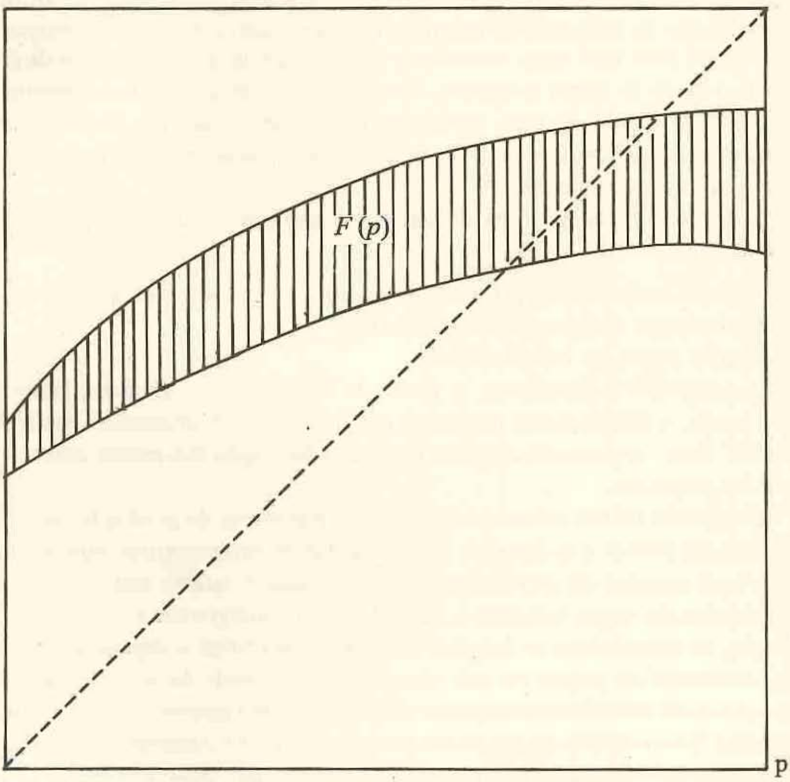
Seja C um convexo do R^n; $f(x)$ e $G(x)$ funções côncavas definidas em C e com valores, respectivamente, no conjunto dos reais e no R^p. Suponhamos que, para algum $y \epsilon C$ se tenha $G(y) > 0$ (condição de Slater). Então, para que o máximo de $f(x)$ sujeito à restrição $G(x) \geqslant 0$ ocorra no ponto x_o é necessário e suficiente que exista um vetor p-dimensional $w \geqslant 0$, tal que:

$$f(x_o) = f(x_o) + (w, G(x_o)) \geqslant f(x) + (w, G(x)), \text{ para todo } x \epsilon C.$$

No caso, w é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, todos não-negativos. O teorema afirma que, para que o máximo condicionado ocorra no ponto x_o, é necessário e suficiente que o máximo não condicionado da função auxiliar de Lagrange $f(x) + (w, G(x))$ ocorra no ponto x_o, sendo igual a $f(x_o)$.

Esses conhecimentos, aliados a certa prática no entendimento de demonstrações matemáticas, são suficientes para a leitura dos itens 3 a 6. O item 7 usa ainda o teorema do ponto fixo de Kakutani para provar a existência de trajetórias de Morishima-Von Neumann.

Para enunciar esse teorema, admitamos que C seja um subconjunto convexo e compacto do R^n. Uma correspondência em C é uma função que a cada ponto $p \in C$ associa um subconjunto $F(p)$ de C. A correspondência diz-se semicontínua superiormente quando se verifica a seguinte propriedade: se $[x_m]$ e $[y_m]$ são seqüências convergentes de pontos de C, com limites x e y, respectivamente, e se $y_m \in F(x_m)$ para todo inteiro m, então $y \in F(x)$. No caso, semicontinuidade superior equivale a dizer que $F(p)$ é uma correspondência de gráfico compacto. O teorema de Kakutani afirma que se $F(p)$ é semicontínua superiormente e se, para cada p, $F(p)$ é convexo e não vazio, então existe $p_o \in C$ tal que $p_o \in F(p_o)$. A figura a seguir ilustra o teorema de Kakutani para o caso em que C é o intervalo [0 ; 1] da reta.



1. De Adam Smith a Ricardo

1.1 O desenvolvimento da teoria clássica dos preços

Até que o cálculo diferencial se intrometesse na análise econômica, praticamente todas as teorias de formação de preços se erguiam a partir de uma observação contábil: o preço pelo qual uma mercadoria é vendida é igual ao seu custo de produção mais o lucro de quem a negocia. Essa observação está longe de constituir uma teoria: trata-se apenas de uma tautologia que define o que seja lucro. Contudo, com algum esforço taxionômico, foi possível partir desse truísmo para a construção de uma teoria dos preços.

O primeiro trabalho nessa direção foi classificar os custos de produção em quatro grupos:

a) as despesas com matérias-primas e com o uso dos bens de capital;

b) as rendas pagas aos proprietários de terras;

c) os salários pagos aos trabalhadores;

d) os pagamentos a capitalistas, a título de lucros, juros e aluguéis. Haveria um quinto grupo, o dos impostos pagos ao Governo, mas os economistas, desde Adam Smith até Marx, se concentraram em explicar a formação dos preços antes da incidência dos impostos.

O segundo foi um exercício de regressão nas etapas de produção: as despesas com matérias-primas e o desgaste das máquinas e equipamentos representavam, numa etapa anterior da produção, a soma de outros quatro grupos de custos e remunerações de terra, trabalho e capital. Assim, integrando as várias etapas da produção, se cancelariam as despesas com matérias-primas e depreciações, podendo-se desdobrar os preços em três componentes: a renda da terra, os salários e o lucro (como tal entendido o conjunto dos lucros propriamente ditos, mais os juros e aluguéis). Essa redução do preço das mercadorias a três componentes se encontra admiravelmente exposta no capítulo 6 de *A Riqueza das nações.*

Um terceiro trabalho foi o de estabelecer as tendências à equalização:

a) terras de igual fertilidade e igual distância dos mercados deveriam receber a mesma renda por hectare;

b) trabalhadores de igual habilidade e aplicação deveriam auferir iguais salários;

c) o capital tenderia sempre a procurar os caminhos mais lucrativos, deslocando-se dos setores menos rentáveis para os mais rentáveis. Assim, as taxas de lucro deveriam, a longo prazo, igualar-se, nos diversos ramos da atividade econômica. Adam Smith, todavia, deixou bem claro que essas tendências à equalização se estabeleciam com velocidades distintas: no caso da renda da terra e dos salários, o equilíbrio se atingiria com apreciável rapidez, já que ninguém de bom senso paga mais pelo por que pode pagar menos. O deslocamento do capital dos setores menos lucrativos para os mais rentáveis, no entanto, levaria mais tempo a se completar, e seria freqüentemente perturbado pelas oscilações de mercado.

Essas observações podem ser resumidas numa equação que, embora não tenha sido escrita por Adam Smith, está perfeitamente implícita em *A Riqueza das nações*. Se para produzir uma mercadoria são necessários: a hectares-ano de um certo tipo de terra, cuja renda por hectare-ano é igual a t; n homens-hora, cujo salário horário é w; e k cruzeiros-ano de capital cuja rentabilidade anual é de $100r$%, então o preço p da mercadoria será expresso por:

$$p = at + nw + kr. \tag{1.1}$$

Com todo o trabalho taxionômico até agora realizado, ainda continuamos no campo das tautologias. Para transformar a equação (1.1) numa verdadeira teoria é preciso explicar como se determinam os salários, as rendas da terra e as taxas de lucro. Essa construção, iniciada por Adam Smith, formidavelmente desenvolvida por Ricardo, e dogmaticamente fechada por Marx, teria que esbarrar contra uma série de obstáculos que só poderiam ser transpostos com muito fôlego imaginativo e com boa dose de imprudência científica.

O primeiro obstáculo a vencer estava em que as explicações dos preços custos de produção só focalizavam um lado do problema. As mercadorias não valem apenas porque custam a ser produzidas. Elas valem igualmente porque, direta ou indiretamente, satisfazem às necessidades e aos desejos dos indivíduos. Para usar um exemplo de Samuelson, um alfinete com o hino nacional gravado na cabeça pode ser custosíssimo, mas dificilmente valerá alguma coisa. Adam Smith era demasiadamente lúcido para deixar escapar esse problema e, por outro lado, não dispunha do equipamento analítico necessário à sua solução. Ainda assim, *A Riqueza das nações* encontrou, senão uma solução, pelo menos uma saída hábil, baseada em duas observações.

A primeira observação, apresentada no capítulo 4 de *A Riqueza das nações*, é a de que a palavra valor tem dois sentidos diferentes, podendo exprimir a utilidade de um dado objeto ou a possibilidade de esse objeto servir para comprar outras mercadorias. No primeiro caso se trata do "valor do uso," no segundo, do "valor de troca," distinção que já havia sido estabelecida por Aristóteles. As coisas que têm grande valor de uso, como a água, freqüentemente possuem pequeno ou nenhum valor de troca. Já os diamantes, embora pouco úteis, possuem enorme valor de troca. Com isso, Adam Smith estabelecia uma dicotomia de conceitos, propondo-se a analisar apenas um deles, o valor de troca, que tinha como expressão monetária o preço da mercadoria. Ricardo, no primeiro capítulo dos seus *Princípios de economia política e tributação,* introduziu uma ponta de veneno nessa dissociação de conceitos, ao observar que a utilidade, embora não seja medida do valor de troca, é essencial à existência desse valor. Um bem que não pudesse contribuir de alguma forma para a nossa satisfação, por escasso que pudesse ser, ou fosse qual fosse a quantidade de trabalho necessária para obtê-lo, seria fatalmente destituído de valor de troca. Mas também Ricardo não conseguiu ir além desse ponto, e a conciliação do valor de uso com o valor de troca só se estabeleceu muito mais tarde, com o desenvolvimento da teoria marginalista.

A segunda observação, que constitui o objeto do capítulo 7 de *A riqueza das nações*, é que o preço de mercado pode desviar-se, mas tende a flutuar em torno daquilo que Adam Smith denomina o "preço natural". O Capítulo em questão começa por notar que existe em cada comunidade ou região um índice normal de salários para cada ramo de trabalho, de renda para cada tipo de terra, e de lucro de capital. Esses níveis normais variam conforme a riqueza de cada comunidade e o seu ritmo de progresso. Quando o preço de determinada mercadoria remunera a terra, o trabalho e o capital exatamente nesses índices normais, diz-se que a mercadoria é vendida ao seu preço natural. Os desajustes entre a oferta e a procura podem desviar o preço de mercado do produto do seu nível natural. Se a oferta for insuficiente, ou a procura excessiva, o preço subirá acima do natural. Mas, aí, o mercado exercerá o seu efeito corretivo: as altas rendas, salários ou lucros estimularão o afluxo de mais fatores para a produção da mercadoria. Com o aumento da oferta, o preço de mercado tende a voltar ao nível natural. O raciocínio inverso, obviamente, se aplica ao caso em que a oferta é excessiva em relação à procura. Embora sem dizer exatamente como, Adam Smith admite que a procura esteja ligada à utilidade dos bens. Com isso fica claro por que não sobrevivem os capitalistas que se lançam na produção de bens inúteis: simplesmente, porque não conseguirão remunerar terra, trabalho e capital pelos seus índices naturais.

A segunda dificuldade a transpor nas teorias do custo de produção residia na escolha das unidades de medida. Na realidade, essa dificuldade poderia ser contornada se a preocupação viesse a ser, como mais tarde se fez com as equações de Walras, a de explicar como se formam os preços relativos, e não os preços absolutos. Mas, Adam Smith pretendia encontrar uma unidade estável de medida para os valores, como na física o são o metro, o quilograma ou o segundo. Embora a humanidade ainda não tivesse ingressado na era inflacionária do papel-moeda, as oscilações de preços em termos de ouro ou prata já eram suficientemente importantes para que não se aceitasse a moeda como uma unidade estável de valor. Adam Smith, no capítulo 5 de *A Riqueza das nações*, imaginou encontrar uma solução para o problema admitindo que o preço real de uma mercadoria fosse o expresso em unidades de trabalho, em contraposição ao preço nominal, que se estabelece em dinheiro. Na realidade, a distinção entre preço nominal e preço real não tinha maior profundidade do que dividir a equação (1.1) pelo salário unitário w, transformando-a em:

$$p/w = at/w + n + kr/w \qquad (1.2)$$

o que de fato significa passar de uma tautologia a outra. Mas, a idéia de exprimir os valores em unidades de trabalho inspiraria nova concepção, que seria amplamente explorada primeiro por Ricardo e depois por Marx: a teoria do valor-trabalho.

A dificuldade mais substantiva das teorias do custo de produção, efetivamente, residia na ausência de um denominador comum que pudesse ser cancelado na determinação dos preços relativos. Na equação (1.1) existem três coeficientes técnicos, que se supõem determinados pelos melhores métodos conhecidos de produção: a, n e k, aos quais correspondem três níveis naturais de remuneração, t, w e r. Como a proporção em que se empregam terra, trabalho e capital não é a mesma na fabricação de diferentes produtos, os preços relativos não se podem determinar apenas em função dos coeficientes técnicos. Não há como escapar, assim, a uma teoria que explique como se formam a renda da terra, os salários e as taxas de lucro, ou, pelo menos, as relações entre essas remunerações de fatores.

A situação é muito diversa da que ocorreria se só existisse um fator de produção, e esse ponto foi muito bem entendido por Adam Smith em *A Riqueza das nações*. Se admitíssemos que o trabalho fosse o único fator de produção, a relação de preços de duas mercadorias seria igual à relação entre o número de homens-hora empregados na respectiva fabricação. Adam Smith apresenta essa teoria de formação dos preços como válida para uma sociedade primitiva, onde as terras ainda não foram apropriadas e onde o trabalho manual não seja ajudado pelas máquinas e equipamentos. Mas, logo a descarta para as sociedades mais sofisticadas, onde se tenham estabelecido a propriedade da terra e a acumulação de capital. Note-se que com um único fator de produção é dispensável saber como se forma a sua remuneração, para explicar a determinação dos preços relativos. Simplesmente, essa remuneração é o denominador comum que se cancela.

As construções unificadas, todavia, exercem enorme fascínio intelectual, e a idéia de que o valor de uma mercadoria pudesse exprimir-se pelo número de horas necessárias à sua produção, isto é, a teoria do valor-trabalho, não iria morrer com tanta facilidade quanto imaginava Adam Smith. Em *A Riqueza das nações*, trata-se apenas de uma teoria aplicável às sociedades rudimentares. Ricardo, apesar de sua estupenda formação lógica, conseguiu, nos seus *Princípios de economia política e tributação*, o aparentemente impossível: em alguns capítulos consagrar, e em outros refutar a teoria do valor-trabalho. Até que veio Marx, para erguê-la à categoria de religião.

1.2 Do impressionismo de Adam Smith à lógica de Ricardo

A celebridade de *A Riqueza das nações* se deve a pelo menos duas características. De um lado, a de ter sido o primeiro livro importante escrito sobre economia. De outro, a de provavelmente conter muito menos erros do que os livros originais de economia publicados posteriormente. Essa segunda característica se deve ao fato de Adam Smith se ter mostrado suficientemente prudente para não se aventurar a ingressar no limite de incompetência. O custo dessa prudência, todavia, foi o de apenas esboçar, sem completar, uma teoria de formação de preços.

Após mostrar, no capítulo 6, que o preço das mercadorias se decompõe em salários, rendas e lucros, e de analisar, no capítulo 7, como o preço de mercado flutua em torno do natural, seria esperável que *A Riqueza das nações* descrevesse o que determina a remuneração de cada fator de produção. Os capítulos seguintes são repletos de excelentes observações quanto a causas de variações dos salários, da renda da terra e dos lucros, mas estão longe de fornecer algo que se possa considerar uma teoria de determinação. Adam Smith naturalmente observa que o salário do trabalhador deve permitir a subsistência sua e de seus dependentes, sem o que a raça humana acabaria em uma geração. Mas, não afirma que os salários tendam a permanecer nesse nível de subsistência, admitindo que, na Grã-Bretanha de então, os salários fossem mais elevados do que o estritamente necessário para que o trabalhador constituísse família. Sem muita precisão, admite que o aumento do capital da sociedade eleve os salários e baixe as taxas de lucro. Num outro ponto, afirma que os salários mais altos não são os das nações mais ricas, mas os das nações que mais rapidamente crescem. Os salários individuais variam conforme a aptidão de cada trabalhador, a dificuldade de aprendizado da profissão, a regularidade do emprego, a salubridade das condições de trabalho, etc. As corporações, restringindo artificialmente a oferta de alguns empregos, conseguem aumentar os salários dos seus associados. Na mesma linha, Adam Smith observa que as taxas de lucro variam conforme o risco dos negócios, e o grau de concorrência ou monopólio. A renda da terra é uma típica remuneração de monopólio, sendo maior para as terras mais férteis e mais próximas dos mercados. Todas essas observações são apresentadas em *A Riqueza das nações* com preciosos pormenores, fluência de estilo e acuidade empírica. Mas, no conjunto, representam apenas pinceladas impressionistas em direção a uma teoria de formação dos preços dos fatores de produção. Como se determinam os salários, a renda da terra e as taxas de lucro é questão que, efetivamente, não foi respondida por Adam Smith.

Na realidade, a maior contribuição de Adam Smith não reside na estrutura lógica da sua teoria da formação dos preços dos produtos e dos fatores de produção, mas em identificar como era possível chegar a uma ordem econômica natural a partir de um sistema inteiramente descentralizado de decisões, o livre jogo das forças de mercado. O sistema se equilibraria como se guiado por "mão invisível", que operaria as necessárias correções de rumo sempre que os preços de mercado se desviassem do seu nível natural. Retrospectivamente, seria possível afirmar que *A Riqueza das nações* provou que o sistema de mercado era capaz de funcionar, mas não que ele fosse capaz de distribuir eficientemente recursos escassos. Esse tipo de consideração exigiria um aparato analítico fora do alcance de *A Riqueza das nações*. Por acreditar que o indivíduo soubesse, melhor do que qualquer planejador oficial, julgar o que mais lhe convinha, Adam Smith induziu que a mão invisível não apenas era capaz de operar, mas também de operar com maior eficiência do que a intervenção governamental. Smith não era um panglossiano a ponto de acreditar que todos vivessem no melhor dos mundos. Não apenas a intervenção governamental, mas também os monopólios e coalizões de produtores o inquietavam. Sua preocupação, por outro lado, não era combater o socialismo, que só iria ganhar corpo no século XIX, mas o mercantilismo, tão em moda na época. Ao descobrir, pela lógica, que o sistema de mercado era ordenado por mão invisível, Adam Smith partiu, não por um silogismo, mas por uma extrapolação analógica, para a pregação do *laissez-faire*. Os empiristas britânicos, desde Locke, preocupavam-se menos em construir grandes edifícios dedutivos a partir de umas poucas premissas, do que em alinhavar observações extraídas da realidade. Essa é a linha filosófica de *A Riqueza das nações*.

Ao contrário de Adam Smith, Ricardo é um escritor bastante árido. *A Riqueza das nações* lê-se de um fôlego só. Os *Princípios de economia política e tributação* só podem ser lidos com um lápis e papel ao lado, e alguns raciocínios de Ricardo só se tornam perfeitamente claros com o auxílio de um manual interpretativo. Na realidade, Ricardo possuía formidável propensão à abstração e, do ponto de vista lógico, as suas construções se tornariam muito mais precisas se fossem apresentadas na embalagem moderna de um modelo matemático. Ao invés, Ricardo apresenta seus raciocínios com base em fastidiosos exemplos sobre a composição do preço do trigo. Não se pode criticar Ricardo por não ter apresentado os *Princípios* sob a forma de um modelo, primeiro porque seria exigir demais para a época, segundo porque, em 1821, um livro de economia repleto de equações dificilmente encontraria leitores. É natural, todavia, que numa exposição moderna do pensamento de Ricardo se recorra a equações interpretativas, com o que se ganha muito em tempo e em precisão.

Como compensação pela aridez, Ricardo realmente consegue construir uma teoria de determinação dos preços dos fatores de produção. O leitor desprevenido pode ter a impressão de que os *Princípios de economia política e tributação* apresentam não apenas uma, mas, às vezes, duas teorias conflitantes para explicar a mesma coisa. Por exemplo, a formação de preços primeiro é explicada pela teoria do valor-trabalho, depois a partir da teoria de determinação da renda da terra, dos salários e dos lucros. Do mesmo modo, há duas teorias de salários: a "lei férrea", segundo a qual os salários tendem ao nível de subsistência, e a "lei do fundo de salário", que, expressa em linguagem moderna, admite que os salários sejam proporcionais à relação capital/mão-de-obra.

Uma leitura atenta dos *Princípios*, no entanto, desfaz essas aparentes contradições. O capítulo 1 dos *Princípios de economia política e tributação* parte da teoria do valor-trabalho como primeira aproximação, mas não tarda a identificar as suas imperfeições e a necessidade de substituí-la por outra explicação mais precisa. As duas teorias de salários são apresentadas em horizontes temporais distintos: a teoria do fundo se aplica a curto prazo, a lei férrea representa a tendência a longo prazo. O elo entre as duas se estabelece pela combinação da lei dos rendimentos decrescentes com a teoria malthusiana da população.

A explicação da renda da terra como o resultado do diferencial de fertilidade, apresentada no capítulo 2 dos *Princípios de economia política e tributação*, constitui uma das contribuições mais originais de Ricardo à análise econômica. Nos seus aspectos fundamentais, a teoria continua aceita até hoje. A teoria do lucro surge naturalmente como resíduo: a produção de uma sociedade é função da extensão e qualidade das terras cultivadas, da mão-de-obra empregada e do estoque de capital aplicado. A sobra, após o pagamento dos salários e da renda da terra, é o lucro. Obtém-se a taxa de rentabilidade, evidentemente dividindo o lucro total pelo estoque de capital.

Ricardo poderia ter parado aí, e já teria construído uma teoria estática de formação dos preços dos fatores de produção. Contudo, os *Princípios de economia política e tributação* se preocupam em elaborar uma teoria dinâmica, que leva a importantes exercícios de futurologia. As hipóteses desse modelo dinâmico são, basicamente, duas: primeiro, que os lucros são automaticamente reinvestidos e transformados em mais capital; segundo, que, na linha malthusiana, a população cresce a taxas tanto maiores quanto maior for o excedente dos salários sobre o nível de subsistência.

A conclusão de Ricardo é que, numa economia em que todas as terras férteis já tenham sido ocupadas, a mecânica dos rendimentos decrescentes necessariamente conduz ao estado estacionário ao nível da miséria. A população chegaria ao seu limite compatível com a escassez de alimentos, e o seu crescimento seria freado pela equalização das taxas de mortalidade às de natalidade. Os proprietários de terras se apropriariam de uma proporção extorsiva do produto, os salários cairiam ao nível de subsistência e a acumulação de capital cessaria, pela exaustão dos lucros.

Contudo, o pessimismo de Ricardo não é incondicional. A lei dos rendimentos decrescentes só se aplica aos países onde a produção de alimentos é detida pela escassez de terras férteis, como se admitia ser a Grã-Bretanha. Em outros países, dotados de abundância de terras em relação à população, nada deteria o progresso da sociedade.

Mesmo para os países premidos pela escassez de terras, Ricardo aponta uma solução: a abertura ao comércio internacional, importando alimentos e exportando manufaturas. Nesse sentido, o Capítulo 7 dos *Princípios de economia política e tributação* oferece mais uma das notáveis invenções de Ricardo: a doutrina das vantagens comparativas.

Como conclusão de sua análise, Ricardo não havia apenas construído uma teoria dinâmica de formação dos preços dos produtos e dos fatores de produção. Mas, também, apresentava uma mensagem programática para a Grã-Bretanha da época: abolir o protecionismo à importação de alimentos. É impossível evitar que os marxistas afirmem que Ricardo desenvolveu toda a sua teoria porque era ligado aos capitalistas, adversários dos proprietários rurais. O fato é que os *Princí-*

pios de economia política e tributação representam um dos livros mais importantes e originais já escritos em matéria de análise econômica. O pensamento de Ricardo é suficientemente rico e fecundo para merecer uma síntese interpretativa, como a que se apresentará mais adiante.

1.3 A teoria ricardiana do valor-trabalho

O capítulo 1 dos *Princípios de economia política e tributação* abre a sua primeira seção com um longo subtítulo: "O valor de uma mercadoria, ou seja, a quantidade de qualquer outra pela qual pode ser trocada, depende da quantidade relativa de trabalho necessária à sua produção, e não da maior ou menor compensação que é paga por esse trabalho."

Fundamentalmente, esse é o enunciado da teoria do valor-trabalho, segundo a qual o preço de uma mercadoria é proporcional à quantidade de trabalho exigida na sua produção. Ricardo, após relembrar a distinção entre valor de uso e valor de troca, cuida de uma ligeira ressalva: há um pequeno grupo de mercadorias cujo valor é regulado apenas pela escassez. São as mercadorias não susceptíveis de reprodução, como algumas estátuas e quadros raros, livros e moedas escassos, vinhos de qualidade peculiar. A sua teoria do valor aplicar-se-á apenas às mercadorias cuja quantidade pode ser aumentada pelo exercício da atividade humana, e em cuja produção a concorrência opere sem restrições.

O subtítulo da seção 1 é extremamente enfático, mas Ricardo tem o cuidado de só desenvolver a teoria do valor-trabalho para as mesmas economias rudimentares a que se havia referido Adam Smith. O ponto importante detectado por Ricardo é que, a vigorar a teoria do valor-trabalho, é desnecessário dispor de uma teoria de salários para determinar a estrutura dos preços relativos. Com efeito, no caso, o salário unitário é o denominador comum que se cancela.

A seção 2 do capítulo 1 assinala que trabalhos de diferentes qualidades são remunerados diferentemente, mas que isso não é causa de variação do valor relativo das mercadorias. Com isso, Ricardo lembra que o trabalho não é um fator de produção homogêneo, mas que se distingue qualitativamente, conforme o grau de habilidade e instrução do trabalhador. A solução para o problema está em admitir que o mercado estabeleça coeficientes estáveis de proporcionalidade dos salários, conforme o grau de qualificação da mão-de-obra. Esses coeficientes devem ser usados para a conversão de horas de trabalho qualificado em horas-equivalentes de trabalho comum.

Na seção 3, Ricardo prossegue com a teoria, observando que não apenas o trabalho aplicado imediatamente às mercadorias afeta o seu valor; também o trabalho gasto em implementos, ferramentas e edifícios que são usados na produção daquelas mercadorias. Mas, já na seção 4, surge a primeira grande pedra no caminho. O subtítulo é sugestivo: "O princípio de que a quantidade de trabalho empregado na produção de mercadorias regula seu valor relativo, consideravelmente modificado pelo emprego de maquinaria e de outros capitais fixos e duráveis."

Com alguns exemplos numéricos, Ricardo conclui que a teoria do valor-trabalho não serve para determinar os preços relativos de mercadorias que se fabriquem com diferentes relações capital/mão-de-obra. Isso o leva, nas seções restantes, a reconhecer que os preços relativos das mercadorias não podem ser determinados apenas a partir dos coeficientes técnicos de produção. Havendo mais de um fator de produção, e as proporções de emprego dos fatores não sendo as mesmas para os diferentes produtos, não mais existe um denominador comum que se possa cancelar.

O leitor propenso à crítica tem o direito de indagar por que Ricardo dedica o primeiro capítulo dos seus *Princípios* inicialmente para consagrar, e depois para derrubar a teoria do valor-trabalho. É possível que, didaticamente, o método não seja dos melhores. A impressão que se tem é que Ricardo aceitava a teoria do valor-trabalho como primeira aproximação, mas que julgava absolutamente necessário apontar as suas imperfeições e substituí-la por outra melhor. Seja como for, essa teoria melhor é apresentada nos demais capítulos dos *Princípios de economia política e tributação.*

1.4 A teoria da renda da terra

O capítulo 2 dos *Princípios de economia política e tributação*, que trata da renda da terra, não apenas é muito original, mas também muito didático, trazendo embutida a lei dos rendimentos decrescentes. O capítulo 3 estende os mesmos princípios para explicar a renda das minas.

Ricardo começa por observar que, num país subpovoado e com abundância de terras férteis, não haveria renda da terra. O que faz surgir essa renda é a necessidade, com o crescimento demográfico, de ocupar não apenas as melhores terras, mas também outras de menor fertilidade. O preço do trigo é o mesmo, quer ele provenha de uma terra mais ou de outra menos produtiva. Mas, a quantidade de capital e trabalho necessária à produção de uma tonelada de trigo é menor na terra mais fértil. Como o preço do trigo deve remunerar o capital e o trabalho empregados na terra de pior qualidade, o proprietário da terra mais fértil se beneficiará de uma renda, como fruto do seu diferencial de fertilidade.

Em termos analíticos simples, suponhamos que o método mais econômico para a produção de uma tonelada de trigo exija n_1 unidades de trabalho e k_1 unidades de capital, na terra de pior qualidade que esteja sendo cultivada. Essa terra, segundo Ricardo, não faz jus a qualquer renda, de modo que o preço de uma tonelada de trigo será dado por:

$$p = n_1 w + k_1 r \tag{1.3}$$

sendo w o salário e r a taxa de lucro. Admitamos, agora, que numa terra mais fértil uma tonelada de trigo se produza usando a_o unidades de terra, n_o de trabalho e k_O de capital. A hipótese de que esta terra seja mais fértil equivale a afirmar que $n_O w + k_O r < n_1 w + k_1 r$. Como o preço do trigo produzido nas duas terras é o mesmo, a terra mais fértil receberá uma renda t_O por unidade de área, tal que:

$$p = a_O t_O + n_O w + k_O r = n_1 w + k_1 r \tag{1.4}$$

ou seja:

$$a_O t_O = (n_1 - n_O) w + (k_1 - k_O) r. \tag{1.5}$$

Naturalmente, o aumento da população num país com relativa escassez de terras obriga o aproveitamento de áreas cada vez piores. O resultado é o progressivo aumento da renda das propriedades mais férteis. Nesse sentido, Ricardo deixa bem claro que a renda da terra é efeito, e não causa, do encarecimento dos alimentos:

"Portanto, a razão pela qual os produtos primários aumentam em valor comparativo é o emprego de mais trabalho para produzir a última porção obtida, e não o pagamento de renda ao proprietário de terra. O valor do cereal é regulado pela quantidade de trabalho aplicada à sua produção naquela qualidade de terra, ou com aquela porção de capital que não gera pagamento de renda. O cereal não encarece por causa do pagamento da renda, mas, ao contrário, a renda é paga porque o cereal encarece e, como acabamos de observar, nenhuma redução ocorreria no seu preço, mesmo que os donos de terras renunciassem à totalidade das suas rendas. Tal medida somente permitiria que alguns fazendeiros vivessem como cavalheiros, mas não reduziria a quantidade de trabalho necessária para obter produtos primários nas terras menos produtivas que se cultivassem."

A teoria da renda da terra tal como apresentada por Ricardo não apenas é muito hábil. Ela continua substancialmente válida para explicar não só a renda da terra e das minas, mas também a de todos os bens que não são susceptíveis de reprodução (inclusive máquinas usadas, embora, aqui, a sua remuneração não corra o risco de se transformar em problema social). Naturalmente, a renda da terra não depende apenas da sua fertilidade, mas também da sua proximidade dos centros consumidores, um ponto apenas lembrado de passagem por Ricardo. Também o progresso tecnológico pode alterar substantivamente a estrutura das rendas e frear a tendência ao seu aumento. Mas, nas linhas mestras, o capítulo 2 dos *Princípios de economia política e tributação* incorporou-se sem maiores reparos à teoria econômica moderna.

1.5 Salários, lucros, rendimentos decrescentes

Os capítulos dos *Princípios de economia política e tributação* que tratam dos salários e lucros são suficientemente importantes e insuficientemente claros para pedirem uma análise interpretativa. A falta de clareza resulta, em primeiro lugar, da mistura algo desordenada da teoria do fundo de salários com a lei férrea do nível de subsistência e, ainda, com a lei dos rendimentos decrescentes. Em segundo, da concepção dúbia quanto ao papel do capital na produção.

Comecemos por este último ponto. O leitor moderno está habituado a encarar o papel do capital na produção sob duplo aspecto. Para uma dada tecnologia, capital e mão-de-obra são fatores de produção complementares: a produção de uma unidade de determinado bem requer k unidades de capital, n unidades de mão-de-obra e, se se tratar de um produto agrícola, de a unidades de certo tipo de terra. Mas, se se conhecem várias técnicas alternativas para a produção de um mesmo bem, capital e mão-de-obra podem ser vistos como substitutos: uma unidade do bem pode ser obtida empregando-se menos mão-de-obra n, desde que se aumente o coeficiente de capital k.

No princípio do século passado, no entanto, surgiu uma outra teoria, a do fundo de salários, e que atribuía ao capital uma única função *sui generis:* remunerar os trabalhadores. Na versão original, essa teoria afirmava que o capital K de uma sociedade era igual ao total de salários por ela pagos, isto é, o produto do salário unitário w pelo volume de emprego N:

$$K = wN. \tag{1.6}$$

Essa equação surpreende, à primeira vista, pois o capital é um estoque (valor), e a folha de salários um fluxo (valor por unidade de tempo). Por trás dessa especificação havia duas idéias altamente simplificadoras quanto à natureza do capital:

a) existe um período de produção, igual para todas as mercadorias, e durante o qual os meios de subsistência têm que ser adiantados aos trabalhadores;

b) o capital de uma sociedade é igual ao valor desses meios de subsistência adiantados aos trabalhadores.

Como um período uniforme de produção, determinado pela tecnologia existente, dissipam-se as dúvidas quanto à correção dimensional da equação (1.6). Pois wN é a folha de salários nesse período pré-especificado, isto é, um determinado valor, e não mais um valor por unidade de tempo. Sucede que a hipótese de que exista um período uniforme de produção para todas as mercadorias constitui uma simplificação caricatural das técnicas de produção. E a visão do capital como o total dos salários adiantados nesse período abrange apenas uma parcela do capital circulante: omite-se a outra, os estoques de matérias-primas, e esquecem-se por completo os bens duráveis de capital, isto é, as máquinas, equipamentos e instalações.

Ricardo seguramente percebeu que tanto a natureza do capital quanto as suas relações com a produção eram mais complexas do que as explicitadas na teoria do fundo de salários. A distinção entre capital fixo e circulante é claramente sublinhada nos *Princípios de economia política e tributação.* Mas faltou-lhe fôlego para substituir a teoria do fundo de salários por alguma coisa melhor. Aliás, toda a teoria do capital se desenvolveu por linhas tortas. Marx continuou com a idéia do período fixo de produção, embora tivesse o cuidado de incluir, no capital circulante, não só o valor dos salários adiantados aos trabalhadores, mas também o das matérias-primas adquiridas. Em certo ponto, Marx tentou livrar-se da uniformidade do período de produção, mas por um artifício pouco fecundo: o de introduzir diferentes coeficientes de rotação do capital. A escola austríaca, embora contribuísse com observações notáveis quanto à natureza e o papel do capital, embrenhou-se num túnel igualmente escuro, ao imaginar que o aumento da relação capital/mão-de-obra de uma sociedade equivalesse a um alongamento do período médio de produção. A teoria do capital só alcançou a maioridade quando os economistas perceberam que, embora a produção capitalista exigisse tempo, nem era necessário nem desejável agarrar-se à idéia do período de produção.

A teoria do fundo de salários estabelece imediatamente uma lei de determinação a curto prazo da remuneração do trabalho. Num determinado instante, podem considerar-se como dados o estoque de capital K da economia e a força de trabalho N, a qual corresponde a uma fração ativa da população total. (Nem Ricardo nem seus contemporâneos, à possível exceção de Malthus, cogitavam da hipótese de desemprego parcial da força de trabalho.) Assim, o salário de curto prazo ficaria determinado pela relação $w = K/N$. Ricardo não enuncia explicitamente a teoria do fundo de salários, mas admite claramente que:

a) a procura de mão-de-obra seja determinada pelo estoque de capital, a oferta pelo tamanho da população;

b) os salários cresçam, permaneçam estacionários, ou decresçam, conforme o estoque de capital se expanda a taxas maiores, iguais ou inferiores à oferta de trabalho.

Essas duas hipóteses equivalem à aceitação da teoria do fundo de salários, ou pelo menos de algo muito próximo.

Vejamos agora o segundo pilar do modelo de Ricardo: a lei dos rendimentos decrescentes. A origem dessa lei se encontra na teoria malthusiana da população. Em seu famoso ensaio, Malthus anteviu a catástrofe a que estava condenada uma sociedade onde a população tendia a crescer em progressão geométrica, enquanto que os recursos para a alimentar cresciam apenas em progressão aritmética: a humanidade parecia caminhar inexoravelmente para a estagnação ao nível da miséria, onde o tremendo aviltamento dos salários se encarregaria de frear o crescimento demográfico, elevando as taxas de mortalidade até o ponto em que igualassem as de natalidade. O remédio pregado por Malthus era a planificação familiar da época: a abstenção sexual voluntária, nenhum homem se casando antes dos 25 anos, nem antes de ganhar o suficiente para sustentar a mulher e seis filhos.

As progressões de Malthus implicam uma lei logarítmica de correlação entre a produção agrícola y e a força de trabalho N nela empregada:

$$y = c \log N + b. \qquad (1.7)$$

Nessa lei está embutido o problema dos rendimentos decrescentes: a produção agrícola aumenta sempre que se emprega um homem a mais: mas o adicional de produção conseguido pelo último trabalhador se torna cada vez menor. (No caso particular da lei logarítmica, esse adicional é inversamente proporcional à força de trabalho, já que $\frac{dy}{dN} = \frac{c}{N}$.)

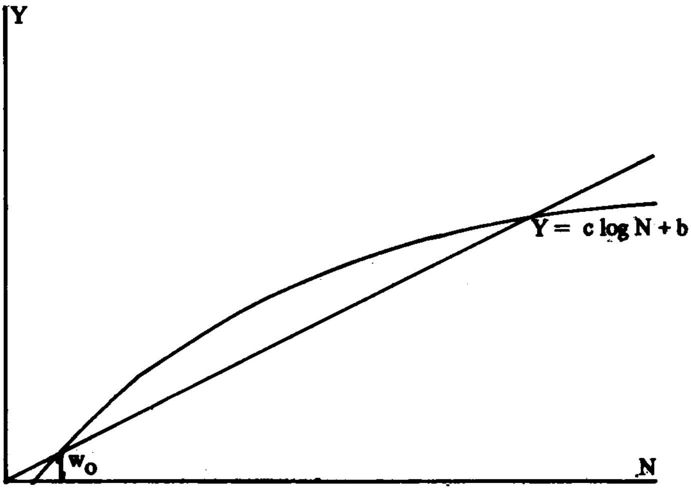
A fórmula malthusiana de crescimento demográfico não é exatamente uma progressão geométrica, pois Malthus admite que, em certo ponto, a miséria se encarregue de frear o crescimento demográfico pela ascensão das taxas de mortalidade. Deve-se supor, conseqüentemente, que quando os salários caírem a um nível mínimo de subsistência w_o, a população pare de crescer. Uma maneira natural de formalizar esse raciocínio consiste em supor que a taxa de crescimento da população seja proporcional ao excesso do salário efetivo sobre o mínimo de subsistência:

$$\frac{1}{N}\ \frac{dN}{dt} = k(w - w_o). \tag{1.8}$$

Por essa fórmula se conclui que, se o salário mantiver um excesso constante sobre o mínimo de subsistência, a população crescerá a uma taxa constante, isto é, em progressão geométrica.

As equações (1.7) e (1.8) são suficientes para corroborar as previsões de Malthus: a população não cessará de crescer enquanto o salário não cair ao nível de subsistência. E, ainda que toda a produção agrícola fosse entregue aos trabalhadores, isto é, ainda que, pela eliminação de todos os lucros e de todas as rendas da terra se tornasse $w = Y/N$, a população acabaria por se expandir até o ponto em que os salários caíssem ao mínimo de subsistência, como na figura 1.1.

Figura 1.1



Essa descrição parece suficiente para convencer que, dentro das hipóteses malthusianas, a humanidade caminhava para a estagnação ao nível da miséria, e ela de fato inspirou a mais popular das teorias de salário de boa parte do século passado: a lei férrea, pela primeira vez enunciada por Lassale, segundo a qual os salários tendiam a se fixar ao nível de subsistência. Há muitas questões, todavia, que merecem indagação. Como se ligam a lei férrea e a teoria do fundo de salários? Qual o destino dos lucros, da acumulação de capital e das rendas da terra? Essas questões, descuidadas no exercício citado, foram tratadas com muita habilidade por Ricardo.

Ricardo usa a lei dos rendimentos decrescentes, mas com dois aperfeiçoamentos em relação à versão malthusiana. Em Malthus, a população tende a crescer em progressão geométrica, e os recursos para a alimentar em progressão aritmética, por simples suposição *ad hoc*. Em Ricardo, o fenômeno dos rendimentos decrescentes na agricultura é devidamente explicado pela necessidade de ocupação de terras cada vez menos férteis, exatamente a origem da renda da terra. Por outro lado, os rendimentos decrescentes de Ricardo não necessariamente se submetem à camisa-de-força da lei logarítmica de Malthus. Tudo o que se precisa supor é que a produção agrícola y se correlacione com a força de trabalho nela empregada N, por uma função do tipo:

$$y = f(N) \tag{1.9}$$

tal que:

$$f'(N) > 0 \tag{1.10}$$

$$f''(N) < 0 \tag{1.11}$$

$$f(0) = 0 \tag{1.12}$$

$$f'(0) > w_0 \tag{1.13}$$

$$f'(N_0) = w_0, \text{ para algum nível de emprego } N_0. \tag{1.14}$$

É dispensável sublinhar que Ricardo não escreveu nenhuma dessas relações, embora elas estejam implícitas em seu raciocínio. As relações (1.9), (1.10) e (1.11) descrevem a produção agrícola como função estritamente côncava do volume de emprego — a tradução analítica convencional da lei dos rendimentos decrescentes. A equação (1.12) admite que, sem algum trabalho, nada se possa produzir. A desigualdade (1.13) exige que o adicional de produção conseguido pelo primeiro trabalhador seja superior ao salário de subsistência, sem o que a população desapareceria por inanição. E a equação (1.14) especifica que o fenômeno dos rendimentos decrescentes deve ser suficientemente relevante para que, em certo nível de emprego, esse adicional de produção caia ao salário de subsistência.

É interessante notar que a função de produção $y = f(N)$ gera, por intromissão de um pouco de cálculo diferencial, a distribuição do produto entre as rendas da terra, de um lado, e os salários totais mais lucros, de outro. O último trabalhador empregado e o capital com ele utilizado originam um acréscimo de produção $f'(N)$. Esse último trabalhador cultiva aquele tipo de terra de pior qualidade, que não faz jus a nenhuma renda. Logo $f'(N)$ é igual à remuneração de cada trabalhador mais a remuneração do capital a ele associado. Portanto, o total de salários mais lucros é dado por:

$$wN + L = Nf'(N) \tag{1.15}$$

e o total das rendas da terra pela diferença:

$$R = f(N) - Nf'(N). \tag{1.16}$$

L e R designando, respectivamente, os totais dos lucros e das rendas da terra. (Note-se que não estamos num modelo marginalista, em que um pouco mais de produto pode ser obtido com apenas um pouco mais de trabalho, sem ao mesmo tempo um pouco mais de terra e capital. Por conseguinte, a produtividade marginal $f'(N)$ não corresponde apenas ao salário, mas a este mais a remuneração do capital a ele associado, e mais a renda da terra marginal. Esta última é igual a zero.)

As equações traduzem o raciocínio de Ricardo levado às últimas conseqüências. Elas não estão escritas nos *Princípios de economia política e tributação*, onde nem há equações nem exercícios de cálculo diferencial. Contudo, junto com a lei do fundo de salários, elas resumem muito fielmente a teoria ricardiana da distribuição de renda a curto prazo: dados o estoque de capital K e o volume de emprego N, a renda da terra é determinada pelo total da produção agrícola $y = f(N)$. Os salários se determinam por $w = K/N$. E o lucro é o resíduo $y - R - wN$.

Essa teoria estática da distribuição de renda já constitui uma construção notável para a época, mas Ricardo faz questão de ir mais adiante, e de construir um modelo dinâmico onde mostra para onde caminham os salários, lucros e rendas da terra. Para isso, Ricardo cria dois elos entre o presente e o futuro.

O primeiro é a relação entre salários e crescimento demográfico. Logo no início do capítulo 5 dos *Princípios*, Ricardo afirma que o preço natural do trabalho é aquele necessário para permitir que os trabalhadores subsistam e perpetuem a raça, sem aumento nem diminuição. Há evidente parentesco entre essa definição e a lei férrea de salários, mas a concepção de Ricardo parece bem mais sofisticada, aproximando-se da equação (1.8): salário natural seria aquele que mantivesse inalterada, no tempo, a oferta de trabalho. A definição é extremamente funcional, dispensando qualquer julgamento subjetivo quanto ao que seja o nível de subsistência. Diga-se de passagem, Ricardo tem o cuidado de afirmar que esse preço natural varia no espaço e no tempo, conforme os hábitos e costumes dos povos.

O segundo elo de ligação entre o presente e o futuro é a teoria clássica da acumulação, que admite que todos os lucros sejam acrescidos ao estoque de capital:

$$\frac{dK}{dt} = L. \tag{1.17}$$

Com esses dois elementos de ligação chega-se à teoria da convergência para o estado estacionário: produção e população ficam paralisadas, diante do freio dos rendimentos decrescentes. Caem os salários ao nível de subsistência e desaparecem os lucros, e com eles a acumulação de capital. Sustentam-se apenas, no auge, as rendas da terra. Mostraremos pormenorizadamente, no subitem 1.7, como se orquestra a marcha para o estado estacionário.

1.6 A teoria das vantagens comparativas

O capítulo 7 dos *Princípios de economia política e tributação*, que trata do comércio exterior, é dos mais densos e originais concebidos por Ricardo. Não só é apresentada com muita clareza a teoria das vantagens comparativas, como se encontra, já mais do que em forma embrionária, a teoria quantitativa da moeda e um modelo de distribuição internacional do ouro monetário, em regime de comércio livre.

A primeira observação de Ricardo é que a troca de mercadorias entre as nações não é regida pelas vantagens absolutas, em termos de maior ou menor quantidade de trabalho necessária à produção de cada mercadoria. A produção de certa metragem de tecidos pode custar 100 homens-hora na Inglaterra e apenas 90 em Portugal. Mas isso, *a priori*, não impede que a Inglaterra exporte tecidos para Portugal. A razão é que não há como deslocar automaticamente os trabalhadores ingleses para Portugal, ou vice-versa. Na realidade, Ricardo admite, na ausência de barreiras aduaneiras, ampla mobilidade internacional dos produtos. Mas, nenhuma mobilidade do capital e do trabalho. Isso permite que as remunerações dos fatores sejam completamente diferentes, de um país para outro. (Só um século mais tarde Bertil Ohlin demonstraria que o comércio livre tende a atenuar as desigualdades internacionais dos preços dos fatores de produção. E só na década de 50 surgiria o famoso teorema de Samuelson, que prova que, em condições ideais que nunca se verificaram na prática, o comércio livre entre as nações igualaria a remuneração dos fatores). Citando especificamente Ricardo, "o trabalho de 100 ingleses não pode ser trocado pelo de 80 ingleses, mas a produção de 100 trabalhadores ingleses pode ser trocada pela de 80 portugueses, 60 russos ou 120 índios orientais".

A observação seguinte de Ricardo é que o interesse do comércio internacional provém das diferenças de vantagens comparativas. Suponhamos que para produzir determinada quantidade de tecidos sejam necessários 100 homens-ano na Inglaterra, e 90 homens-ano em Portugal. E que para a fabricação de um certo volume de vinho sejam exigidos 120 homens-ano na Inglaterra, e apenas 80 em Portugal. Então, embora Portugal possua vantagem absoluta na produção de ambas as mercadorias, seria do interesse dos dois países que a Inglaterra exportasse os tecidos para Portugal, em troca de vinho. De fato, para a Inglaterra, a troca significaria obter com o produto de 100 homens-ano o que lhe custaria 120; para Portugal, conseguir com 80 homens-ano o que lhe custaria 90.

Ricardo naturalmente observa que, como as mercadorias não se trocam umas pelas outras, mas por moeda (na época o ouro), para que as vantagens comparativas efetivamente criem o comércio é preciso que o preço do vinho seja menor em Portugal do que na Inglaterra, e que o oposto ocorra no caso dos tecidos. O comércio livre, no entanto, acabará regulando o estoque de ouro em circulação em cada país, de modo a que as vantagens comparativas sejam efetivamente aproveitadas. Suponhamos que tanto o vinho como os tecidos custassem mais, em termos de ouro, na Inglaterra do que em Portugal. A Inglaterra então se tornaria, numa primeira etapa, importadora de ambos os produtos. O déficit comercial, no entanto, teria que ser saldado com a transferência de ouro da Inglaterra para Portugal. Isso faria com que a quantidade de moeda e portanto todos os preços baixassem na Inglaterra e subissem em Portugal. (Aí está implícita a teoria quantitativa da moeda.) O contrário ocorreria se o preço-ouro tanto do vinho como dos tecidos fosse maior em Portugal. O equilíbrio, assim, se daria num ponto em que a distribuição de ouro entre os dois países fosse tal que o preço dos tecidos fosse menor na Inglaterra e o do vinho menor em Portugal, permitindo o equilíbrio do comércio entre os dois países.

Ricardo reconhece que o seu exercício, supondo apenas a troca de duas mercadorias entre dois países e usando a teoria do valor-trabalho, é puramente esquemático. Os princípios gerais, todavia, pareciam extrapoláveis para um comércio multilateral envolvendo diversos produtos, partindo-se de uma teoria mais complexa de formação dos preços. Na realidade, o capítulo 7 dos *Princípios* é o ponto de partida de toda a teoria moderna do comércio internacional. Além do mais, para a época de Ricardo, continha uma mensagem eminentemente prática. A lei dos rendimentos decrescentes, de tão trágicas conseqüências, funcionava apenas na agricultura dos países com escassez de terras, como se admitia ser a Inglaterra da época. Mas não era aplicável nem à indústria britânica nem à agricultura dos países dotados de terras férteis e abundantes em relação à população. A Inglaterra teria, assim, como escapar, pelo menos por muito tempo, à fatalidade dos rendimentos decrescentes, exportando manufaturas para importar alimentos, dentro de um esquema internacional de divisão do trabalho proveitoso para todos os países.

1.7 Um modelo de convergência para o estado estacionário

Vejamos, agora, como é possível descrever a teoria ricardiana da evolução dos salários e lucros por um modelo formal. Numa versão preliminar, imaginaremos uma economia que produz um único produto agrícola, de acordo com a função de produção $y = f(N)$, sujeita à lei dos rendimentos decrescentes.

As equações do modelo já foram desenvolvidas no subitem 1.5. Juntando a equação (1.15) com a lei de acumulação (1.17) e a do fundo de salários (1.6), obtém-se:

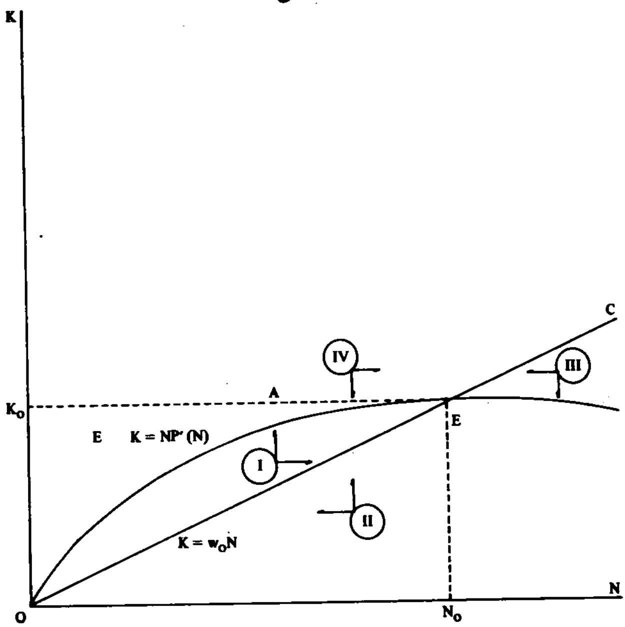
$$\frac{dK}{dt} + K = Nf'(N). \tag{1.18}$$

Do mesmo modo, combinando a lei do fundo de salários (1.6) com a equação multhusiana (1.8):

$$\frac{dN}{dt} = k(K - w_0 N) \tag{1.19}$$

A solução desse sistema de equações diferenciais determina as trajetórias do estoque de capital K e da população ativa N. Conhecidas essas trajetórias, determinam-se automaticamente: a) a do produto, $y = f(N)$; b) a da renda da terra, $R = f(N) - Nf'(N)$; c) a dos salários, $w = K/N$; d) a dos lucros, $L = \frac{dK}{dt}$.

Figura 1.2



A figura 1.2 mostra como se processa a convergência das trajetórias para um estado estacionário em que: a) a população é igual a N_0, tal que $f'(N_0) = w_0$; b) o estoque de capital é $K_0 = w_0 N_0$; c) o salário cai ao nível de subsistência, $w = w_0$; d) os lucros caem a zero. Em abscissas, marca-se a população ativa N; em ordenadas, o estoque de capital K. A reta OC tem por equação $K = w_0 N$, e a curva OAB corresponde a $K = Nf'(N)$. Essa curva parte da origem e, pelas hipóteses (1.13) e (1.14), fica acima da reta OC até a abscissa N_0, e abaixo de OC daí por diante. O ponto E de interseção de OC e OAB corresponde ao estado estacionário. Com efeito, nesse ponto, pelas equações (1.18) e (1.19), a população ativa e o estoque de capital param de crescer, caindo os lucros a zero, e os salários ao nível de subsistência w_0.

A reta OC e a curva OAB dividem o primeiro quadrante nas quatro regiões indicadas na figura. Pelas equações (1.18) e (1.19) conclui-se que:

a) na região I, K e N crescem;

b) na região II, K cresce e N decresce;

c) na região III, K e N decrescem;

d) na região IV, K decresce e N cresce.

Assim, qualquer que seja o ponto inicial, a trajetória do estoque de capital e da força de trabalho converge para o ponto E de estado estacionário.

Ampliemos agora o modelo para uma economia com dois produtos, um agrícola (milho), outro industrial (ouro). A construção que se segue é devida a Luigi Pasinetti. Admitiremos que:

a) da população ativa total N, uma parte N_1 seja empregada na agricultura, uma parte N_2 na indústria, e, portanto:

$$N = N_1 + N_2 \tag{1.20}$$

b) a produção de milho esteja sujeita à lei dos rendimentos decrescentes, de acordo com a função de produção $y = f(N_1)$, a qual obedeça às relações (1.10) a (1.14);

c) a quantidade x produzida de ouro seja proporcional a N_2:

$$x = b N_2 \tag{1.21}$$

sendo b uma constante positiva;

d) os períodos de produção do ouro e do milho sejam idênticos, em ambos os casos o capital representando apenas o adiantamento dos salários aos trabalhadores;

e) os proprietários de terras gastem todas as suas rendas na aquisição de ouro;

f) os salários e lucros sejam todos aplicados na aquisição de milho.

Dentro da linha de raciocínio de Ricardo, o produto industrial do modelo, o ouro, escapa à lei dos rendimentos decrescentes. O milho, no caso, representa os bens de subsistência consumidos pelos trabalhadores. A hipótese de que os capitalistas também apliquem todos os seus lucros em milho é conseqüência natural de duas outras suposições: a da reinversão de todos os lucros, e a do papel restrito do capital ao fundo de salários.

Numa economia com mais de um produto, há um problema inicial a resolver: o da determinação dos preços relativos. Tomaremos o milho como unidade de valor (isto é, arbitraremos em 1 o seu preço) e designaremos por p o preço do ouro em relação ao milho. Dentro da teoria do fundo de salários, a relação capital/mão-de-obra é a mesma em ambos os setores da economia. Por conseguinte, os preços relativos podem ser determinados pela teoria do valor-trabalho desde que se considere o milho produzido na pior terra, a que não faz jus a nenhuma renda.

Nesse quadro, para produzir uma unidade de ouro, são necessários $1/b$ homens-hora; para obter uma unidade a mais de milho, na terra ocupada de menor fertilidade são necessários $1/f^1\,(N_1)$ homens-hora. Logo,

$$p = \frac{f'(N_1)}{b}. \tag{1.22}$$

Se lembrarmos que $1/p$ é o preço do milho em relação ao ouro, a equação (1.22) traduz uma conseqüência natural da lei dos rendimentos decrescentes: quanto mais milho for necessário produzir, maior será o seu preço em termos de ouro.

Como no subitem 1.5, o total das rendas da terra é expresso por $R = f(N_1) - N_1 f'(N_1)$. Como supusemos que todas essas rendas, e apenas elas, fossem aplicadas na aquisição de ouro:

$$R = f(N_1) - N_1 f'(N_1) = px.$$

Entrando agora com as equações (1.20), (1.21) e (1.22):

$$f(N_1) = Nf'(N_1). \tag{1.23}$$

Por hipótese, toda a produção de milho é comprada com os salários dos trabalhadores e com os lucros dos capitalistas, isto é:

$$f(N_1) = wN + L$$

ou, entrando com as equações (1.6) – teoria do fundo de salários – e (1.17) – lei de acumulação:

$$\frac{dK}{dt} + K = f(N_1). \tag{1.24}$$

O modelo se completa com a equação (1.19), resultante da combinação da lei malthusiana de expansão demográfica com a teoria do fundo dos salários:

$$\frac{dN}{dt} = k\,(K - w_0 N). \tag{1.19}$$

O sistema de equações (1.19), (1.23) e (1.24) determina as trajetórias do estoque de capital K, da força de trabalho N, e da população empregada na agricultura N_1. A partir dessas trajetórias, determinam-se as dos salários, lucros e rendas da terra pelas já conhecidas relações

$$w = K/N,\ L = \frac{dK}{dt},\ R = f(N_1) - N_1 f'(N_1).$$

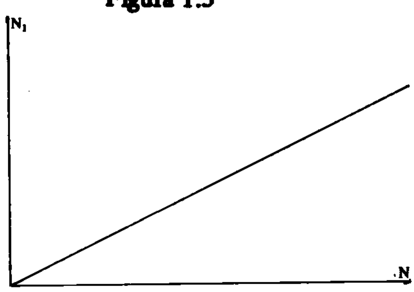
Numa economia fechada, continua sendo impossível deter a marcha para o estado estacionário. A produção de ouro escapa à lei dos rendimentos decrescentes, mas não resolve o problema da subsistência dos trabalhadores. Por um simples artifício algébrico, o modelo apresentado se torna formalmente equivalente ao modelo de economia com um único produto, sintetizado nas equações (1.18) e (1.19). Com essa equivalência formal, prova-se a convergência para o estado estacionário.

Vejamos como encontrar esse artifício. A equação (1.23) estabelece uma correspondência biunívoca entre N (população ativa total) e a componente N_1 empregada na agricultura. Pela lei dos rendimentos decrescentes, um aumento de N_1 implica o aumento de $f(N_1)$ e a queda de $f'(N_1)$. Logo, N é função crescente de N_1, e vice-versa, tal como na figura 1.3. Podemos sintetizar essa correspondência na relação:

$$N_1 = h\,(N). \tag{1.25}$$

A título de exemplo, se a produção agrícola se descrevesse pela função $y = c\,N_1^a$, sendo $0 < a < 1$ e c uma constante, encontraríamos $N_1 = aN$

Figura 1.3



Combinando as equações (1.23), (1.24) e (1.25), obtemos:

$$\frac{dK}{dt} + K = Nf'(h(N)). \qquad (1.26)$$

Essa expressão é aparentada com a equação (1.18) do modelo de economia monoprodutora. Reconstruamos a figura 1.2, mantendo a equação $K = w_O N$ para a reta OC, mas substituindo a equação da curva OAB por $K = Nf^1$ (h (N)). Para provar a convergência para o estado estacionário precisamos apenas que a nova curva OAB continue acima da reta OC até determinada abscissa N_O, e abaixo dessa reta a partir de tal abscissa.

Pela hipótese (1.14), para um certo volume N_{10} de trabalhadores empregados na agricultura, $f'(N_{10}) = w_O$. Tomando N_O tal que $N_O = h(N_{10})$, conclui-se que a reta OC e a curva OAB interceptam-se no ponto de abscissa N_O. Pelo que foi visto, $f'(h(N))$ é função decrescente de N, e portanto maior, igual ou menor a W_O conforme N seja menor, igual ou maior do que N_O, respectivamente. Daí se conclui que OAB fica acima de OC até o ponto de abscissa N_O, e abaixo de OC a partir dessa abscissa, tal como na figura 1.2.

Note-se que a introdução, no modelo, da produção industrial com rendimentos constantes não impede, mas de certa forma retarda, a marcha para o estado estacionário. No modelo de economia agrícola, a população estacionaria ao nível N_O, tal que $f'(N_O) = w_O$. A mesma equação agora determina não o limite da população total, mas o da população N_{10} empregada na agricultura.

Introduzamos agora o comércio livre com o exterior em nossa economia ricardiana com dois setores. Suporemos que não haja barreiras ao comércio, e que o preço $\hat{p}$ do ouro em relação ao milho, no mercado internacional, não seja afetado pelo volume de exportações e importações da economia, situando-se no intervalo:

$$\frac{w_O}{b} < \hat{p} < \frac{f'(0)}{b}. \qquad (1.26)$$

Isso equivale a tomar $\hat{p}$ como um dado do problema. Duas alterações se impõem no modelo até agora desenvolvido:

a) como o comércio livre equaliza os preços internos aos internacionais, a equação (1.22) deve ser substituída pela sua irmã gêmea:

$$f'(N_1) = b\hat{p} \qquad (1.27)$$

a qual determina a população N_1 empregada na agricultura, e conseqüentemente a produção de milho $y = f(N_1)$ e o total da renda da terra

$$R = f(N_1) - N_1 f'(N_1) = f(N_1) - b\hat{p}N_1 \qquad (1.28)$$

b) as equações (1.23) e (1.24) têm que ser modificadas, pois, já que o país comercia com o exterior, a produção de cada bem não precisa coincidir com o seu consumo interno. Em substituição às duas, registremos apenas que os salários mais lucros, mais rendas da terra são iguais ao valor total da produção de milho mais ouro:

$$wN + L + R = f(N_1) + \hat{p}x = f(N_1) + \hat{p}bN_2$$

ou, tendo em vista a equação (1.28):

$$wN + L = b\hat{p}N$$

ou, ainda, introduzindo as leis de acumulação (1.17) e do fundo de salários (1.6):

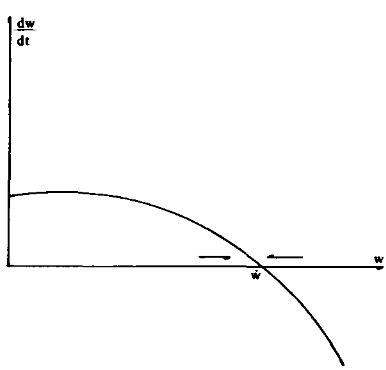
$$\frac{dK}{dt} + wN = w\frac{dN}{dt} + N\frac{dw}{dt} + wN = b\hat{p}N.$$

Entremos agora com a lei (1.8) de expansão populacional. Com alguns algebrismos se chega à seguinte equação diferencial para a determinação da trajetória dos salários:

$$\frac{dw}{dt} + w(1 + k(w - w_o)) = b\hat{p} \qquad (1.29)$$

Designemos por $\hat{w}$ a raiz positiva da equação do segundo grau $w(1 + k(w - w_o)) = b\hat{p}$. A figura 1.4, correspondente à equação diferencial (1.29), mostra que w cresce se for inferior, e decresce se for superior a $\hat{w}$. Isso significa que o salário converge para $\hat{w}$. Note-se agora que, pela hipótese (1.26), $b\hat{p} > w_o$. Isso implica que $\hat{e}$ também é superior ao salário de subsistência w_o.

Figura 1.4



Com o comércio livre com o exterior, a nossa economia ricardiana escapa assim da convergência para o estado estacionário. Os salários permanecem acima do nível de subsistência. A população cresce geometricamente à taxa limite $k\ (\hat{w}-w_0)$, e o estoque de capital, alimentado pelos lucros, também deve expandir-se à mesma taxa-limite, para suprir os necessários fundos de salários.

A razão pela qual a economia escapou à convergência para o estado estacionário é facilmente compreensível. O país limitou sua produção de milho ao nível determinado pela equação (1.27) e destinou toda sua capacidade adicional à produção de ouro, a qual se reproduz com rendimentos constantes. Para atender ao mercado interno, a economia passou a importar produtos agrícolas pagos pela exportação de produtos industriais, precisamente a terapia que Ricardo recomendava para a Inglaterra de 1820.

Há apenas uma debilidade em toda essa construção: supor que, por mais que o país exporte ouro e importe milho, o preço $\hat{p}$ do ouro em relação ao milho não se altere. A aproximação pode ser plausível para uma economia pequena, de participação insignificante no comércio internacional, mas esse certamente não era o caso da Inglaterra no século passado. Mais razoável seria admitir que $\hat{p}$ fosse função decrescente do volume de ouro exportado pelo país. Voltaríamos agora a um modelo de convergência para o estado estacionário. Mas a uma convergência adiada pelo aproveitamento das vantagens comparativas.

É impossível prever o que seria a reação de Ricardo ao ver a sua teoria enquadrada em sistemas de equações diferenciais, como fizemos no presente item. Poucos economistas do século passado e da primeira metade do corrente século cuidaram de explicitar suas hipóteses e de extrair suas conclusões numa linguagem isenta de ambigüidades, como a dos modelos matemáticos. O que se pode dizer é que o modelo desenvolvido capta as principais idéias dos *Princípios de economia política e tributação.*

Contrariamente a Adam Smith, que previa o progresso mundial pela divisão do trabalho, Ricardo era um futurólogo do pessimismo, inspirado pela pressão demográfica contra os rendimentos decrescentes. Felizmente, para a humanidade, Ricardo, Malthus e seus contemporâneos subestimaram duas forças: a do capital, como fator de produção capaz de substituir a mão-de-obra, e a do progresso tecnológico, que ensinou a driblar a lei dos rendimentos decrescentes na produção de alimentos.

2. Marx

2.1 A visão marxista

Marx ocupa posição absolutamente singular na história do pensamento econômico. Sua contribuição à economia teórica é muito importante, mas não mais importante do que a de Adam Smith, Ricardo, Walras, Marshall ou Keynes. Contudo, nenhum outro economista conseguiu, como ele, sacudir os alicerces da História. A explicação é simples: a economia é apenas uma das várias dimensões da doutrina marxista. Ela se funde com outras disciplinas, a filosofia, a história, a sociologia e a política, para formar uma verdadeira religião. Ninguém jamais pensou em substituir a Bíblia pela *A Riqueza das nações*, pelos *Princípios de economia política e tributação,* ou pela *Teoria geral do emprego.* Mas, para um bom marxista, *O Capital* é a Bíblia.

No campo filosófico, Marx foi profundamente influenciado pela lógica de Hegel, a qual corresponde ao que hoje se entende por metafísica: a busca do conhecimento do Absoluto. Na filosofia hegeliana esse conhecimento se adquire por aproximações sucessivas no tríplice movimento, denominado dialético, "tese-antítese-síntese". A tese apresenta o Absoluto sob uma visão suficientemente parcial e incompleta, a ponto de se tornar contraditória. O enunciado da contradição origina a antítese, também suficientemente incompleta para se expor a outras contradições. A conciliação, pelo Espírito, da tese e da antítese constitui a síntese. Esta última serve de tese a nova etapa do movimento dialético, e assim por diante.

O tríplice movimento dialético explica perfeitamente a evolução dos modelos científicos: a mecânica newtoniana é a tese: a experiência de Michelson-Morley, a antítese; a teoria da relatividade, a síntese. Em Hegel, porém, ele é bem mais extraterreno, não visando ao conhecimento empírico, mas ao conhecimento do Absoluto. A lógica de Hegel é repleta de misticismo e a grande habilidade de Marx foi trazê-la à terra para fundamentar o seu socialismo científico. Tal como Hegel, Marx admite que a História evolua pelo tríplice movimento dialético, mas em termos bem mais palpáveis. A dialética, em Hegel, é guiada por uma entidade mística denominada Espírito. Em Marx, pelas relações do homem com a matéria através dos meios de produção.

O ponto central da filosofia marxista é a chamada concepção materialista da História. A política, a religião, a filosofia, a organização econômica e a arte de qualquer época são, segundo Marx, conseqüência dos métodos de produção. (É de se presumir que Marx não pretendesse, com essa afirmação, explicar todos os primores da cultura, mas apenas os seus traços gerais.) Os métodos de produção mudam com as revoluções tecnológicas, e estas provocam a ruptura das velhas organizações políticas, econômicas e sociais.

Essa idéia é o ponto de partida para a construção do socialismo científico, que Marx desenvolve com grandiosidade apocalíptica. Em maior ou menor escala, os socialistas utópicos de meados do século XIX atribuíam a miséria dos trabalhadores à ganância dos capitalistas. Marx apresenta a marcha para o socialismo noutro nível de dignidade científica, revestindo-a com a impressionante armadura do determinismo histórico. O sistema capitalista teria sucedido o feudalismo pela substituição da produção artesanal pela industrial. O capitalismo funcionava de acordo com suas regras próprias, e não em função da maior ou menor generosidade dos patrões. Essas regras do jogo incluíam três leis básicas: a acumulação sistemática da maior parte dos lucros auferidos pelos capitalistas, o aumento do desemprego pelo progresso tecnológico, e a conseqüente manutenção dos salários ao nível de subsistência.

A derrocada do capitalismo não seria o resultado dos seus crimes contra a humanidade, mas da contradição interna de suas leis de funcionamento. A acumulação do capital acabaria provocando a progressiva queda da taxa de lucro, e com isso a extinção das pequenas e médias empresas e a concentração monopolista da produção. Mais ainda, chegaria a um ponto em que a acumulação de capital não apenas diminuiria a taxa de lucro, mas até o total dos lucros, contrapondo-se ao seu objetivo natural. Nesse momento surgiriam as crises de superprodução de capital, com o agravamento do desemprego. Os capitalistas tentariam em vão frear o curso dos fatos, oprimindo cada vez mais as classes trabalhadoras, pela redução dos salários e pelo alongamento das jornadas de trabalho. Aumentariam com isso as tensões entre os poucos ricos e os inúmeros pobres até o momento em que fatalmente eclodisse a revolução do proletariado.

Dentro dessa ordem de idéias, Marx não era apenas o pregador da revolução comunista: era também o seu profeta. Em sua concepção, todavia, profetizar e agir eram tarefas complementares. "Os filósofos interpretaram o mundo de diversas maneiras, mas a tarefa real consiste em modificá-lo." Essa máxima, apresentada em *Ad Feuerbach,* resume o preceito marxista segundo o qual o pensador deve antecipar-se à História, transformando-se em ativista. O preceito é obviamente inconsistente com a hipótese do determinismo histórico: se o capitalismo realmente estivesse condenado à morte pelas suas contradições internas, pouco importaria que os intelectuais fossem ativistas ou contemplativos. Essa debilidade lógica, no entanto, transformou-se em formidável catalisador político na práxis marxista.

Para transformar o pensador em ativista, é preciso, além de o convencer, carregá-lo de emoção. Essa talvez seja a razão pela qual Marx, em centenas de páginas de *O Capital*, serve-se de uma linguagem messiânica e repleta de insultos aos seus adversários para retratar as miseráveis condições de vida dos trabalhadores ingleses em meados do século XIX. Para quem nutria profundo desprezo pelo socialismo utópico e se propunha a construir um socialismo puramente científico, essa indignação romântica parece fora de propósito. Sucede que Marx, além de desenvolver o socialismo científico, desejava conquistar o maior número possível de adeptos para a sua cruzada contra o capitalismo.

A capacidade de provocar uma reação em cadeia "emoção-razão-ativismo" é a grande força tanto do marxismo quanto de todas as religiões bem-sucedidas. Sob esse aspecto, vale observar o paralelismo entre a obra de Marx e a teologia tomista. Cada um de nós possui suas preferências afetivas, pois, como dizia Pascal, o coração tem razões que a razão desconhece. Confortar-nos-ia profundamente se as razões do coração também pudessem ser justificadas pela razão. Essa foi a preocupação dos teólogos escolásticos, os quais procuraram provar que os dogmas do cristianismo, conhecidos pela Revelação, eram corroborados pela lógica de Aristóteles. E esse mesmo objetivo levou Marx a construir o seu socialismo científico, o conforto intelectual para todos aqueles que, por razões do coração, se opõem ao regime capitalista. Como seria de se esperar, o hermetismo e a prolixidade de *O Capital* contribuíram para o seu sucesso teológico: os erros de Marx só podem ser detectados com muita paciência e um razoável conhecimento de teoria econômica.

Quem não deseja engolir dogmas é obrigado a investigar até que ponto o socialismo de Marx é verdadeiramente científico, isto é, a dissecar. *O Capital* como livro de teoria econômica. Sob esse aspecto, a obra de Marx é uma revisão da teoria clássica inglesa, enriquecida em alguns pontos e empobrecida noutros tantos. A teoria do valor trabalho, a lei férrea dos salários e a hipótese da taxa decrescente de lucro não são invenções marxistas: elas foram explicitamente enunciadas por Ricardo e seus contemporâneos. A originalidade de Marx é obter essas leis por métodos inteiramente diferentes dos usados por seus predecessores. Em Ricardo, o valor-trabalho é uma primeira aproximação à teoria dos preços. Em Marx ele é, numa primeira etapa, um dogma; numa segunda, um teorema; numa terceira, uma perplexidade. Em Ricardo, tanto a lei férrea dos salários quanto a taxa decrescente de lucro resultam da pressão demográfica contra os rendimentos decrescentes na produção de alimentos. Marx rejeita a teoria malthusiana da população, por ele classificada como libelo contra a humanidade, para tanto descartando a lei dos rendimentos decrescentes. A manutenção dos salários ao nível de subsistência e o declínio da taxa de lucro explicam-se, em "*O Capital*, pelo efeito das inovações poupadoras de trabalho num sistema com rendimentos constantes.

Não usando a hipótese de rendimentos decrescentes, a futurologia marxista é bem mais otimista do que a dos clássicos ingleses. Estes últimos vaticinavam o estado estacionário ao nível da miséria por fatalidade tecnológica. Sem as peias malthusianas, Marx acena para um futuro bem mais promissor, como de resto conviria a um profeta da esperança. O capitalismo representa apenas o purgatório dos trabalhadores. O Juízo Final da revolução do proletariado tratará de salvá-los, condenando os capitalistas ao inferno.

Isso lembra o Apocalipse do Evangelho de São João, mas, voltando à terra, cabe indagar como Marx consegue provar que, em economias com rendimentos constantes, as inovações são capazes de, ao mesmo tempo, impedir a elevação dos salários e baixar as taxas de lucro. A resposta é decepcionante: por um erro de lógica, que transforma o socialismo científico numa estátua com pés de barro.

Nesse ponto fundamental, a teoria marxista é de uma pobreza franciscana. Em muitos outros pontos, todavia, *O Capital* é denso de inovações teóricas. O papel do capital na produção, embora cercado de muita confusão, é apresentado um passo à frente da teoria do fundo de salários. Marx é o primeiro economista a analisar o papel das inovações tecnológicas sobre a distribuição de renda. A teoria da mais-valia, apesar da grossa embalagem ideológica, constitui um achado e é a base da teoria do crescimento: uma economia só se expande se for capaz de gerar um excedente da produção sobre o consumo. Na teoria das crises, Marx chega a tornar-se um precursor de Keynes, não obstante os percalços da sua formulação analítica.

Numa palavra, *O Capital* é o livro mais ousado já escrito por um grande economista. Suficientemente ousado para cometer erros como nenhum outro. E também para, como nenhum outro, influenciar os destinos da humanidade.

2.2 O modelo marxista de produção

Para que os conceitos marxistas se tornem compreensíveis é preciso raciocinar com um modelo muito particular de produção capitalista:

a) existe um período uniforme de produção, idêntico para todos os bens e serviços;

b) para produzir uma unidade do bem i, o capitalista é obrigado a adquirir, no início do período, matérias-primas no valor c_i, e de adiantar a soma v_i de salários aos trabalhadores;

c) no final do período, o capitalista vende cada unidade do bem i ao preço $p_i = c_i + v_i + s_i$, s_i incorporando os lucros, juros e aluguéis.

Nesse modelo de produção, o capitalista empata, no início do período, um capital total $C_i = c_i + v_i$ por unidade do produto i. E recupera, no final do período, esse capital acrescido de s_i.

Na linguagem de Marx, c_i é o capital constante, v_i o capital variável $c_i = c_i + v_i$ o capital total, s_i a mais-valia, $p_i = c_i + v_i + s_i$ o valor do produto. Três relações fundamentais são introduzidas em *O Capital:*

a) a taxa de mais-valia ou taxa de exploração, $e_i = \dfrac{s_i}{v_i}$;

b) a composição orgânica do capital, $k_i = \dfrac{c_i}{v_i}$;

c) a taxa de lucro, $r_i = \dfrac{s_i}{C_i} = \dfrac{s_i}{c_i + v_i}$.

O modelo apresentado só admite bens de capital com um único período de duração, ou seja, só abrange o capital circulante. Marx, no entanto, consegue enriquecer a teoria clássica inglesa, incluindo no capital não apenas os salários adiantados, mas também as matérias-primas adquiridas.

Na realidade, Marx tenta incorporar à sua análise os bens de capital fixo, isto é, aqueles que duram mais de um período. Esse assunto é longamente discutido no Livro II de *O Capital*: Marx reconhece que, se os bens de capital duram vários períodos, é necessário distinguir o valor do capital empregado na produção do valor do capital consumido na produção (ou seja, sua depreciação), e esse é o ponto de partida da sua teoria da rotação do capital. Sucede que a teoria marxista exprime ao mesmo tempo, os valores por $p_i = c_i + v_i + s_i$, e as taxas de lucro por $r_i = s_i/(c_i + v_i)$. A primeira fórmula exige que $c_i + v_i$ seja o capital total consumido na produção; a segunda, que $c_i + v_i$ seja o capital total empregado na produção, sem o que $s_i/(c_i + v_i)$ não mais representaria a taxa de lucro. As duas fórmulas, portanto, só podem conciliar-se num modelo de produção sem capital fixo.

Há, à primeira vista, uma solução simples para o impasse, e que é encaminhada pelo próprio Marx. Admitindo que o capital constante dure n_i períodos e que c_i indique o seu valor consumido na produção de cada período, então $n_i c_i$ será o valor do capital constante empregado na produção. O valor do produto i continua a exprimir-se por $p_i = ci + v_i + s_i$. As expressões da taxa de lucro e da composição orgânica do capital modificam-se para:

$$r_i = \frac{s_i}{n_i c_i + v_i}; \quad k_i = \frac{n_i c_i}{v_i}.$$

O mal dessa solução é que ela leva demasiado a sério a praxe contábil da depreciação linear. Ela presume que o valor dos equipamentos decline linearmente com a idade, o que não é necessariamente verdade. E admite que, no meio tempo, as empresas esterilizem em caixa as cotas de depreciação acumuladas, o que também não costuma acontecer.

A maneira correta de tratar dos bens duráveis de capital só veio a ser descoberta por John von Neumann, na década de 1930. Bens de capital do mesmo tipo, mas de idades diferentes, devem ser tratados como se fossem diferentes bens. E devem ser descritos tanto como insumos quanto como produtos dos processos de produção. No início do período, a empresa, além de comprar matérias-primas e adiantar salários, também adquire (possivelmente de si própria) um bem durável com t períodos de uso. E, no fim do período, além de vender os produtos por ela fabricados, também vende possivelmente a si própria) o bem durável com $t + 1$ períodos de uso. Em suma, os bens de capital fixo não se enquadram em modelos de produção simples, nos quais cada empresa obtém um único produto, mas apenas em modelos de produção conjunta.

Marx chegou a perceber que bens duráveis do mesmo tipo, mas de idades diferentes, eram, na realidade, bens distintos. Mas não lhe ocorreu que os equipamentos usados deveriam ser tratados como produtos, obtidos conjuntamente com os demais bens fabricados pelas empresas. De resto, para desenvolver um modelo de produção conjunta é necessário um instrumental matemático com o qual Marx nem sonhava. Seguindo um atalho pouco inspirado, a sua teoria da rotação do capital não podia levar a qualquer conclusão satisfatória. O melhor, por isso, é deixá-la de lado, e restringir a análise marxista a uma economia sem bens duráveis de capital.

2.3 A teoria do valor-trabalho

Como já se disse, *O Capital* desenvolve a teoria do valor-trabalho em três etapas.

A primeira, enunciada logo no capítulo 1 do Livro I, é estritamente dogmática. Marx afirma que, se um *quarter* de trigo se troca por *n* quintais de ferro, algo comum existe entre essas duas coisas. Esse algo comum é necessariamente uma terceira coisa que dela difere: o número de horas de trabalho socialmente necessárias à sua produção. Como valores, as mercadorias são apenas dimensões definidas do tempo de trabalho que nelas se cristaliza.

Marx define tempo de trabalho socialmente necessário como o requerido para produzir uma mercadoria, nas condições de produção socialmente normais existentes, e com o grau médio de destreza e intensidade do trabalho. Fica com isso descartada a hipótese, obviamente implausível, de os valores poderem ser aumentados pela preguiça ou pela lerdeza dos trabalhadores. Ao contrário, Marx reconhece que o valor de uma mercadoria cai quando uma nova técnica reduz o tempo socialmente necessário à sua produção. Um trabalhador que continuasse com a técnica antiga poderia gastar, por exemplo, o dobro do tempo exigido pela nova tecnologia para produzir a mesma coisa. Nesse caso, porém, sua hora individual de trabalho só representaria meia hora de trabalho social.

A definição de tempo de trabalho socialmente necessário é bastante habilidosa, mas o ponto de partida da construção marxista é o que pode haver de deplorável em matéria de lógica. É óbvio que, se um *quarter* de trigo se troca por *n* quintais de ferro, há algo em comum entre essas duas coisas. O que não é claro é por que esse algo em comum é uma terceira coisa que delas difere; e muito menos por que essa terceira coisa é o tempo socialmente necessário de trabalho. Numa paródia, o raciocínio de Marx lembra o seguinte: "Se João e Pedro são gêmeos então sua mãe chama-se Adelaide."

Com a teoria do valor-trabalho Marx encontra a origem de mais-valia: o regime capitalista compra uma hora de trabalho por menos do que aquilo que o trabalhador produz em uma hora. O valor do trabalho determina-se, como o de qualquer outra mercadoria, pelo tempo necessário à sua produção e reprodução. Imaginemos que a jornada de trabalho seja de 12 horas. E que o tempo necessário à produção das mercadorias indispensáveis ao sustento do trabalhador e de seus dependentes seja seis horas. Então o operário trabalhará seis horas para si e outras seis para o patrão, resultando 100% de taxa de mais-valia.

No capítulo 7 do Livro I Marx observa que o valor adicionado em cada etapa da produção é a soma $v + s$ do capital variável e da mais-valia, e que o capital constante nada mais é do que a soma dos capitais variáveis e mais-valias agregados nas etapas anteriores. Isso nos permite escrever:

$$p_i = \Sigma_t v_{it} + \sum_t s_{it}$$

o índice i indicando o produto; e o subscrito t, a etapa da produção.

Admitindo que a taxa de exploração seja a mesma em todos os setores da economia, a hipótese do valor-trabalho transforma-se em teorema. Com efeito, no caso $s_{it} = ev_{it}$, e portanto:

$$p_i = (1 + e) \sum_t v_{it} \cdot$$

Designando por w o salário por homem-hora e por h_{it} o número de horas de trabalho socialmente necessárias na etapa de produção t, $v_{it} = wh_{it}$, tempo total de produção do bem i expressa-se por:

$$H_i = \sum_t h_{it} .$$

Logo:

$$p_i = w (1 + e) H_i .$$

Essa equação implica a proporcionalidade entre os preços de mercado e os tempos socialmente necessários à produção das diversas mercadorias, ou seja, a teoria do valor-trabalho.

Marx tinha boas razões para admitir que a taxa de exploração fosse a mesma em todos os setores da economia: uma jornada de trabalho vale o mesmo em qualquer ramo de atividade e se compra com meios de subsistência que se podem obter com apenas uma fração x da jornada de trabalho. Assim, do produto de cada hora trabalhada, os capitalistas entregam ao empregado uma fração x e guardam para si a fração $1 - x$, impondo a taxa de exploração:

$$e = \frac{1 - x}{x} .$$

Sucede que Marx também sabia que a concorrência tende a nivelar as taxas de lucro nos vários ramos de atividade, e que a composição orgânica do capital varia de um setor para outro. Isso se choca, no entanto, com a hipótese de equalização das taxas de mais-valia. Com efeito, tomemos a fórmula da taxa de lucro:

$$r_i = \frac{s_i}{c_i + v_i}.$$

Dividindo o numerador e o denominador pelo capital variável v_i:

$$r_i = \frac{e_i}{k_i + 1}.$$

onde r_i, e_i, k_i indicam, respectivamente, a taxa de lucro, a taxa de exploração e a composição orgânica do capital no setor *i*. É imediato que, se tanto as taxas de lucro quanto as de mais-valia se igualam em todos os capitais de atividade, isto é, $r_i = r$, $e_i = e$, a composição orgânica do capital também terá que ser a mesma em todos os setores:

$$k_i = \frac{e}{r} - 1.$$

Mas essa é uma conclusão inaceitável, pois Marx sabia que a composição orgânica do capital varia de um setor para outro.

Marx percebe o problema no capítulo 9 do Livro I de *O Capital*, mas só o enfrenta no Livro III. A conclusão é que, numa economia capitalista, preços não correspondem a valores. Esse é um fecho melancólico para uma teoria que se propunha a explicar o que são, e não o que deveriam ser os preços de mercado. A saída de Marx é lembrar que o valor-trabalho indicou os valores de troca numa sociedade primitiva (o que Adam Smith já reconhecera), e voltaria a indicá-los tão logo os meios de produção passassem a pertencer aos trabalhadores. Com esta última afirmação Marx pressupunha que a revolução do proletariado reduzisse a zero as taxas de lucro, caso em que os preços obviamente se comportariam de acordo com a teoria do valor-trabalho.

Marx tenta, no Livro III de *O Capital*, descobrir as leis que transformam a mais-valia em taxa de lucro, e os valores em preços de mercado. A solução do problema só foi encontrada por volta de 1960 e se deve a Morishima, Seton e Okishio, e será apresentada no item 5. Trata-se de um exercício muito interessante de álgebra linear e que Marx jamais poderia resolver com seu limitado equipamento matemático.

A idéia central é estabelecer duas contabilidades separadas para depois interligá-las, uma em horas de trabalho (os chamados valores marxistas), outra em preços de mercado. Na primeira contabilidade os valores desdobram-se em capital constante, capital variável e mais-valia e a taxa de exploração se iguala em todos os setores. Na segunda os preços se desdobram em custo das matérias-primas, custo da mão-de-obra e lucros, e a taxa de lucro é que se nivela em todos os setores.

Um exemplo numérico ilustra a maneira pela qual se estabelece o sistema dual de contas. Tomemos uma economia com apenas dois produtos, uma matéria-prima, que indicaremos por A, e um bem de consumo, que será designado por B. Para produzir uma unidade de matéria-prima é preciso combinar, no início do período, 0,8 unidade da matéria-prima com 0,2 hora de trabalho. E, para produzir uma unidade do bem de consumo B é preciso, no início do período, gastar 0,25 unidade de matéria-prima e 0,25 hora de trabalho. Admitamos, finalmente, que uma hora de trabalho se compre com uma unidade do bem de consumo B.

Comecemos pela contabilidade em valores, indicando por h_A e h_B o número de horas de trabalho necessárias à fabricação da matéria-prima e do bem de consumo, respectivamente. Uma unidade de matéria-prima se produz com 0,8 unidade pela própria, onde se cristalizam $0{,}8h_A$ hora de trabalho, mais 0,2 hora de trabalho direto. Assim, o valor marxista da unidade de matéria-prima é determinado pela equação:

$$h_A = 0{,}8h_A + 0{,}2,$$

o que implica $h_A = 1$.

Uma unidade do bem de consumo B obtém-se com 0,25 unidade da matéria-prima A (onde se cristalizam $0{,}25h_A = 0{,}25$ hora de trabalho) mais 0,25 hora de trabalho diretas. Tem-se assim o seu valor marxista:

$$h_B = 0{,}25h_A + 0{,}25 = 0{,}5.$$

Uma hora de trabalho compra-se com uma unidade do produto B, ou seja, com o equivalente a meia hora de trabalho. Segue-se que a taxa de exploração é igual a 100%.

O desdobramento dos valores em capital constante, capital variável e mais-valia é indicado a seguir. Uma unidade do produto A (que tem valor marxista igual a 1) cristaliza 0,8 hora de trabalho no capital constante. O capital variável é igual a 0,1, já que 0,2 hora de trabalho se compra pelo produto de 0,1 hora. Sobra 1-0, 8-0,1 = 0,1 de mais-valia. Do mesmo modo, para o produto B, o capital constante é igual a 0,25, o capital variável igual a $0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$, sobrando a mais-valia $0{,}5 - 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}125$.

Item	Produto A	Produto B
A: capital constante	0,8	0,25
B: capital variável	0,1	0,125
C: mais-valia	0,1	0,125
D: valor marxista	1,0	0,5
E: composição orgânica do capital (A/B)	8,0	2,0
F: taxa de exploração (C/B)	1,0	1,0
G: mais-valia/capital total ($C/(A+B)$)	1/9	1/3

Note-se que a relação entre mais-valia e capital total não é a mesma coisa que a taxa de lucro, a qual é um elemento da contabilidade em preços de mercado. Para estabelecer esta segunda contabilidade, designemos por p_A e p_B os preços dos dois bens e por r a taxa de lucro. Como uma hora de trabalho se compra por uma unidade do bem de consumo B, o salário horário é igual a p_B. Para produzir uma unidade da matéria-prima A o capitalista empata, no início do período, uma soma igual ao custo $0{,}8p_A$ de matérias-primas mais o salário $0{,}2p_B$. Assim, o preço de A deve ser esse capital empatado acrescido do lucro à taxa r, ou seja:

$$p_A = (1+r)(0{,}8p_A + 0{,}2p_B).$$

Do mesmo modo, para o bem de consumo:

$$p_B = (1+r)(0{,}25p_A + 0{,}25p_B).$$

Para determinar o sistema, é preciso arbitrar um dos preços e, para tanto, tomaremos $p_A = 1$. Encontra-se $p_B = 0{,}3972$ e a taxa de lucro $r = 13{,}71\%$. Os elementos da contabilidade em preços indicam-se abaixo:

Item	Produto A	Produto B
A: custo das matérias-primas	0,80000	0,25000
B: salários	0,07944	0,09930
C: lucros	0,12056	0,04790
D: preços ($D = A + B + C$)	1,00000	0,39720
E: custo das matérias-primas/salários (A/B)	10,07049	2,51762
F: lucros/salários (C/B)	1,51762	0,48238
G: taxa de lucro ($C/(A+B)$)	0,13709	0,13709

Note-se que a relação custo das matérias-primas/salários não coincide com a composição orgânica do capital. Do mesmo modo, as relações lucros/salários diferem nos dois setores, nada tendo a ver com a taxa de exploração, que é um elemento da contabilidade em horas de trabalho.

Embora muito brilhante, a solução do problema da transformação não deve ser entendida como uma reabilitação da teoria do valor-trabalho. A contabilidade em horas de trabalho tem o mérito de remover qualquer ambigüidade no conceito de taxa de mais-valia. Mas a afirmação de certos neomarxistas, de que os valores são elementos a partir dos quais se podem calcular os preços de mercado, é apenas uma meia verdade. De fato, é possível calcular preços a partir dos valores, mas para isso é preciso conhecer todos os coeficientes técnicos de produção e a cesta de consumo pela qual se compra uma hora de trabalho. E, conhecidos esses elementos, os preços se determinam diretamente, independentemente dos valores marxistas.

Uma restrição mais séria é que o problema da transformação só pode ser solucionado para o modelo de produção simples, o qual exclui os bens de capital fixo. No caso geral, nem sempre é possível estabelecer uma contabilidade em valores nem assegurar a existência ou a unicidade da taxa de exploração. Cuidaremos do problema no item 5.

2.4 Salários, acumulação de capital e progresso tecnológico

Os clássicos ingleses usaram duas teorias de salários: numa, de curto prazo, os salários eram determinados pela relação entre o estoque de capital e a força de trabalho existentes; noutra, de longo prazo, os salários convergiam para o nível de subsistência. A conciliação das duas teorias era fornecida pela lei dos rendimentos decrescentes e pela teoria malthusiana da população.

Marx, à semelhança dos clássicos ingleses, admite que a maior parte dos lucros seja destinada à compra de novos bens de capital: "Acumular! Acumular! Eis Moisés e os Profetas!" Encampa também a lei férrea dos salários, mas não usa a lei dos rendimentos decrescentes. Isso o obriga a desenvolver uma teoria original de salários, acumulação de capital e progresso tecnológico, apresentada no capítulo 23 do Livro I de *O Capital*.

Na teoria clássica inglesa, a acumulação de capital automaticamente elevaria a demanda de mão-de-obra de acordo com a lei do fundo de salários. Marx tem o cuidado de observar que o fundo de salários wN não corresponde ao capital total C, mas apenas à sua componente variável v. Assim:

$$v = wN = \frac{C}{k+1} \tag{2.1}$$

k indicando a composição orgânica média do capital.

Segundo Marx, faz parte da evolução capitalista o aparecimento periódico de inovações que substituem mão-de-obra por capital, aumentando a composição orgânica média k. Em prazos curtos é possível que essa composição orgânica não se altere e que o capital total cresça mais depressa do que a força de trabalho. Nesse caso, a acumulação de capital provocará o aumento temporário do salário w. Mas logo surgirão os técnicos a soldo dos capitalistas, e que se encarregarão de encontrar novos métodos de produção que poupem mão-de-obra, reforçando o exército industrial de reserva, isto é, a massa de desempregados. Nesse ponto, os salários voltarão ao nível de subsistência. Se algum trabalhador tiver a ousadia de se queixar, bastará ao patrão levá-lo à janela da fábrica e mostrar-lhe a longa fila de miseráveis à busca de um emprego que lhes permita sobreviver. Marx acentua que as variações de salários não são determinadas pela acumulação de capital nem pelo crescimento populacional, mas apenas pelo tamanho relativo do exército industrial de reserva, isto é, pela taxa de desemprego. Essa é uma observação muito importante e que antecipa a teoria da curva de Phillips, a grande redescoberta da macroeconomia na década de 1960.

A equação (2.1) é um passo à frente da teoria do fundo de salários, e a lei do crescimento da composição orgânica do capital é a primeira tentativa de sistematizar os efeitos das inovações sobre a distribuição de renda. Marx usa essa lei para demonstrar duas de suas teses, a da compressão dos salários e a da taxa decrescente de lucro.

Para provar a lei férrea dos salários, Marx supõe que, na equação (2.1), a taxa de crescimento de $k+1$ seja maior ou igual do que a taxa de crescimento do estoque de capital C. Trata-se de uma hipótese *ad hoc*, e que a História se encarregou de desmentir na maioria dos países capitalistas. Não se pode sequer afirmar que as inovações poupadoras de trabalho freiem o ritmo de crescimento dos salários. Com efeito, tais inovações, embora aumentem o denominador $k+1$ da fórmula (2.1), podem também acelerar o ritmo de acumulação do capital C.

A engenharia tem seus caprichos, e o progresso tecnológico não se enquadra em leis tão simples quanto as conjecturas de Marx. A manutenção dos salários ao nível de subsistência pela sustentação do exército industrial de reserva está longe de representar uma fatalidade. Mas, apesar da falta de evidência empírica, não constitui uma impossibilidade lógica.

Logicamente impossível é que, numa economia com rendimentos constantes, as inovações imobilizem os salários e, ao mesmo tempo, reduzam a taxa de lucro. No modelo marxista, o declínio da taxa de lucro nem é provocado pelo aumento de salários, nem pelos rendimentos decrescentes na produção, nem pela impossibilidade de vender tudo o que se produz, já que os capitalistas compram avidamente tudo aquilo o que não é consumido. A taxa de lucro cai exclusivamente pelo aumento da composição orgânica do capital decorrente das inovações que substituem trabalho por capital. Mas por que então os capitalistas encampam essas inovações? Marx supõe que o que é bom para cada capitalista é ruim para o conjunto deles. Como veremos mais adiante, essa é uma conjectura que não resiste ao teste da álgebra elementar.

2.5 Os modelos de reprodução

Nos capítulos 20 e 21 do Livro II de *O Capital*, Marx enfrenta um problema especialmente importante, o da reprodução. Trata-se de saber como a produção de cada período se equilibra com a demanda, a qual se decompõe em consumo dos capitalistas, compra de matérias-primas para a produção do período seguinte, e adiantamento de meios de subsistência aos trabalhadores contratados para essa produção. Marx ilustra as suas idéias com exemplos numéricos, dividindo a economia em dois setores, o produtor de matérias-primas (I) e o produtor de bens de consumo (II).

No capítulo 20, Marx descreve a reprodução simples: os capitalistas consomem toda a mais-valia por eles apropriada, limitando-se a repor o capital destruído na produção do período anterior. A economia em equilíbrio é, assim, um retrato em escala natural do que foi no período precedente. Trata-se de uma versão bissetorial do *Tableau économique* de François de Quesnay, e que a boa vontade de Morishima nivela ao modelo walrasiano de equilíbrio geral. O exemplo numérico de Marx condensa-se nas seguintes equações:

$$\text{Setor I: } 4.000c + 1.000v + 1.000s = 6.000$$
$$\text{Setor II: } 2.000c + 500v + 500s = 3.000$$
$$\text{Total: } 6.000c + 1.500v + 1.500s = 9.000$$

A primeira dessas equações deve ser lida da seguinte maneira: os empresários do setor I, no início do período, empatam um capital de 5 mil unidades monetárias, sendo 4 mil em matérias-primas e 1 mil em adiantamento de bens de consumo aos trabalhadores. No final do período, obtêm uma produção (de matérias-primas, no caso) que vale 6 mil unidades monetárias, o capital empatado 5 mil mais o lucro igual a 1 mil. As demais equações têm interpretação análoga.

O sistema está em equilíbrio. Com efeito, a demanda de matérias-primas, no final do período, é o capital constante 6 mil a ser reposto, exatamente a produção do setor I. Do mesmo modo, a demanda de bens de consumo equivale ao total das mais-valias acrescidas dos salários a serem adiantados aos trabalhadores, isto é, 1.500 + 1.500 = 3.000, ou seja, a produção do setor II. Para atender às demandas recíprocas, o setor I vende ao setor II 2 mil unidades monetárias de matérias-primas, dele comprando bens de consumo de igual valor.

É fácil verificar que o sistema não estaria em equilíbrio se os valores produzidos no setor I não fossem exatamente o dobro dos obtidos no setor II. Que forças econômicas levam os dois setores a encontrar essa proporção de equilíbrio, eis um problema intrincado da teoria da reprodução e que não é abordado em *O Capital*. Como em todos os seus exemplos numéricos, Marx raciocina com uma contabilidade que equalize as taxas de exploração em todos os setores, no caso em 100%. Já vimos que essa contabilidade não necessariamente reflete os valores de troca. No exemplo específico, porém, o problema desaparece, pois a composição orgânica do capital é a mesma nos dois setores, o que leva os preços de mercado a se regularem de acordo com a teoria do valor-trabalho, nivelando as taxas de lucro em 20%.

A teoria da reprodução simples é apenas um passo preparatório para a discussão apresentada no capítulo seguinte, a reprodução ampliada. Marx aí supõe, dentro da sua lei de acumulação, que os capitalistas só consumam uma fração dos lucros obtidos, reinvestindo o resto em matérias-primas e adiantamento de meios de subsistência aos trabalhadores, impulsionando o crescimento geométrico da economia. Infelizmente, na hora de construir um exemplo numérico, Marx se embaralha em dois pontos: na contabilidade, e na proporção dos valores produzidos nos dois setores. No exercício apresentado no capítulo 21 do Livro II de *O Capital*, o ponto de partida para a reprodução ampliada é o seguinte:

Período 0

Setor I : $4.000c + 1.000v + 1.000s = 6.000$
Setor II: $1.500c + 750v + 750s = 3.000$

Esse ponto de partida, embora nivele as taxas de exploração em 100%, não é um equilíbrio na contabilidade em preços de mercado, já que a taxa de lucro é 20% no setor I e 33,3% no setor II. Marx precisa, no entanto, que as suas cifras espelhem valores de troca, e para isso encampa uma estranha hipótese de isolamento dos mercados: os lucros de cada setor só podem ser reinvestidos no próprio setor.

Isto posto, Marx supõe que os capitalistas do setor I destinem metade dos seus lucros ao consumo, metade à reposição e à acumulação de capital. Assim, das 6 mil unidades monetárias produzidas no setor I, 500 se destinarão ao consumo dos capitalistas, 5.500 ao investimento bruto no próprio setor. A tecnologia de produção conhecida exige que 4/5 desta última soma se destinem à aquisição de matérias-primas, 1/5 ao adiantamento de bens de consumo aos assalariados. Resulta, daí, uma demanda de matérias-primas pelo setor I no valor de 4.400 unidades monetárias. E uma demanda de bens de consumo no total de 1.600 unidades monetárias, sendo 1.100 para adiantar meios de subsistência aos trabalhadores, e 500 para atender ao consumo dos capitalistas.

Seria natural que Marx admitisse que os capitalistas do setor II tivessem o mesmo comportamento, consumindo metade de seus lucros, e destinando a outra metade à acumulação de capital. Nesse caso, das 3 mil unidades monetárias produzidas, 375 se destinariam ao consumo dos capitalistas, 2.625 à reposição e à acumulação de capital. Dois terços desta última soma se destinariam à compra de matérias-primas, ou seja, 1.750 unidades monetárias. O outro terço, no valor igual a 875, seria o adiantamento de bens de consumo aos assalariados. Assim, a demanda total de bens de consumo pelo setor II valeria essa soma, mais os 375 de consumo dos capitalistas, totalizando 1.250 unidades monetárias.

Contudo, se Marx equiparasse o comportamento dos capitalistas do setor II aos do setor I, o seu sistema não estaria em equilíbrio. Com efeito, a demanda total de matérias-primas seria igual a 6.150 unidades monetárias, sendo 4.400 pelo setor I e 1.750 pelo setor II. Essa demanda ultrapassaria a oferta do setor I (6 mil) em 150 unidades de conta. Já no setor II, a demanda total 1.600 + 1.250 = 2.850 ficaria 150 unidades monetárias abaixo da oferta.

A solução para o problema estaria em reconhecer que, no modelo de reprodução ampliada, a proporção entre os valores produzidos nos setores II e I não poderia ser de um para dois. Marx, todavia, preferiu ajeitar a sua função investimento de modo a acertar as suas contas, e para isso recorreu a uma hipótese estranhamente assimétrica. Segundo essa hipótese, os capitalistas do setor I destinam metade de sua renda ao consumo, outra metade à acumulação de capital no próprio setor. Já os capitalistas do setor II se contentam em ajustar o mercado, consumindo e investindo de acordo com as sobras deixadas pelos seus concorrentes do setor I.

Isto posto, o setor II é obrigado a comprar matérias-primas no valor igual a 1.600, os 6 mil produzidos pelo setor I menos os 4.400 demandados por esse setor. E bens de consumo equivalentes a 3.000 – 1.600 = 1.400 unidades monetárias. As 1.600 unidades de conta investidas em matérias-primas requerem, como contrapartida, um adiantamento de bens de consumo aos assalariados no valor igual a 800. Assim, das 3 mil unidades monetárias produzidas no setor II, 1.100 se destinariam a adiantar meios de subsistência aos assalariados do setor I, 800 aos assalariados do setor II, e 500 a suprir o consumo dos capitalistas do setor I. Os capitalistas do setor II consimiriam a sobra 3.000 – 1.100 – 800 – 500 = 600 unidades monetárias, ou seja, 600/750 = 80% dos seus lucros.

Isto posto, os capitais empatados no início do período I seriam $4.400c + 1.100v$ no setor I e $1.600c + 800v$ no setor II. Os valores obtidos no fim do período seriam esses capitais empatados acrescidos dos lucros, iguais aos salários adiantados. Teríamos assim:

Período I

Setor I : $4.400c + 1.100v + 1.100s = 6.600$
Setor II: $1.600c + 800v + 800s = 3.200$

O ciclo agora se repetiria. Os capitalistas do setor I consumiriam metade dos lucros, ou seja, 550 unidades monetárias, e destinariam 6.600 – 550 = 6.050 unidades de conta à reposição e à acumulação de capital no próprio setor I. Desse total, 4/5 se destinariam à aquisição de matérias-primas, 1/5 ao adiantamento de bens de consumo aos trabalhadores. Assim, no início do período II, o capital empatado no setor I seria $4.840c + 1.210v$.

O setor II ficaria com as sobras, adquirindo 6.600 – 4.840 = 1.760 unidades monetárias de matérias-primas. Isso o obrigaria, de acordo com a técnica de produção conhecida, a adiantar bens de consumo aos assalariados em valor igual a

1.760/2 = 880, empatando, no início do período II, um capital 1.760c + 880v. Das 3.200 unidades monetárias produzidas no setor II, 1.210 se teriam destinado ao adiantamento de salários no setor I, 880 ao adiantamento no setor II, 550 ao consumo dos capitalistas do setor I. Sobrariam, assim, 3.200 – 1.210 – 880 – –550 = 560 unidades de conta para o consumo dos capitalistas do setor II, ou seja, 560/800 = 70% de sua renda.

Isto feito, no período II teríamos:

Período II

Setor I : 4.840c + 1.210v + 1.210s = 7.260
Setor II: 1.760c + 880v + 880s = 3.520

A configuração econômica do período II seria, assim, a do período I ampliada de 10%. Daí por diante, a economia se expandiria geometricamente à taxa de 10% por período. Teríamos, pois:

Período III

Setor I : 5.324c + 1.331v + 1.331s = 7.986
Setor II: 1.936c + 968v + 968s = 3.872

e assim sucessivamente.

Obviamente, o exemplo numérico escolhido por Marx para descrever a reprodução ampliada é muito tosco. Os capitalistas isolam-se em seus próprios setores, ao invés de buscar as oportunidades mais lucrativas de investimento. E a percentagem consumida dos lucros do setor II é acertada *a posteriori*, de modo a equilibrar a oferta e a procura dos dois setores, caindo de 80% no período de partida para 70% nos períodos seguintes.

Não é difícil solucionar corretamente o problema da reprodução numa economia com dois setores e sem bens duráveis de capital. Admitamos que para se produzir, no final do período, uma unidade da matéria-prima seja necessário empregar, no início do período, a_{I} unidades da matéria-prima e h_{I} horas de trabalho. E que a obtenção, no final do período, de uma unidade do bem de consumo requeira a aplicação, no início do período, de a_{II} unidades de matéria-prima e h_{II} horas de trabalho. É fácil verificar que as unidades podem ser escolhidas de modo que:[1]

a) $a_{\text{I}} + h_{\text{I}} = a_{\text{II}} + h_{\text{II}}$ (2.2)

b) uma hora de trabalho se compre por uma unidade do bem de consumo.

[1] A equação (2.2) escolhe as unidades físicas dos produtos I e II de modo a igualar seus preços de mercado.

Imponhamos a condição de que a taxa de exploração seja positiva, isto é, que uma hora de trabalho se compre com o produto de menos de uma hora de trabalho. Isso é o mesmo que dizer que o valor marxista ν_{II} do bem de consumo é menor do que 1. A contabilidade em horas de trabalho determina os valores marxistas pelas equações:

$$\nu_I = a_I \nu_I + h_I$$

$$\nu_{II} = a_{II} \nu_I + h_{II}$$

Deve-se ter $\nu_I > 0$ e $\nu_{II} < 1$, o que implica:

$$a_{II} h_I < (1 - a_I)(1 - h_{II}).$$

Subtraindo de ambos os membros $h_I (1 - h_{II})$.

$$h_I (a_{II} + h_{II} - 1) < (1 - a_I - h_I)(1 - h_{II})$$

ou, tendo em vista a equação (2.2):

$$(1 - a_I - h_I)(1 - h_{II} + h_I) > 0.$$

Como $h_{II} < \nu_{II} < 1$, segue-se que a taxa de exploração será positiva se e somente se:

$$a_I + h_I = a_{II} + h_{II} < 1. \tag{2.3}$$

Determinemos agora os preços p_I e p_{II} da matéria-prima e do bem de consumo e a taxa de lucro r da economia. Como uma hora de trabalho se compra por uma unidade do bem de consumo, o capital requerido para a produção de uma unidade de matéria-prima vale $a_I p_I + h_I p_{II}$. O preço p_I da matéria-prima é esse capital empatado acrescido da taxa de lucro:

$$p_I = (1 + r)(a_I p_I + h_I p_{II}).$$

Do mesmo modo, para o bem de consumo:

$$p_{II} = (1 + r)(a_{II} p_I + h_{II} p_{II}).$$

Normalizando os preços de modo a se ter $p_I = 1$ encontra-se $p_{II} = 1$ e:

$$1 + r = (a_I + h_I)^{-1} = (a_{II} + h_{II})^{-1}. \tag{2.4}$$

Em suma, a escolha de unidades de modo a atender à equação (2.2) e a assegurar que uma hora de trabalho se compre por uma unidade do bem de consumo leva a um equilíbrio de preços de mercado em que $p_I = p_{II} = 1$, o que iguala numericamente as quantidades dos dois bens aos seus valores de troca. Pela equação (2.4) e pela desigualdade (2.3) conclui-se que, sendo positiva a taxa de exploração, a taxa de lucro também será positiva.

Designemos agora por g a taxa de crescimento da economia. No equilíbrio dinâmico da reprodução ampliada, a produção de matérias-primas no período t será $x_I (1 + g)^t$, a de bens de consumo $x_{II} (1 + g)^t$. O lucro dos capitalistas, por unidade produzida de matéria-prima, é igual a $r(a_I p_I + h_I p_{II}) = r(a_I + h_I) = r/(1 + r)$. Do mesmo modo se conclui que os capitalistas também lucram $r/(1 + r)$ por unidade produzida do bem de consumo. Logo, o lucro total no período t será expresso por:

$$L = \frac{r}{1+r} (1 + g)^t (x_I + x_{II}). \tag{2.5}$$

Admitiremos que os capitalistas reinvistam uma fração s desse lucro total ($0 \leqslant s \leqslant 1$), consumindo a fração restante $1 - s$. O consumo dos capitalistas no final do período t será pois:

$$C = \frac{r}{1+r} (1 - s)(1 + g)^t (x_I + x_{II}). \tag{2.6}$$

As quantidades de matérias-primas e bens de consumo a serem obtidas no final do período $t + 1$ são, respectivamente, $x_I (1 + g)^{t+1}$ e $x_{II} (1 + g)^{t+1}$. Para tanto é necessário, no início do período, empregar matérias-primas no total:

$$D = (1 + g)^{t+1} (a_I x_I + a_{II} x_{II}). \tag{2.7}$$

e adiantar bens de consumo aos trabalhadores no valor:

$$T = (1 + g)^{t+1} (h_I x_I + h_{II} x_{II}). \tag{2.8}$$

A produção de matérias-primas $x_I (1 + g)^t$ no final do período t destina-se exclusivamente a fornecer a quantidade D expressa pela equação (2.7). A produção $x_{II} (1 + g)^t$ de bens de consumo tem por objetivo satisfazer o consumo C dos capitalistas e adiantar os meios de subsistência T aos trabalhadores. Assim, o equilíbrio entre a oferta e a procura nos dois setores exige:

$$x_I = (1 + g)(a_I x_I + a_{II} x_{II}). \tag{2.9}$$

$$x_{II} = (1 + g)(h_I x_I + h_{II} x_{II}) + \frac{r}{1+r} (1 - s)(x_I + x_{II}). \tag{2.10}$$

Essas duas equações determinam a taxa de crescimento g e a proporção x_I/x_{II} entre as quantidades produzidas nos dois setores. Basta para tanto observar que o sistema deve admitir uma solução não trivial, isto é, tal que $x_I + x_{II} > 0$. Com efeito, somando as duas equações e observando a relação (2.4):

$$x_I + x_{II} = \frac{1+g}{1+r}(x_I + x_{II}) + \frac{r(1-s)}{1+r}(x_I + x_{II}).$$

Tomando $x_I + x_{II} > 0$ resulta $1 + r = 1 + g + r(1-s)$, ou seja:

$$g = sr. \tag{2.11}$$

Essa é uma relação muito importante na teoria da reprodução: a taxa de crescimento geométrico do sistema é a taxa de lucro vezes a fração reinvestida dos lucros. No extremo $s = 0$ em que os capitalistas consomem toda a sua renda, temos $g = 0$, isto é, reprodução simples. No extremo $s = 1$, em que os capitalistas nada consomem, o sistema se expande fisicamente à taxa de lucro.

Da equação (2.9) obtém-se a relação entre os valores produzidos nos dois setores numa trajetória geométrica de crescimento:

$$\frac{x_I}{x_{II}} = \frac{(1+g)\,a_{II}}{1-(1+g)\,a_I}. \tag{2.12}$$

Essa relação é positiva, pois, pelas equações (2.4) e (2.11):

$$(1+g)\,a_I < (1+g)\,(a_I + h_I) = (1+g)\,(1+r)^{-1} \leqslant (1+sr)\,(1+r)^{-1} \leqslant 1.$$

A título de exemplo, tomemos $a_I = 0{,}5$, $h_I = 0{,}4$, $a_{II} = 0{,}3$, $h_{II} = 0{,}6$, $s = 0{,}9$. Pelas fórmulas apresentadas obtém-se $r = 1/9 = 11{,}111\%$ (taxa de lucro), $g = 10\%$ (taxa de expansão física do sistema), $x_I/x_{II} = 11/15$. Usando a notação de Marx, poderíamos tomar como ponto de partida para a reprodução ampliada:

Período 0

Setor I : $550c + 440v + 110s = 1.100$
Setor II: $450c + 900v + 150s = 1.500$

Em ambos os setores a taxa de lucro é igual a 1/9. Do valor total produzido no setor I, os capitalistas retirariam 11 unidades monetárias para o seu consumo (10% do lucro) e destinariam os 1.089 restantes à reposição e à acumulação de capital no setor, sendo (5/9) 1.089 = 605 em matérias-primas e (4/9) 1.089 = 484 em adiantamento de bens de consumo aos trabalhadores. Do mesmo modo, os capitalistas do setor II consumiriam 15 unidades monetárias, destinando as 1.485 restantes à reposição e acumulação do capital no setor, sendo 495 em matérias-primas, 990 em adiantamentos aos assalariados. A demanda total de matérias-primas, 605 + 495 se equilibraria com a produção 1.100. Do mesmo modo, os adiantamentos aos trabalhadores 484 + 990 somados ao consumo dos capitalistas 11 + 15 igualariam a produção total 1.500 de bens de consumo. Teríamos então no período seguinte:

Período I

Setor I : $605c + 484v + 121s = 1.210$
Setor II: $495c + 990v + 165s = 1.650$

O modelo de Von Neumann, apresentado no item 3, soluciona o problema da reprodução num caso bastante geral, abrindo espaço para os bens duráveis de capital numa economia com um número qualquer de bens. O modelo supõe $s = 1$, isto é, que os capitalistas reinvistam todos os seus lucros. Mas é possível estendê-lo, de modo a abrigar o consumo dos capitalistas, assunto de que cuidaremos no item 7.

2.6 Instabilidade e ciclos

O modelo de reprodução discutido no item anterior pressupõe uma coincidência: que, em algum período inicial, a relação x_I/x_{II} entre as quantidades produzidas nos dois setores se acerte de acordo com a equação (2.12). Cabe indagar como evoluirá a economia se isso não acontecer.

Para tanto, designemos por $x_{I,\,t}$ e $x_{II,\,t}$ as quantidades produzidas pelos dois setores no período t, e suponhamos, na linha marxista, que os capitalistas acumulem tudo aquilo que não é consumido. Isso implica que as produções $x_{I,\,t+1}$ e $x_{II,\,t+1}$ no período seguinte sejam tais que:

$$x_{I,\,t} = a_I\, x_{I,\,t+1} + a_{II}\, x_{II,\,t+1} \tag{2.13a}$$

$$x_{II,\,t} = h_I\, x_{I,\,t+1} + h_{II}\, x_{II,\,t+1} + \frac{r}{1+r}(1-s)(x_{I,\,t} + x_{II,\,t}) \tag{2.13b}$$

Esse sistema de equações de diferenças finitas determina as trajetórias das quantidades produzidas nos dois setores a partir da configuração inicial ($x_{I,\,0}$; x_{II}, 0). Para solucioná-lo, façamos:

$$z_t = x_{I,\,t} + x_{II,\,t}. \tag{2.14}$$

Somando membro a membro as equações (2.13*a*) e (12.13*b*) e tendo em vista as relações (2.4) e (2.11), resulta:

$$(1+g)\, z_t = z_{t+1},$$

de onde se segue que:

$$z_t = (1+g)^t z_o = (1+g)^t (x_{I,0} + x_{II,0}) \cdot \tag{2.15}$$

Reescrevendo a equação (2.13*a*) na forma:

$$x_{I,t} = (a_I - a_{II}) x_{I,t+1} + a_{II} z_{t+1}$$

segue-se que:

$$x_{I,t} = (a_I - a_{II}) x_{I,\, t+1} + a_{II} (x_{I,0} + x_{II,0}) (1+g)^{t+1}.$$

Supondo $a_I \neq a_{II}$, a solução dessa equação expressa-se por:

$$x_{I,t} = \frac{a_{II}(1+g)(x_{I,0} + x_{II,0})}{1-(1+g)(a_I - a_{II})} (1+g)^t + k(a_I - a_{II})^{-t} \tag{2.16}$$

onde:

$$k = \frac{(1-(1+g)a_I)x_{I,0} - (1+g)a_{II}x_{II,0}}{1-(1+g)(a_I - a_{II})} \tag{2.17}$$

Fazendo $x_{II,t} = z_t - x_{I,t,}$ resulta:

$$x_{II,t} = \frac{(1-(1+g)a_I)(x_{I,0} + x_{II,0})}{1-(1+g)(a_I - a_{II})} (1+g)^t - \mathrm{k}(a_I - a_{II})^{-t}. \tag{2.18}$$

A instabilidade das trajetórias resulta de que:

$$(1+g) \leqslant (1+r) = (a_I + h_I)^{-1} = (a_{II} + h_{II})^{-1} < |\, a_I - a_{II} |^{-1}. \tag{2.19}$$

Se o ponto de partida das trajetórias obedecer à relação (2.12), o sistema cresce geometricamente como no modelo de reprodução ampliada, com $x_{I,}t =$ $= (1 + \mathrm{g})^t x_{I,0}$ e $\mathrm{x}_{II,t} = (1+g)^t x_{II,0}$. Qualquer desequilíbrio na proporção inicial, no entanto, torna $k \neq 0$, fazendo as quantidades se afastarem explosivamente da trajetória geométrica, pelo efeito da componente $k\,(\mathrm{a}_I - a_{II})^{-1}$ Em particular, se $k \neq 0$, ou $x_{I,t}$ ou $x_{II,t}$, acabará assumindo valores negativos, de acordo com as equações (2.17) e (2.18). Isso é obviamente impossível, servindo apenas para sublinhar a instabilidade do modelo de produção descrito pelas equações (2.13*a*) e (2.13*b*): não é possível que os capitalistas sempre acumulem tudo aquilo que restar do consumo.

Marx jamais pensou em resolver equações de diferenças finitas para demonstrar a instabilidade do crescimento, e o exercício inspira-se nas construções de Harrod e Hicks da década de 1940. Ao contrário, a estranha função investimento dos capitalistas do setor II, adotada no seu exemplo numérico de reprodução ampliada, acaba servindo como estabilizador das trajetórias geométricas. Contudo, em várias passagens de *O Capital*, os ciclos e crises são atribuídos à desproporção entre as quantidades produzidas nos vários setores da economia.[2] Em particular, Marx associa o ciclo industrial de dez anos à vida útil dos equipamentos, explicando-o pelas ondas de demanda de reposição. Embora formalmente tosca, a sua análise é suficientemente sugestiva para que se considere o autor de *O Capital* como um dos fundadores da teoria do ciclo econômico.

2.7 A taxa decrescente de lucro

A terceira parte do Livro III de *O Capital* é o ponto culminante da obra de Marx. O autor do *Manifesto comunista* tenta aí provar que a acumulação, inerente ao regime capitalista, carrega o germe da autodestruição: além de engrossar o exército industrial de reserva, impedindo que os salários se ergam além do nível de subsistência, ela provoca o declínio da taxa de lucro, a concentração monopolista da produção, e a repetição cada vez mais freqüente das crises.

Marx prova a sua lei da taxa decrescente de lucro apelando para uma tautologia:

$$r = \frac{s}{c+v} = \frac{s/v}{c/v+1} \cdot \tag{2.20}$$

A acumulação do capital gera o progressivo aumento de sua composição orgânica c/v. Logo, se a taxa de exploração s/v não se alterar, a taxa de lucro declinará. Marx ilustra essa pseudodemonstração com uma série de exemplos numéricos, incapazes de emocionar o leitor versado em aritmética elementar.

Trata-se de um dogma, e não de uma demonstração. As inovações, no caso, não reduzem o tempo socialmente necessário à produção dos meios de subsistência dos trabalhadores, já que a taxa de exploração não se altera; mas substituem capital variável por constante, aumentando a composição orgânica do capital. Por que os capitalistas resolvem encampar essas novas técnicas que só servem para baixar a taxa de lucro da economia, eis um enigma a decifrar. Afinal, a descoberta de um novo método de produção não obriga nenhuma empresa a adotá-lo. Trata-se apenas de uma opção a mais, e que só será aceita quando aumentar a expectativa de taxa de lucro do capitalista.

[2] No exercício apresentado, a componente $k(a_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}})^{-t}$ gera ciclos explosivos se $a_{\mathrm{I}} < a_{\mathrm{II}}$.

Marx percebe esses dois problemas, e apela para duas saídas de emergência. A primeira consiste em admitir que as inovações possam aumentar a taxa de exploração s/v, embora não o suficiente para compensar os efeitos depressivos da elevação de c/v sobre a taxa de lucro. A segunda é interpretar o declínio global da taxa de lucro como o resultado da falta de coordenação entre as decisões individuais numa economia competitiva: cada empresa, ao adotar nova técnica de produção, melhora a própria taxa de lucro; mas o conjunto das empresas, ao agir dessa forma, baixa a taxa de lucro da economia.

Mais uma vez estamos diante de uma conjectura, e não de uma demonstração. É possível demonstrar que essa conjectura é incompatível com outra das hipóteses centrais de *O Capital*, a de que as inovações impeçam o aumento dos salários (a menos que se admita que as inovações acarretem deseconomias externas de ordem técnica na produção, assunto de que Marx jamais cogitou). A prova da incompatibilidade, no entanto, é bem mais sutil do que a apresentada por muitos dos adversários do marxismo.

Concentremo-nos em nossa economia com dois setores, tal como a descrita no item 2.5. Admitamos que os coeficientes técnicos de produção sejam $(a_I; h_I)$ no setor I e $(a_{II}; h_{II})$ no setor II. Escolhamos as unidades de modo a que uma hora de trabalho se compre por uma unidade do bem de consumo (isto é, o produto do setor II), e de modo a se ter $a_I + h_I = a_{II} + h_{II}$. Admitamos, como no item 2.5, que a taxa de mais-valia seja positiva, o que implica $a_I + h_I = a_{II} + h_{II} < 1$. Isto posto, a taxa de lucro da economia é expressa por $1 + r = (a_I + h_I)^{-1} = (a_{II} + h_{II})^{-1}$; e o sistema se equilibra aos preços $(p_I; p_{II}) = (1\ ;1)$.

Suponhamos que os engenheiros a soldo dos capitalistas descubram novos métodos de produção, com coeficientes técnicos $(a'_I; h'_I)$ para o setor I e (a'_{II}, h'_{II}) para o segundo setor. A hipótese de Marx é que, ao sistema de preços $(p_I; p_{II}) = (1\ ;1)$, a adoção dessas novas técnicas aumente (ou, pelo menos, não diminua) a taxa de lucro de cada empresa. Isso implica:

$$(1 + r)(a'_I + h'_I) \leq 1 . \qquad (2.21a)$$

$$(1 + r)(a'_{II} + h'_{II}) \leq 1 . \qquad (2.21b)$$

A adoção, por todas as empresas, das novas técnicas de produção, muda o sistema de preços para $(p'_I; p'_{II})$ e a taxa de lucro para r', tais que:

$$(1 + r')(a'_I p'_I + h'_I p'_{II}) = p'_I \qquad (2.22a)$$

$$(1 + r')(a'_{II} p'_I + h'_{II} p'_{II}) = p'_{II} \qquad (2.22b)$$

Marx supõe que, a esse sistema de preços final $(p'_{I}; p'_{II})$, a taxa de lucro caia abaixo da inicial, isto é, $r' < r$. Daí se segue, pelas desigualdades (2.21*a*) e (2.21*b*):

$$1 > (1 + r')(a'_{I} + h'_{I}) \tag{2.23a}$$

$$1 > (1 + r')(a'_{II} + h'_{II}) \tag{2.23b}$$

Multiplicando membro a membro as relações (2.22*a*) e (2.23*a*) e simplificando, resulta:

$$h'_{I} p'_{II} > h'_{I} p'_{I} \tag{2.24a}$$

Do mesmo modo, para o segundo produto:

$$a'_{II} p'_{I} > a'_{II} p'_{II} \tag{2.24b}$$

Como os coeficientes técnicos são todos não negativos, essas duas desigualdades implicam $p'_{II} > p'_{I} > p'_{II}$, o que é absurdo. Logo, é impossível que a taxa de lucro final r' seja inferior à inicial r.

A análise prova a impossibilidade lógica de as inovações, numa economia com dois setores e rendimentos constantes, exercerem o efeito vaticinado por Marx: impedir a alta dos salários e, ao mesmo tempo, deprimir a taxa de lucro.[3] Mostraremos, nos próximos itens, que essa impossibilidade se verifica em toda economia com rendimentos constantes, qualquer que seja o número de produtos e quer existam ou não bens duráveis de capital.

2.8 O colapso do capitalismo

O capítulo 15 do Livro III de *O Capital* vaticina o colapso do capitalismo pelas contradições internas da lei da taxa decrescente de lucro. Por uma série de argumentos confusos, Marx conclui que o declínio da taxa de lucro acaba provocando dois efeitos. Primeiro, a concentração oligopolista da produção, os grandes capitalistas engolindo os pequenos. Segundo, as sucessivas crises de superprodução, pela incompatibilidade entre acumulação do capital e aumento dos lucros. Nessas crises, a superprodução reflete apenas os vícios do sistema capitalista: há bens de consumo de menos para atender às necessidades da população, e bens de capital em volume insuficiente para empregar o potencial da força de trabalho. Nesse pon-

[3] No capítulo 11 do seu excelente *Marx's economics*, Morishima apresenta um exemplo de economia com dois setores, onde as inovações baixam a taxa de lucro. O erro de Morishima (e que Marx não cometeu) está em esquecer que a descoberta de uma nova técnica de produção não obriga nenhuma empresa a adotá-la. As inovações do exemplo em questão representam uma engenharia às avessas: qualquer empresa baixaria a taxa de lucro ao encampá-las.

to, a organização capitalista se divorcia inexoravelmente da sua função histórica: aumentar a produtividade do trabalho e criar mais empregos. Isso acarreta a sua ruptura, pela socialização dos meios de produção.

Segundo Marx, com a queda da taxa de lucro aumenta o mínimo de capital que tem de estar nas mãos de cada capitalista para o emprego produtivo de trabalho(. . .). Ao mesmo tempo aumenta a concentração, pois capital grande com pequena taxa de lucro acumula mais rapidamente do que capital pequeno com taxa elevada. A massa dos pequenos capitais assim dispersos é empurrada para as peripécias da especulação em crédito e ações (. . .) e assim vão constantemente se formando os novos viveiros de capital – ou a pletora que, sob forma de crédito, põe esses capitais, incapazes de gestão autônoma, à disposição dos condutores de grandes negócios". Aparentemente, o que Marx quer dizer com isso é o seguinte: o progresso tecnológico (que, em *O Capital*, é a origem da taxa decrescente de lucro) aumenta cada vez mais as dimensões econômicas mínimas exigidas das empresas. As pequenas firmas não conseguem acumular capital na velocidade necessária para acompanhar o aumento dessas dimensões mínimas e, por isso, são expelidas do mercado. Essa teoria, que aliás prescinde da hipótese da taxa decrescente de lucro, confirmou-se em alguns ramos industriais, embora não se tenha verificado na agricultura e nos serviços.

As crises de superprodução se explicam, na visão marxista, pelo conflito entre acumulação do capital e aumento dos lucros. O objetivo dos capitalistas, segundo Marx, é aumentar ao máximo os seus lucros. O sistema consegue sobreviver sem crises, enquanto o aumento do estoque de capital sobrepuja o declínio da taxa de lucro, assegurando o crescimento da massa de lucros. Em determinadas circunstâncias, porém, a taxa de lucro pode cair de tal forma que o lucro total obtido com um capital $C + \Delta C$ seja inferior ao proporcionado apenas pelo capital C. Isso aconteceria, por exemplo, se se esgotasse o exército industrial de reserva e a posterior acumulação de capital provocasse forte aumento dos salários. Nesse caso, de uma forma ou de outra, o capital excedente ΔC acabaria sendo posto em ociosidade. Isso não se conseguiria sem grandes tensões entre a fraternidade capitalista, já que se estaria diante do problema de repartição da superprodução e das perdas. Os capitalistas veteranos tratariam de pôr em ociosidade parte do próprio capital, guardando a sua posição de mercado para o futuro. Possivelmente, até, rebaixariam ainda mais a taxa de lucro, para eliminar os concorrentes. Outros, mais afoitos, tentariam conquistar maior fatia do mercado, desalojando os capitalistas tradicionais. Mas, qualquer que fosse o resultado da luta entre irmãos, estaria configurada a crise de superprodução.

Analiticamente, a idéia é muito simples. Marx admite que a taxa de lucro $r = r(C)$ seja função decrescente do estoque de capital C. Enquanto o lucro total $Cr(C)$ crescer com o aumento de C, a economia evoluirá sem problemas de superprodução. As crises surgirão quando $Cr(C)$ se tornar função decrescente de C. Nesse ponto, todo o capital adicional acumulado será mantido em ociosidade. Marx usa esse argumento não só para explicar as superproduções globais, mas também as setoriais. Seu raciocínio, neste último caso, é que as pequenas e médias empresas não conseguem compensar, pela acumulação de capital, o declínio da taxa de lucro.

Apesar de original, essa teoria das crises peca em dois pontos fundamentais (além da hipótese da taxa decrescente de lucro). Primeiro, ela pressupõe uma coalizão global dos capitalistas. Numa economia competitiva, cada empresa tomaria a taxa de lucro como um dado, e não teria nenhum motivo para pôr em ociosidade parte do seu capital, ainda que seu lucro total caísse ano a ano. Segundo, ela implica a cumulatividade das superproduções: os capitalistas assistem passivamente ao progressivo encalhe de estoques, contabilizando-o como se realmente fosse lucro. Marx antecipa o pensamento keynesiano, ao perceber que a insuficiência de demanda global pode gerar depressões no mundo capitalista. Mas a sua hipótese de que os capitalistas apliquem todos os lucros não consumidos na aquisição de novos bens de capital não deixa espaço para qualquer insuficiência de demanda.

Em suma, *O Capital* é um viveiro de idéias originais e provocativas. Mas faltava a Marx equipamento analítico para desenvolvê-las, e o resultado acabou sendo uma teoria econômica repleta de erros e contradições. Como profeta, Marx atirou no que viu e acertou no que não viu. O regime comunista realmente se implantou em boa parte do mundo. Mas a revolução bolchevista nem foi causada pelo aumento da composição orgânica do capital nem pelo declínio da taxa de lucro. O capitalismo, por seu turno, evoluiu de forma inteiramente diversa da prevista por Marx. O que talvez se possa dizer é que *O Capital*, de alguma forma, contribuiu para que essa evolução fosse diferente. Pois nada melhor para prevenir uma catástrofe do que vaticinar a sua iminência.

3. O Modelo de Von Neumann

3.1 O cone tecnológico

Por várias razões o modelo de Von Neumann é venerado como uma das mais belas construções da teoria econômica da década de 1930: pela engenhosidade da descrição dos processos de produção, pela sua precedência histórica sobre outras teorias lineares de equilíbrio, e pela elegância do teorema das trajetórias competitivas de crescimento geométrico.

O modelo trata de uma economia competitiva com m bens, os quais podem ser obtidos por um conjunto de tecnologias com rendimentos constantes. A oferta de mão-de-obra supõe-se infinitamente elástica a uma cesta de mercadorias de subsistência, tal como na lei férrea dos salários. Admite-se que todos os salários sejam consumidos e todos os lucros reinvestidos, à moda dos clássicos ingleses. Assim, o modelo de Von Neumann pode ser entendido como uma versão multissetorial de um caso particular da teoria marxista: aquele em que os capitalistas investem toda a mais-valia, acumulando pela simples compulsão a acumular.

A importância dessa versão é levar às últimas conseqüências o que Marx não conseguiu desvendar em seus estudos. Os bens duráveis de produção, que o Livro II de *O Capital* tenta caracterizar pelo conceito pouco inspirado de período de rotação, surgem naturalmente como produtos conjuntos nos processos de Von Neumann. O problema da reprodução ampliada, torturadamente discutido nesse mesmo Livro II, resolve-se automaticamente como subproduto da teoria do crescimento geométrico. Quando é possível definir valores marxistas e como os transformar em preços de mercado é outra questão que o modelo de Von Neumann soluciona, como se verá no item 5. Finalmente, o modelo mostra que Marx tentou provar o impossível: com rendimentos constantes na produção, as inovações não podem, ao mesmo tempo, manter estagnados os salários e baixar as taxas de lucro.

É possível generalizar o modelo abrindo espaço para o consumo dos capitalistas, assunto de que cuidaremos no item 7. Essa generalização, devida a Morishima, permite uma revisão completa das teorias marxistas da reprodução, da transformação e da tendência declinante da taxa de lucro.

R. bras. Econ.	Rio de Janeiro	v. 38	n.º 2	p. 60-79	abril/junho de 1984

Desde a publicação do artigo original em 1937, o modelo de Von Neumann foi objeto de vários retoques por economistas matemáticos, como Gale, Morgenstern e Kemeny. A análise que se segue incorpora esses retoques, que enriquecem o modelo em simplicidade e generalidade.

O modelo de Von Neumann desenvolve-se em termos de períodos, bens e processos de produção. A listagem dos bens deve ser suficientemente exaustiva para compreender todos os bens de consumo e de capital, inclusive todos os produtos intermediários período a período. Um bem infinitamente durável é tratado como se fosse um único bem. Mas um bem que dure T períodos é decomposto em T bens distintos, conforme a idade.

Admitamos, com essa convenção, que haja m bens e suponhamos, numa primeira versão, que as mercadorias se produzem apenas a partir de mercadorias sem a interferência da mão-de-obra. Um processo de produção descreve-se, no modelo de Von Neumann, por um par ordenado $\{x, y\}$ de vetores m-dimensionais não negativos. As coordenadas de x indicam os insumos no início do período; as de y, os produtos obtidos no fim do período. É claro que muitas das coordenadas de x e y podem ser nulas.

A hipótese de que a produção dispense o uso da mão-de-obra soa a ficção científica, mas é fácil contorná-la, já que o modelo admite que a oferta de mão-de-obra seja infinitamente elástica a uma cesta de subsistência. Com efeito, suponhamos que um processo de produção exija o vetor $\bar{x} \in R_+^m$ de insumos físicos e h homens-hora; e que um homem-hora se compre, no mercado de trabalho, por uma cesta de subsistência $z \in R_+^m$. Então, tudo se passa como se o processo de produção apenas consumisse $x = \bar{x} + hz$ de matérias-primas e nada de mão-de-obra, o que nos leva de volta ao modelo de produção de mercadorias por meio de mercadorias: a mão-de-obra entra indiretamente no vetor insumo $x \in R_+^m$ pelas quantidades de subsistência com que é paga. A título de exemplo, suponhamos que um processo envolva os seguintes insumos diretos e gere os seguintes produtos:

	Insumos diretos	produtos
Bem 1	2	3
Bem 2	0	0
Bem 3	4	2
Mão-de-obra	1	–

e admitamos que uma unidade de trabalho se compre pela cesta de mercadorias (1;2;0). No caso, o processo descreve-se pelo par de vetores $\{x, y\}$, onde:

$$x = (2 + 1; 0 + 2; 4 + 0) = (3; 2; 4)$$
$$y = (3; 0; 2)$$

A descrição de um processo de produção por um par $\{x, y\}$ de vetores m-dimensionais é extremamente poderosa. Ela enquadra tanto a produção simples quanto a conjunta: no primeiro caso, y possuirá uma única coordenada positiva; no segundo, várias coordenadas positivas. Um bem de capital infinitamente durável e que seja utilizado no processo entra com iguais coordenadas em x e y; já um bem de capital de vida útil limitada e que entre no processo com idade t dele sai (nas coordenadas de y) como o bem com idade $t + 1$. Técnicas de produção que usem esses tipos de bens de capital com vida útil limitada devem ser decompostas em diferentes processos, conforme a idade inicial do bem. (A decomposição é bem-vinda, pois máquinas mais velhas costumam demandar maiores cuidados e reparos). Um processo de produção que exija não apenas um, mas três períodos, desdobra-se naturalmente em três processos pela criação de dois produtos intermediários: o primeiro deles é produto do primeiro processo e insumo do segundo; o outro, produto do segundo e insumo do terceiro processo.

Designemos por C o conjunto dos processos de produção conhecidos numa economia de Von Neumann. Os pontos de C são pares $\{x, y\}$ de vetores m-dimensionais não negativos, isto é, C pode ser tratado como um subconjunto do R_+^{2m}. O modelo de Von Neumann aceita os seguintes axiomas:

Axioma 1 : C é um cone convexo fechado;
Axioma 2 : Se $\{0, y\} \in C$, então $y = 0$;
Axioma 3 : Existe $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in C$ tal que $\bar{y} > 0$.

O primeiro axioma corresponde à hipótese de rendimentos constantes: se $\{x, y\}$ é um processo, então $\{rx, ry\}$ também é um processo, qualquer que seja o número real não negativo r (divisibilidade); e se $\{x', y'\}$ e $\{x'', y''\}$ são processos, então $\{x' + x'', y' + y''\}$ é um processo (aditividade); por indispensável conveniência topológica, admite-se que C seja fechado, isto é, que o limite de uma seqüência convergente de processos seja um processo. O segundo axioma afirma que é impossível produzir algo do nada. Como C é um cone, o terceiro axioma exprime sinteticamente que todos os bens podem ser produzidos. Com efeito, se o processo $\{x_1, y_1\}$ produz o primeiro bem, o processo $\{x_2, y_2\}$ o segundo, o processo $\{x_m, y_m\}$ o m^{ésimo}, então o processo $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} + \ldots + \{x_m, y_m\} = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_m, y_1 + y_2 + \ldots + y_m\}$ é tal que $\bar{y} > 0$.

Como conseqüência dos axiomas 1 e 2 tem-se o:
Lema 3.1.: Seja C um cone de Von Neumann. Então existe um real positivo M tal que $\|y\| \leqslant M \|x\|$ para qualquer $\{x, y\} \in C$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que para todo inteiro positivo n existisse um ponto $\{x_n, y_n\} \in C$ tal que $\|y_n\| > n \|x_n\|$. Como C é um cone, poderíamos tomar $\|y_n\| = 1$, e a seqüência $\{x_n, y_n\}$ seria limitada, pois $\|x_n\| + \|y_n\| < 2$. Como C é fechado, de $\{x_n, y_n\}$ seria possível extrair uma subseqüência convergente para $\{x, y\} \in C$. Teríamos, no caso, $x = 0$ e $\|y\| = 1$, contrariando o axioma 2.

3.2 Trajetórias e multiplicadores factíveis

Como em Ricardo, o modelo de Von Neumann admite que os capitalistas acumulem todos os seus lucros. Isso significa que o objetivo da produção de um período é fornecer insumos para o período seguinte. (Esses insumos, como se viu, incluem o consumo dos trabalhadores.) Estamos, pois, diante de um modelo de produção de mercadorias por meio de mercadorias.

Suponhamos que $y_0 \epsilon R^m_+$ seja a produção herdada do período 0. Uma trajetória factível no modelo de Von Neumann é uma seqüência $\{x_1, y_1\}, \ldots,$ $\{x_n, y_n\}, \ldots$ de pontos de C tal que:

$$x_t \leqslant y_{t-1} \qquad (t \geqslant 1) \tag{3.1}$$

isto é, uma seqüência tal que os insumos de cada período não excedam a produção do período anterior. Factibilidade é sinônimo de possibilidade física. Como os capitalistas se decidem entre as diversas trajetórias factíveis é questão a ser discutida no próximo item.

Interessar-nos-emos particularmente pelas trajetórias factíveis geométricas, isto é, aquelas em que $0 \neq \{x_t, y_t\} = \{k^t x_0, k^t y_0\}$, o que significa que o sistema se reproduz geometricamente à razão positiva k. Factibilidade equivale, no caso, a:

$$y_0 - kx_0 \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Com base nessa desigualdade, diz-se que um número real não-negativo k é um multiplicador factível quando existe um vetor não nulo $\{x_0, y_0\}$ em C tal que $y_0 - kx_0 \geqslant 0$. Note-se que a produção inicial y_0 de uma trajetória geométrica factível à razão k não pode ser tomada arbitrariamente, devendo ser escolhida em função de k.

Teorema 3.1: O conjunto dos multiplicadores factíveis é um intervalo fechado $[0, \bar{k}]$ sendo $\bar{k} > 0$.

Demonstração: Notemos que:

a) existe um multiplicador factível positivo. Com efeito, pelo axioma 3 existe $\{\bar{x}, \bar{y}\} \epsilon C$ tal que $\bar{y} > 0$. Logo, para algum $\bar{k} > 0, \bar{y} - \bar{k}\,\bar{x} \geqslant 0$;

b) se k é um multiplicador factível, existe $0 \neq \{x_0, y_0\} \epsilon C$ tal que $y_0 - kx_0 \geqslant 0$. Se $0 \leqslant k' \leqslant k$, então $y_0 - k'x_0 \geqslant 0$, o que prova que o conjunto dos multiplicadores factíveis é um intervalo;

c) o conjunto dos multiplicadores factíveis é limitado. Com efeito, se k é um multiplicador factível, existe $\{x_0, y_0\} \epsilon C$ não nulo tal que $y_0 - kx_0 \geqslant 0$, o que implica $\|y_0\| \geqslant k\|x_0\|$. Pelo axioma 2, $\|x_0\| > 0$. Segue-se, do lema 3.1, que $k \leqslant M$;

d) o conjunto dos multiplicadores factíveis é fechado. Com efeito, seja $\{k_n\} \to k$ uma seqüência convergente de multiplicadores factíveis. Então, existe uma seqüência $\big\{\{x_n, y_n\}\big\}$ de pontos não nulos de C tal que $y_n \geqslant k_n x_n$. Como C é um cone, podemos tomar essa seqüência tal que $\|\{x_n, y_n\}\| = 1$. Como C é fechado, dessa seqüência será possível extrair uma subseqüência convergente para $\{x, y\} \in C$. Passando ao limite a relação $y_n \geqslant k_n x_n$, vem $y \geqslant kx$. Como $\|\{x,y\}\| = 1$, segue-se que k é multiplicador factível.

O maior multiplicador factível k é denominado razão de Von Neumann, indicando o maior coeficiente geométrico ao qual o sistema se pode reproduzir. O caso em que $\hat{k} > 1$ corresponde a uma economia susceptível de reprodução ampliada; $\hat{k} = 1$ retrata uma economia estacionária, $\hat{k} < 1$, um sistema em decadência.

Um vetor não nulo $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ de C tal que $\hat{y}-\hat{k}\hat{x} \geqslant 0$ é dito vetor de Von Neumann; $\{\hat{k}^t\hat{x}, \hat{k}^t\hat{y}\}$ é uma trajetória geométrica à maior taxa de crescimento possível. A semi-reta $\left\{\{r\hat{x}, r\hat{y}\} \mid r \in R_+\right\}$ é denominada raio de Von Neumann.

Como o conjunto dos vetores $\{x, y\}$ do R_+^{2m} tais que $\hat{y}-\hat{k}\hat{x} \geqslant 0$ é um cone convexo fechado, segue-se imediatamente o:

Teorema 3.2: O conjunto dos vetores de Von Neumann completado com a origem é um cone convexo fechado.

3.3 A dinâmica da produção e dos preços

Descrevemos o funcionamento da economia de Von Neumann. No início do período t o mercado fixa o sistema de preços p_t (m-dimensional semipositivo) pelo qual se vende a produção y_{t-1} do período anterior. Em função de p_t, do sistema de preços p^e_{t+1} esperado para o início do período $t + 1$, e da taxa de rentabilidade r^e_t esperada para o período t, os produtores escolhem o ponto $\{x_t, y_t\}$ do cone de Von Neumann. As condições de equilíbrio competitivo se resumem nas relações:

$$x_t \leqslant y_{t-1} \tag{3.3a}$$

$$(p_t, x_t) = (p_t, y_{t-1}) \tag{3.3b}$$

$$(p^e_{t+1}, y_t) = (1 + r^e_t)(p_t, x_t) \tag{3.3c}$$

$$(p^e_{t+1}, y) \leqslant (1 + r^e_t)(p_t, x), \text{ para qualquer } \{x, y\} \in C \tag{3.3d}$$

o símbolo (a, b) indicando o produto interno euclidiano dos vetores m-dimensionais a e b. A desigualdade 3.3a é a condição de factibilidade. A equação (3.3b) indica que o valor dos produtos comprados é igual ao dos insumos utilizados, já que a finalidade da produção de um período é apenas fornecer insumos para o período seguinte. Ela equivale a $(p_t, y_{t-1} - x_t) = 0$, o que implica, já que p_t e $y_{t-1} - x_t$ são não-negativos, que a produção de um período não utilizada como insumo no período seguinte tem valor zero. A equação (3.3c) diz que o valor da produção do período t é o valor dos insumos aumentado pela taxa de lucro. Finalmente, a desigualdade (3.3d) estabelece que, aos sistemas de preços p_t, p^e_{t+1} nenhum ponto do cone de Von Neumann pode gerar rentabilidade esperada superior a r^e_t.

O primeiro teorema a provar é que, dado o sistema de preços p^e_{t+1} esperado para o período $t + 1$ e dada a produção y_{t-1} herdada do período $t - 1$, existe um sistema de preços p_t (m-dimensional e semipositivo) e um ponto $\{x_t, y_t\}$ do cone de Von Neumann que atendem às condições de equilíbrio competitivo. Suporemos $y_{t-1} > 0$.

Para tanto, escolhamos inicialmente uma cesta de mercadorias $q_o > 0$ (isto é, contendo quantidades positivas de todos os bens) e que será tomada como numerário, isto é, tal que $(p_t, q_o) = (p^e_{t+1}, q_o) = 1$. Isto posto, observemos que a função (p^e_{t+1}, y_t), definida para todo $\{x_t, y_t\} \epsilon C$ tal que $x_t \leqslant y_{t-1}$ possui um máximo. Para tanto, basta observar que (p^e_{t+1}, y_t) é contínua, e que o conjunto:

$$G = \left\{ \{x_t, y_t\} \epsilon C \mid x_t \leqslant y_{t-1} \right\}$$

é compacto. Com efeito, como $0 \leqslant x_t \leqslant y_{t-1}$ e, como pelo lema 3.1, $\|y_t\| \leqslant M \|x_t\|$ para algum M positivo, G é limitado. G é obviamente fechado.

Isto posto, seja $\{x_t, y_t\}$ um ponto de C que maximize (p^e_{t+1}, y_t) em G. Pelo teorema de Kuhn e Tucker existe um vetor m-dimensional não-negativo u tal que:[1]

$$(p^e_{t+1}, y_t) = (p^e_{t+1}, y_t) + (u, y_{t-1} - x_t) \geqslant (p^e_{t+1}, y) + \\ + (u, y_{t-1} - x) \tag{3.4}$$

para qualquer $\{x, y\} \epsilon C$. Da primeira parte da relação e do fato que $\{x_t, y_t\} \epsilon G$ segue-se que:

$$y_{t-1} \geqslant x_t \tag{3.5a}$$

$$(u, y_{t-1} - x_t) = 0 \tag{3.5b}$$

Tomando, na desigualdade (3.4) $\{x, y\} = \{rx_t, ry_t\}$ sendo $r > 0$ (já que C é um cone), resulta:

$$(1 - r)\left((p^e_{t+1}, y_t) - (u, x_t) \right) = 0$$

para todo r positivo. Portanto:

$$(p^e_{t+1}, y_t) - (u, x_t) = 0 \tag{3.5c}$$

[1] A condição de Slater se verifica notando-se que $\{0,0\} \epsilon C$ e que, por hipótese, $y_{t-1} > 0$.

e, levando esse resultado à desigualdade (3.4):

$$(p^e_{t+1}, y) - (u, x) \leqslant 0 \tag{3.5d}$$

para todo $\{x, y\} \in C$.

Pelo axioma 3 do modelo de Von Neumann existe $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in C$ tal que $\bar{y} > 0$. Logo, pela desigualdade (3.4), para qualquer r positivo:

$$(p^e_{t+1}, y_t) \geqslant r\ (p^e_{t+1}, \bar{y}) + (u, y_{t-1} - r\bar{x}).$$

Como p^e_{t+1} é semipositivo e $\bar{y} > 0$, a desigualdade citada é incompatível com $u = 0$. Logo u é semipositivo. Fazendo:

$$1 + r^e_t = (u, q_o) > 0 \tag{3.6a}$$

$$p_t = \frac{1}{(u, q_o)}\ u \tag{3.6b}$$

e substituindo u por $(1 + r^e_t)p_t$ nas relações (3.5*a*) a (3.5*d*) obtêm-se as condições de equilíbrio competitivo (3.3*a*) a (3.3*d*). Como o teorema de Kuhn e Tucker fornece condições necessárias e suficientes para a maximização condicionada, segue-se que qualquer equilíbrio competitivo maximiza o valor esperado (p^e_{t+1}, y_t) da produção dentro do conjunto das trajetórias factíveis. Completamos com isso a demonstração do:

Teorema 3.3: Dado o sistema de preços p^e_{t+1} esperado para o início do período $t + 1$ e a produção y_{t-1} herdada do período $t - 1$, existe pelo menos um equilíbrio competitivo para o período t. Qualquer equilíbrio competitivo maximiza o valor esperado da produção (p^e_{t+1}, y_t), entre as trajetórias factíveis.

O teorema resume a dinâmica do modelo de Von Neumann: a produção e os preços de cada período são determinados pelo que a economia herda do passado e pelo sistema de preços esperado para o período seguinte. Obviamente, nada assegura que as previsões de preços se realizem: p_{t+1}, que só se determinará no início do período $t + 1$, pode ser diferente do vetor p^e_{t+1} que orientou as decisões do início do período t.

Obviamente, é importante indagar se existem trajetórias de equilíbrio competitivo com perfeita previsão, isto é, trajetórias tais que $p^e_{t+1} = p_{t+1}$ e onde $r_t = r^e_t$ indique a taxa efetiva de lucro. Tais trajetórias se caracterizam analiticamente pelas relações:

$$x_t \leqslant y_{t-1} \tag{3.7a}$$

$$(p_t, x_t) = (p_t, y_{t-1}) \tag{3.7b}$$

$$(p_{t+1}, y_t) = (1 + r_t)(p_t, x_t) \tag{3.7c}$$

$$(p_{t+1}, y) \leqslant (1 + r_t)(p_t, x) \text{ para qualquer } \{x, y\} \in C. \tag{3.7d}$$

Pelo menos dentro de um horizonte finito de T períodos (tão grande quanto se deseje), pode-se assegurar a existência de tais trajetórias. Para isso, basta tomar como dada a produção y_o do período 0 e o sistema de preços p^e_{T+1} esperado para o período $T + 1$. Tal como na demonstração do teorema 3.3, aplicando-se o teorema de Kuhn e Tucker ao problema de maximizar (p^e_{T+1}, y_{T+1}) com as restrições $x_1 \leqslant y_o, x_2 \leqslant y_1, \ldots, x_{T+1} \leqslant y_T$, encontra-se uma trajetória de equilíbrio competitivo com perfeita previsão dos preços do período 1 ao período T. (A demonstração segue exatamente os mesmos passos da do teorema 3.3.) Temos assim o:

Teorema 3.4: Dada a produção inicial $y_o > 0$, existe pelo menos uma trajetória de equilíbrio competitivo com perfeita previsão dos preços do período 1 ao período T.

3.4 O teorema do crescimento equilibrado

Chegamos agora ao teorema fundamental do modelo de Von Neumann:

Teorema 3.5: Seja $\{\hat{x}_t, \hat{y}_t\} = \{\hat{k}^t\hat{x}_o, \hat{k}^t\hat{y}_o\}$ uma trajetória geométrica factível à taxa máxima de crescimento. Então, existe um sistema de preços p (m-dimensional semipositivo), constante no tempo, que torna essa trajetória um equilíbrio competitivo à taxa constante de lucro $r = \hat{k} - 1$.

Demonstração: Tendo em vista as relações (3.7*a*) a (3.7*d*), para demonstrar o teorema, basta mostrar que existe um vetor m-dimensional semipositivo p tal que:

$$\hat{y}_o - \hat{k}\hat{x}_o \geqslant 0 \tag{3.8a}$$

$$\hat{k}(p, \hat{x}_o) = (p, \hat{y}_o) \tag{3.8b}$$

$$(p, y) \leqslant \hat{k}(p, x) \text{ para todo } \{x, y\}\ C \tag{3.8c}$$

A desigualdade (3.8*a*) resulta imediatamente da factibilidade da trajetória $\{\hat{k}^t\hat{x}_o, \hat{k}_t\hat{y}_o\}$. Para demonstrar as demais relações, formemos os conjuntos:

$$H = \{ y - \hat{k}x \mid \{x, y\} \in C \}$$

$$L = \{ z \in R^m \mid z > 0 \}.$$

É imediato que H e L são subconjuntos convexos do R^m. É fácil também verificar que H e L são disjuntos. Com efeito, se existisse algum ponto $\{x, y\} \in C$ tal que $y - \hat{k}x > 0$, então $\hat{k}$ não seria o maior multiplicador factível. Isto posto, pelo teorema de separação, existe um vetor diferente de zero p tal que, para todo $\{x, y\} \in C$ e para todo z-dimensional positivo:

$$(p, y - \hat{k}x) \leqslant (p, z). \tag{3.9}$$

Tomando $x = y = 0$ (pois C é um cone) resulta:

$$(p, z) \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad z > 0. \tag{3.10}$$

E, fazendo z tender a zero no segundo membro da desigualdade (3.9)

$$(p, y - \hat{k}x) \leqslant 0 \quad \text{para todo} \quad \{x, y\} \in C. \tag{3.11}$$

A desigualdade (3.10) exige que p seja não negativo. Como p é diferente de zero, pode-se assegurar que é semipositivo. A desigualdade (3.11) implica imediatamente a inequação (3.8c). Particularizando-a para $\{x, y\} = \{\hat{x}_o, \hat{y}_o\}$ resulta $(p, \hat{y}_o) \leqslant \hat{k}\,(p, \hat{x}_o)$. Mas, como p é semipositivo e $\hat{y}_o - \hat{k}\hat{x}_o \geqslant 0$ (3.8a), segue-se que $(p, \hat{y}_o) \geqslant \hat{k}\,(p, \hat{x}_o)$. Logo, $(p, \hat{y}_o) = \hat{k}\,(p, \hat{x}_o)$, verificando-se a equação (3.8b).

Apesar de muito elegante, o teorema do crescimento equilibrado pressupõe uma coincidência: que, no período inicial, a economia se encontre num vetor de Von Neumann $\{\hat{x}_o, \hat{y}_o\}$. Na década de 1950, Dorfman, Samuelson e Solow lançaram uma conjectura para justificar essa coincidência: as trajetórias de equilíbrio competitivo com perfeita previsão de preços se aproximariam dos raios de Von Neumann. Infelizmente, essa conjectura (que é objeto dos teoremas de auto-estrada) só se pode provar em casos muito particulares.

3.5 Sistemas matriciais de Von Neumann

Cuidemos agora de um caso particular: aquele em que o cone de Von Neumann é o conjunto das combinações lineares não negativas de n processos básicos $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, ..., $\{a_n, b_n\}$. As coordenadas de a_j indicam os insumos, as de b_j os produtos do processo básico j e o cone de Von Neumann é da forma:

$$C = \{ z_1 \{a_1, b_1\} + z_2 \{a_2, b_2\} + \dots + z_n \{a_n, b_n\} \mid (z_1, z_2, \dots, z_n) \in R^n_+ \}.$$

Para simplificar a notação, designemos por A (matriz dos insumos) a matriz $m \times n$ com colunas $a_1, a_2, \dots, a_n$ e por B (matriz dos produtos) a matriz também $m \times n$ de colunas $b_1, b_2, \dots, b_n$. O cone de Von Neumann será:

$$C = \{\{Az, Bz\} \mid z \in R^n_+\}. \tag{3.12}$$

A título de exemplo, imaginemos uma economia com cinco processos básicos de produção de três bens, de acordo com a seguinte descrição:

Item	Processo Básico				
	I	II	III	IV	V
Insumos diretos					
Bem 1	2	0	1	0	1
Bem 2	0	2	0	0	0
Bem 3	4	2	4	4	0
Mão-de-obra	1	1	1	1	1
Produtos					
Bem 1	4	4	1	1	0
Bem 2	3	0	4	4	0
Bem 3	3	2	4	2	4

Admitamos agora que uma unidade de trabalho se compre pela cesta de mercadorias (1; 2; 0). As matrizes de Von Neumann serão:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

De um modo geral, postularemos que:

a) toda coluna de A possua pelo menos um elemento positivo, isto é, que todo processo básico exija pelo menos um insumo;

b) toda linha de B possua pelo menos um elemento positivo, isto é, que todo produto possa ser obtido por pelo menos um processo básico.

Essas duas hipóteses asseguram a verificação dos três axiomas do modelo de Von Neumann. Como toda linha de B possui pelo menos um elemento positivo, tomando $\bar{z} = (1, 1, \ldots, 1)$, conclui-se que $\{A\bar{z}, B\bar{z}\}$ é um ponto de C tal que $B\bar{z} > 0$, como exige o axioma 3. Se $Az = 0$ para algum $z \in R^n_+$, então $z = 0$, já que toda coluna de A possui pelo menos um elemento positivo. Logo, $\{Az, Bz\} = \{0, 0\}$, como impõe o axioma 2.

Pela equação (3.12) é imediato que C é um cone convexo. Para provar que é fechado, seja $\{Az_p, Bz_p\}$ uma seqüência convergente de elementos de C com limite $\{x, y\}$. Como Az_p é convergente e como toda coluna de A possui pelo menos um elemento positivo, a seqüência z_p é limitada, admitindo pois uma subseqüência convergente para $z \in R^n_+$. Segue-se que $\{x, y\} = \{Az, Bz\} \in C$, o que prova que C é fechado.

No sistema matricial em discussão, um vetor de Von Neumann é da forma $\{ A\hat{z}_O, B\hat{z}_O \}$, o vetor n-dimensional semipositivo $\hat{z}_O$ indicando a intensidade inicial de uso dos diferentes processos básicos na trajetória geométrica $\{\hat{k}^t A\hat{z}_O, \hat{k}_t B\hat{z}_O\}$. Um sistema de preços p (m-dimensional semipositivo) torna essa trajetória um equilíbrio competitivo se e somente se:

$$(B - \hat{k}A)\,\hat{z}_O \geqslant 0 \tag{3.13a}$$

$$(p, (B - \hat{k}A)\,\hat{z}_O) = 0 \tag{3.13b}$$

$$(B' - \hat{k}A')\,p \leqslant 0. \tag{3.13c}$$

As duas primeiras relações traduzem as expressões (3.8*a*) e (3.8*b*) = (3.8*c*), já que $\{ \hat{x}_O, \hat{y}_O \} = \{ A\hat{z}_O, B\hat{z}_O \}$. A relação (3.8*d*) equivale, no caso matricial, a:

$$(p, (B - \hat{k}A)\,z) > 0 \quad \text{para todo } z \in R^n_+$$

ou, equivalente:

$$((B' - \hat{k}A')\,p, z) \leqslant 0 \quad \text{para todo } z \in R^n_+$$

o que é o mesmo que a desigualdade. (3.13*c*)

A existência de um sistema de preços p que atenda às condições de equilíbrio competitivo enunciadas é garantida pelo teorema 3.5. Pela relação (3.13*c*), nenhum processo básico pode, ao sistema de preços p, proporcionar rentabilidade superior a $\hat{k} - 1$. A relação (3.13*b*) pode ser reescrita sob a forma:

$$((B' - \hat{k}A')\,p, \hat{z}_O) = 0$$

o que implica que, ao sistema de preços p, todos os processos básicos utilizados numa trajetória de Von Neumann (identificados pelas coordenadas positivas de $\hat{z}_O$), proporcionam $\hat{k} - 1$ de taxa de lucro.

A título de exemplo, tomemos o já citado sistema matricial, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que $k = 1{,}0943$ é um multiplicador factível e que $Bz_O = 1{,}0943\, Az_O$, sendo $z_O = (0{,}7365; 0{,}0095; 0; 0; 0{,}2540)$. Provaremos mais adiante que 1,0943 é o maior multiplicador factível, ou seja, que a taxa máxima de expansão do sistema é de 9,43% por período. Para que o sistema cresça segundo essa trajetória geométrica, é necessário que o estoque inicial de bens seja um múltiplo de $Bz_0 = (2{,}9840; 2{,}2095; 3{,}2445)$.

O sistema de preços $p = (0{,}3976; 0{,}2487; 0{,}3537)$ torna essa trajetória geométrica um equilíbrio competitivo com perfeita previsão e taxa de lucro 9,43% por período. O vetor $(B' - \hat{k}A')\hat{p} = (B' - 1{,}0943A')\hat{p} = (0; 0; -0{,}150; -0{,}428; 0)$. Os resultados estão de acordo com as equações (3.13*a*) a (3.13*c*): na trajetória de crescimento equilibrado não há bens excedentes, o que permite que os três bens tenham preços positivos; os processos básicos I, II, V, utilizados efetivamente na trajetória geométrica, proporcionam 9,43% de rentabilidade por período; os processos básicos III e IV apresentam menor rentabilidade e, por isso, não são utilizados.

No exemplo anterior, com três bens e cinco processos básicos, o vetor de Von Neumann utiliza apenas três processos básicos. De um modo geral, tem-se o seguinte:

Teorema 3.6: Num sistema matricial de Von Neumann com m bens e n processos básicos ($m < n$) existe um vetor de Von Neumann que só utiliza efetivamente $s \leq m$ processos básicos.

Demonstração: Seja $\{Az_0, Bz_0\}$ um vetor de Von Neumann tal que $z_0 \in R^n_+$ possua o menor número possível s de coordenadas positivas. Suponhamos, por absurdo, $s > m$. Então, para qualquer k real, as colunas da matriz $B-kA$ correspondentes às coordenadas positivas de z_0 serão linearmente dependentes. Logo, para todo real k, será possível encontrar um vetor n-dimensional $y(k)$ tal que: a) $y(k)$ tenha norma euclidiana igual a 1; b) às coordenadas nulas de z_0 correspondam coordenadas também nulas de $y(k)$; c) $(B-kA)y(k) = 0$.

Obviamente, $y(k)$ pode ser escolhido de modo a que pelo menos uma de suas coordenadas seja positiva – se $y(k)$ fosse negativo ou seminegativo, bastaria trocá-lo por seu simétrico $-y(k)$. Notemos agora que, se $k > \hat{k}$, $y(k)$ não pode ser semipositivo. Com efeito, se tal ocorresse, $\hat{k}$ não seria o maior multiplicador factível, pois $(B - kA)y(k) = 0$. Logo, se $k > \hat{k}$; $y(k)$ possui pelo menos uma coordenada positiva e pelo menos uma negativa. Segue-se que, neste caso, o número de coordenadas positivas tanto de $y(k)$ quanto de $-y(k)$ é menor ou igual a $s - 1$.

Tomemos uma seqüência decrescente $\{k_N\}$ de reais positivos com limite igual a $\hat{k}$. Como os $y(k_N)$ têm todos norma igual a 1, é possível deles extrair uma subseqüência convergente para $\hat{y}$. Notemos agora que:

a) $\hat{y}$ é não nulo (pois sua norma euclidiana é igual a 1);

b) às coordenadas nulas de z_0 correspondem coordenadas também nulas de $\hat{y}$, pois isso é verdade para qualquer $y(k_N)$;

c) $(B-\hat{k}A)\hat{y} = 0$, por passagem ao limite de $(B - k_N A)\,y(k_N) = 0$;

d) tanto $\hat{y}$ quanto $-\hat{y}$ possuem no máximo $s - 1$ coordenadas positivas, pois essa propriedade se verifica para todo $y(k_N)$;

e) conseqüentemente, $\hat{y}$ é não-proporcional a z_0, já que z_0 possui s coordenadas positivas.

Sendo $\hat{y}$ não-nulo, não-proporcional a z_0 e tendo coordenadas nulas onde

z_o as tiver, segue-se que existe um real r tal que: a) $z_o + r\hat{y}$ seja semipositivo; b) $z_o + r\hat{y}$ possua no máximo $s - 1$ coordenadas positivas.

Seja $z'_o \doteq z_o + r\hat{y}$. Como $\{Az_o, Bz_o\}$ é um vetor de Von Neumann, $(B - \hat{k}A)z_o \geqslant 0$. E, como $(B - \hat{k}A)\hat{y} = 0$, $(B - \hat{k}A)z'_o \geqslant 0$, o que prova que $\{Az'_o, Bz'_o\}$ é um vetor de Von Neumann. Mas z'_o possui menos coordenadas positivas do que z_o, contrariando a hipótese.

No exemplo numérico anteriormente apresentado não havia excedente de produção de nenhum bem, o que permitia que todos os preços fossem positivos. Empobreçamos a tecnologia do exercício, mantendo os mesmos bens, mas retendo apenas os processos I e V. A economia tem agora como matrizes de Von Neumann:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Verifica-se agora que:

a) $\hat{k} = 1{,}0881$ é o maior multiplicador factível;

b) para $z_o = (0{,}7473; 0{,}2527)$ $\{Az_o, Bz_o\}$ é vetor de Von Neumann;

c) $(B - \hat{k}A)z_o = (0; 0{,}0657; 0)$; há sobra do segundo bem, cujo preço, portanto, deve ser igual a zero;

d) $p = (0{,}6476; 0; 0{,}3524)$ é um sistema de preços que torna a trajetória geométrica $\hat{k}^t Az_o$, $\hat{k}^t Bz_o$ um equilíbrio competitivo à taxa de lucro de 8,81% por período.

3.6 Irredutibilidade

Pelo teorema 3.5, existe um sistema de preços, constante no tempo, que torna uma trajetória geométrica à taxa máxima de expansão um equilíbrio competitivo à taxa de lucro $\hat{k} - 1$. Há, porém, duas possibilidades pouco confortáveis e que não podem ser descartadas sem alguma hipótese adicional sobre o cone tecnológico:

a) é possível que alguma trajetória geométrica com taxa de expansão inferior à máxima também seja um equilíbrio competitivo;

b) neste último caso, é possível que a taxa de lucro não seja igual à taxa de expansão física do sistema.

Esta última anomalia só pode ocorrer se, aos preços de equilíbrio, o valor da produção na trajetória geométrica for igual a zero. Com efeito, numa tal trajetória $\{x_t, y_t\} = \{k^t x_o, k^t y_o\}$, sendo k positivo e $\{x_o, y_o\} \neq 0$. Designando por p o sistema de preços e por r a taxa de lucro (constantes no tempo, por hipótese), as relações (3.7b) e (3.7c) implicam:

$$k(p, x_0) = (p, y_0)$$

$$(p, y_0) = (1 + r)(p, x_0)$$

Se $(p, y_0) > 0$, as relações implicam $1 + r = k$: a taxa de lucro r é igual à taxa $k - 1$ de expansão física do sistema. Contudo, nada se provou até agora que excluísse a hipótese $(p, y_0) = 0$.

A título de exemplo, tomemos o sistema matricial de Von Neumann em que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1{,}1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Estamos diante de um sistema que pode ser decomposto em dois subsistemas independentes: o primeiro processo básico apenas consome e produz o primeiro produto, expandindo a sua quantidade de 10% por período; o segundo limita-se a triplicar em cada período a quantidade inicial do segundo bem.

Notemos agora que:

a) $\hat{k} = 3$ é o multiplicador factível máximo;

b) para $z_0 = (0 ; 1)$, $\{Az_0, Bz_0\}$ é um vetor de Von Neumann. Com efeito, $Bz_0 = (0 ; 3) = 3 (0 ; 1) = 3Az_0$;

c) para $z_t = (1{,}1^t ; 0)$ $\{Az_t, Bz_t\}$ é uma trajetória geométrica factível à taxa de expansão de 10% por período. Com efeito $Bz_t = (1{,}1^{t+1} ; 0) = 1{,}1\ Az_t$;

d) para o sistema de preços $p_0 = (0 ; 1)$ $B'p_0 = 3A'p_0$

e) para o sistema de preços $p_1 = (1 ; 0)$ $B'p_1 = 1{,}1A'p_1$

Combinando *b* com *d*, obtém-se o previsto pelo teorema 3.5: a trajetória de Von Neumann torna-se um equilíbrio competitivo à taxa de lucro de 200% por período ao sistema de preços $p_0 = (0 ; 1)$. Contudo, associando *b* e *e* obtém-se a primeira anomalia: a trajetória geométrica de crescimento máximo (200% por período) também é um equilíbrio competitivo ao sistema de preços $p_1 = (1 ; 0)$ e à taxa de lucro de 10% por período. O fato de esse sistema de preços atribuir valor zero ao único produto efetivamente envolvido na trajetória não constitui, *a priori*, aberração econômica. O primeiro processo, no exemplo, poderia agregar tudo o que interessa à sociedade, e o segundo apenas descrever uma frenética reprodução de ratos.

Combinando agora *c* com *d* e *e*, obtém-se mais anomalias: a trajetória geométrica obtida com $z_t = (1{,}1t ; 0)$ – a taxa inferior à máxima – também é um equilíbrio competitivo tanto ao sistema de preços $p_0 = (0 ; 1)$ quanto $p_1 = (1 ; 0)$, no primeiro caso com 200%, no segundo com 10% de taxa de lucro por período.

O conceito de irredutibilidade livra-nos dessas anomalias. Numa economia de Von Neumann com m bens não deve existir nenhum processo $\{x, y\}$ que utilize apenas s insumos $(0 < s < m)$ e que obtenha como produtos esses mesmos s

bens. Formalmente, o sistema de Von Neumann se diz irredutível quando $0 \neq \{x, y\} \in C$ e $y - kx \geqslant 0$ para algum $k > 0$ implicar $x > 0$. Isso é o mesmo que dizer que, em toda trajetória geométrica factível $\{k^t x_o, k^t y_o\}$ $(k > 0;$ $\{x_o, y_o\} \neq 0)$ se tem $x_o > 0$. Se existir alguma trajetória geométrica factível tal que x_o seja semipositivo com pelo menos uma coordenada nula, o sistema diz-se redutível.

Irredutibilidade significa total interdependência indireta: é impossível sustentar a produção de um bem qualquer sem que simultaneamente se produzam todos os demais. Como estamos num sistema fechado, em que o consumo dos indivíduos entra nos vetores insumo, essa é uma hipótese perfeitamente palatável. É impossível sustentar a produção de aço sem fabricar teares, não porque os teares entrem diretamente na produção de aço; mas porque, para produzir aço é preciso utilizar mão-de-obra; porque, nas sociedades medianamente civilizadas, os trabalhadores só entram nas fábricas se estiverem vestidos; porque para fazer roupas é preciso dispor de tecidos; e porque a fabricação de tecidos emprega teares.

Nos sistemas irredutíveis as únicas trajetórias geométricas que são equilíbrios competitivos a preços e taxas de lucro constantes são as trajetórias de Von Neumann, de acordo com o seguinte:

Teorema 3.7: Seja $\{k^t x_o, k^t y_o\}$ $(k > 0, \{x_o, y_o\} \neq 0)$ uma trajetória geométrica factível num sistema irredutível de Von Neumann. Admitamos que ao sistema de preços p (contante no tempo) essa trajetória seja um equilíbrio competitivo à taxa de lucro r. Então $(1 + r) = k = \hat{k}$.

Demonstração: Pela hipótese de irredutibilidade $x_o > 0$. Logo $(p, x_o) > 0$, pois p é semipositivo. Pelas relações (3.7*b*) e (3.7*c*) $(p, y_o) = k\,(p, x_o) = (1 + r)(p, x_o)$. Logo $k = 1 + r$.

Isto posto, pela relação (3.7*d*), $(p, y) \leqslant k(p, x)$ para todo $\{x, y\} \in C$. Apliquemos essa relação a um vetor de Von Neumann $\{\hat{x}, \hat{y}\}$. Obtém-se $(p, \hat{y}) \leqslant k\,(p, \hat{x})$. Mas como $\hat{y} - \hat{k}x \geqslant 0$, $(p, \hat{y}) \geqslant \hat{k}\,(p, \hat{x})$. Logo, $\hat{k}\,(p, \hat{x}) \leqslant k\,(p, \hat{x})$. Pela hipótese de irredutibilidade $\hat{x} > 0$, e portanto $(p, \hat{x}) > 0$, o que implica $\hat{k} \leqslant k$. Mas, como $\hat{k}$ é o maior multiplicador factível, segue-se que $k = \hat{k}$.

Se $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ é um vetor de Von Neumann num sistema irredutível, então $\hat{y} \geqslant \hat{k}\hat{x} \geqslant 0$. É conveniente, nesse caso, escolher $\hat{y}$ como numerário, isto é, normalizar os preços de modo que $(p_t, \hat{y}) = (p^e_{t+1}, \hat{y}) = 1$. Com essa convenção, pode-se assegurar que, em qualquer equilíbrio competitivo, a taxa esperada de lucro é sempre maior ou igual a $\hat{k} - 1$, isto é, à taxa máxima de expansão geométrica do sistema. Com efeito, particularizando a relação (3.3*d*) para $\{x, y\} = \{\hat{k}\hat{x}, \hat{k}\hat{y}\}$, obtém-se:

$$\hat{k} = \hat{k}\,(p^e_{t+1}, \hat{y}) \leqslant (1 + r^t_e)\,(p_t, \hat{k}\hat{x}).$$

Como $\hat{k}\hat{x} \leqslant \hat{y}$:

$$\hat{k} \leqslant (1 + r^e_t)\,(p_t, \hat{y}) = (1 + r^e_t).$$

Fica assim provado o:

Teorema 3.8: Num sistema irredutível de Von Neumann tomemos como numerário a cesta de mercadorias $\hat{y} > 0$, sendo $\hat{x}, \hat{y}$ um vetor de Von Neumann. Então, em todo equilíbrio competitivo, $r_t^e \geqslant \hat{k} - 1$, para todo período t.

É interessante verificar em que condições um sistema matricial de Von Neumann é redutível. A questão resolve-se pelo seguinte:

Teorema 3.9: Para que um sistema matricial de Von Neumann seja redutível, é necessário e suficiente que, mediante adequada reordenação dos produtos e processos, as matrizes A e B se possam apresentar na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

cada linha de B_{11} possuindo pelo menos um elemento positivo.

Demonstração: Designemos por m o número de linhas e por n o de colunas de A e B. Se o sistema é redutível, existe $z_o \in R_+^n$ e diferente de zero e k positivo tal que: a) $Bz_o \geqslant kAz_o$; b) Az_o possua s coordenadas positivas e $m - s$ nulas $(0 < s < m)$.

Reordenemos os produtos de modo que as s primeiras coordenadas de Az_o sejam positivas e as $m - s$ últimas iguais a zero. Há dois casos a considerar:

a) $z_o > 0$. Nesse caso, expressemos A e B na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

sendo A_{11} e B_{11} matrizes $s \times n$ e A_{21} e B_{21} matrizes $(m - s) \times n$. Temos $Az_o = (A_{11}z_o; A_{21}z_o)$ sendo $A_{11}z_o > 0$ e $A_{21}z_o = 0$. Esta última igualdade implica $A_{21} = 0$, pois $z_o > 0$ e A_{21} é não-negativa. De $Bz_o \leqslant kAz_o$ para algum $k > 0$ resulta $B_{11}z_o \geqslant KA_{11}z_o > 0$. Isso exige que toda linha de B_{11} possua pelo menos um elemento positivo.

b) z_o possui q coordenadas positivas $(0 < q < n)$ e $n - q$ nulas. Nesse caso, reordenemos os processos básicos de modo a se ter $z_o = (z_{o1}; 0)$ sendo z_{o1} q – dimensional positivo e expressemos A e B na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

sendo A_{11} e B_{11} matrizes $s \times q$ e A_{22} e B_{22} com $m - s$ linhas e $n - q$ colunas. Conclui-se imediatamente que $Az_0 = (A_{11} z_{01} ; A_{21} z_{01})$, sendo $A_{11} z_{01} > 0$ e $A_{21} z_{01} = 0$, o que implica, como no caso anterior, $A_{21} = 0$. Do mesmo modo, de $Bz_0 \geqslant kAz_0$ para algum k positivo resulta $B_{11} z_{01} \geqslant kA_{11} z_{01} > 0$, o que exige que cada linha de B_{11} possua pelo menos um elemento positivo.

Reciprocamente, suponhamos que, mediante adequada reordenação dos produtos e processos, as matrizes de Von Neumann se apresentem como no enunciado do teorema. Como, por hipótese, toda coluna de A possui pelo menos um elemento positivo, segue-se que toda coluna de A_{11} também possui pelo menos um elemento positivo. Também por hipótese, cada linha de B_{11} possui pelo menos um elemento positivo. Segue-se que as matrizes A_{11} e B_{11} definem um subsistema de Von Neumann com menos de m bens. Designando por s o número de linhas $(0 < s < m)$ e q o de colunas de A_{11} e B_{11} $(0 < q \leqslant n)$, segue-se que existe um vetor q-dimensional z_{01} tal que $B_{11} z_{01} \geqslant kA_{11} z_{01}$ para algum k positivo. Fazendo $z_0 = (z_{01}, 0)$ n-dimensional, conclui-se facilmente que $Bz_0 \geqslant kAz_0$ para algum k positivo, Az_0 apresentando m-s coordenadas nulas. Logo, o sistema é redutível.

Fica provado, de passagem, o que deixamos em suspenso nos exercícios numéricos do item anterior: que as trajetórias geométricas de equilíbrio competitivo encontradas eram trajetórias de crescimento máximo. Como os sistemas matriciais apresentados eram irredutíveis, essa conclusão decorre do teorema 3.7.

3.7 O teorema de Kemeny-Morgenstern-Thompson.

Provamos no item 3.4, que, se C é um cone de Von Neumann com multiplicador máximo factível igual a $\hat{k}$, existe um vetor m-dimensional semipositivo p tal que $(p, y - \hat{k}x) \leqslant 0$ para todo $\{x; y\} \in C$. Segue-se que, se $\{\hat{x}; \hat{y}\}$ é um vetor de Von Neumann de C, $\hat{y} \geqslant \hat{k}\hat{x}$ e, portanto, $(p, \hat{y} - \hat{k}\hat{x}) = 0$. O vetor p, no caso, é um sistema de preços de equilíbrio para qualquer trajetória de Von Neumann.

O teorema de Kemeny-Morgenstern-Thompson demonstra que, ainda que C seja redutível, é possível escolher um vetor de Von Neumann $\{\hat{x}; \hat{y}\}$ e um sistema de preços p tal que $(p; \hat{y}) > 0$. Para a demonstração, tomemos um vetor de Von Neumann $\{\hat{x}; \hat{y}\}$ tal que $\hat{y}$ tenha o maior número possível de coordenadas positivas. Isto posto, formemos o conjunto m-dimensional.

$$K = \{\hat{k}x - y + u \quad | \quad \{x; y\} \in C ; \, u \in R^m; u \geqslant 0\}$$

Verifica-se facilmente que K é um cone convexo fechado. Seja K' o cone complementar de K, isto é, o conjunto dos vetores m-dimensionais p tais que $(p, \hat{k}x - y + u) \geqslant 0$ para todo $\hat{k}x - y + u \in K$. Conclui-se imediatamente que $p \in K'$ se e somente se $p \geqslant 0$ e $(p, y - \hat{k}x) \leqslant 0$ para todo $\{x; y\} \in C$. Em suma, K' é o conjunto dos preços de equilíbrio das trajetórias de Von Neumann acrescido da origem.

Suponhamos, por absurdo, que para todo $p \in K'$ se tivesse $(p, \hat{y}) = 0$. Então, $(p, -\hat{y}) = 0$, ou seja, $-\hat{y}$ pertenceria a $K'' = K$. Logo, existiriam $\{\bar{x}; \bar{y}\} \in C$ e $\bar{u} \geqslant 0$ tais que:

$$-\hat{y} = \hat{k}\bar{x} - \bar{y} + \bar{u} \geqslant \hat{k}\bar{x} - \bar{y}$$

Logo, teríamos:

$$\hat{y} \leqslant \bar{y} - \hat{k}\bar{x}$$

Como $\hat{y}$ é semipositivo, $\{\bar{x}; \bar{y}\}$ seria um vetor de Von Neumann de C. Num vetor de Von Neumann, $\bar{y} - \hat{k}\bar{x}$ tem menos coordenadas positivas do que $\bar{y}$, sem o que $\hat{k}$ não seria o multiplicador máximo factível. Segue-se, da desigualdade $\hat{y} \leqslant \bar{y} - \hat{k}\bar{x}$, que o número de coordenadas positivas de $\bar{y}$ seria superior ao número de coordenadas positivas de $\hat{y}$. Mas isso contradiz a hipótese de que $\{\hat{x}; \hat{y}\}$ seja um vetor de Von Neumann de C com o maior número possível de coordenadas positivas.

3.8 Marx e Von Neumann

O modelo de Von Neumann soluciona várias questões que Marx enfrentou sem sucesso. A primeira é o tratamento dos bens duráveis de capital. Como se viu no item 2, o modelo marxista de produção só é consistente quando se postula que os bens de capital vivam um único período. Marx tentou incluir os bens duráveis em sua análise, explorando o atalho pouco inspirado do período de rotação do capital. Trata-se de uma réplica da técnica contábil da depreciação linear, e que incorpora ao capital constante c o valor do desgaste desses bens duráveis. Isso a nada leva, pois $c + v$ não mais representa o capital investido. A idéia revolucionária de Von Neumann foi associar os bens duráveis de capital à produção conjunta: um processo de produção que se sirva de um tal bem durável gera, como subproduto, um bem de capital da mesma espécie com um período a mais de uso.

As trajetórias geométricas de crescimento máximo no modelo de Von Neumann descrevem naturalmente a reprodução de uma economia competitiva, onde os capitalistas reinvestem todos os lucros e onde a hora de trabalho se compra por uma cesta de subsistência fixa. Se o maior multiplicador factível $\hat{k} = 1$, temos uma economia estacionária, com taxa de lucro zero, capaz apenas de repor os meios de produção desgastados e os bens de consumo indispensáveis ao sustento dos trabalhadores. O caso mais interessante, aquele em que $\hat{k} > 1$, origina a reprodução ampliada. A economia é capaz de gerar um excedente sobre os meios de subsistência e, portanto, de se expandir. Cada período repete a configuração do período anterior, com os mesmos preços e com todas as quantidades multiplicadas por $\hat{k}$. O modelo de Von Neumann também contempla a hipótese de a taxa máxima de crescimento $\hat{k} - 1$ ser negativa, descrevendo uma sociedade em gradual extinção.

Embora o modelo utilize uma simplificação não adotada por Marx, a de que os capitalistas nada consumam (a não ser a cesta de subsistência, na medida em que também sejam trabalhadores), ele consegue apresentar uma visão economicamente coerente da reprodução ampliada. Os exercícios numéricos do Capítulo 21 do Livro II de *O Capital* são muito pouco convincentes, pois Marx se esquece de pôr os capitalistas à busca dos investimentos mais lucrativos; coloca-os apenas, em petição de princípio, à disposição de gerar o crescimento geométrico da economia. Assim, Von Neumann solucionou a tentativa frustrada de Marx no sentido de dinamizar o *Tableau éconômique* de François de Quesnay. É verdade que a solução recorre à hipótese simplificadora de que os capitalistas reinvistam todos os lucros. Contudo, como se verá no item 7, o modelo de Von Neumann pode ser reformulado de modo a abrigar o consumo dos capitalistas.

Por trás do modelo de reprodução ampliada há uma hipótese implícita: a de que a oferta de mão-de-obra à cesta de subsistência seja capaz de se expandir à taxa $\hat{k} - 1$ de crescimento do sistema. Essa é uma hipótese plausível quando essa taxa máxima é menor ou igual ao ritmo de crescimento demográfico. Também é uma hipótese temporariamente aceitável quando $\hat{k} - 1$ é superior à taxa de expansão populacional, desde que exista um vasto contingente de desempregados, o exército industrial de reserva a que se referia Marx.

Em muitos casos, porém, a hipótese de que a oferta de mão-de-obra seja inteiramente elástica à cesta de subsistência se torna francamente irrealista. Suponhamos, por exemplo, que a taxa máxima de expansão física do sistema seja 6% ao ano. Não há população que prolifere nesse ritmo, e o possível exército industrial de reserva se esgotará em poucos anos. Chegamos aí ao ponto em que se torna impossível sustentar as hipóteses do modelo de Von Neumann. Na ausência de inovações, só há uma conciliação possível: a procura de mão-de-obra engordará o pagamento dos trabalhadores. Isso modificará o cone tecnológico, aumentando os insumos exigidos em qualquer processo, e conseqüentemente baixando o maior multiplicador factível, até que ele se ajuste ao crescimento da oferta de mão-de-obra.

Marx percebeu o problema ao admitir que, em alguns períodos, o capital crescesse mais depressa do que a força de trabalho, sem que se alterasse a sua composição orgânica, caso em que os salários subiriam por uma temporada. Mas, segundo Marx, logo entrariam em cena os engenheiros a soldo dos capitalistas, e que inventariam novas técnicas de produção poupadoras de trabalho, capazes de restaurar o exército industrial de reserva e trazer de volta os salários ao nível de subsistência.

A hipótese de que as inovações deprimam o salário ao nível de subsistência, embora destituída de apoio empírico, não é uma impossibilidade lógica. O que é logicamente impossível é que tais inovações, em sistemas com rendimentos constantes, mantenham os salários estagnados e, ao mesmo tempo, baixem as taxas de lucro. O modelo de Von Neumann demonstra essa impossibilidade. Se a mão-de-obra é sempre remunerada pela mesma cesta de subsistência, uma inovação equivale a uma ampliação do cone de Von Neumann, isto é, à substituição de C por C', sendo $C \subset C'$. Isso só pode aumentar, ou, na pior das hipóteses, manter a taxa máxima de crescimento do sistema, ou seja, $\hat{k}' \geqslant \hat{k}$. É plausível supor que os sistemas sejam irredutíveis e que os cones em questão sejam irredutíveis. Nesse caso, como assegura o teorema 3.8, a taxa máxima de expansão do sistema é o piso da taxa de lucro, desde que se escolha como numerário a produção de um vetor de Von Neumann. Assim, as inovações, se não permitirem que os salários subam, não poderão baixar o piso das taxas de lucro. Isso deixa claro que Marx tentou provar o impossível no Livro III de *O Capital.* Veremos, no item 7, que essa conclusão não se altera quando se introduz o consumo dos capitalistas no modelo de Von Neumann.

4. O Modelo de Leontief

4.1 O modelo aberto de Leontief

Imaginemos uma economia onde exista um único fator primário de produção, mão-de-obra, e onde se fabriquem n produtos, nas quantidades totais X_1, X_2, ..., X_n. Essa produção ou se destina ao consumo intermediário na própria produção ou ao atendimento da demanda final. Designemos por x_{ij} a quantidade do produto i consumida na fabricação do produto j, por b_i a demanda final do $i^{ésimo}$ bem e por N_j a mão-de-obra empregada na produção do bem j. Temos então:

$$X_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + b_i \tag{4.1}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$

e o seguinte quadro de origens-destinos:

Setores produtores	Produção total	Setores Consumidores				
		Consumos intermediários				Demanda final
		1	2	......	n	
1	X_1	x_{11}	x_{12}	.....	x_{1n}	b_1
2	X_2	x_{21}	x_{22}	.....	x_{2n}	b_2
:	:	.....	.....	.....	.....	:
n	X_n	x_{n_1}	x_{n_2}	.....	x_{nn}	b_n
Mão-de-obra utilizada		N_1	N_2	.....	N_n	

Admitamos que cada produto se fabrique por um único processo, usando, em proporções fixas, mão-de-obra e outros produtos como consumo intermediário. Designando por a_{ij} a quantidade do bem i requerida para a fabricação de uma unidade do bem j e por c_j a quantidade de mão-de-obra empregada na produção dessa unidade do bem j, teremos:

$$X_{ij} = a_{ij}\,x_j \tag{4.2}$$

$$N_j = c_j\,x_j \tag{4.3}$$

O que nos permite reapresentar o quadro origens-destinos na forma:

Setores produtores	Produção total	Setores consumidores				
		Consumos intermediários				Demanda final
		1	2	......	n	
1	X_1	$a_{11}X_1$	$a_{12}X_2$	....	$a_{1n}X_n$	b_1
2	X_2	$a_{21}X_1$	$a_{22}x_2$	....	$a_{2n}X_n$	b_2
:	:	....				:
n	X_n	$a_{n1}X_1$	$a_{n2}X_2$	....	$a_{nn}X_n$	b_n
Mão-de-obra utilizada		c_1X_1	c_2X_2	....	c_nX_n	

É claro que estamos muito longe de um modelo de equilíbrio geral, pois, de início, consideraremos exógenas as demandas finais. Além do mais estamos descrevendo uma economia com três fortes restrições: a) há um único fator primário de produção, a mão-de-obra; b) não há produção conjunta; c) cada produto obtém-se por um único processo. Mostraremos, com o teorema da não-substituição, que aceitas as duas primeiras hipóteses, a terceira se torna perfeitamente palatável.

Os problemas específicos que o modelo aberto de Leontief procura solucionar são os seguintes:

a) quais as produções brutas necessárias, $X_1, X_2, ..., X_n$, para que, descontados os consumos intermediários, se obtenham as demandas finais predeterminadas $b_1, b_2, ..., b_n$?

b) quais os preços de equilíbrio competitivo dos vários produtos?

c) qual o volume de emprego associado às demandas finais $b_1, b_2, ..., b_n$?

Essas indagações encontram resposta imediata com um mínimo de álgebra linear. Designemos por $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ o vetor produção bruta, por $b =$

$= (b_1, b_2, ..., b_n)$ o vetor demanda final, por $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ o vetor preço, por $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ o vetor consumo de mão-de-obra. Introduzamos agora a matriz dos coeficientes técnicos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e por I a matriz identidade $n \times n$, isto é, a matriz cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a zero:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Os dados do problema são a matriz A e os vetores b, c. As incógnitas são os preços p, as quantidades X e o volume total de emprego N. Naturalmente os termos de A, b e c são todos não-negativos, isto é, $A \geqslant O$; $b \geqslant O$ e $c \geqslant O$. É difícil imaginar um produto que possa ser fabricado sem nenhum emprego de mão-de-obra, o que nos permite ir um pouco além e supor $c > O$.

Comecemos pelo problema das quantidades. Pelo quadro origens-destinos, é imediato que devemos ter:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + b_1 \\ X_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n &= a_{n_1} X_1 + a_{n_2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n + b_n \end{aligned}$$

ou, passando para a notação matricial:

$$X = AX + b$$

ou ainda:

$$(I - A) X = b \tag{4.4}$$

supondo que a matriz $I - A$ seja inversível:

$$X = (I - A)^{-1} b. \tag{4.5}$$

Vejamos agora o problema dos preços. Como o único fator primário é mão-de-obra e como a economia opera em concorrência perfeita com rendimentos constantes da escala, os preços serão iguais aos custos dos insumos intermediários mais a mão-de-obra. Para normalizar o sistema, tomemos os salários unitários como numerário:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \ldots + a_{n_1} p_n + c_1 \\ p_2 &= a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \ldots + a_{n_2} p_n + c_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= a_{1n} p_1 + a_2 \ p_2 + \ldots + a_n \ p_n + c_n \end{aligned}$$

ou, sintetizando em notação matricial:

$$p = A'p + c.$$

ou ainda:

$$(I - A')p = c. \tag{4.6}$$

A' designando a transposta da matriz A. Se $I - A$ é inversível, então $I - A'$ também o será e portanto:

$$p = (I - A')^{-1} c. \tag{4.7}$$

Cabem, a essa altura, três observações:

a) para que os sistemas de determinação das quantidades x e dos preços p sejam determinados é preciso que a matriz $I - A$ seja não-singular. Mas só isso não garante uma condição imposta pelo bom senso econômico, a de que X e p sejam não-negativos. É necessário que a matriz A dos coeficientes técnicos atenda a determinadas condições de consistência e que serão examinadas adiante;

b) os preços determinados pela equação (4.7) são valores marxistas. Com efeito, havendo um único fator primário, a mão-de-obra, os preços são proporcionais às quantidades de trabalho cristalizadas na produção;

c) as equações (4.5) e (4.7) mostram uma característica curiosa do modelo aberto de Leontief: os preços independem das demandas finais e as quantidades independem dos coeficientes técnicos de mão-de-obra. Há, no entanto, uma relação importante entre p, b, X e c:

$$N = (c,X) = (p,b) \tag{4.8}$$

a qual, em particular, determina o volume de emprego $N = (c,X)$. Para demonstrar tal relação, basta notar que pelas equações (4.5) e (4.7):

$$(c,X) = (c, (I\text{-}A)^{-1} b) = ((I\text{-}A')^{-1} c,b) = (p,b).$$

O sentido econômico dessa igualdade é imediato. Como o salário foi tomado igual a 1 , (c,X) é o total de pagamentos à mão-de-obra. Sendo a mão-de-obra o único fator primário, esse total deve coincidir com o valor (p,b) da produção final da economia.

Esclarecemos com um exemplo numérico o funcionamento do modelo aberto de Leontief. Imaginemos uma economia com três produtos, I, II e III, com a matriz de coeficientes técnicos e com os coeficientes de mão-de-obra indicados no quadro a seguir. Deseja-se atender às demandas finais $b_1 = 100$; $b_2 = 200$; $b_3 = 150$.

Setor podutor	Consumos intermediários por unidades produzidas de			Demandas finais
	I	II	III	
I	0,0	0,1	0,2	100
II	0,3	0,1	0,0	200
III	0,5	0,7	0,0	150
Mão-de-Obra	1	1	2	

Temos, no caso, os vetores $b = (100; 200; 150)$, $c = (1; 1; 2)$ e:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,9 & 0,0 \\ -0,5 & -0,7 & 1,0 \end{bmatrix}$$

invertendo essa matriz, obtém-se:

$$(1\text{-}A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2195 & 0,3252 & 0,2439 \\ 0,4065 & 1,2195 & 0,0813 \\ 0,8943 & 1,0163 & 1,1789 \end{bmatrix}$$

Pela equação (4.5) as produções brutas serão:

$$\begin{bmatrix} 1,2195 & 0,3252 & 0,2439 \\ 0,4065 & 1,2195 & 0,0813 \\ 0,8943 & 1,0163 & 1,1789 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 223,6 \\ 296,7 \\ 469,5 \end{bmatrix}$$

isto é, as produções brutas deverão ser $X_1 = 223{,}6; X_2 = 296{,}7; X_3 = 469{,}5$. Essa produção total se distribuirá de acordo com o quadro:

Setor produtor	Produção bruta	Consumos intermediários do setor: I	II	III	Demanda final
I	223,6	0	29,7	93,9	100,0
II	296,7	67,0	29,7	0	200,0
III	469,5	111,8	207,7	0	150,0
Mão-de-obra empregada		223,6	296,7	939,0	

A equação (4.7) nos fornece os preços de equilíbrio competitivo tomando os salários como numerário:

$$\begin{bmatrix} 1,2195 & 0,4065 & 0,8943 \\ 0,3252 & 1,2195 & 1,0163 \\ 0,2439 & 0,0813 & 1,1789 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,4146 \\ 3,5772 \\ 2,6829 \end{bmatrix}$$

ou seja, $p_1 = 3{,}4146$; $p_2 = 3{,}5772$; $p_3 = 2{,}6829$. Com esses preços chegamos ao seguinte quadro dos fluxos de produção em valor:

Setor produtor	Valor bruto produzido	Valor da produção destinada ao consumo intermediário do setor: – I	II	III	Valor da demanda final
I	763,4	0	101,3	320,7	341,4
II	1061,6	239,8	106,3	0	715,5
III	1259,7	300,0	557,3	0	402,4
Valor adicionado = pagamento à mão-de-obra		223,6	296,7	939,0	1459,3
Valor bruto da produção		763,4	1061,6	1259,7	

No caso, o produto da economia é igual a 1459,3 unidades de salário.

4.2 As condições de Hawkins-Simon

Examinemos agora as condições de consistência da matriz dos coeficientes técnicos, no modelo aberto de Leontief. O modelo não classifica os setores em etapas anteriores e posteriores do processo produtivo, mas admite interdependência. Assim, a agricultura consome produtos da indústria e a indústria usa produtos da agricultura. Nesse quadro de interdependência, os coeficientes técnicos não devem provocar um círculo vicioso. Não é possível que, ao mesmo rempo, a indústria consuma "grande quantidade" de produtos agrícolas e a agricultura "grande quantidade" de produtos industriais, pois o sistema se tornaria autofágico.

Para citar um exemplo, imaginemos uma economia psicodélica com apenas dois produtos, abóboras e lantejoulas, onde a matriz dos coeficientes técnicos seja:

	Abóboras	Lantejoulas
Abóboras	0	3
Lantejoulas	2	0

Se essa matriz retrata os únicos processos de produção conhecidos, a economia não terá como sobreviver. Pois, para fabricar uma abóbora, são necessárias duas lantejoulas; como cada lantejoula exige três abóboras, para produzir uma abóbora é preciso destruir seis abóboras. Do mesmo modo, para fabricar uma lantejoula é necessário destruir seis lantejoulas. Antes de concluir esses cálculos, a população teria morrido de inanição.

Tomemos um exemplo menos agressivo, o de uma economia com três produtos e a seguinte matriz de coeficientes técnicos:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}32 & 0{,}64 \\ 0{,}72 & 0{,}24 & 0{,}18 \\ 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Aparentemente nada há de estranho nessa matriz. Apenas a inversa de $I-A$ tem termos todos negativos:

$$(I-A)^{-1} \quad \begin{bmatrix} -8{,}43373 & -5{,}57229 & -6{,}40060 \\ -9{,}14910 & -4{,}64985 & -6{,}69239 \\ -4{,}89458 & -2{,}89910 & -2{,}65437 \end{bmatrix}$$

Tomadas ao pé da letra, as equações (4.5) e (4.7) nos levam a conclusões absurdas: para atender a demandas finais positivas é preciso que as quantidades produzidas sejam negativas. E os preços também serão negativos. É claro que estamos diante de uma economia autofágica.

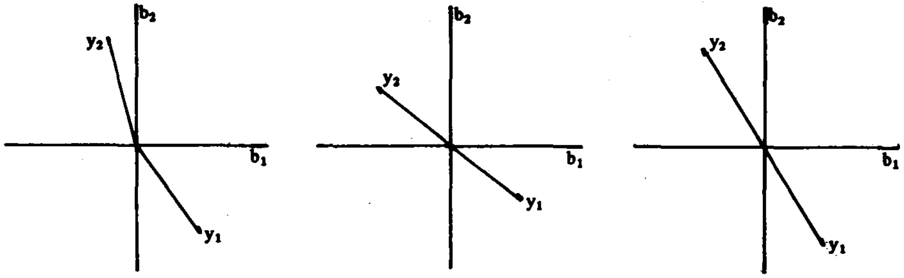
Vejamos, pois, as condições de consistência. Comecemos com uma economia de apenas dois produtos. O modelo aberto de Leontief corresponde a um sistema de atividades, com a seguinte matriz de processos:

Bem	Processo I	Processo II
I	$1-a_{11}$	$-a_{12}$
II	$-a_{21}$	$1-a_{22}$
Mão-de-obra	$-c_1$	$-c_2$

Sendo os coeficientes de mão-de-obra c_1 e c_2 positivos, é imediato que estamos diante de um cone consistente de atividades. Interessa-nos agora saber que combinações dos produtos I e II esses processos nos permitem obter, supondo ilimitada a oferta da mão-de-obra. O que se pode atender, em matéria de demanda final, é qualquer ponto do primeiro quadrante que seja combinação linear não-negativa dos vetores $y_1 = (1-a_{11}; -a_{21})$ e $y_2 = (-a_{12}; 1-a_{22})$. Em suma, o conjunto das demandas finais factíveis é a interseção do primeiro quadrante com o cone convexo gerado pelos vetores y_1 e y_2.

Um mínimo de bom senso nos obriga a admitir que $1-a_{11}$ e $1-a_{22}$ sejam positivos, sem o que seria impossível produzir um dos bens. Isto posto, y_1 é um vetor no quarto quadrante, y_2 no segundo. Conforme o coeficiente angular de y_1 seja, em valor absoluto, menor, igual ou maior do que o de y_2, teremos uma das três situações descritas nas figuras:

Figura 4.1 Figura 4.2 Figura 4.3



O único caso de consistência é o descrito na figura 4.1 e aí todos os pontos do primeiro quadrante são demandas finais factíveis. A figura sugere que o modelo aberto de Leontief funciona na base do tudo ou nada: se um ponto positivo do primeiro quadrante é demanda final factível, então qualquer ponto do primeiro quadrante também é demanda final factível. Para obter essa proposição no caso geral, provemos inicialmente o:

Lema 4.1: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, sendo $A \geqslant 0$; I a identidade $n \times n$. Suponhamos que para algum $x \geqslant 0$, $x \in R^n$, se tenha $(I-A)x > 0$. Então, se $z \in R^n$ e $(I-A)z \geqslant 0$, segue-se que $z \geqslant 0$.

Demonstração: Notemos que se $x \geqslant 0$ e $(I-A)x > 0$, então $(I-A)x + Ax = x > 0$. Suponhamos que $(I-A)z \geqslant 0$ e que z tenha alguma coordenada negativa. Seja $-r = \min\{z_j/x_j\}$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Então $r > 0$, e $rx + z \geqslant 0$ com alguma coordenada nula. Mas $rx + z = (I-A)(rx + z) + A(rx + z) \geqslant (I-A)(rx + z) = r(I-A)x + (I-A)z > 0$. Isso entra em contradição com $rx + z$ ter uma coordenada nula.

Estamos agora em condições de provar o:

Teorema 4.1 – Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada. Então as seguintes condições são equivalentes:

a) existe $x \geqslant 0$ tal que $(I-A)x > 0$;
b) $I-A$ é não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$;
c) $I-A$ é não-singular e $(I-A)^{-1} - I \geqslant 0$;
d) para todo $c \geqslant 0$ existe $x \geqslant 0$, tal que $(I-A)x = c$.

Demonstração: Mostremos que essas proposições se implicam circularmente: *a, b*) – mostremos em primeiro lugar que $I-A$ é não-singular. Com efeito, se $(I-A)z = 0$, então $(I-A)(-z) = 0$. Pelo Lema 4.1, isso implica $z \geqslant 0$ e $-z \geqslant 0$, ou seja, $z = 0$. Seja agora $c \geqslant 0$. Existe então x tal que $(I-A)x = c$. Segue-se, também pelo Lema 4.1, que $x \geqslant 0$. Isso significa que para todo $c \geqslant 0$, $(I-A)^{-1}c \geqslant 0$, ou seja, $(I-A)^{-1} \geqslant 0$;

b, c) – por hipótese, $I-A$ é não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Seja $c \geqslant 0$ e $b = (I-A)^{-1}c$ então $(I-A)b = c$ e portanto $b = Ab + c \geqslant c$; logo $((I-A)^{-1} - I)c = b-c \geqslant 0$. Essa desigualdade valendo para todo $c \geqslant 0$, $I-A$ é não-singular e $(I-A)^{-1} - I \geqslant 0$;
c, d) – basta tomar $x = (I-A)^{-1}c$. Como $(I-A)^{-1} - I$ é não-negativa, $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Sendo $c \geqslant 0$, segue-se que $x \geqslant 0$;
d, a) – tome-se $c > 0$. Então existe $x \geqslant 0$ tal que $(I-A)x = c > 0$.

Este teorema prova que, no modelo de Leontief, se uma demanda final $b > 0$ é factível, então qualquer outra demanda final b, positiva ou semipositiva, também é factível (a propriedade do "tudo ou nada"). E que, para que isso ocorra, é necessário e suficiente que a matriz $(I-A)$ seja não-singular, sua inversa sendo não-negativa e com os elementos da diagonal principal maiores ou iguais a 1.

Teorema 4.2: Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada. Então, para que A obedeça às condições do Teorema 4.1, é necessário e suficiente que A' obedeça a essas mesmas condições, A' designando a transposta de A.

Demonstração: Basta observar que $I-A'$ é não-singular se e somente se $I-A$ o for, já que $\det(I-A) = \det(I-A')$. E que $(I-A')^{-1} = ((I-A)^{-1})'$, isto é, que a inversa da transposta é a transposta da inversa. Logo, $(I-A)^{-1}$ será não-negativa se e somente se $(I-A')^{-1}$ o for.

Esse teorema assegura que um sistema de Leontief que seja consistente do ponto de vista das quantidades também o será do ponto de vista da determinação dos preços, e vice-versa.

Voltemos à figura 4.1. Para que o sistema bidimensional de Leontief seja consistente, é necessário que o coeficiente angular de y_1 seja menor em valor absoluto ao de y_2, isto é:

$$\frac{a_{21}}{1-a_{11}} < \frac{1-a_{22}}{a_{12}}$$

ou seja, $(1-a_{11})\,(1-a_{22})-a_{12}a_{21} > 0$. Isso é o mesmo que dizer que o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = \det (I-A) > 0.$$

Esse resultado é generalizado pelo seguinte:

Teorema 4.3: Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada tal que $I-A$ seja não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Então $\det (I-A) > 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.1, existe $x > 0$ tal que $(I-A)x > 0$. Logo, se $0 \leqslant r \leqslant 1$, $(I-rA)x = (I-A)x + (1-r)Ax > 0$. Segue-se mais uma vez do Teorema 4.1 que $(I-rA)$ é não-singular e que portanto $\det (I-rA) \neq 0$. Como a função $f(r) = \det (I-rA)$ é contínua no intervalo $0 \leqslant r \leqslant 1$ e não se anula em nenhum ponto desse intervalo, $f(1) = \det (I-A)$ tem o mesmo sinal de $f(0) = \det I = 1$. Isso prova que $\det (I-A) > 0$.

Voltando à figura 4.1, desde que $\det (I-A) > 0$ e $1-a_{11} > 0$ e $1-a_{22} > 0$, o sistema é consistente. Na realidade, se $1-a_{11} > 0$ e $\det (I-A) = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$, então $1-a_{22} > 0$. Assim, no caso bidimensional, o sistema de Leontief é consistente se e somente se os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix}$$

forem ambos positivos.

Esse resultado pode ser generalizado. Se $B = \{b_{ij}\}$ é uma matriz quadrada, seus menores principais são, por definição, os determinantes:

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_{11} \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \ldots\ldots \qquad B_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

O teorema de Hawkins-Simon assegura que um sistema de Leontief é consistente se e somente se os menores principais da matriz $I-A$ forem todos positivos. Para demonstrá-lo, provemos inicialmente dois lemas.

Lema 4.2: Seja $A_n \geqslant 0$ uma matriz $n \times n$; A_k a matriz formada pelas k primeiras linhas e colunas de A $(1<k<n)$. Seja I_n a identidade $n \times n$ e I_k a identidade $k \times k$. Então, se $(I_n - A_n)$ é não singular e $(I_n - A_n) \geqslant 0$, $I_k - A_k$ também é não-singular e $(I_k-A_k)^{-1} \geqslant 0$.

Demonstração: Decomponhamos $I_n - A_n$ na forma:

$$I_n - A_n = \begin{bmatrix} I_k-A_k & -F \\ -H & I_{n-k}-A_{n-k} \end{bmatrix}$$

onde A_k, A_{n-k}, H e F são matrizes não-negativas. Pelo Teorema 4.1, quaisquer que sejam $(b_k,b_{n-k}) > 0$, existirão $(c_k,c_{n-k}) \geqslant 0$, tais que:

$$(I_k-A_k)c_k - Fc_{n-k} = b_k$$
$$-Hc_k + (I_{n-k}-A_{n-k})c_{n-k} = b_{n-k}$$

Pela primeira dessas relações, $(I_k-A_k)\,c_k = b_k + Fc_{n-k} > 0$. Pelo Teorema 4.1 (I_k-A_k) é não-singular e $(I_k-A_k)^{-1} \geqslant 0$.

Lema 4.3: Seja $A_{n-1} \geqslant 0$ uma matriz quadrada $(n-1) \times (n-1)$ tal que $I_{n-1}-A_{n-1}$ seja não-singular e $(I_{n-1}-A_{n-1})^{-1} \geqslant 0$. Seja A_n a matriz não-negativa $n \times n$ obtida pela seguinte expansão de A_{n-1}:

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & F \\ H & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então, para que (I_n-A_n) seja não-singular e $(I_n-A_n)^{-1} \geqslant 0$, é necessário e suficiente que $\det(I_n-A_n) > 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.3, a condição é necessária.

Para provar que a condição também é suficiente, comecemos notando que (I_n-A_n) é não-singular, já que, por hipótese, seu determinante é positivo: Seja pois:

$$\left\{h_{ij}\right\} = (I_n-A_n)^{-1}$$

Temos, pela fórmula de cálculo das matrizes inversas:

$$h_{nn} = \frac{\det(I_{n-1}-A_{n-1})}{\det(I_n-A_n)}.$$

Por hipótese, $\det(I_n - A_n) > 0$ e $(I_{n-1} - A_{n-1})$ é não-singular com inversa não-negativa. Segue-se do Teorema 4.3, que $|(I_{n-1} - A_{n-1})| > 0$ e que, portanto, $h_{nn} > 0$.

Pelo Teorema 4.1, para provar que $(I_n - A_n)$ tem inversa não-negativa, basta demonstrar que existem $b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, n–1 dimensionais e $y > 0$ real, tais que:

$$
\begin{aligned}
(I_{n-1} - A_{n-1})\,c - Hy &= b \\
-Fc + (1 - a_{nn})y &= 1
\end{aligned}
$$

Seja $b = (b_1, b_2 \ldots, b_{n-1})$. Tem-se $y = h_{n1} b_1 + \ldots + h_{n,n-1} b_{n-1} + h_{nn}$. Como $h_{nn} > 0$ é possível escolher $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ tal que $y \geqslant 0$. Logo:

$$(I_{n-1} - A_{n-1})c = b + yH > 0$$

Como $(I_{n-1} - A_{n-1})$ é não-singular e com inversa não-negativa, segue-se, do Teorema 4.1, que $c \geqslant 0$, o que completa a demonstração do lema.

Estamos agora em condições de demonstrar o:

Teorema 4.4 (Hawkins-Simon): Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada. Então para que $(I-A)$ seja não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$, é necessário e suficiente que todos os menores principais de $I-A$ sejam positivos.

Demonstração: Pelo Lema 4.2 e pelo Teorema 4.3 a condição é necessária. Obviamente a condição é suficiente para matrizes *1 x 1*. Suponhamos que ela seja suficiente para matrizes $(n - 1) \times (n - 1)$. Então, pelo Lema 4.3 ela também será suficiente para matrizes n x n.

O teorema de Hawkins-Simon fornece um método prático de cálculo para testar se a matriz dos coeficientes técnicos de um modelo de Leontief é ou não consistente. No exemplo do subitem 4.1 usamos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Os menores principais da matriz $I-A$ são os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}9 \end{vmatrix} = 0{,}6; \quad \begin{vmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}7 & 1{,}0 \end{vmatrix} = 0{,}738$$

Sendo eles todos positivos, a matriz dos coeficientes técnicos é consistente.

Já no exemplo das abóboras e lantejoulas, os menores principais de $I-A$ seriam:

$$1; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

O segundo desses determinantes é negativo, e portanto o sistema é inconsistente.

A matriz de coeficientes técnicos já apresentada neste subitem:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}32 & 0{,}64 \\ 0{,}72 & 0{,}24 & 0{,}18 \\ 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

é tal que os menores de $I-A$ são:

$$0{,}6; \quad \begin{vmatrix} 0{,}60 & -0{,}32 \\ -072 & 0{,}76 \end{vmatrix} = 0{,}2256 \quad \begin{vmatrix} 0{,}60 & -0{,}32 & -0{,}64 \\ -0{,}72 & 0{,}76 & -0{,}18 \\ -0{,}32 & -0{,}24 & 1{,}00 \end{vmatrix} = -0{,}08499$$

a matriz é inconsistente, porque o terceiro desses determinantes é negativo.

Que razões temos para acreditar que, no mundo real, as matrizes de Leontief sejam consistentes? O simples fato de a humanidade continuar sobrevivendo. Alguns engenheiros esquizofrênicos podem inventar processos de produção autofágicos. Apenas a sociedade não os adota.

4.3 O método iterativo

Se a A é uma matriz consistente de coeficientes técnicos, a inversa de $I-A$ pode ser obtida pelo desenvolvimento em série:

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots, + A^n + \ldots \tag{4.9}$$

como prova o seguinte:

Teorema 4.5: Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada. Então, para que a seqüência:

$$S_n(A) = I + A + \ldots + A^{n-1}$$

convirja para alguma matriz $S(A)$ é necessário e suficiente que $(I-A)$ seja não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Nesse caso de convergência, $S(A) = (I-A)^{-1}$.

Demonstração: Suponhamos que $S_n(A)$ convirja para $S(A)$. Nesse caso, $\lim A^n = 0$, pois o termo geral de uma série convergente tende a zero.

$n \to \infty$

Notando que:

$$(I-A)S_n(A) = I-A^n$$

segue-se, por passagem ao limite, que $(I-A)\,S(A) = I$ e que, portanto, $S(A) = = (I-A)^{-1}$. Como $S_n(A)$ é uma seqüência de matrizes não-negativas, conclui-se que $I-A$ é não-singular e que $(I-A)^{-1} = S(A) \geqslant 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $(I-A)$ seja não-singular e $(I-A)^{-1} > 0$. Da relação $(I-A)S_n(A) = 1-A^n$ resulta:

$$S_n(A) = (I-A)^{-1}\ (I-A^n)$$

e, como $(I-A)^{-1} \geqslant 0$:

$$S_n(A) \leqslant (I-A)^{-1}$$

sendo $S_n(A)$ uma seqüência não-decrescente (pois $A \geqslant 0$) e limitada (pela relação anterior), conclui-se que $S_n(A)$ é convergente. Isso exige que $\lim A^n = 0$ (termo geral de uma série convergente). Segue-se:

$$S_n(A) = (I-A)^{-1}\ (I-A^n) \quad \text{que} \quad S(A) = (I-A)^{-1}$$

A equação (4.9) fornece um método de inversão da matriz $I-A$ por aproximações sucessivas. Permite também calcular a produção bruta X necessária ao atendimento da demanda final b pela fórmula:

$$X = b + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{4.10}$$

onde $b_1 = Ab$, $b_2 = Ab_1, \ldots,\ b_n = Ab_{n-1}, \ldots$

A interpretação econômica dessa fórmula é simples. A produção bruta necessária para se atender à demanda final b pode calcular-se somando sucessivamente a b: a) o consumo intermediário $b_1 = Ab$ correspondente a uma produção bruta igual a b; b) o consumo intermediário $b_2 = Ab_1$ correspondente à produção bruta adicional b_1 e assim por diante.

Do mesmo modo, para os preços:

$$p = c + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{4.11}$$

onde $c_1 = A'c$; $c_2 = A'c_1$; $\ldots$; $c_n' = A'c_{n-1}, \ldots$

A título de exemplo, tomemos o exemplo de determinação das quantidades do subitem 4.1. Teremos:

$$b = \begin{bmatrix} 100,0 \\ 200,0 \\ 150,0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = Ab = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,5 & 0,7 & 0,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100,0 \\ 200,0 \\ 150,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50,0 \\ 50,0 \\ 190,0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = Ab_1 = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,5 & 0,7 & 0,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50,0 \\ 50,0 \\ 190,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43,0 \\ 20,0 \\ 60,0 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo nas iterações, chega-se ao seguinte quadro:

Iteração	1º componente	2º componente	3º componente
b	100,0	200,0	150,0
b_1	50,0	50,0	190,0
b_2	43,0	20,0	60,0
b_3	14,0	14,9	35,5
b_4	8,59	5,69	17,43
b_5	4,06	3,15	8,28
b_6	1,97	1,53	4,24
b_7	1,00	0,74	2,06
b_8	0,49	0,37	1,02
b_9	0,24	0,18	0,50
b_{10}	0,12	0,09	0,25
b_{11}	0,06	0,05	0,12
b_{12}	0,03	0,02	0,07
Soma	223,6	296,7	469,5

valores iguais aos encontrados no subitem 4.1. É claro que o método iterativo sempre leva a um erro por falta. No caso apenas o erro é inferior à aproximação de uma decimal com a qual foram calculadas as produções brutas.

4.4 Sistemas decomponíveis e indecomponíveis

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Diz-se que A é decomponível quando, por uma permutação das linhas e igual permutação das colunas, é possível apresentar A na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

sendo A_{11} e A_{12} submatrizes quadradas. O sentido econômico de uma matriz decomponível de coeficientes técnicos é facilmente compreensível: há um grupo de produtos que pode ser fabricado usando como insumos apenas os bens do grupo. A título de exemplo, tomemos a matriz de coeficientes técnicos.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Os produtos II e IV só usam, como insumos, os próprios produtos II e IV. Reordenando os produtos na seqüência II, IV, III, a matriz dos coeficientes técnicos reapresenta-se como:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}3 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que uma matriz $n \times n$ de coeficientes técnicos seja decomponível na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

sendo A_{11} uma matriz indecomponível $k \times k$. Seguindo Sraffa, denominaremos os k primeiros bens "produtos básicos" e os $n-k$ últimos "produtos não-básicos". Sejam (c_1, c_2) os coeficientes de mão-de-obra, (p_1, p_2) os preços, bens. (Os vetores com índice 1 são k-dimensionais, os com índice 2 são $(n-k)$ dimensionais). Das equações (4.5) e (4.7) segue-se que:

$$(I_k - A_{11})X_1 - A_{12}X_2 = b_1 \tag{4.12a}$$

$$(I_{n-k} - A_{22})X_2 = b_2 \tag{4.12b}$$

$$(I_k - A'_{11})p_1 = c_1 \tag{4.12c}$$

$$-A'_{12}p_1 + (I_{n-k} - A'_{22})p_2 = c_2 \tag{4.12d}$$

Das equações (4.12*b*) e (4.12*c*) seguem-se duas famosas proposições de Sraffa:

a) a produção bruta de "bens não-básicos" independe da demanda final de produtos básicos;

b) os preços dos produtos básicos independem dos coeficientes de mão-de-obra dos produtos não-básicos.

Cuidemos agora dos sistemas indecomponíveis. Dizer que uma matriz de coeficientes técnicos é indecomponível não é o mesmo que dizer que todos os seus termos sejam positivos. (Embora uma matriz quadrada de termos todos positivos seja obviamente indecomponível.) A matriz a seguir é indecomponível, apesar de cheia de zeros:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Indecomponibilidade significa total interdependência indireta: é impossível obter um excedente líquido (isto é, atender à demanda final) de um bem qualquer sem produzir simultaneamente todos os bens. Na matriz anterior isso ocorre porque a produção do primeiro bem usa o segundo bem como insumo, a do segundo usa o terceiro, a do terceiro usa o primeiro. Vejamos dois teoremas importantes sobre sistemas indecomponíveis:

Teorema 4.6: Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada. A é indecomponível se e somente se a desigualdade $Ax \leqslant sx$ para s real e x semipositivo implicar $x > 0$.

Demonstração: Suponhamos que A seja indecomponível e suponhamos, por absurdo, que $Ax \leqslant sx$ para algum x semipositivo e com alguma coordenada nula. Reordenemos as componentes de x na forma $x = (x_1, x_2)$ sendo $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$. Procedendo à igual permutação de linhas e colunas, reapresentemos A na forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Teríamos então:

$$A_{11} x_1 + A_{12} x_2 = A_{11} x_1 \leqslant s x_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = A_{21} x_1 \leqslant s x_2 = 0.$$

Como A_{21} é não-negativa e $x_2 = 0$, a última desigualdade implicaria $A_{21} = 0$, contrariando a hipótese de indecomponibilidade.

Reciprocamente, suponhamos que $Ax \leqslant sx$ para s real e x semipositivo implique $x > 0$. Admitamos, por absurdo, que A seja decomponível na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Sendo A_{11} e A_{22} matrizes quadradas de ordem k e $n-k$, respectivamente. Seja $u = (1.1, \ldots, 1)$ o vetor k-dimensional com todas as componentes iguais a 1. Teremos então:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $x = (u ; 0)$ e s igual à maior das componentes de $A_{11} u$ teríamos $Ax \leqslant$ $\leqslant sx$ para s real e para algum x semipositivo com alguma coordenada nula, contrariamente à hipótese.

Teorema 4.7: Seja $A \geqslant 0$ uma matriz quadrada tal que $I-A$ seja não-singular e $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Então, para que A seja indecomponível é necessário e suficiente que $(I-A)^{-1} > 0$.

Demonstração: Suponhamos que A seja indecomponível. Para provar que $(I-A)^{-1} > 0$ basta provar que para todo vetor semipositivo c se tem $(I-A)^{-1} c > 0$. Com efeito, seja $x = (I-A)^{-1} c$; x é semipositivo pois por hipótese $(I-A)^{-1} \geqslant 0$. Além disso, $(I-A)\, x = c$, o que implica $Ax = x-c \leqslant x$. Tomando $s = 1$ no Teorema 4.6, resulta $x > 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $(I-A)^{-1} > 0$ e admitamos, por absurdo, que A seja decomponível. Fixemos a demanda final de produtos básicos em $b_1 >$

> 0 e a de produtos não-básicos em $b_2 = 0$. Pelas equações (4.12*a*) e (4.12*b*) as produções brutas necessárias serão $X_1 = (I-A_{11})^{-1} b_1$ e $X_2 = 0$. Mas a hipótese de que $(I-A)^{-1} > 0$ exige que ambos, X_1 e X_2, sejam estritamente positivos.

4.5 O teorema da não-substituição

No subitem 4.1 afirmamos que o modelo de Leontief parte de três pressupostos altamente restritivos: a) há um único fator primário de produção; b) não há produção conjunta; c) cada produto se fabrica por uma única técnica. Provaremos agora que, numa economia competitiva com rendimentos constantes de escala, a terceira hipótese pode ser aceita como corolário das outras duas: se há apenas um fator primário de produção e se não há produção conjunta, a cada produto se pode associar uma técnica ótima de produção, e que sempre pode ser escolhida independentemente da demanda final de bens e serviços. Esse é o chamado teorema da não-substituição.

Suponhamos, pois, que para produzir uma unidade do j*ésimo* produto exista um conjunto C_j de técnicas; (j = 1, 2, . . ., n). Os elementos de c_j são vetores (n + 1)-dimensionais, cujas *n* primeiras componentes indicam os coeficientes técnicos e cuja última coordenada expressa o coeficiente de mão-de-obra. Admitiremos que C_j seja compacto e convexo, a última hipótese resultando da de rendimentos constantes.

Como não há produção conjunta, para atender a uma demanda final positiva $b \epsilon R^n_{++}$ é preciso escolher uma técnica para a produção de cada bem. Isso equivale a extrair do produto cartesiano $C_1 \; X \; C_2 \; ... \; X \; C_n$ uma matriz A de coeficientes técnicos e um vetor c de coeficientes de mão-de-obra, o que se designará na discussão que se segue como o sistema tecnológico $\{A,c\}$. Admitiremos que, para todo ponto do produto cartesiano $C_1 \; X \; ... \; XC_n$, a matriz A de coeficientes técnicos seja consistente. Pelo Teorema 4.1, isso equivale a dizer que $I-A$ é não-singular e $(I-A)^{-1} - I \geqslant 0$.

O sistema tecnológico $[A,c]$ deve ser escolhido de modo a minimizar o custo da produção necessária à obtenção da demanda final b. Como o trabalho é o único fator primário de produção e como o salário foi tomado igual a 1, esse custo é igual ao volume de mão-de-obra empregada, expressando-se pelas equações (4.8) e (4.5) por $(c,X) = (c,(I-A)^{-1}b)$. A existência de um tal sistema tecnológico é assegurada pelo fato de $(c, (I-A)^{-1} b)$ ser uma função contínua definida no conjunto compacto $C_1 \; X \; C_2 \; X ... \; X \; C_n$.

Suponhamos que $[A,c]$ seja o sistema tecnológico que permita atender com mínimo custo à demanda final $b_o \; \epsilon \; R^n_{++}$. Mostraremos que esse sistema também minimiza o custo da produção necessária à obtenção de qualquer outra demanda final.

Com efeito, seja $[\tilde{A},\tilde{c}]$ um outro sistema tecnológico qualquer. Como a economia opera com rendimentos constantes, é possível atender à demanda final b_o decompondo-a em $b_o = b_1 + b_2$, obtendo b_1 pelo sistema tecnológico $[\tilde{A},\tilde{c}]$ e b_2 pelo sistema $[A,c]$. O custo de produção, no caso, deve ser maior ou igual ao da obtenção da demanda final b_0 pela tecnologia $[A,c]$, o qual, por hipótese, é o mínimo custo possível:

$$(\tilde{c}, (I-\tilde{A})^{-1} b_1) + (c, (I-A)^{-1} b_2) \geqslant (c, (I-A)^{-1} b_0)$$

ou, como $b_0 = b_1 + b_2$:

$$(\tilde{c}, (I-\tilde{A})^{-1}) \geqslant (c, (I-A)^{-1} b_1) \text{ para qualquer } 0 \leqslant b_1 \leqslant b_0. \tag{4.13}$$

Seja agora b uma demanda final semipositiva qualquer. Então é possível encontrar um número real positivo r tal que $0 \leqslant rb \leqslant b_0$.

Tomando $b_1 = rb$ na desigualdade (4.13), resulta:

$$(\tilde{c}, (I-\tilde{A})^{-1} b) \geqslant (c, (I-A)^{-1} b) \tag{4.14}$$

o que prova o teorema da não-substituição: o sistema tecnológico $[A,c]$ que atende com mínimo custo a uma demanda final específica $b_0 > 0$ também atende com mínimo custo a qualquer outra demanda final b.

A desigualdade (4.14) pode ser representada sob a forma:

$$((I-\tilde{A}')^{-1} \tilde{c}, b) \geqslant ((I-A')^{-1} c, b) \text{ para todo } b \geqslant 0$$

o que implica:

$$(I-\tilde{A}')^{-1} \tilde{c} \geqslant (I-A')^{-1} c.$$

A tecnologia de mínimo custo define o sistema de preços da economia pela equação (4.7), isto é, $p = (I-A')^{-1} c$. Logo, para qualquer sistema tecnológico $[\tilde{A},\tilde{c}]$:

$$(I-\tilde{A}')^{-1} \tilde{c} \geqslant p. \tag{4.15}$$

Sejam agora $\tilde{a}_{1j}, \tilde{a}_{2j}, \ldots, \tilde{a}_{nj}$ os coeficientes técnicos e $\tilde{c}_j$ o coeficiente de mão-de-obra de um processo qualquer que permita a obtenção de uma unidade do $j^{ésimo}$ produto. Provaremos que, se $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$:

$$\tilde{a}_{1j} p_1 + \tilde{a}_{2j} p_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj} p_n + \tilde{c}_j \geqslant p_j \tag{4.16}$$

o que significa que, a sistema de preços de equilíbrio p, nenhum processo permite que se fabrique qualquer produto com lucro positivo. Obviamente, para os processos da tecnologia de mínimo custo, a relação (4.16) vigora com igualdade, pois, pela equação (4.6), $(I-A')\,p = c$.

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que se tivesse:

$$\tilde{a}_{1j}p_1 + \tilde{a}_{2j}p_2 + ... + \tilde{a}_{nj} + \tilde{c}_j < p_j.$$

Mantendo para os demais produtos os processos da tecnologia de mínimo custo $[A,c]$ e introduzindo esse processo para a fabricação do $j^{ésimo}$ produto, teríamos um novo sistema tecnológico $[\tilde{A},\tilde{c}]$ tal que:

$$\tilde{A}'p + \tilde{c} \leqslant p$$

valendo a desigualdade estrita para a $j^{ésima}$ componente e a igualdade para as demais. Logo, o vetor $(I-\tilde{A}')\, p - \tilde{c}$ seria semipositivo. Mas, pela hipótese de consistência e pelo Teorema 4.1, $(I-\tilde{A}')^{-1} - I \geqslant 0$.

Logo:

$$p - (I-\tilde{A}')^{-1}\tilde{c} \geqslant (I-\tilde{A}')\, p - \tilde{c}$$

o que significa que $p - (I-\tilde{A}')^{-1}\tilde{c}$ seria semipositivo, contrariando a relação (4.15).

Da desigualdade (4.16) segue-se que, para qualquer sistema tecnológico $[\tilde{A},\tilde{c}]$:

$$(I-\tilde{A}')\, p \leqslant c. \qquad (4.17)$$

Essa desigualdade implica as relações (4.15) e (4.14). Segue-se daí o:

Teorema 4.8: Para que um sistema tecnológico $[A,c]$ seja o sistema de mínimo custo, é necessário e suficiente que o sistema de preços por ele determinado não permita que qualquer processo de produção gere lucro positivo.

O critério de cálculo dos preços e da identificação das tecnologias de equilíbrio é simples. Tomemos os salários como numerário, escolhamos uma tecnologia para a fabricação de cada produto e determinemos os preços de equilíbrio pela equação (4.7). Se tivermos acertado na escolha ótima de tecnologias, nenhum outro processo dará lucro positivo. A título de exemplo, suponhamos uma economia com três bens, cada um deles podendo ser produzido por dois processos, de acordo com a matriz:

Bem	Processo					
	I_1	I_2	II_1	II_2	III_1	III_2
A	1,0	1,0	−0,1	−0,2	−0,2	−0,5
B	−0,3	0,0	0,9	1,0	0,0	−0,1
C	−0,5	−0,7	−0,7	−0,6	1,0	1,0
Mão-de-obra	−1,0	−2,0	−1,0	−1,5	−2,0	−1,0

Aos processos I_1, II_1 e III_1 correspondem os preços (3,4146; 3,5772; 2,6829), conforme o exercício do subitem 4.1. A esses preços, os processos I_2, II_2 e III_2 dão todos lucros negativos: –0,4634; –0,2155; –0,3821. Logo, quaisquer que sejam as demandas finais, sempre se utilizarão os processos I_1, II_1 e III_1.

5. O problema da transformação

5.1 O modelo fechado de Leontief

O modelo fechado de Leontief é um caso particular do sistema matricial de Von Neumann discutido no subitem 3.5. A matriz dos insumos é a matriz quadrada *M*, com *n* linhas e *n* colunas. A matriz dos produtos é a identidade *I* de mesma ordem, a marca da produção simples: o $j^{ésimo}$ processo básico produz uma unidade do bem *j*, e nada mais. Isso significa que o cone de Von Neumann se expressa, no caso, por:

$$C = \left\{ \{Mx; x\} \qquad x \in R^n_+ \right\}. \tag{5.1}$$

A matriz *M* incorpora os insumos diretos e as quantidades consumidas pelos trabalhadores. Indicaremos por $A = [a_{ij}]$ a matriz dos coeficientes técnicos, por c_j o número de horas de trabalho necessárias à produção de uma unidade do bem *j* e suporemos que uma hora de trabalho se compre pela cesta de mercadorias $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Assim:

$$M = A + G \tag{5.2}$$

onde:

$$G = [m_i c_j]. \tag{5.3}$$

A título de exemplo, suponhamos que a matriz dos coeficientes técnicos seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,0 \end{bmatrix}$$

que os coeficientes de mão-de-obra se descrevam pelo vetor c = (0, 1; 0, 1 ; 0, 2) e que uma hora de trabalho se compre pela cesta de mercadorias m = (1; 2; 0). A matriz $G = [m_i c_j]$ será

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$M = A + G \doteq \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Designemos por $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ o vetor dos coeficientes de mão-de-obra. Por simples verificação deduz-se que, para qualquer vetor *n*-dimensional *y*:

$$G'y = (y,m)c \qquad (5.4)$$

propriedade que será muito usada mais adiante.

O modelo de Leontief parte das seguintes hipóteses:

Axioma 1. Existe *x* semipositivo tal que $x > Ax$.
Axioma 2. *c* é positivo e *m* semipositivo.
Axioma 3. O sistema de Von Neumann $\{M; I\}$ é irredutível.

O Axioma 1 postula que, se os trabalhadores vivessem de brisa, o sistema seria capaz de se expandir geometricamente a uma taxa positiva. Pelo Teorema 4.1, ele equivale a admitir que a matriz $I - A$ seja não-singular com inversa não-negativa. O Axioma 2 diz que nenhum bem se pode produzir sem mão-de-obra e que os trabalhadores não vivem de brisa. O Axioma 3 implica que todos os bens sejam produzidos em qualquer trajetória geométrica factível. Como o nosso interesse se limitará à discussão das trajetórias de Von Neumann, esse axioma, combinado com a hipótese de produção simples e o Teorema 3.6, justifica a suposição de que cada produto se obtenha por um único processo, isto é, que *M* seja uma matriz quadrada. Com efeito, suponhamos que existissem vários processos para a produção de cada um dos *n* bens. Pelo Teorema 3.6 existiria um vetor de von Neumann que empregasse no máximo *n* desses processos. Sendo o sistema irredutível com produção simples, cada bem seria produzido por um processo.

Note-se que, pelo Axioma 2, *M* possui uma linha com elementos todos positivos. Isso assegura que toda coluna de *M* possui pelo menos um elemento positivo, como se exige nos sistemas matriciais de Von Neumann.

Indiquemos por $\hat{k}$ o maior multiplicador factível do sistema matricial de

Von Neumann $\{M;I\}$. Várias propriedades notáveis distinguem o modelo fechado de Leontief:

a) os vetores de Von Neumann são estritamente positivos e unicamente determinados a menos de uma constante multiplicativa;
b) nas trajetórias de Von Neumann não há sobra de bens. Isso é o mesmo que dizer que, se $\{M\hat{x};\hat{x}\}$ é um vetor de Von Neumann:

$$\hat{x} = \hat{k}M\hat{x} \tag{5.5}$$

c) o sistema de preços p que torna competitivas as trajetórias de Von Neumann é estritamente positivo, unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa, obedecendo à relação:

$$p = \hat{k}M'p \tag{5.6}$$

onde M' indica a transposta da matriz M;
d) qualquer que seja o vetor n-dimensional semipositivo y:

$$\lim_{t \infty} (\hat{k}M)^t y = \hat{x} \tag{5.7}$$

$$\lim_{t \infty} (\hat{k}M')^t y = p \tag{5.8}$$

Essas propriedades serão demonstradas adiante. Façamos $\hat{s} = \hat{k}^{-1}$, isto é, o inverso do maior multiplicador factível. A equação (5.5) implica:

$$(M - \hat{s}I)\,\hat{x} = 0 \tag{5.9}$$

Como $\hat{x}$ é não-nulo, conclui-se que $\hat{s}$ é raiz da equação determinantal:

$$f(r) = \det(M - rI) = 0$$

isto é, que $\hat{s}$ é um autovalor de M. Mais ainda, a equação (5.7) exige que qualquer outro autovalor de M tenha módulo inferior a $\hat{s}$. Provaremos no próximo subitem que o sistema de Von Neumann $[M;I]$ é irredutível se e somente se M for indecomponível. E que toda matriz quadrada não-negativa e indecomponível possui um autovalor positivo, denominado raiz de Frobenius, não excedido em valor absoluto por nenhum outro autovalor. Em suma, o maior multiplicador factível $\hat{k}$ é o inverso da raiz de Frobenius da matriz M. Os autovalores de uma matriz são obviamente iguais aos da sua transposta. Assim, o inverso da raiz de Frobenius de M é igual a 1 mais a taxa de lucro nas trajetórias de Von Neumann, exatamente o que diz a equação (5.6).

À raiz de Frobenius corresponde um autovetor positivo, unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa, e que resolve a equação (5.9).

Assim, a produção $\hat{x}$ num vetor de Von Neumann é o vetor de Frobenius de M. O sistema de preços p, o vetor de Frobenius da transposta M'.

Assim, para a matriz M do exemplo anterior, a equação característica é:

$$f(r) = \begin{vmatrix} 0{,}2-r & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2-r & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -r \end{vmatrix} = -r^3 + 0{,}4r^2 + 0{,}38r + 0{,}06 = 0$$

o que significa que M possui os autovalores $r_1 = 0{,}897736$, $r_2 = 0{,}248868 + 0{,}069998i$, $r_3 = -0{,}248868\text{-}0{,}069998i$. A raiz de Frobenius é $\hat{s} = 0{,}897736$. O multiplicador máximo factível do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$ é portanto $\hat{k} = 1/\hat{s} = 1{,}113913$. Em suma, nas trajetórias de Von Neumann, a taxa de expansão física do sistema e a taxa de lucro são iguais a 11,4% por período.

Num vetor de Von Neumann $[M\hat{x};\ \hat{x}]$, $\hat{x}$ é proporcional ao autovetor de Frobenius (1,000000; 1,445565; 0,817246). Do mesmo modo o sistema de preços é proporcional a $p = (1{,}000000;\ 0{,}691771;\ 0{,}942244)$, que é vetor de Frobenius da transposta M'. Verifica-se imediatamente que $\hat{k}M\hat{x} = \hat{x}$ e que $\hat{k}M'p \doteq p$.

5.2 Propriedades do modelo fechado de Leontief

Exploremos agora as propriedades do modelo fechado de Leontief. Um primeiro teorema identifica irredutibilidade do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$ com indecomponibilidade da matriz M.

Teorema 5.1: Seja M uma matriz quadrada não-negativa, com pelo menos um elemento positivo em cada coluna. Para que o sistema de Von Neumann $\{M; I\}$ seja irredutível é necessário e suficiente que a matriz M seja indecomponível.

Demonstração: Suponhamos que o sistema seja irredutível. Pelo Teorema 4.6, para provar que M é indecomponível basta mostrar que $Mx \leqslant sx$ para x semipositivo e s real implica $x > 0$. Com efeito, pelo Axioma 2 do modelo de Von Neumann, se x for semipositivo, Mx será também semipositivo. Logo, se $Mx \leqslant sx$, segue-se que $s > 0$. Fazendo $k = 1/s$, segue-se que $x \geqslant kMx$ para x semipositivo e k positivo. Pela definição de sistema irredutível, isso implica $Mx > 0$ e, portanto, $x > 0$.

Reciprocamente, suponhamos que M seja indecomponível e suponhamos $x \geqslant kMx$ para $\bar{x}$ semipositivo e k positivo. Pelo Teorema 4.6, isso implica $x > 0$. Nenhuma linha de M pode ter todos os termos nulos, pois, se tal acontecesse, M seria decomponível. Logo $Mx > 0$, o que prova que o sistema $\{M; I\}$ é irredutível.

O seguinte teorema associa factibilidade de multiplicadores à inversibilidade da matriz $I-kM$:

Teorema 5.2: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível, k um número real positivo. Então, para que k seja um multiplicador factível não-máximo do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$, é necessário e suficiente que a matriz $I-kM$ seja não-singular com inversa positiva.

Demonstração: Seja $\hat{k}$ o multiplicador máximo factível do sistema matricial de Von Neumann $\{M; I\}$. Pelo Teorema 5.1, esse sistema é irredutível. Logo, existe um vetor de Von Neumann $\{M\hat{x}; \hat{x}\}$ tal que $\hat{x} \geqslant \hat{k}M\hat{x} > 0$. Logo, se $0 < k < \hat{k}$, $(I - kM)\, x > 0$. Pelos teoremas 4.1 e 4.7 $(I - kM)$ será não-singular com inversa positiva.

Reciprocamente, suponhamos que $(I - kM)$ seja não-singular com inversa positiva. Tomando $u > 0$ e $x = (I - kM)^{-1} u$, segue-se que $x > 0$ e que $x = kMx + u > kMx$. Isso prova que k é um multiplicador factível não-máximo.

Se M é uma matriz quadrada não-negativa e indecomponível, sua inversa também o é. Se $I - kM$ é não-singular com inversa não-negativa, o mesmo ocorre com $I - kM'$. Resulta daí o:

Teorema 5.3: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível. Então, os sistemas de Von Neumann $\{M; I\}$ e $\{M'; I\}$ têm o mesmo multiplicador máximo factível.

Do mesmo modo temos o:

Teorema 5.4: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível; $\hat{k}$ o maior multiplicador factível do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$. Então:

$$\det (I - \hat{k}M) = \det (I - \hat{k}M') = 0$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\det (I - \hat{k}M) \neq 0$. Então $(I - \hat{k}M)^{-1}$ existiria e, por continuidade, seria não-negativa, já que toda vizinhança de $\hat{k}$ contém um multiplicador factível inferior ao máximo. Pelo Teorema 4.7 $(I - \hat{k}M)^{-1}$ seria positiva e, pelo Teorema 5.2, $\hat{k}$ seria um multiplicador factível inferior ao máximo, isto é, $\hat{k} > \hat{k}$, o que é absurdo.

Estamos agora em condições de provar o:

Teorema 5.5: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível; $\hat{k}$ o multiplicador máximo factível do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$; $\{M\hat{x}; \hat{x}\}$ um vetor de Von Neumann do sistema e p um sistema de preços competitivos para uma trajetória de Von Neumann. Então.

a) $\hat{x} = \hat{k}M\hat{x} > 0$;
b) $p = \hat{k}M'p > 0$;
c) $\hat{x}$ e p são unicamente determinados a menos de constantes multiplicativas.

Demonstração:

a) Pelo Teorema 5.1, o sistema de Von Neumann $\{M; I\}$ é irredutível. Logo $\hat{x} \geqslant \hat{k}M\hat{x} > 0$. Pelo Teorema 5.4 existe um vetor não-nulo y tal que $(I - \hat{k}M)\, y = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\hat{x} - \hat{k}M\hat{x} = (I - \hat{k}M)\, \hat{x}$ seja semipositivo. Então y será não-proporcional a $\hat{x}$. Como $\hat{x}$ é positivo, segue-se que existe um número real r tal que $\bar{x} = \hat{x} + ry$ seja semipositivo com pelo menos uma coordenada nula. Teríamos $(I - \hat{k}M)\, \bar{x} = (I - \hat{k}M)\, \hat{x} + r\, (I - \hat{k}M)\, y = (I - \hat{k}M)\, \hat{x} \geqslant 0$. Logo $\{M\bar{x}; \bar{x}\}$ seria vetor de Von Neumann do sistema. Mas isso é impossível, pois $\bar{x}$ possui pelo menos uma coordenada nula e o sistema é irredutível.

b) Pelas equações (3.13*a*) e (3.13*b*) temos $(I - \hat{k}M')\, p \leqslant 0$ e $(\hat{x}, (I - \hat{k}M')\, p) = 0$.

Como $\hat{x} > 0$, isso exige $(I-\hat{k}M')\,p = 0$, isto é, $p = \hat{k}M'\,p$. Pelo Teorema 5.3 isso significa que p será a produção de um vetor de Von Neumann do sistema irredutível $[M';I]$. Logo $p > 0$.

c) Sejam $\{M\bar{x};\ \bar{x}\}$ e $\{M\hat{x};\ \hat{x}\}$ dois vetores de Von Neumann do sistema $\{M;I\}$. Pelo item a $(I-\hat{k}M)\,\hat{x} = (I-\hat{k}M)\,\bar{x} = 0$ e $\hat{x}$ e $\bar{x}$ são positivos. Suponhamos, por absurdo, que $\bar{x}$ não fosse proporcional a $\hat{x}$. Então existiria um real r positivo tal que $\hat{x} - r\bar{x}$ fosse semipositivo com pelo menos uma coordenada nula. Teríamos $(I-\hat{k}M)\,(\hat{x} - r\bar{x}) = 0$, o que significa que $\{M(\hat{x} - r\bar{x});\ \hat{x} - r\bar{x}\}$ seria vetor de Von Neumann do sistema $\{M;\ I\}$. Mas isso é absurdo, pois o sistema é irredutível e $\hat{x} - r\bar{x}$ possui uma coordenada nula. Logo $\hat{x}$ é unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa. Como $\{M'p;\ p\}$ é vetor de Von Neumann do sistema $\{M';I\}$, conclui-se que p também é unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa.

Como corolário temos o:

Teorema 5.6: Para qualquer vetor n-dimensional y e para qualquer inteiro positivo t:

$$(p, \hat{k}^t M^t y) = (p, y)$$
$$(\hat{x}, \hat{k}^t M'^t y) = (\hat{x}, y)$$

Demonstração: Como $p = \hat{k}M'\,p$ resulta $p = \hat{k}^t M'^t p$. Logo $(p, y) = (k^t M'^t p, y) = (p, k^t M^t y)$. Do mesmo modo se prova que $(\hat{x}, \hat{k}^t M'^t y) = (\hat{x}, y)$.

Dessa relação resulta que uma trajetória geométrica factível no modelo fechado de Leontief na qual não haja sobra de bens, isto é, na qual $x - kMx = 0$, é uma trajetória de Von Neumann, de acordo com o seguinte:

Teorema 5.7: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível. Suponhamos que $x = kMx$ para x semipositivo. Então k é igual ao multiplicador máximo factível $\hat{k}$ do sistema de Von Neumann $\{M;I\}$.

Demonstração: Seja p um sistema de preços do sistema de Von Neumann em questão. Tem-se $(p, x) = k\,(p, Mx)$ e, pelo Teorema 5.6, tomando $y = x$ e $t = 1$ $(p, x) = \hat{k}\,(p, Mx)$. Como p é positivo e x semipositivo, $(p, x) > 0$. Logo $k = \hat{k}$.

Uma outra propriedade importante é fornecida pelo:

Teorema 5.8: Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível com n linhas e n colunas; $\hat{k}$ o multiplicador máximo factível do sistema de Von Neumann $\{M;I\}$. Então, para qualquer vetor n-dimensional y, a seqüência $\hat{k}^t M^t y$ é limitada.

Demonstração: Seja $|y|$ o vetor cujas componentes são os módulos das componentes de y. Então, como $\hat{k}^t M^t$ é não-negativa, $|\hat{k}^t M^t y| \leq \hat{k}^t M^t\,|y|$. Logo, pelo Teorema 5.6:

$$(p, |\hat{k}^t M^t y|) \leq (p, \hat{k}^t M^t\,|y|) = (p, |y|)\,.$$

Como p é positivo, segue-se que $|\hat{k}^t M^t y|$ e, portanto, $\hat{k}^t M^t y$ é limitada.

As propriedades até agora demonstradas resultam apenas da hipótese de que a matriz M de insumos do modelo fechado de Leontief ser indecomponível. O modelo, todavia, supõe algo mais: $M = A + G$ onde A é a matriz dos coeficientes técnicos e G a matriz do consumo de mão-de-obra. Pelo Axioma 2 do modelo fechado de Leontief, G possui uma linha com elementos todos positivos. Daí resulta o:

Teorema 5.9: Seja $M = A + G$ a matriz de insumos totais do modelo fechado de Leontief; $\hat{k}$ o multiplicador máximo factível do sistema de Von Neumann $\{M; I\}$. Então $I - \hat{k}A$ é não-singular com inversa não-negativa.

Demonstração: Seja p um sistema de preços competitivo para as trajetórias de Von Neumann. Então, pelo Teorema 5.5, $p = \hat{k}M' p > 0$. Como $M = A + G$, segue-se que $p = \hat{k}A' p + \hat{k}G' p$. Como p é positivo e G possui uma linha com termos todos positivos, $G' p > 0$. Logo $p > \hat{k}A' p$, ou seja, $(I - \hat{k}A')\, p > 0$. Segue-se, pelo Teorema 4.1, que $I - \hat{k}A'$ é não-singular com inversa não-negativa. Como a transposta da inversa é igual à inversa da transposta, $I - \hat{k}A$ é não-singular com inversa não-negativa.

5.3 Os teoremas de Frobenius

Como subproduto da análise das propriedades do modelo fechado de Leontief, obtêm-se os teoremas de Frobenius sobre autovalores de matrizes não-negativas.

Teorema 5.10: (teorema de Frobenius para matrizes indecomponíveis). Seja M uma matriz quadrada não-negativa indecomponível. Então M possui um autovalor positivo $\hat{s}$ (denominado raiz de Frobenius de M), tal que:

a) ao autovalor $\hat{s}$ corresponde um autovetor positivo $\hat{x}$ (denominado vetor de Frobenius de M), isto é, um vetor positivo $\hat{x}$ tal que $M\hat{x} = \hat{s}\hat{x}$;

b) o vetor de Frobenius de M é unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa;

c) se w é um autovalor real ou complexo de M, então $|w| \leq \hat{s}$;

d) se s é um autovalor de M ao qual corresponde um autovetor semipositivo x, então $s = \hat{s}$;

e) se k é um real positivo, $I - kM$ é não-singular com inversa não-negativa se e somente se $k\hat{s} < 1$.

Demonstração:

a, b) conseqüência imediata do Teorema 5.5, tomando-se $\hat{s} = 1/\hat{k}$;

c) seja w um autovalor real ou complexo de M e z um autovetor correspondente. Então $z \neq 0$ e $Mz = wz$. Segue-se que $M^t z = w^t z$. Pelo Teorema 5.8, a seqüência $\hat{k}^t M^t z = (\hat{s}^{-1} w)^t z$ é limitada. Isso exige $|w\hat{s}^{-1}| \leq 1$, ou seja, $|w| \leq \hat{s}$;

d) conseqüência imediata do Teorema 5.7; note-se que é impossível que M possua um autovalor nulo com autovetor não-negativo, pois, como toda coluna de M possui pelo menos um elemento positivo, $Mx \neq 0$ para todo x semipositivo;

e) conseqüência imediata do Teorema 5.2.

No caso geral, que abrange as matrizes decomponíveis, o teorema de Frobenius é menos conclusivo. É possível que a raiz de Frobenius seja nula, como no exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não se pode agora assegurar que o vetor de Frobenius seja positivo e unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa. No exemplo anterior (1; 0; 0), (0; 0; 1) e (1; 0; 1) são vetores de Frobenius. Pode-se apenas garantir que existem vetores de Frobenius semipositivos.

Teorema 5.11: Seja M uma matriz quadrada $n \times n$ não-negativa. Então M possui um autovalor não-negativo $\hat{s}$ (denominado raiz de Frobenius de M) tal que:

a) a $\hat{s}$ corresponde um autovetor semipositivo $\hat{x}$;
b) se w é um autovalor real ou complexo de M, então $|w| \leqslant \hat{s}$;
c) se k é um real positivo, para que $I\text{-}kM$ seja não-singular com inversa não-negativa é necessário e suficiente que $k\hat{s} < 1$.

Demonstração: Provemos o teorema por indução finita no número n de linhas e colunas da matriz. Para $n = 1$ o teorema é imediato: $M = [m_{11}]$ e a raiz de Frobenius será nula se $m_{11} = 0$, positiva se $m_{11} > 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para matrizes com menos de n linhas.

Se M é indecomponível, recaímos no teorema anterior. Se M é decomponível, é possível, por uma igual permutação de linhas e colunas, reapresentá-la na forma:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

onde M_{11} e M_{22} são matrizes quadradas de ordem inferior a n. Como $\det(M - rI) = \det(M_{11} - rI_1)\det(M_{22} - rI_2)$, os autovalores de M se obtêm reunindo os autovalores de M_{11} e M_{22}. Seja $\hat{s}_1$ a raiz de Frobenius de M_{11}, $\hat{s}_2$ a de M_{22}, as quais existem, pela hipótese de indução. Tomando $\hat{s} = \max\{\hat{s}_1 ; \hat{s}_2\}$, resulta, da hipótese de indução, que, se w é um autovalor qualquer de M, então $|w| \leqslant \hat{s}$. Suponhamos que $\hat{s}_1 \geqslant \hat{s}_2$. Então, pela hipótese de indução, existe x_1 semipositivo tal que $M_{11} x_1 = \hat{s}_1 x_1$. Fazendo $\hat{x} = (\hat{x}_1 ; 0)$, resulta $M\hat{x} = \hat{s}\hat{x}$, o que prova que $\hat{x}$ é vetor de Frobenius de M. Do mesmo modo, se $\hat{s}_2 > \hat{s}_1$, tomemos x_2 semipositivo tal que $M_{22}x_2 = \hat{s}_2 x_2$. Fazendo $\hat{x} = (0; x_2)$, resulta $M\hat{x} = \hat{s}\hat{x}$. Com isso ficam provados os itens a e b do teorema.

Para provar o item c notemos, em primeiro lugar, que $I - kM$ será não-singular com inversa não-negativa se e somente se $I_1 - kM_{11}$ e $I_2 - kM_{22}$ o forem. Isso decorre do Teorema 4.1. Se essas duas matrizes forem não-singulares com inversas não-negativas, existirão x_1 e x_2 não-negativos tais que $(I_1 - kM_{11})x_1 > 0$

e $(I_2 - kM_{22})\, x_2 > 0$. Multiplicando-se x_1 por uma constante apropriada, consegue-se $(I_1 - kM_{11})\, x_1 - kM_{12}\, x_2 > 0$. Logo:

$$(I - kM)\, x = \begin{bmatrix} I_1 - kM_{11} & -kM_{12} \\ 0 & I_2 - kM_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0.$$

De onde se segue, pelo Teorema 4.1, que $(I - kM)$ é não-singular com inversa não-negativa. Do mesmo modo se verifica que, se existe um vetor não-negativo $x = (x_1 ; x_2)$ tal que $(I - kM)\, x > 0$, então $(I - kM_{11})\, x_1 > 0$ e $(I - kM_{22})\, x_2 > 0$.

Pela hipótese de indução, $I - kM_{11}$ e $I - kM_{22}$ serão ambas não-singulares com inversa não-negativa se e somente se as respectivas raízes de Frobenius forem tais que $k\hat{s}_1 < 1$ e $k\hat{s}_2 < 1$. Como $\hat{s} = \max \{ \hat{s}_1 ; \hat{s}_2 \}$, fica provado o teorema.

Como corolário importante temos o:

Teorema 5.12: Seja M uma matriz quadrada não-negativa. Então para que I-M seja não-singular com inversa não-negativa, é necessário e suficiente que a raiz de Frobenius de M seja menor do que 1.

Demonstração: Basta tomar $k = 1$ no Teorema 5.11, *c*.

5.4 Sistemas primitivos e cíclicos

Voltemos às matrizes quadradas não-negativas indecomponíveis. Uma matriz M do gênero diz-se cíclica quando para todo inteiro t, M^t possui pelo menos um elemento igual a zero; primitiva quando existe um inteiro T tal que $M^T > 0$. A título de exemplo, a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é cíclica, pois:

$$M^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ para t par e $M^t = M$ para t ímpar. Já a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é primitiva, pois

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 5.13: Seja *M* uma matriz quadrada primitiva. Se $M^T > 0$, então $M^t > 0$ para todo $t > T$.

Demonstração: Basta provar que M^{T+1} é positiva e raciocinar por indução finita. Para isso é suficiente notar que $M^{T+1} = M^T M$, que toda linha de M^T possui termos todos positivos e toda coluna de *M* pelo menos um elemento positivo, já que *M* é indecomponível.

Teorema 5.14: Seja *M* uma matriz quadrada primitiva. Então se $X \geqslant M$ é uma matriz quadrada de mesma ordem, *X* é primitiva.

Demonstração: Basta notar que $X^t \geqslant M^t$ para todo inteiro positivo *t*.

Mostraremos a seguir que a matriz *M* de insumos do modelo fechado de Leontief é primitiva. Para tanto precisamos de alguns lemas.

Lema 5.1: Seja *M* uma matriz quadrada *n x n*, não-negativa e indecomponível. Então:

$$I + M + M^2 + \dots + M^{n-1} > 0$$

Demonstração: Basta provar que para todo vetor semipositivo *x* se tem: $(I + M + \dots + M^{n-1})\, x > 0$. Para tanto, notemos que o conjunto $\{ x, Mx, \dots \dots M^{n-1}x, M^n x \}$ de $(n + 1)$ vetores *n*-dimensionais é linearmente dependente. Portanto, como $x \neq 0$, algum deles é combinação linear dos precedentes. Assim, para algum inteiro *p* tal que $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$M^p x = a_0\, x + a_1\, Mx + \dots + a_{p-1} M^{p-1} x$$

Seja $y = (I + M + \dots + M^{p-1})x$. Então *y* é semipositivo e:

$$My = a_0\, x + (a_1 + 1)\, Mx + \dots + (a_{p-1} + 1)\, M^{p-1}x)$$

Tomando $s = \max\{ a_0, a_1 + 1, \dots, a_{p+1} + \}$, resulta $My \leqslant sy$

Logo, pelo Teorema 4.6:

$$\{0 < y \leqslant (I + M + \dots + M^{n-1})x\}$$

Lema 5.2: Seja *M* uma matriz quadrada não-negativa e indecomponível com *n* linhas e *n* colunas; $e_1, e_2, \dots, e_n$ os unitários do R^n (isto é, os vetores com uma única componente igual a 1 e as demais iguais a zero). Então, a cada e_i corresponde um inteiro P_i tal que $1 \leqslant p_i \leqslant n$ e tal que a primeira coordenada de $M^{p_i} e_i$ seja positiva.

Demonstração: Me_i é semipositivo, pois *M* é indecomponível. Logo, pelo lema anterior, $(M + M^2 + \dots + M^n)\, e_i = (I + M + \dots + M^{n-1})\, Me_i > 0$. Isso exige que para algum inteiro p_i tal que $1 \leqslant p_i \leqslant n$ a primeira coordenada de $M^{p_i} e_i$ seja positiva.

Lema 5.3: Sejam B e C matrizes quadradas não-negativas $n \times n$, sendo C uma matriz diagonal, isto é, $C = [c_{ij}]$ com $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Então, se $B + C$ é indecomponível, B também é indecomponível.

Demonstração: Pelo Teorema 4.6 basta provar que se x é um vetor semipositivo e s um número real tais que $B x \leqslant sx$, então $x > 0$. Com efeito, sejam x semipositivo e s real nessas condições. Como C é uma matriz diagonal, $Cx \leqslant rx$ para algum r positivo. Logo $(B + C) x \leqslant (r + s) x$. Pelo Teorema 4.6 teremos $x > 0$, pois $B + C$ é indecomponível.

Lema 5.4: Seja $M = B + C$, sendo B e C matrizes quadradas não-negativas, com $C = [c_{ij}]$ tal que $c_{11} = 1$ e os demais $c_{ij} = 0$. Então:

$$M^{n+p} \geqslant (I + B + \ldots + B^{n-1})CB^p$$

Demonstração: Notemos que $C^r = C$ para todo inteiro positivo. Isto posto, por indução finita se prova imediatamente que:

$$M^n \geqslant (I + B + \ldots + B^{n-1})C$$

Com efeito, a desigualdade se verifica trivialmente para $n = 1$, pois $M \geqslant C$. Suponhamos:

$$M^{n-1} \geqslant (I + B + \ldots + B^{n-2})C$$

Segue-se que:

$$M^n = (B + C) M^{n-1} \geqslant (I + B + \ldots + B^{n-1}) C$$

Notando que $M^{n+p} = M^n M^p \geqslant M^n B^p$ fica provado o lema.

Lema 5.5: Seja $M = [m_{ij}]$ uma matriz quadrada $n \times n$, não-negativa e indecomponível, tal que $m_{11} = 1$. Então $M^{2n} > 0$.

Demonstração: Basta demonstrar que, para todos os unitários $e_1, e_2, \ldots, e_n$ do R^n se tem $M^{2n}e_i > 0$. Com efeito, façamos $M = B + C$ onde $C = [c_{ij}]$ como $c_{11} = 1$ e com os demais $c_{ij} = 0$. Pelo Lema 5.3, B é indecomponível. Logo, pelo Lema 5.2 existe um inteiro p_i tal que $1 \leqslant p_i \leqslant n$ e tal que $B^{p_i}e_i$ tenha a primeira coordenada positiva. Portanto, $CB^{p_i}e_i$ é semipositivo. Pelo Lema 5.1, $I + B + \ldots + B^{n-1} > 0$. Logo, pelo Lema 5.4:

$$M^{n+p_i} e_i > 0$$

Como M é indecomponível, toda linha de M possui pelo menos um elemento positivo, o que implica $M^t x > 0$ para todo $x > 0$ e para todo inteiro não-negativo t. Como $1 \leqslant p_i \leqslant n$, resulta $M^{2n}e_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 5.15: Seja M uma matriz quadrada não-negativa e indecomponível com pelo menos um elemento positivo na diagonal principal. Então $M = [m_{ij}]$ é primitiva.

Demonstração: Podemos supor $m_{11} > 0$. Pelo Lema 5.5 resulta:

$$((1/m_{11})M)^{2n} > 0$$

Logo $M^{2n} > 0$, o que prova que M é primitiva.

Estamos agora em condições de provar o

Teorema 5.16: A matriz M de insumos do modelo fechado de Leontief é primitiva.

Demonstração: Pela equação (5.2) tem-se $M = A + G$ onde A e G são não-negativas. Pelo Axioma 3 do modelo e pelo Teorema 5.1, M é indecomponível. Pelo Axioma 2, G possui uma linha com termos todos positivos. Logo M possui pelo menos um elemento positivo na diagonal principal. Pelo Teorema 5.15, M é primitiva.

Demonstraremos agora o teorema do limite expresso pelas equações (5.7) e (5.8). Para isso precisamos inicialmente do:

Lema 5.6: Seja M uma matriz quadrada primitiva tal que $M^T > 0$, sendo T inteiro positivo; $k = 1/\hat{s}$ o inverso da raiz de Frobenius de M; p um vetor de Frobenius da transposta M'; r_q uma seqüência de inteiros positivos tal que $r_q > T$ para todo índice q. Admitamos que, para o vetor semipositivo y:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{r_q} y = v$$

Então $(p, v) = (p, y)$ e $v > 0$.

Demonstração: Como p é vetor de Frobenius de M', $(\hat{k}M')^t p =$ para todo inteiro positivo t. Logo $(p, (\hat{k}M)^t y) = ((\hat{k}M')^t p, y) = (p, y)$ para todo t. Daí se segue imediatamente que $(p, v) = (p, y)$.

Seja $t_q = r_q - T$. A seqüência semipositiva $(\hat{k}M)^{t_q} y$ é limitada pois p é positivo (Teorema 5.10) e $(p, (\hat{k}M)^t y) = (p, y)$ para todo inteiro positivo t. Logo admite uma subseqüência convergente para o vetor semipositivo w. Como $r_q =$
$= T + t_q$ resulta:

$$v = (\hat{k}M)^T w > 0$$

Estamos agora em condições de provar o:

Teorema 5.17: Seja M uma matriz quadrada primitiva; $\hat{k} = 1/\hat{s}$ o inverso de sua raiz de Frobenius. Então, para qualquer y semipositivo:

$$\lim_{t \to \infty} (\hat{k}M)^t y = \hat{x}$$

onde $\hat{x}$ é vetor de Frobenius de M.

Demonstração: Seja p um vetor de Frobenius da matriz transposta M'; $\hat{x}$ o vetor de Frobenius de M tal que $(p, \hat{x}) = (p, y)$. A seqüência semipositiva $(\hat{k}M)^t y$ é limitada, pois $p > 0$ e $(p, (\hat{k}M)^t y) = (p, y)$ para todo inteiro semipositivo t. Assim, para provar que $(\hat{k}M)^t y$ converge para $\hat{x}$, basta provar que toda subseqüência convergente de $(\hat{k}M)^t y$ tende para $\hat{x}$.

Com efeito, seja J_q uma seqüência crescente de números inteiros tal que:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{j_q} y = v$$

Dessa seqüência é possível extrair uma subseqüência t_q de inteiros positivos tal que $t_{q+1} - t_q > T$ para todo índice q, T sendo um inteiro positivo tal que $M^T > 0$, cuja existência é assegurada pelo fato de M ser primitiva. É imediato que:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{t_q} y = v$$

Façamos $r_q = t_{q+1} - t_q$. Aplicando $(\hat{k}M)^{r_q}$ à relação anterior, resulta:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{t_q + r_q} y = \lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{r_q} v$$

ou, como

$$t_q + r_q = t_{q+1}$$

e como:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{t_{q+1}} y = v$$

vem:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{r_q} v = v$$

Como $\hat{x}$ é vetor de Frobenius de M, $(\hat{k}M)^{r_q} \hat{x} = \hat{x}$. Segue-se que, para todo número real s:

$$\lim_{q \to \infty} (\hat{k}M)^{r_q} (\hat{x} - sv) = \hat{x} - sv$$

Para demonstrar o teorema basta mostrar que $v = \hat{x}$, isto é, que toda subseqüência convergente de $(\hat{k}M)^t y$ tende para $\hat{x}$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $v \neq \hat{x}$. Pelo Lema 5.6, $(p, v) = (p, \hat{y})$. Como $\hat{x}$ é o vetor de Frobenius de M

tal que $(p, \hat{x}) = (p, y)$, segue-se que $(p, v) = (p, \hat{x})$. Logo, se $v \neq \hat{x}$, v é não-proporcional a $\hat{x}$. Como $\hat{x} > 0$ (Teorema 5.10), conclui-se que, para algum real positivo s, o vetor $\hat{x}$-sv é semipositivo com pelo menos uma coordenada nula. Mas, pelo Lema 5.6, o segundo membro do limite anterior deve ser positivo, isto é, $\hat{x}$-$sv > 0$. Isso completa a demonstração do teorema.

Este teorema demonstra a fórmula (5.7) do modelo fechado de Leontief. Para obter a fórmula (5.8) basta usar o mesmo teorema, lembrando que p é vetor de Frobenius de M'.

5.5 Marx e o problema da transformação

Marx conclui, no Livro III de *O capital*, que preços e valores não coincidem numa economia capitalista. Isso porque a composição orgânica do capital não é a mesma em todos os setores e as taxas de lucro tendem a se igualar nos vários ramos de atividade. Essa conclusão o leva a tratar do problema da transformação, que por seu turno compreende dois subproblemas: a) como determinar a taxa de lucro a partir da taxa de mais-valia; b) como determinar os preços a partir dos valores. A maneira pela qual Marx enfrenta o problema está longe de ser satisfatória. Mas é possível dissecá-lo com toda a precisão usando o instrumental do modelo fechado de Leontief. Esse modelo fornece uma descrição multissetorial rigorosa do sistema descrito por Marx, onde só há produção simples. Supõe-se, em toda a análise, que a economia se reproduza proporcionalmente numa trajetória de Von Neumann.

O tratamento correto do problema, devido a Morishima e Seton, estabelece duas contabilidades separadas, uma em valores, outra em preços. Os valores marxistas são definidos como o tempo socialmente necessário para a produção das diversas mercadorias. Esse tempo se compõe do diretamente exigido na produção de cada bem mais o indiretamente envolvido nas matérias-primas que integram a produção de cada bem. Usando a notação do subitem 5.1, os valores dos diversos bens indicam pelo vetor v tal que:

$$v = A' v + c \tag{5.10}$$

ou seja:

$$v = (I - A')^{-1} c \tag{5.11}$$

Pelos axiomas do modelo fechado de Leontief $(I - A)$ é não-singular com inversa não-negativa, e o vetor de coeficientes de mão-de-obra $c > 0$. Assim, por essas duas equações, os valores são positivos, sendo $v \geqslant c$.

Assim, no exemplo numérico do subitem 5.1, em que $c = (0{,}1; 0{,}1; 0{,}2)$ e:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

os valores marxistas se expressam pelo vetor:

$$v = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,3 \\ -0,4 & 1,0 & -0,1 \\ -0,3 & -0,1 & 1,0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,318182 \\ 0,227273 \\ 0,318182 \end{bmatrix}$$

A equação (5.11) é formalmente idêntica à equação (4.7) de determinação dos preços no modelo aberto de Leontief, mas seu sentido é diferente. No modelo aberto de Leontief a produção é não-capitalista, tendo a mão-de-obra como único fator primário de produção, levando os preços a se determinarem de acordo com a teoria do valor trabalho. Estamos agora no modelo fechado de Leontief onde os preços são um vetor de Frobenius da matriz $M' = A' + G'$. A equação (5.11) não trata de preços, mas de valores tais como definidos por Marx.

Na linha marxista, decomponhamos os valores em três parcelas, o capital constante, o capital variável e a mais-valia. Na discussão que se segue, cada uma dessas parcelas será indicada por um vetor, cada componente se referindo a um produto da economia. O capital constante é o valor $A'v$ das matérias-primas empregadas. O capital variável, o valor $G'v$ do trabalho utilizado, isto é, tendo em vista a equação (5.4):

$$G'v = (v, m)\, c \tag{5.12}$$

A mais-valia é o excesso $v - A'v - G'v = (I - A' - G')v$ dos valores sobre os capitais constantes e variáveis. Tendo em vista as equações (5.10) e (5.12), resulta:

$$(I - A' - G')v = (1 - (v,m))c \tag{5.13}$$

Comparando-se as duas últimas equações, conclui-se que a relação entre mais-valia e capital variável é a mesma em todos os setores da economia. Isso nos permite, como Marx, definir a taxa de mais-valia (ou taxa de exploração):

$$e = \frac{1 - (v,m)}{(v,m)} \tag{5.14}$$

No modelo, o vetor m é a cesta de mercadorias pela qual se adquire uma hora de trabalho. Logo (v,m) é o número de horas de trabalho necessário à produção dessa cesta. Assim, a equação (5.14) descreve a gênese da mais-valia. Ela é o resultado de técnicas de produção capitalistas que permitem que uma hora de trabalho se compre com o que pode ser produzido com menos de uma hora de esforço humano.

Das equações (5.13) e (5.14) deduzem-se as seguintes expressões para os vetores capital-variável e mais-valia:

$$G'v = \frac{1}{1+e} c \tag{5.15}$$

$$(I-A'-G')v = \frac{e}{1+e} c \tag{5.16}$$

que mostram que, em qualquer setor da economia, o empregado trabalha uma fração $1/(1+e)$ da jornada de trabalho para si, a fração complementar $e/(1+e)$ para o patrão.

No exemplo numérico do subitem 5.1, uma hora de trabalho se compra pela cesta de mercadorias (1; 2; 0) de valor (v,m) = 0,318182 + 2 x 0,227273 = = 0,772728. Assim, pela fórmula (5.14), a taxa de mais-valia é igual a 0,294116. O quadro a seguir mostra a decomposição dos valores unitários entre capital constante $(A'v)$, capital variável $(G'v)$ e mais-valia $(v-A'v-G'v)$:

Produto	1	2	3
Capital constante	0,218182	0,127273	0,118182
Capital variável	0,077273	0,077273	0,154546
Mais-valia	0,022727	0,022727	0,045454
Valor	0,318182	0,227273	0,318182
Composição orgânica do capital	2,832529	1,647061	0,764706
Taxa de mais-valia	0,294116	0,294116	0,294116

Em cada setor, a composição orgânica do capital é a relação entre o capital constante e o variável. Supõe-se que a economia se esteja reproduzindo segundo uma trajetória de Von Neumann. Numa tal trajetória, as produções dos diversos setores se descrevem por um vetor de Frobenius $\hat{x}$ da matriz M = A + G. Assim, para o conjunto da economia, o capital constante é igual a $(A'v, \hat{x})$ o capital variável $(G'v, \hat{x})$ e portanto a composição orgânica média do capital é dada por:

$$k = \frac{(A'v, \hat{x})}{(G'v, \hat{x})} \tag{5.17}$$

Como o vetor de Frobenius é unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa, a sua escolha é irrelevante para a determinação de k. Note-se que pela equação (5.10) $A'v = v-c$ e pela equação (5.15) $G'v = (1+e)^{-1} c$. Assim, a equação (5.17) equivale a:

$$(1+k+e)(c,\hat{x}) = (1+e)(v,\hat{x}) \tag{5.18}$$

Em nosso exemplo numérico tomemos $\hat{x}$ = (1,000000; 1,445565; 0,817246) que, como se viu no subitem 5.1, é vetor de Frobenius de M = A + G. Multiplicando-se as colunas do quadro anterior pelas componentes de $\hat{x}$, obtêm-se os seguintes totais:

Capital constante total	0,498747
Capital variável total	0,315278
Mais-valia total	0,092727
Valor total	0,906752

A composição orgânica média do capital é dada por:

$$K = 0{,}498747/0{,}315278 = 1{,}581928.$$

Vejamos agora a fórmula de conversão de mais-valia em taxa de lucro. Designando esta última por *r*, já sabemos que *(1 + r)* é o inverso da raiz de Frobenius de $M = A + G$. Logo:

$$\hat{x} = (1 + r)(A + G)\hat{x}$$

Multiplicando escalarmente por *v*:

$$(v, \hat{x}) = (1 + r)(v, (A + G)\hat{x}) = (1 + r)((A' + G')v, \hat{x})$$

pelas equações (5.17) e (5.15):

Logo:

$$(1+e)(v,\hat{x}) = (1+r)(1+k)(c,\hat{x})$$

Comparando esta equação com a relação (5.18):

$$(1+r)(1+k) = 1+k+e$$

e, portanto:

$$r = \frac{e}{1+k} \tag{5.19}$$

que é a famosa fórmula de Morishima-Seton. Ela foi empregada por Marx, embora deduzida imprecisamente. Em nosso exemplo numérico em que $e = 0{,}294116$ e $k = 1{,}581928$, encontra-se $r = 0{,}113913$, exatamente a taxa de lucro de Von Neumann indicada no subitem 5.1.

Essa fórmula corrobora duas das principais afirmações de Marx: a) a mais-valia é a origem do lucro, no sentido de que uma economia só pode conseguir uma taxa de lucro positivo se uma hora de trabalho puder ser comprada pelo produto de menos de uma hora de trabalho; b) como a composição orgânica média do capital é positiva, a taxa de lucro é inferior à taxa de mais-valia.

Vejamos agora como converter valores em preços. Como se sabe, o sistema de preços p é um vetor de Frobenius de $M' = A' + G'$, ou seja:

$$p = (1 + r)(A' + G')p$$

Pela equação (5.4) $G'p = (p,m)c$ e pela equação (5.10) $c = (I - A')v$. Logo:

$$(I - (1 + r)A')p = (1 + r)(p, m)(I - A')v. \qquad (5.20)$$

Como o vetor de Frobenius p só é determinado a menos de uma constante multiplicativa, é preciso submetê-lo a um critério de normalização. Esse critério será expresso pela equação:

$$(p, \hat{x}) = (v, \hat{x}) \qquad (5.21)$$

a qual exige que a produção total da economia tenha a mesma avaliação no sistema de preços e de valores marxistas.

Na equação (5.20) façamos $(1 + r)(p, m) = \lambda$. Pelo Teorema 5.9 a matriz $I - (1 + r)A'$ é não-singular com inversa não-negativa. Logo:

$$p = \lambda\,(I - (1 + r)A')^{-1}(I - A')v$$

ou, tendo em vista a equação (5.21):

$$p = \frac{(v, \hat{x})}{((I - (1 + r)A')^{-1}(I - A')v, \hat{x})}\,(I - (1 + r)A')^{-1}(I - A')v \qquad (5.22)$$

fórmula que permite a conversão de valores em preços. Em três casos pode-se assegurar que valores e preços coincidem:

a) quando a taxa de mais-valia é igual a zero;

b) quando o capital constante é igual a zero, isto é, quando o capital empatado na produção é o fundo de salários;

c) quando a composição orgânica do capital é a mesma em todos os setores da economia.

No primeiro caso $e = 0$ e, portanto, pela fórmula de Morishima-Seton, $r = 0$. No segundo caso, $A = 0$. Nessas duas hipóteses a igualdade $p = v$ resulta imediatamente da fórmula (5.22).

No terceiro caso $A'v = kG'v$, k indicando a composição orgânica do capital comum a todos os setores. Logo, pela equação (5.4):

$$A'v = kG'v = k(v, m)c$$

ou, pela equação (5.14):

$$A'v = \frac{k}{1+e} c.$$

Tendo em vista a equação (5.15):

$$(A' + G')v = \frac{1+k}{1+e} c$$

Pela equação (5.10), v = A' v + c. Logo:

$$v = \frac{1+k+e}{1+e} c$$

Pela fórmula de transformação (5.19), $1 + k + e = (1 + r)(1 + k)$. Logo:

$$v = (1 + r)(A' + G')v$$

o que prova que *v* é vetor de Frobenius de *A' + G'* e portanto p = v.

Nosso exemplo numérico não se enquadra em nenhum dos três casos e a fórmula (5.22) fornece p = (Q,327342; 0,226446; 0,308346). A contabilidade em preços desdobra *p* em três componentes: o custo *A'p* das matérias-primas, os salários *G'p* e o lucro *r(A'+G')p*. No exemplo, têm-se:

Produto	1	2	3
Custo das matérias-primas	0,215843	0,125265	0,120847
Salários	0,078023	0,078023	0,156047
Lucro	0,033476	0,023158	0,031542
Preços	0,327342	0,226446	0,308436
Taxa de lucro	0,113913	0,113913	0,113913

Multiplicando as colunas deste quadro pelas componentes do vetor de Frobenius $\hat{x}$ = (1,000000; 1,445565; 0,817246) da matriz M = A + G, obtêm-se os totais para a economia:

Custo total das matérias-primas	0,495683
Total de salários	0,318339
Lucro total	0,092730
Preço da produção total	0,906752

Nas duas contabilidades, em valores e em preços, a avaliação da produção total é a mesma. Esse é um resultado tautológico, já que o sistema de preços foi normalizado pela equação (5.21). Um resultado importante, enunciado por Marx, é que o total das mais-valias é igual ao total dos lucros. Para isso basta lembrar que o vetor mais-valia é $(I - A' - G')v$ e que, portanto, o total de mais-valias é expresso por:

$$L = ((I - A' - G')v, \hat{x}) = (v, (I - A - G)\hat{x}).$$

Como $\hat{x}$ é vetor de Frobenius de $A + G$, $\hat{x} = (1 + r)(A + G)\hat{x}$ e portanto:

$$L = \frac{r}{1+r}(v, \hat{x}) = \frac{r}{1+r}(p, \hat{x})$$

e como

$$L = (p, r(A + G)\hat{x}) = (r(A' + G')p, \hat{x}).$$

O último membro desta equação é o total dos lucros, igual portanto ao total das mais-valias.

Por outro lado o total das matérias-primas na contabilidade em preços não é necessariamente igual ao total do capital constante na contabilidade em valores. Do mesmo modo, o total de salários não necessariamente coincide com o total do capital variável. No exemplo numérico apresentado, as diferenças, embora pequenas, podem ser percebidas. Assim, a relação média lucro/salários $e' = 0{,}291293$ não é a mesma coisa que a taxa de mais-valia e a relação matérias-primas/salários $k' = 1{,}557092$ não é sinônimo de composição orgânica do capital. Pode-se demonstrar facilmente que $r = e'/(1 + k')$, fórmula parecida com a de Morishima-Seton, mas que não estabelece qualquer ligação entre os parâmetros das contabilidades em valores e preços.

Dentro do sistema dual de contas, algumas fórmulas marxistas devem ser corrigidas. O famoso método de calcular a taxa de lucro dividindo-se a mais-valia pelo capital total (constante mais variável) é válido para o conjunto, mas não para cada setor da economia. Em nosso exemplo numérico, a relação entre mais-valia e capital é igual a 0,076922 no primeiro setor, 0,111109 no segundo, 0,166664 no terceiro, e só na média igual à taxa de lucro $r = 0{,}113913$. Também não é correto afirmar que o preço de um bem ultrapassa seu valor se e somente se a sua composição orgânica do capital excede a média da economia. Em nosso exercício numérico, a composição orgânica do capital para o segundo bem é igual a 1,647057, superior à média, mas seu preço é menor que seu valor marxista.

Um resultado à primeira vista impressionante é que os preços podem ser deduzidos dos valores pela seqüência de iterações:

$$p_1 = (1 + r)(A' + G')v$$
$$p_2 = (1 + r)(A' + G')p_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_t = (1 + r)(A' + G')p_{t-1}$$

a seqüência p_t convergindo para o sistema de preços p. Essas iterações têm a seguinte interpretação: em primeira aproximação os preços se calculam multiplicando por $1 + r$ a soma dos capitais constante e variável; em segunda aproximação multiplicando por $1 + r$ o que seria a soma dos capitais constante e variável se os valores se exprimissem por p_1 e assim por diante. Em nosso exemplo numérico teríamos:

Iteração	Produto 1	Produto 2	Produto 3
v	0,318182	0,227223	0,318182
p_1	0,329111	0,227846	0,303795
p_2	0,327121	0,225601	0,310201
p_3	0,327318	0,226798	0,307842
p_4	0,327373	0,226320	0,308619
p_5	0,327326	0,226848	0,308383
p_6	0,327348	0,226443	0,308449
...	...	...	...
p	0,327342	0,226446	0,308346

Na realidade o resultado deriva trivialmente do Teorema 5.17. A seqüência construída expressa-se por:

$$p_t = (1 + r)^t (A' + G')^t v.$$

Pelo Teorema 5.16 a matriz $A' + G'$ é primitiva; $1 + r$ é o inverso de sua raiz de Frobenius; v é um vetor positivo. Logo, pelo Teorema 5.17. p_t converge para um vetor de Frobenius p de $A' + G'$ tal que:

$$(p, \hat{x}) = (v, \hat{x})$$

$\hat{x}$ indicando um vetor de Frobenius da matriz $A + G$. Pela equação (5.21), esse vetor p é exatamente o sistema de preços do modelo. Se a seqüência de iterações, ao invés de partir do sistema v de valores marxistas, partisse de qualquer vetor semipositivo y tal que $(y, \hat{x}) = (v, \hat{x})$, chegar-se-ia ao mesmo resultado: p_t convergiria para p.

5.6 Vicissitudes da contabilidade em valores marxistas

Uma proposição fundamental da teoria do crescimento afirma que uma economia só se expande quando sustenta um excedente da produção sobre o consumo. Marx identificou na mais-valia a origem desse excedente: as regras de funcionamento do capitalismo faziam que uma hora de trabalho se comprasse por menos do que aquilo que o trabalhador produz em uma hora. Assim, a mais-valia seria a fonte comum do excedente investido, do crescimento e do lucro.

Tal como apresentado no subitem 5.5, o problema da transformação formaliza a tese marxista para uma economia fechada de Leontief. Infelizmente os pressupostos do modelo são altamente restritivos: produção simples (o que exclui os bens duráveis de capital) e uma única técnica para a produção de cada bem. É interessante examinar que dificuldades surgem quando se tenta estender a contabilidade em valores para o modelo geral de Von Neumann.

Para tanto designemos por $\{ x + hm; y \}$ um ponto genérico do cone C de Von Neumann com n bens. Esse ponto indica um processo que, no início do período, consome o vetor x de matérias-primas e h horas de trabalho, cada uma das quais comprada pela cesta de mercadorias n-dimensional m; e que, no fim do período, produz o vetor n-dimensional y. A cesta m pela qual se compra uma hora de trabalho é a mesma para todos os pontos de C. O sistema se admite irredutível e tal que $h = 0$ implique $y = 0$: nada se pode produzir sem mão-de-obra. O multiplicador máximo factível será designado por $1 + r$, o que significa que r é a taxa de lucro das trajetórias de Von Neumann.

Como no subitem 5.5, interessar-nos-emos apenas por essas trajetórias geométricas de crescimento à taxa r. A possibilidade de associar a cada uma delas uma contabilidade em preços já foi demonstrada no item 3. A todo vetor de Von Neumann $\{ \hat{x} + \hat{h}m; \hat{y} \}$ de C é possível associar um sistema de preços p (n-dimensional semipositivo) tal que:

$$(p, \hat{y}) = (1 + r)(p, \hat{x} + \hat{h}m) \tag{5.23}$$

$$(p, y) \leqslant (1 + r)(p, x + hm) \tag{5.24}$$

para todo $\{ x + hm, y \} \in C$.

Um sistema de valores marxistas associado ao vetor de Von Neumann $\{ \hat{x} + \hat{h}m; \hat{y} \}$ é um vetor semipositivo v tal que:

$$(v, \hat{y}) = (v, \hat{x}) + \hat{h} \tag{5.25}$$

$$(v, y) \leqslant (v, x) + h \tag{5.26}$$

para todo $\{x + hm; y\} \epsilon\ C$

$$(v, \hat{y} - (1 + r)(\hat{x} + \hat{h}m)) = 0 \tag{5.27}$$

$$(v, m) > 0. \tag{5.28}$$

A equação (5.25) afirma que o número de horas de trabalho cristalizadas na produção da trajetória de Von Neumann é igual ao número de horas de trabalho cristalizadas nas matérias-primas mais as diretamente empregadas na produção. Essas horas de trabalho devem representar tempo socialmente necessário no sentido de Marx, o que justifica a desigualdade (5.26): nenhum processo de produção conhecido permite que o valor-trabalho do que se produz exceda o valor-trabalho das matérias-primas consumidas mais o tempo de trabalho diretamente empregado na obtenção dos produtos. A equação (5.27) exige que o excedente de produção não utilizado numa trajetória de Von Neumann tenha valor marxista nulo. Finalmente, a desigualdade (5.28) estipula que o valor da cesta de mercadorias pela qual se compra uma hora de trabalho deve ser positivo.

É interessante particularizar as relações (5.25) à (5.27) para os sistemas matriciais de Von Neumann $\{A + G; B\}$, A indicando a matriz dos consumos das matérias-primas, $G = [m_i\ c_j]$ a matriz dos consumos dos trabalhadores, B a matriz dos produtos. No caso, o cone de Von Neumann é

$$C = \Big\{\{(A + G)\, z; Bz\} \mid z \geqslant 0\Big\} = \Big\{\{Az + (c, z)\, m; Bz\} \mid z \geqslant 0\Big\}$$

o que implica $x = Az$, $h = (c, z)$, $y = Bz$. Um vetor semipositivo v tal que $(v, m) > 0$ é um sistema de valores marxistas associado ao vetor de Von Neumann $\{(A + G)\, \hat{z}; B\hat{z}\}$ se e somente se:

$$(B'v, \hat{z}) = (A'v, \hat{z}) + c \tag{5.29}$$

$$B'v \leqslant A'v + c \tag{5.30}$$

$$(v, B\hat{z} - (1 + r)(A + G)\, \hat{z}) = 0 \tag{5.31}$$

A última equação corresponde à igualdade (5.25) tomando-se $\hat{y} = B\hat{z}$ e $\hat{x} + \hat{h}m = A\hat{z} + (c, \hat{z})\, m = (A + G)\, z$. A desigualdade (5.26) traduz-se no caso por $(v, Bz) \leqslant (v, Az) + (c, z)$ para todo $z \geqslant 0$, ou, o que é o mesmo, por $(B'v, z) \leqslant$ $\leqslant (A'v + c, z)$ para todo $z \geqslant 0$. Isso equivale à inequação (5.30). Do mesmo modo se estabelece a correspondência entre as equações (5.25) e (5.29). Combinando-se as relações (5.29) e (5.30), conclui-se que as componentes de $B'v - A'v - c$ relativas aos processos básicos efetivamente utilizados na trajetória de Von Neumann são todas nulas.

Voltando ao caso geral, se ao vetor de Von Neumann $\{\hat{x} + \hat{h}m; \hat{y}\}$ do cone C for possível associar um sistema v de valores marxistas, o problema da transformação se resolve em termos não muito diferentes dos apresentados para o modelo fechado de Leontief. Temos assim:

Capital constante: $(v, \hat{x})$

Capital variável: $\hat{h}(v, m)$

Composição orgânica média do capital: $k = \dfrac{(v, \hat{x})}{\hat{h}(v, m)}$

Capital total (constante mais variável): $K = (v, \hat{x}) + \hat{h}(v, m) = (1 + k)\hat{h}(v, m)$

Mais-valia total: $L = (v, \hat{y}) - K = (v, \hat{y}) - (v, \hat{x}) - \hat{h}(v, m) = (v, \hat{y}) - (1 + k)\hat{h}(v, m)$

Tendo em vista a equação (5.25):

$$L = \hat{h}(1 - (v, m))$$

Daí se segue que a taxa de mais-valia *e* se expressa por:

$$e = \frac{1 - (v, m)}{(v, m)}$$

fórmula idêntica à equação (5.14) e que permite exprimir os totais do capital-variável e da mais-valia por:

$$\hat{h}(v, m) \doteq \frac{\hat{h}}{1 + e} \qquad (5.32)$$

$$L = \frac{\hat{h}e}{1 + e} \qquad (5.33)$$

Para obter a fórmula de Morishima-Seton, reescrevamos a equação (5.27) na forma:

$$r(v, \hat{x} + \hat{h}m) = (v, \hat{y}) - (v, \hat{x}) - \hat{h}(v, m)$$

O primeiro membro é a taxa de lucro *r* vezes o capital total *K*, igual portanto a $r(1 + k)\hat{h}(v, m)$. O segundo membro é a mais-valia total *L*. Entrando com as fórmulas (5.32) e (5.33), obtém-se a relação marxista:

$$r = \frac{e}{1 + k} \qquad (5.34)$$

Como o cone de Von Neumann *C* é irredutível, $\hat{y} > 0$. Como valores e preços são semipositivos, estes últimos podem ser normalizados de modo que:

$$(p, \hat{y}) = (v, \hat{y}) \qquad (5,35)$$

ou seja, igualando-se a avaliação da produção total nas duas contabilidades, a de valores marxistas e a de preços. Com essa normalização, é fácil provar que o total

L de mais-valias é igual ao total P de lucros. Com efeito, este último é expresso por:

$$P = r\,(p, \hat{x} + \hat{h}m) = \frac{r}{1+r}\,(p, \hat{y}) = \frac{r}{1+r}\,(v, \hat{y}).$$

Entrando com a equação (5.27):

$$P = r\,(v, \hat{x} + \hat{h}m) = (v, \hat{y}) - (v, \hat{x}) - \hat{h}\,(v, m) = L.$$

Resta uma questão fundamental e que até agora não foi abordada: a possibilidade associar valores marxistas a um vetor de Von Neumann.

No caso de uma economia estacionária (r = 0), esse problema de existência resolve-se facilmente desde que se introduza uma hipótese complementar muito plausível e que diz que a economia seria capaz de crescer se os trabalhadores vivessem de brisa, isto é, se m fosse reduzido a zero: "existe $\{\bar{x} + \bar{h}m; \bar{y}\} \in C$ tal que $\bar{y} > \bar{x}$".

No caso, os preços associados ao vetor de Von Neumann $\{\hat{x} + \hat{h}m; \hat{y}\}$ podem ser normalizados como valores marxistas. Com efeito, tomando r = 0 nas equações (5.23) e (5.24):

$$(p, \hat{y}) = (p, \hat{x}) + \hat{h}\,(p, m) \qquad (5.36)$$

$$(p, y) \leq (p, x) + h\,(p, m) \text{ para todo } \{x + hm; y\} \in C \qquad (5.37)$$

particularizando a desigualdade anterior para o ponto $\{\bar{x} + \bar{h}m; \bar{y}\}$ de C:

$$(p, \bar{y}) \leq (p, \bar{x}) + \bar{h}\,(p, m).$$

Como $\bar{y} > \bar{x}$, isso implica $(p, m) > 0$. Tomando:

$$v = \frac{1}{(p, m)}\,p$$

obtém-se $(v, m) = 1$ e as relações (5.36) e (5.37) conduzem imediatamente às expressões (5.25) e (5.26). Quanto à equação (5.27), como $(v, m) = 1$ e $r = 0$, ela equivale à igualdade $(v, \hat{y}) = (v, \hat{x}) + \hat{h}$.

Infelizmente, numa economia não-estacionária nem sempre é possível encontrar valores marxistas para uma trajetória de Von Neumann. A título de exemplo, tomemos o sistema matricial com dois bens e três processos básicos em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

$m = (0; 1)$, $c = (0,3; 0,4; 0,5)$, o que implica:

$$A + G = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}$$

e suponhamos que a matriz dos produtos seja:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empregando-se os três processos básicos com as intensidades:

$$\hat{z} = (1; 1; 2,5)$$

obtém-se uma trajetória geométrica com taxa de expansão $r = 1/9$ por período. Com efeito:

$$(2; 2,5) = B\hat{z} = \frac{10}{9}(A + G)\,\hat{z}$$

Essa trajetória é um equilíbrio competitivo à taxa de lucro $r = 1/9$ por período ao sistema de preços $p = (1; 1)$, pois:

$$(1; 1; 1) = B'p = \frac{10}{9}(A' + G')\,p$$

Como a matriz $A + G$ é positiva, o sistema é irredutível. Logo, pelo Teorema 3.7, a trajetória geométrica encontrada é uma trajetória de Von Neumann.

A essa trajetória é impossível associar um sistema $v = (v_1, v_2)$ de valores marxistas. Com efeito, precisaríamos ter:

$$v_1 = 0,5v_1 + 0,1v_2 + 0,3$$
$$v_1 = 0,3v_1 + 0,2v_2 + 0,4$$
$$v_2 = 0,4v_1 + 0,5$$

sistema de equações de solução impossível.

Ainda que a todo vetor de Von Neumann seja possível associar um sistema de valores marxistas, não há como garantir que esse sistema seja único. Além do mais, a economia pode comportar diferentes valores de Von Neumann cada qual com seu conjunto, vazio ou não de valores marxistas.

A título de exemplo, tomemos o sistema com três produtos e dois processos básicos, onde a matriz A de consumo de matérias-primas é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

onde os coeficientes de mão-de-obra são $c = (1; 1)$ e onde uma unidade de trabalho se compra pela cesta $(1; 2; 0)$, o que leva a:

$$A + G = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

e onde a matriz dos produtos é:

$$B = \begin{bmatrix} 4{,}4 & 3{,}3 \\ 2{,}2 & 2{,}2 \\ 4{,}4 & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

Tomando-se $\hat{z} = (1; 1)$ e $p = (1; 1; 1)$, verifica-se que:

$$1{,}1\,(A + G)\,\hat{z} = B\hat{z} = (7{,}7; 4{,}4; 9{,}9)$$
$$1{,}1\,(A' + G')\,p = B'p = (11; 11)$$

Como o sistema é irredutível, estamos diante de uma trajetória de Von Neumann com 10% de taxa de crescimento por período. Um sistema de valores marxistas, no caso, é um vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ tal que $v_1 + 2v_2 > 0$ e:

$$4{,}4v_1 + 2{,}2v_2 + 4{,}4v_3 = 2v_1 + 5v_3 + 1$$
$$3{,}3v_1 + 2{,}2v_2 + 5{,}5v_3 = 3v_1 + 4v_3 + 1$$

Estamos diante de um sistema indeterminado. Tanto $v = (0; 10/22; 0)$ quanto $v = (5/9; 0; 5/9)$ ou qualquer combinação convexa desses vetores obedecem aos requisitos de um sistema de valores marxistas. Num extremo se encontra $(v, m) = 5/9$ e uma taxa de mais-valia, de acordo com a equação (5.14), $e = 0{,}8$. No outro $(v, m) = 10/11$ e, portanto, $e = 0{,}1$. Não há como decidir se a taxa de exploração é 10%, 80% ou qualquer percentagem intermediária.

Em suma, a contabilidade em valores marxistas só pode ser aplicada a casos muito particulares do modelo de Von Neumann, como o da economia fechada de Leontief, em que só há produção simples e um único processo para a obtenção de cada bem. No caso geral não há como assegurar nem a existência nem a unicidade dos valores marxistas nem dos dois conceitos básicos que deles se inferem, a taxa de mais-valia e a composição orgânica média do capital. Assim como não é possível construir uma teoria do capital baseada na idéia do período de produção, não é possível desenvolver uma teoria do crescimento e do lucro a partir do conceito da mais-valia. Não é à toa que Morishima recomenda aos neomarxistas que desistam da teoria do valor-trabalho.

6. A teoria de Sraffa

6.1 Sraffa e Von Neumann

Em seu livro *Produção de mercadorias por meio de mercadorias* Piero Sraffa, após 30 anos de reflexão, apresentou curiosa teoria dos preços à guisa de Prelúdio de uma crítica da teoria econômica. Pelas deficiências de tratamento matemático, a primeira parte do livro parece uma mistura mal costurada dos modelos aberto e fechado de Leontief, a segunda um amontoado de heresias econômicas. Uma leitura atenta do texto revela, no entanto, que Sraffa procurou resolver um problema de extremo interesse relacionado com o modelo de Von-Neumann: os efeitos das variações da cesta m pela qual se compra uma hora de trabalho sobre os preços e taxas de lucro das trajetórias geométricas de crescimento máximo.

Comecemos pelo tratamento formal do problema para depois dissecar *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*. Na teoria de Sraffa os trabalhadores são pagos no fim, e não no início, de cada período, o que exige ligeira adaptação do modelo de Von Neumann. Para tanto, o ponto genérico do cone tecnológico C de uma economia com n produtos se indicará pelo vetor $(2n + 1)$-dimensional $\{x; h; y\}$. Esse ponto indica um processo que consome o vetor x de matérias-primas no início do período, emprega h horas de trabalho (h real não-negativo) e produz, no final do período, o vetor y de bens e serviços. As hipóteses quanto a esse cone são as seguintes:

a) C é um cone convexo fechado;
b) para todo $\{x; h; y\} \in C$ tal que $hx = 0$ tem-se $y = 0$;
c) existe $\{\bar{x}; \bar{h}; \bar{y}\} \in C$ tal que $\bar{y} > 0$;
d) existe $\{x_0; h_0; y_0\} \in C$ tal que $y_0 > x_0$;
e) se $y \geq kx$ para k real positivo e $\{x; h; y\} \in C$ e diferente de zero, então $x > 0$.

A primeira hipótese é a especificação usual da produção com rendimentos constantes. A segunda afirma que nada se pode produzir sem empregar ao mesmo tempo mão-de-obra e alguma matéria-prima. A terceira diz que todos os bens podem ser produzidos. A quarta postula que o sistema seria capaz de crescer geometricamente a uma taxa positiva se os trabalhadores vivessem de brisa. A quinta, finalmente, admite que C seja irredutível. Mais adiante essa hipótese será substituída por outra que decompõe os bens em básicos e não-básicos, na linha de Sraffa.

Indiquemos pelo vetor n-dimensional m o consumo por homem-hora empregado. Se a economia opera no ponto $\{x; h; y\}$ de C, a produção que sobra para servir de matéria-prima no período seguinte é igual a $y-hm$. Como estamos operando com uma economia fechada, só são factíveis os pontos de C tais que $y-hm \geqslant 0$. Suporemos que os trabalhadores não tentem consumir nem o impossível nem todo o capital da economia, isto é, que exista um ponto $\{x'; h'; y'\}$ $\epsilon\ C$ tal que $y' - h' m > 0$. Isto posto definamos:

$$C(m) = \left[[x; y\text{-}hm] \;\middle|\; [x; h; y] \in C\ ;\ y-hm \geqslant 0 \right]$$

Verifica-se imediatamente que $C(m)$ é um cone de Von Neumann. Designemos por $(1 + r)$ o seu maior multiplicador factível. Temos o seguinte:

Teorema 6.1: Seja $\{\hat{x}; \hat{y} - \hat{h}m\}$ um vetor de Von Neumann de $C(m)$. Então existe um vetor semipositivo $\hat{p}$ tal que:

$$(\hat{p}, \hat{y}) = (1 + r)(p, \hat{x}) + \hat{h}(\hat{p}. m) \tag{6.1}$$

$$(\hat{p}, y) \leqslant (1 + r)(p, x) + h(\hat{p}, m), \text{ para todo } \{x; h; y\} \in C. \tag{6.2}$$

A demonstração é idêntica à do Teorema 3.5. Basta tomar os conjuntos n-dimensionais:

$$H = \left\{ y-hm(1 + r)x \;\middle|\; [x; h; y] \in C \right\}$$

$$L = \left\{ z \in R^n \;\middle|\; z > 0 \right\}$$

e observar que H e L, além de convexos, são disjuntos, sem o que $(1 + r)$ não seria o maior multiplicador factível de $C(m)$. O teorema de separação indica a existência de um vetor semipositivo $\hat{p}$ que satisfaz à desigualdade (6.2). Particularmente essa desigualdade para o vetor de Von Neumann $\{\hat{x}; \hat{y}-\hat{h}m\}$ de $C(m)$ e lembrando que, por hipótese, $\hat{y}-\hat{h}m \geqslant (1 + r)\hat{x}$, obtém-se a equação (6.1).

É imediato que $\hat{p}$ é um sistema de preços competitivos para a trajetória de Von Neumann definida pelo vetor $\{\hat{x}; \hat{y}-\hat{h}m\}$ de $C(m)$. O salário por homem-hora é o valor w da cesta de mercadorias m a esse sistema de preços, isto é:

$$w = (p, m). \tag{6.3}$$

Designemos agora por $1 + R$ o multiplicador máximo factível do cone de Von Neumann $C(0)$, isto é, aquele que descreveria o funcionamento da economia caso os trabalhadores vivessem de brisa ($m = 0$). $R > 0$ pois, por hipótese, existe $\{x_0; h_0; y_0\} \in C$ tal que $y_0 > x_0$. Seja $\{x; \hat{y}\}$ um vetor de Von Neumann de

$C(0)$, normalizado de modo a se ter $\hbar = 1$, isto é, a descrever um processo que empregue exatamente um homem-hora. Isso é o mesmo que dizer que $\{\bar{x}; 1; \bar{y}\} \epsilon\ C$ e:

$$\bar{y} \geqslant (1 + R)\,\bar{x}. \tag{6.4}$$

Como $R > 0$ e C é irredutível, $\bar{y} > \bar{x} > 0$. Sraffa denomina o acréscimo $\bar{y} - \bar{x} > 0$ "renda nacional padrão", elegendo-o como unidade de valor. Em suma, para qualquer $C(m)$, os preços de equilíbrio $\hat{p}$ para uma trajetória de Von Neumann são normalizados de modo a se ter:

$$(\hat{p}, \bar{y} - \bar{x}) = 1. \tag{6.5}$$

Daí pode-se deduzir uma desigualdade que desempenha papel fundamental na teoria de Sraffa. Particularizando a inequação (6.2) para o ponto $\{\bar{x}; 1; \bar{y}\}$ de C:

$$(p, \bar{y}) \leqslant (\hat{p}, m) + (1 + r)(\hat{p}, \bar{x})$$

ou, entrando com as relações (6.3) e (6.5):

$$1 \leqslant w + r(\hat{p}, \bar{x}).$$

Do mesmo modo, multiplicando escalarmente por $\hat{p}$ a desigualdade (6.4) e notando que $(\hat{p}, \bar{y} - \bar{x}) = 1$:

$$R(\hat{p}, \bar{x}) \leqslant 1\,.$$

Como $\hat{p}$ é semipositivo e $\bar{x} > 0$ (pois $C(0)$ é irredutível), $(p, \bar{x}) > 0$. Daí se segue que, para $0 \leqslant r \leqslant R$:

$$r \geqslant R(1 - w) \tag{6.6}$$

relação que apelidaremos "desigualdade de Sraffa". Para o caso da produção simples, em que $C(0)$ corresponde ao sistema matricial de Von Neumann $\{A; I\}$, A designando uma matriz quadrada não-negativa e I a matriz identidade de mesma ordem, a desigualdade anterior se transforma em equação. Sraffa incorretamente generaliza a igualdade $r = R\,(1 - w)$ para o caso geral de produção múltipla.

No caso dos sistemas matriciais com q processos básicos:

$$C = \left\{ \{Az; (c, z); \ Bz\} \ \middle| \ z \in R^q_+ \right\} \tag{6.7}$$

A indicando a matriz $n\,x\,q$ de consumos de matérias-primas, c o vetor q-dimensional positivo de coeficientes de mão-de-obra, *B* a matriz $n \times q$ da quantidades produzidas. Tem-se agora:

$$C(0) = \left\{\{Az; Bz\} \;\middle|\; z \in R^q_+\right\} \tag{6.8}$$

$$C(m) = \left\{\{Az; Bz-(c,z)\,m\} \;\middle|\; z \in R^q_+;\quad Bz \geqslant (c,z)\,m\right\} \tag{6.9}$$

Indicando por $A\hat{z}; B\hat{z} - (c, \hat{z})m$ um vetor de Von Neumann de $C(m)$, e por $1 + r$ o multiplicador máximo factível desse cone:

$$B\hat{z} \geqslant (1+r)\,A\hat{z} + (c, \hat{z})\,m. \tag{6.10}$$

Pela desigualdade (6.2), à trajetória de Von Neumann definida por esse vetor corresponde um sistema $\hat{p}$ de preços competitivos tal que, para todo $z \geqslant 0$: $(\hat{p}, Bz - (1+r)\,Az) - (\hat{p}, m)\,(c,z) = ((B' - (1+r)\,A')\,\hat{p} - wc, z) \leqslant 0$, ou, equivalentemente

$$B'\hat{p} \leqslant (1+r)\,A'\,\hat{p} + wc \tag{6.11}$$

relação que afirma que nenhum processo básico permite que se obtenham lucros a taxas maiores do que r, ao sistema de preços $\hat{p}$. Multiplicando-se escalarmente por $\hat{p}$ a desigualdade (6.10), por $\hat{z}$ a inequação (6.11) e comparando os resultados:

$$(B'\,\hat{p}, \hat{z}) = (1+r)\,(A'\,\hat{p}, \hat{z}) + w(c, \hat{z}). \tag{6.12}$$

Das duas últimas relações se conclui, como de praxe, que os processos básicos efetivamente utilizados na trajetória de Von Neumann geram a taxa de lucro r. Para esses processos, as componentes de $B'\hat{p}$ são iguais às de $(1+r)A'\,\hat{p} + wc$.

A renda nacional padrão é agora $(B-A)\bar{z}$, $\{A\bar{z}; B\bar{z}\}$ indicando um vetor de Von Neumann de $C(0)$ normalizado de modo a se ter $\bar{h} = (c, \bar{z}) = 1$. Como o valor da renda nacional padrão é arbitrado igual a 1 para qualquer sistema de

$$[(\hat{p}, (B-A)\hat{z}) = 1]. \tag{6.13}$$

Esta análise é uma estilização de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*. Valem, nesse sentido, algumas observações.

Primeiro, o exercício é muito pouco conclusivo. De fato, o livro de Sraffa só é interessante na parte relativa à produção simples. Para o caso geral da produção múltipla, Sraffa tenta obter resultados contundentes. Infelizmente esses resultados são o fruto de erros de economia e de matemática, que serão salientados mais adiante.

Segundo, a hipótese de que *C* seja irredutível é economicamente indigesta. Ela é aceitável no modelo de Von Neumann que inclui como insumos as mercadorias consumidas pelos trabalhadores. Assim, para fabricar aço é preciso teares, não porque estes últimos entrem nos altos-fornos das siderúrgicas, mas eles são indispensáveis para a fabricação dos tecidos que vestem os operários. Contudo, no modelo de Sraffa o consumo dos trabalhadores não se inclui em C. Esse problema é reconhecido no capítulo 2 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*. Sraffa tenta solucioná-lo decompondo os produtos em dois grupos, os básicos e os não-básicos. Os primeiros são os que entram direta ou indiretamente na produção de todas as mercadorias, isto é, como insumos de qualquer vetor de Von Neumann de $C(0)$. O que Sraffa não consegue explicar é por que numa economia sem consumo há produtos básicos. Afinal, há serviços pessoais que se produzem apenas com mão-de-obra, sem que se use qualquer matéria-prima. Isso não apenas viola a hipótese de irredutibilidade, viola o próprio tratamento de $C(0)$ como cone de Von Neumann.

Há uma maneira de contornar esse impasse da irredutibilidade: admitir que no vetor-insumo x do ponto $\{x; h; y\}$ de C já esteja embutido o consumo de subsistência dos trabalhadores e que m represente o consumo adicional, quando a economia se torna capaz de crescer. Sraffa cogitou dessa solução, mas, lamentavelmente, não a adotou. É fácil, todavia, reinterpretar sua teoria nesses termos bem mais palatáveis.

Com o conceito de "renda nacional padrão" Sraffa tratou de decifrar uma velha charada ricardiana: encontrar uma mercadoria que se reproduzisse consumindo mão-de-obra mais uma fração dela própria. Tal mercadoria permitiria que se determinasse a taxa de lucro máxima da economia independentemente do sistema de preços: R seria a taxa de reprodução física dessa mercadoria-padrão. Sraffa descarta a hipótese de que qualquer mercadoria individual atenda a esse requisito, mas encontra a solução numa mercadoria composta, um vetor de Von Neumann $\{\bar{x}; \bar{h}; \bar{y}\}$ de $C(0)$, normalizado com $\bar{h} = 1$. Com efeito, no caso R é o maior real tal que $\bar{y} \geqslant (1 + R)\bar{x}$.

Como $R > 0$ e $C(0)$ é irredutível, $\bar{y}-\bar{x} > 0$, o que lhe garante o *status* de numerário aceitável. Qualquer sistema de preços $\hat{p}$ é semipositivo e indeterminado por uma constante multiplicativa. Assim, é sempre possível normalizá-lo tomando $(\hat{p}, \bar{y}-\bar{x}) = 1$, na linha de Sraffa. Apenas é essencial notar que a renda nacional padrão, construída para $m = 0$, nada tem a ver com a renda nacional efetiva $\hat{y} - \hat{x}$ para $m \neq 0$. O vetor-padrão de Von Neumann em $C(0)$ é escolhido de modo a se ter $\bar{h} = 1$, o que garante que $w = (p, m)$ é a participação dos salários na "renda nacional padrão". Mas isso não significa que w seja também a participação dos salários na renda nacional efetiva $\hat{y}-\hat{x}$ em $C(m)$. Assim, a renda nacional padrão é apenas um numerário arbitrariamente escolhido. Sraffa reconhece, no capítulo 5 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, que o sistema-padrão é construção puramente auxiliar, embora indispensável para a aferição dos salários. a primeira parte da afirmação é correta. A segunda se deve a um erro de concepção: Sraffa jamais explicita o consumo m por homem-hora e freqüentemente parece imaginar que m seja uma fração w da renda nacional padrão $\bar{y}-\bar{x}$. Obviamente não há nenhuma razão para que *m* seja proporcional ao vetor adicionado $\bar{y}-\bar{x}$ de uma trajetória de Von Neumann de $C(0)$. E a matemática de Sraffa não o leva a perceber que, ainda que $m = w(\bar{y}-\bar{x})$, não se pode assegurar a igualdade $r = R(1-w)$. Voltaremos a esse assunto mais adiante.

Sraffa, de fato, comete um erro típico de quem não se sente à vontade com o modelo de Von Neumann: suas equações de preços sempre se referem ao cone $C(m)$, mas as de quantidades se voltam para $C(0)$. Na realidade, *Produção de mercadorias por meio de mercadorias* pretende determinar o sistema de preços, a taxa de lucro *r* e os processos efetivamente utilizados a partir de apenas dois parâmetros: a taxa máxima de lucro *R* e a participação *w* dos salários na "renda nacional padrão". Como veremos mais adiante, isso é absolutamente impossível no caso da produção múltipla.

Apesar dos inúmeros defeitos, o livro de Sraffa, além de fazer época entre os economistas de esquerda, contém muita coisa interessante. Nos subitens que se seguem trataremos de dissecá-lo em pormenores.

6.2 O modelo de produção simples

A primeira parte de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, cuida de indústrias com um só produto e capital circulante, isto é, de sistemas de Von Neumann do tipo material $\{A; I\}$ onde *A* é uma matriz quadrada $n \times n$ e *I* a identidade de mesma ordem: cada indústria produz um único bem por uma única tecnologia.

O primeiro capítulo do livro trata das economias de subsistência, isto é, que são apenas capazes de se reproduzir com crescimento zero. Nesse capítulo, Sraffa embute na matriz *A* o consumo dos trabalhadores. A descrição é o modelo fechado de Leontief com raiz de Frobenius igual a 1 para a matriz indecomponível *A*. A taxa de lucro é igual a zero e, como se viu no subitem 5.5, os preços podem ser normalizados como valores marxistas.

A partir do segundo capítulo, Sraffa admite que a economia seja capaz de gerar um excedente sobre os meios de subsistência e aí retira o consumo dos trabalhadores da matriz *A*. Os bens são decompostos em dois grupos: os *g* primeiros denominados básicos, os *n-g* últimos considerados não-básicos. Sraffa caracteriza essa decomposição com três hipóteses:

a) os produtos não-básicos não entram como insumos na produção dos básicos;
b) toda tecnologia consome pelo menos um produto básico;
c) se $x \geqslant kAx$ para *x* semipositivo e *k* real positivo, então a produção de todos os bens básicos é maior do que zero.

A primeira hipótese implica a apresentação da matriz *A* na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas com g e n-g filas, respectivamente. A segunda hipótese exige que toda coluna das matrizes A_{11} e A_{12} possua pelo menos um elemento positivo. A terceira hipótese leva à conclusão de que A_{11} é indecomponível. Com efeito, suponhamos $A_{11} =_1 \leqslant sx_1$ para s real e x_1 semipositivo. Como toda coluna de A_{11} possui pelo menos um elemento positivo, segue-se que $s > 0$. Logo, tomando $k = 1/s$, $x_1 \geqslant kA_{11} x_1$. Tomando $x = (x_1, 0)$, $Ax =$ $= (A_{11} x_1, 0)$ e portanto $x \geqslant kAx$ para k real positivo e x semipositivo. Logo, pela terceira hipótese , $x_1 > 0$. Segue-se, do Teorema 4.6, que a matriz A_{11} é indecomponível.

É fácil verificar que os multiplicadores factíveis do sistema de Von Neumann $\{A; I\}$ são os mesmos do sistema básico $\{A_{11}; I_g\}$. Se k é um multiplicador factível desse sistema básico, existe x_1 semipositivo tal que $x_1 \geqslant kA_{11} x_1$; tomando-se $x = (x_1; 0)$ no sistema total, segue-se que $Ax = (A_{11} x_1; 0)$ e portanto $x \geqslant kAx$. Reciprocamente, suponhamos que $k > 0$ seja um multiplicador factível do sistema $\{A; I\}$. Então, existe um vetor semipositivo $x = (x_1, x_2)$ tal que $x \geqslant kAx$, isto é:

$$x_1 \geqslant k(A_{11} x_1 + A_{12} x_2)$$

$$x_2 \geqslant kA_{22} x_2 .$$

A terceira hipótese mencionada implica $x_1 > 0$ e a primeira das desigualdades em questão acarreta $x_1 \geqslant kA_{11} x_1$, o que prova que k é multiplicador factível no sistema básico.

Pelo que se viu no item 5, se a matriz A_{11} é indecomponível, o sistema de Von Neumann $\{A_{11}; I_g\}$ é irredutível e seu multiplicador factível máximo é o inverso da raiz de Frobenius de A_{11}. Assim, se os trabalhadores viverem de brisa, isto é, se $m = 0$, o sistema se expandirá geometricamente com taxa de crescimento e de lucro

$$R = 1/\hat{s} - 1 \tag{6.14}$$

$\hat{s}$ indicando a raiz de Frobenius de A_{11}. A título de exemplo, tomemos uma economia com três produtos onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0{,}64 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

Os dois primeiros produtos são básicos e o terceiro não-básico. O sistema básico tem por matriz de insumos:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}64 & 0 \end{bmatrix}$$

com raiz de Frobenius $\hat{s} = 0{,}8$ (note-se que $\hat{s}$ é inferior à raiz de Frobenius 0,9 da matriz total A). Assim, a taxa máxima de lucro é $R = 1/0{,}8 - 1 = 25\%$.

Designemos por $c = (c_1 ; c_2)$ o vetor de coeficientes de mão-de-obra. Pelo que foi visto no subitem 6.1, a renda nacional padrão será um Vetor $\bar{u} = \bar{z} - A\bar{z}$ tal que $\{ A\bar{z}; \bar{z} \}$ seja vetor de Von Neumann do sistema $\{ A ; I \}$ e $(c, \bar{z}) = 1$. Sraffa impõe a condição de que a renda nacional padrão só contenha produtos básicos, isto é, que $\bar{z} = (\bar{z}_1 ; 0)$. Isso exige que $\bar{z}_1$ seja o vetor de Frobenius da matriz A_{11} normalizado pela relação $(c_1 , \bar{z}_1) = 1$. Pelo que se viu no item 5, esse vetor de Frobenius é unicamente determinado, pois A_{11} é indecomponível. Isso isenta de qualquer ambigüidade a definição de renda nacional padrão. (Sraffa, no capítulo 5 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, também demonstra a seu jeito a unicidade do sistema-padrão). Note-se que $\bar{u} = (\bar{u}_1 ; 0) = ((I - A_{11})\bar{z}_1 ; 0)$ e que $A_{11} \bar{z}_1 = (1 + R)^{-1} \bar{z}_1$. Logo, como $(c_1 , \bar{z}_1) = 1$:

$$(c, \bar{u}) = (c_1 , \bar{u}_1) = (1-(1+R)^{-1}) (c_1 , \bar{z}_1) = \frac{R}{1 + R} \tag{6.15}$$

Em suma, $\bar{u}_1$ é o vetor de Frobenius de A_{11} normalizado pela equação (6.15). Em nosso exemplo numérico suponhamos que os coeficientes de mão-de-obra sejam expressos pelo vetor:

$$c = (0{,}1;\ 0{,}2; 0{,}3)$$

A renda nacional padrão só deve incluir os dois primeiros produtos, que são os básicos, em quantidades $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ tais que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}64 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = 0{,}8 \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$0{,}1\bar{u}_1 + 0{,}2\bar{u}_2 = \frac{0{,}25}{1{,}25} = 0{,}2$$

encontra-se assim a renda nacional padrão $\bar{u} = (0{,}769231; 0{,}615385; 0)$.

Tomemos agora o caso em que o consumo por homem-hora se descreve pelo vetor semipositivo m. Normalizando $\tilde{z}$ na desigualdade (6.9) de modo a se ter $(c, \hat{z}) = 1$ resulta:

$$\hat{z} \geqslant (1 + r) A\hat{z} + m.$$

Como m é semipositivo, $\hat{z}$ também é semipositivo e $\hat{z} \geqslant (1 + r) A\hat{z}$. Sendo $1 + r > 0$, isso implica que a produção $\hat{z}_1$ de bens básicos seja estritamente positiva. Daí resulta, pelas relações (6.11) e (6.12):

$$\hat{p}_1 = (1 + r) A'_{11} \hat{p}_1 + wc_1 \tag{6.16}$$

o vetor g-dimensional $\hat{p}_1$ indicando o sistema de preços dos produtos básicos. A equação iguala o preço de cada produto básico ao custo dos insumos capitalizado pela taxa de lucro mais o custo da mão-de-obra.

Multiplicando escalarmente ambos os membros da equação anterior por $\tilde{u}_1$:

$$(\hat{p}_1, \tilde{u}_1) = (1 + r) (A'_{11} \hat{p}_1, \tilde{u}_1) + w(c_1, \tilde{u}_1) = (1 + r) (\hat{p}_1, A_{11} \tilde{u}_1) + w (c_1, \tilde{u}_1).$$

Como $(1 + R)^{-1}$ é raiz e $\tilde{u}_1$ vetor de Frobenius da matriz A_{11}, $A_{11} \tilde{u}_1 = (1 + R)^{-1} \tilde{u}_1$.

Logo:

$$[(\hat{p}_1, \tilde{u}_1) = (1 + R)^{-1} (1 + r) (\hat{p}_1, \tilde{u}_1) + w(c_1, \tilde{u}_1)].$$

Sraffa normaliza os preços igualando a 1 o valor da renda nacional padrão, isto é, tomando $(\hat{p}, \tilde{u}) = (\hat{p}_1, u_1) = 1$. Isto posto, e tendo em vista a relação (6.15), resulta que $1 = (1 + R)^{-1} (1 + r + wR)$, ou seja:

$$r = R(1 - w) \tag{6.17}$$

que é a famosa igualdade de Sraffa. *Produção de mercadorias por meio de mercadorias* chega a essa relação por um raciocínio muito simples: a renda nacional padrão é uma fração R dos insumos, pois essa a taxa à qual se expande a mercadoria-padrão; assim, se os salários absorvem uma fração w da renda nacional padrão, resta uma fração $(1 - w)$ de R para remunerar aqueles insumos, os quais representam o capital da economia. Infelizmente o raciocínio é errado. Efetivamente w é a fração dos salários na renda nacional padrão, já que esta última foi eleita como numerário. Contudo, r é a taxa de lucro de um sistema que não necessariamente gera a renda-padrão. O erro não tem conseqüências no caso da produção simples, mas é fatídico no caso da produção múltipla.

O sistema de preços dos produtos básicos é unicamente determinado. No caso em que $w = 0$, a equação de Sraffa dá $r = R$ e a equação (6.16) se transforma em $\hat{p}_1 = (1 + R)A'_{11}\hat{p}_1$. Segue-se que $\hat{p}_1$, nesse caso, é o vetor de Frobenius de A'_{11} tal que $(\hat{p}_1, \bar{u}_1) = 1$. Se $0 < w \leqslant 1$, $r < R$. Logo a matriz $(1 + r)A'_{11}$ terá raiz de Frobenius $(1 + r)(1 + R)^{-1} < 1$. Pelo Teorema 5.10. *e*, a matriz $I_g - (1 + r)A'_{11}$ será não-singular com inversa positiva. Logo, pela equação (6.16):

$$\hat{p}_1 = w(I_g - (1 + r)A'_{11})^{-1} c_1. \tag{6.18}$$

Em nosso exemplo numérico a taxa de lucro r e o sistema de preços $(p_1 ; p_2)$ dos produtos básicos variam em função de w como se indica na tabela a seguir:

w	r	p_1	p_2
0	0,25	0,650000	0,812500
0,2	0,20	0,646939	0,816327
0,4	0,15	0,643750	0,820313
0,6	0,10	0,640426	0,824468
0,8	0,05	0,636957	0,828804
1,0	0,00	0,633333	0,833333

É tentador estender a equação (6.16) aos produtos não-básicos e escrever a equação geral de determinação dos preços:

$$\hat{p} = (1 + r)A'\hat{p} + wc. \tag{6.19}$$

Essa equação é correta se todos os não-básicos forem produzidos, deduzindo-se da mesma maneira que sua irmã (6.16). Há, no entanto, duas ressalvas importantes.

Primeiro é possível que alguns produtos não-básicos nem entrem no vetor m de consumo por homem-hora nem nas matérias-primas necessárias à produção dessa cesta de consumo. Tais não-básicos não serão produzidos, obrigando-nos a reformular a equação (6.19) na forma:

$$\hat{p} \leqslant (1 + r)A'\hat{p} + wc \tag{6.20}$$

a igualdade se verificando apenas para aquelas componentes de $\hat{p}$ correspondentes aos bens efetivamente produzidos. Assim, em nosso exemplo numérico, se os trabalhadores não consomem o terceiro bem, pode-se apenas escrever:

$$p_3 \leqslant (1 + r)(p_1 + p'_2 + 0{,}9p_3) + 0{,}3w.$$

Para $w = 0{,}6$ obtém-se $p_3 \leqslant 179{,}138340$.

É claro que no exemplo anterior não haveria inconveniente em arbitrar $p_3 = 179{,}138340$ e respeitar a equação (6.19). Há, no entanto, uma possibilidade mais incômoda, a de que a equação (6.19) não tenha soluções positivas para determinados valores de r no intervalo $[O, R]$. Isso acontecerá sempre que a raiz de Frobenius de A for superior a $(1 + R)^{-1}$, que é o maior autovalor positivo de sua submatriz básica A_{11}. Em nosso exemplo numérico, se os trabalhadores consomem alguma quantidade positiva, ínfima que seja, do terceiro bem, a equação:

$$p_3 = (1 + r)(p_1 + p_2 + 0{,}9p_3) + 0{,}3w.$$

deve dar um valor positivo para p_3. Isso exige $r < 1/9$ e portanto $w > 5/9$.

Pode-se questionar a utilidade de se listarem no modelo bens que não são produzidos. A resposta é simples: o conjunto de bens produzidos depende da cesta m de consumo por homem-hora. E o objetivo implícito da teoria de Sraffa é justamente examinar os efeitos das variações de m sobre os preços e taxas de lucro da economia.

Assim, para usar tranqüilamente a equação (6.19) é preciso introduzir uma hipótese complementar não verificada em nosso exemplo numérico: a de que a raiz de Frobenius de A seja igual a $(1 + R)^{-1}$. Isso é o mesmo que dizer que na decomposição:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

a raiz de Frobenius de A_{22} é menor ou igual à de A_{11}. Em termos econômicos isso equivale a supor que é o consumo de produtos básicos que limita a taxa de reprodução dos não-básicos.

Adotaremos daqui por diante essa suposição, a qual nos permite determinar os preços pela equação (6.19), qualquer que seja $0 \leq r < R$. Note-se que $\hat{p} > wc$, que é positivo. Logo $\hat{p} > 0$, o que indica que não pode haver sobras não utilizadas de qualquer bem. Isto posto, as quantidades produzidas dos diversos bens, normalizadas com $(c, \hat{z}) = 1$, determinam-se pela equação:

$$\hat{z} = (1 + r)A\hat{z} + m. \qquad (6.21)$$

Da produção bruta $\hat{z}$, a parcela $A\hat{z}$ destina-se a repor o consumo de matérias-primas. Como tomamos $(c, \hat{z}) = 1$, conclui-se que:

$$\hat{u} = \hat{z} - A\hat{z} = (I - A)\hat{z} \qquad (6.22)$$

é a renda nacional efetiva por homem-hora.

Um ponto que Sraffa não percebeu, e que é a origem de imensas confusões em *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, é que o valor $(\hat{p}, \hat{u})$ dessa renda efetiva por homem-hora não necessariamente coincide com o valor $(\hat{p}, \tilde{u})$ da renda nacional padrão, arbitrado igual a 1. A título de exemplo, tomemos uma economia com três produtos onde a matriz de insumos é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}72 & 1{,}62 \\ 0{,}72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os coeficientes de mão-de-obra se descrevem pelo vetor $c = (0{,}1; 0{,}1; 0{,}1)$ e onde o consumo por homem-hora é $m = (0 ; 0 ; 1)$. A raiz de Frobenius, tanto de A quanto de sua submatriz básica, é igual a 0,72, de onde resulta $R = 7/18$. Resolvendo a equação $\hat{z} = (1 + r)A\hat{z} + m$ com $(c, \hat{z}) = 1$, encontra-se $r = 1/9$ e $\hat{z} = (5 ; 4 ; 1)$. Como $r = R(1 - w)$, segue-se que $w = 5/7$. Pela equação $\hat{p} = (1 + r)A'\hat{p} + wc$ determina-se $\hat{p} = (25/70 ; 25/70 ; 5/7)$.

A renda nacional efetiva por homem-hora é dada pelo vetor $\hat{u} = (I - A)\hat{z} = (0{,}5 ; 0{,}4 ; 1)$. Seu valor, ao sistema de preços $\hat{p}$, é:

$$(\hat{p}, \hat{u}) = 72{,}5/70$$

excedendo em cerca de 3,6% o da renda nacional padrão. Assim, a participação dos salários na renda nacional efetiva não é 5/7 mas $500/725 = 20/29$.

6.3 A redução a quantidades datadas de trabalho

O capítulo 6 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias* é o mais interessante do livro de Sraffa. Para compreendê-lo, tomemos como ponto de partida o caso em que $r = 0$. Os preços, que no caso se confundem com os valores marxistas, são dados por:

$$v = (I - A')^{-1} c.$$

Como a raiz de Frobenius da matriz A é menor do que 1, $I - A$ é não-singular com inversa não-negativa (Teorema 5.12) e, de acordo com o teorema de interação provado no subitem 4.3:

$$v = c + A'c + A'^2 c + \ldots + A'^t c + \ldots$$

Multiplicando escalarmente por x:

$$(v, x) = (c, x) + (c, Ax) + (c, A^2 x) + \ldots + (c, A^t x) + \ldots \qquad (6.23)$$

Essa equação tem uma importante interpretação econômica. Ela iguala o valor marxista da mercadoria (simples ou composta) x, produzida no período

T, à soma de uma série cujos termos são as quantidades datadas de trabalho cristalizadas na produção de x. Com efeito, (c, x) é a quantidade de trabalho diretamente empregada no período T; (c, Ax) o número de homens-hora usados no período $T - 1$ para produzir as matérias-primas Ax necessárias à produção de x; (c, A^2x) a quantidade de trabalho empregada no período $T - 2$ para produzir as matérias-primas A^2x requeridas para a obtenção de Ax no período $T - 1$ e assim por diante.

Para $0 < r < R$ os preços costumam diferir dos valores marxistas. Pela equação (6.19):

$$\hat{p} = (I - (1 + r)A')^{-1} wc$$

Como $(1 + r)A'$ tem raiz de Frobenius menor do que 1, essa expressão pode ser desenvolvida em série:

$$\hat{p} = w\,(c + (1 + r)A'c + \ldots + (1 + r)^t A'^t c + \ldots)$$

ou, multiplicando escalarmente por x:

$$(\hat{p}, x) = w((c, x) + (1 + r)(c, Ax) + \ldots + (1 + r)^t (c, A^t x) + \ldots). \quad (6.24)$$

A comparação dessa equação com sua irmã (6.23) mostra por que preços e valores marxistas podem diferir. Os valores agregam diretamente as quantidades datadas de trabalho. Nos preços, a quantidade de trabalho de t períodos atrás entra na série multiplicada pelo fator:

$$a_t = w\,(1 + r)^t$$

ou, como $r = R\,(1 - w)$:

$$a_t = \frac{R - r}{R}\,(1 + r)^t$$

Esse fator é função da taxa de lucro r, alcançando seu máximo para

$$r = R - \frac{1 + R}{t + 1}$$

expressão que Sraffa explicita após ilustrar com gráficos as variações de a_t *com* r.

As variações de preços com a taxa de lucro r explicam-se pelo fato de as quantidades datadas de trabalho entrarem na formação de preços com pesos que variam em função de r. Sraffa observa que a redução da mercadoria padrão dá uma série perfeitamente regular em que cada termo de trabalho é igual ao que o precede em data multiplicado por $(1+R)$. Com efeito, sendo $(1+R)^{-1}$ a raiz de x um vetor de Frobenius de A, $(c, A^{t-1}x) = (1+R)(c, A^t x)$.

Como exemplo mais complicado, Sraffa imagina dois produtos que diferem apenas em três dos termos datados de trabalho. Um deles, *a*, tem excesso de 20 unidades de trabalho aplicadas oito anos antes, enquanto o outro, *b*, tem excesso de 19 unidades aplicadas no presente e uma unidade aplicada 25 anos antes. O produto *a* pode ser imaginado como o vinho envelhecido, o produto *b* como o velho carvalho transformado em móvel. A diferença de preços é:

$$p_a - p_b = 20w(1+r)^8 - w(19 + (1+r)^{25}).$$

Tomando R = 25%, e portanto w = 1 − 4r, Sraffa desenha a curva $p_a - p_b$. A diferença entre o preço do vinho envelhecido e do móvel aumenta à medida que a taxa de lucros se move de 0 para 9%, cai entre 9% e 22%, para subir novamente entre 22% e 25% como na figura 6.1.

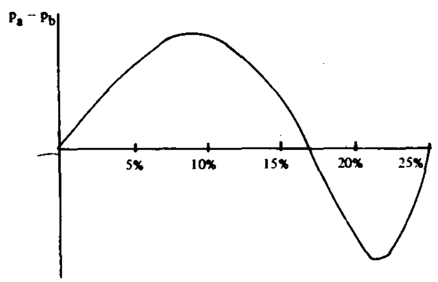
$p_a - p_b$

5% 10% 15% 20% 25% r

Figura 6.1

$p_a - p_b$

Figura 6.1



Com esse exemplo Sraffa conclui que os movimentos de preços em função de *r* podem ser bastante irregulares e complicados. Dois resultados importantes, porém, podem ser obtidos.

Primeiro, para qualquer mercadoria ou cesta de mercadorias *x*, a relação $(\hat{p}, x)/w$ é função crescente de *r*, como se deduz imediatamente da equação

(6.24). Como $r = R(1 - w)$, segue-se que o inverso $w/(\hat{p}, x)$ é função crescente de w. Esse é um resultado fundamental obtido por Sraffa: se a participação dos trabalhadores na renda nacional padrão cresce, o poder aquisitivo do salário por homem-hora também cresce em termos de qualquer mercadoria ou cesta de produtos. Em suma, um aumento de w efetivamente significa a melhoria do padrão de vida dos assalariados.

Um aumento de w provoca o aumento de alguns preços e a descida de outros. Há, no entanto, uma restrição sublinhada por Sraffa: 1% de aumento de w provoca menos de 1% de aumento no preço de qualquer produto. Para a demonstração, basta lembrar que $w/(\hat{p}, x)$ é função crescente de w, qualquer que seja a cesta de mercadorias x.

6.4. Produção conjunta

Nos capítulos 7 a 10 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, Sraffa tenta estender o seu modelo à produção conjunta. Infelizmente a falta de equipamento matemático aí leva a resultados lamentáveis. Sraffa, que parece ter descoberto o modelo de Von Neumann por conta própria, só trabalha com sistemas matriciais, o que em si não constitui pecado. Mas suas matrizes são sempre quadradas, hipótese que arbitrariamente iguala o número de processos básicos ao número de produtos. E, o que é pior, escreve equações onde deveria escrever desigualdades, esquecendo que, numa economia auto-reprodutiva, pode haver tecnologias antieconômicas e subprodutos não utilizados.

Sraffa erradamente afirma que a taxa máxima de lucro do sistema de Von Neumann A, B (onde A e B são quadradas) é o menor real $R > 0$ tal que a matriz $B - (1 + R)A$ seja singular. Isto posto, a renda nacional padrão é o vetor $(B - A)\tilde{z}$, onde $\tilde{z}$ é tal que $(B - (1 + R)A)\tilde{z} = 0$ e $(c, \tilde{z}) = 1$. Sraffa admite a possibilidade de a renda nacional padrão ter algumas componentes negativas, mas isso não o assusta: a mercadoria-padrão seria entendida como um sistema de débitos e créditos.

Para taxas de lucro $0 \leqslant r < R$ Sraffa transforma a desigualdade (6.11) em equação:

$$B'\hat{p} = (1 + r)A'\hat{p} + wc \tag{6.25}$$

normalizando os preços de modo a que o valor da renda nacional padrão seja igual a 1, isto é:

$$(\hat{p}, (B - A)\tilde{z}) = 1. \tag{6.26}$$

Com essas hipóteses chega-se facilmente à igualdade de Sraffa. Multiplicando escalarmente por $\tilde{z}$ ambos os membros da equação (6.25):

$$[(\hat{p}, B\tilde{z}) = (1 + r)(\hat{p}, A\tilde{z}) + w]$$

entrando com a equação (6.26) e com $B\tilde{z} = (1 + R)A\tilde{z}$ chega-se imediatamente a $r = R(1 - w)$.

É claro que tudo isso é muito bisonho, pois nem R é o menor real positivo que anula o determinante de $B - (1 + R)A$, nem a desigualdade (6.11) pode ser transformada automaticamente em equação. Como contra-exemplo, tomemos o sistema matricial de Von Neumann:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4{,}8 \\ 4 & 5{,}6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad c = (2\,;1).$$

Como o primeiro processo reproduz os dois bens à taxa de 50% por período e o segundo dá taxas de reprodução de 45,8% para o primeiro bem e 42,9% para o segundo, é imediato que a taxa máxima de lucro do sistema é $R = 50\%$. Assim, as trajetórias de Von Neumann só usam o primeiro processo. Assim, a renda nacional padrão seria $(B - A)\tilde{z}$ para $\tilde{z} = (0{,}5\,;0)$, ou seja, $(B - A)\tilde{z} = (1\,;1)$. Na matemática de Sraffa, R seria a menor raiz positiva da equação de $t(B - (1 + R)A) = 3{,}2R^2 - 2{,}4R + 0{,}4 = 0$, ou seja, $R = 25\%$. Teríamos $(B - (1 + R)A)\tilde{z} = 0$ e $(c, \tilde{z}) = 1$ para $\tilde{z} = (1\,;-1)$. A renda nacional padrão seria o estranhíssimo $(B - A)\tilde{z} = (-0{,}2\,;-0{,}4)$, um numerário inconsistente com um sistema de preços não-negativos.

O teorema que afirma que qualquer sistema matricial admite trajetórias de Von Neumann que usem no máximo tantos processos básicos quantos forem os produtos da economia nada ajuda no caso. Com efeito, os processos usados variam conforme a cesta m de consumo por homem-hora empregado. O sistema matricial que se segue ilustra muita coisa que Sraffa não percebeu na sua análise da produção múltipla.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 0{,}85 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = (0{,}2\,;0{,}2\,;0{,}1).$$

Estamos diante de um sistema irredutível. Assim, todo equilíbrio competitivo é uma trajetória de Von Neumann.

Como de praxe, comecemos com os trabalhadores vivendo de brisa, isto é, $m = 0$. Tomando $\tilde{z} = (2{,}5\,;2{,}5\,;0)$ e $\tilde{p} = (1\,;1)$, obtemos $B = 1{,}25A\tilde{z}$, $B'\tilde{p} \leqslant 1{,}25A'\tilde{p}$ e $(\tilde{p}, (B - 1{,}25A)\tilde{z}) = 0$. Daí se conclui que $R = 25\%$ e que a renda nacional padrão $(B - A)\tilde{z} = (0{,}5\,;0{,}5)$ usa apenas os dois primeiros processos.

Façamos agora $m = (0{,}65\,;0{,}65)$. O consumo por homem-hora é agora 1,3 vezes a renda nacional padrão, o que nos permite escrever $w = 1{,}3$ antes de saber o sistema de preços. Se a economia só conhecesse os dois primeiros produtos, teríamos $r = R(1 - w) = -7{,}5\%$. Contudo, o emprego exclusivo do terceiro processo permite que se atenda à demanda final por homem-hora m com uma taxa de lucro

10% ao período. Com efeito, tomando $\hat{z} = (0 ; 0 ; 10)$, $\hat{p} = (1 ; 1)$, $w = 1{,}3$ e $r = 0{,}1$, verificam-se as condições de equilíbrio (6.10) a (6.13). O exemplo mostra que a desigualdade (6.6) não pode ser automaticamente convertida em equação no caso da produção múltipla, nem quando o consumo por homem-hora é uma fração da renda nacional padrão. Note-se que a renda nacional efetiva $(B - A)\hat{z} = (1{,}5 ; 1{,}5)$ é o triplo da renda nacional padrão. Assim, os salários, embora representem 1,3 vezes a renda nacional padrão, só correspondem a 0,4333 da renda nacional efetiva. Note-se também que o sistema se mantém em equilíbrio para qualquer sistema de preços $\hat{p} = (\hat{p}_1 , \hat{p}_2)$ tal que $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 2$ e $0{,}861386\ \hat{p}_1 \leqslant \hat{p}_2 \leqslant 1{,}160920\hat{p}_1$. Não há, pois, no caso, como determinar o sistema de preços.

Tomemos agora $m = (0{,}145 ; 1{,}085)$. Encontra-se um equilíbrio competitivo novamente com $r = 10\%$ e $w = 1{,}3$ para $\tilde{z} = (0 ; 0{,}5 ; 9)$, isto é, usando o segundo e o terceiro processos. Os preços de equilíbrio são $\hat{p}_1 = 0{,}925532$ e $\hat{p}_2 = 1{,}074468$. Tomando $m = (1{,}085 ; 0{,}145)$, continua-se com $r = 10\%$, $w = 1{,}3$ mas os preços se trocam e $\hat{z} = (0{,}5 ; 0 ; 0{,}9)$. Em suma, do exemplo se tiram três conclusões a respeito do modelo de Sraffa com produção conjunta: a) a relação $r = R\ (1 - w)$ não é necessariamente verdadeira; b) nem sempre se pode assegurar a unicidade dos preços de equilíbrio; c) para determinar os processos efetivamente utilizados não basta conhecer R, r e w: é indispensável especificar a cesta m de consumo da mão-de-obra.

A indeterminação dos preços de equilíbrio pode propagar-se ao próprio w, isto é, à proporção dos salários na renda nacional padrão. A título de exemplo, tomemos o sistema matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1 & 0{,}85 \\ 0{,}64 & 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c = (0{,}2 ; 0{,}2\ 0{,}1).$$

Para $w = 0$ apenas os dois primeiros processos são utilizados. Encontra-se $R = 25\%$ e a renda nacional padrão $\tilde{u} = (0{,}555556 ; 0{,}444444)$. Suponhamos agora que a cesta de consumo dos trabalhadores seja, como no exemplo anterior, $m = (0{,}65 ; 0{,}65)$. Tomando-se $\hat{z} = (0 ; 0 ; 10)$, ou seja, utilizando apenas o terceiro processo, encontra-se um equilíbrio competitivo, com $r = 10\%$ e com qualquer sistema de preços $(p_1 ; p_2)$ e salários tal que:

$$0{,}555556p_1 + 0{,}444444p_2 = 1$$

$$w = 0{,}65(p_1 + p_2)$$

$$0{,}704p_2 + 0{,}2w \geqslant p_1$$

$$1{,}1p_1 + 0{,}2w \geqslant p_2$$

Num extremo encontramos $p_1 = 0{,}981176$, $p_2 = 1{,}023529$, $w = 1{,}303059$. Noutro, $p_1 = 0{,}844660$, $p_2 = 1{,}194175$; $w = 1{,}325243$. O exemplo mostra que, no caso de produção conjunta, não se pode sequer afirmar que a cesta *m* de consumo por homem-hora determine a fração *w* dos salários na renda nacional padrão. Em suma, não apenas a relação $r = R(1 - w)$ é errada no caso da produção, mas é impossível, por qualquer função, determinar *w* apenas a partir de *R* e *r*. Por outro lado, um aumento de *w* não mais significa um aumento de bem-estar dos trabalhadores.

Sraffa não percebe a maioria desses problemas, enchendo de erros imperdoáveis os capítulos 7, 8 e 9 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias.* Entre os poucos acertos, Sraffa assinala que a queda da fração *w* dos salários na renda nacional padrão não necessariamente implica que os salários caiam em relação ao preço de todas as mercadorias; observa que o método da redução a quantidades datadas de trabalho não se aplica à produção conjunta; e conclui, por um raciocínio imperfeito e complicado, o que já foi demonstrado no subitem 5.6: nas economias estacionárias ($r = 0$) os preços são proporcionais aos valores marxistas.

O capítulo 10, que trata do capital fixo, é menos pretensioso e por isso mesmo mais interessante. Sraffa nota que o principal interesse da produção conjunta está menos nos exemplos familiares de lã e carne de carneiro, ou trigo e palha, mas nos bens duráveis de capital. Uma máquina de idade *t* que entre num processo de produção sai desse processo como uma máquina do mesmo tipo e idade $t + 1$, ao lado dos outros produtos obtidos. A descrição dos processos, em suma, é a do modelo de Von Neumann.

Sraffa trata de reconciliar a sua fórmula matricial de determinação do preço das máquinas com o clássico princípio segundo o qual o preço de equilíbrio de um bem durável é o valor atual da seqüência de receitas líquidas por ele proporcionadas. A reconciliação é muito simples. Numa economia auto-reprodutiva, a uma máquina que dure *T* períodos devem corresponder *T* processos, efetivamente utilizados, o $t^{ésimo}$ deles usando, entre os insumos, o tipo de máquina com idade $t - 1$ e gerando, entre os produtos, o mesmo tipo de máquina com idade *t*. Os processos podem ser normalizados de modo a utilizar exatamente uma máquina nas diversas idades. Assim, o equilíbrio dos preços no modelo de Sraffa exige:

$$\begin{aligned}
(P_0 + M_0)(1 + r) + C_1 &= R_1 + P_1 \\
(P_1 + M_1)(1 + r) + C_2 &= R_2 + P_2 \\
&\;\vdots \\
(P_{T-2} + M_{t-2})(1 + r) + C_{T-1} &= R_{T-1} + P_{T-1} \\
(P_{T-1} + M_{t-1})(1 + r) + C_T &= R_T
\end{aligned} \qquad (6.27)$$

onde P_t é o preço da máquina com idade *t* ; M_t o valor dos insumos que acompanham essa máquina; C_{t+1} o custo da mão-de-obra, pago no fim do período; R_{t+1}

as receitas líquidas do processo, excluído o valor residual P_{t+1} da máquina.

A receita líquida proporcionada pela máquina no período t é dada por:

$$L_t = R_t - C_t - M_t$$

entendendo-se que $C_0 = R_0 = 0$. Daí se conclui, com os algebrismos de praxe, que:

$$P_0 = L_0 + (1+r)^{-1} L_1 + (1+r)^{-2} L_2 + \ldots + (1+r)^{-T} L_T$$

que é a fórmula usual da matemática financeira. Sraffa limita-se a tratar das máquinas com eficiência constante durante a vida útil, isto é, aquelas em que $M_t = M_{t-1}$, $R_t = R_{t-1}$, $C_t = C_{t-1}$. Nesse caso, tomando as primeiras diferenças nas equações (6.27):

$$P_{t+1} - P_t = (1+r)(P_t - P_{t-1}).$$

As máquinas depreciam-se em ritmo constante se $r = 0$. Para $r > 0$ as depreciações crescem em progressão geométrica de razão $1 + r$, a máquina de idade t valendo:

$$P_t = P_0 \frac{(1+r)^T - (1+r)^t}{(1+r)^T - 1}$$

que é a solução da equação $P_{t+1} - P_t = (1+r)(P_t - P_{t-1})$ com condição inicial P_0 e terminal $P_T = 0$. Sraffa ilustra a fórmula com vários gráficos.

No capítulo 11 de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, Sraffa tenta introduzir em seu modelo o problema da renda da terra. Algumas equações ricardianas são corretamente apresentadas, mas Sraffa se esquece do ponto principal: com terras escassas é impossível manter uma economia fechada em crescimento geométrico e com taxa de lucro constante. O problema da renda da terra é muito importante, mas não se encaixa em modelos de economias auto-reprodutivas com rendimentos constantes, como o de Sraffa.

6.5 Reversibilidade nos métodos de produção

No último capítulo de *Produção de mercadorias por meio de mercadorias*, Sraffa volta à produção simples, mas admite que se conheçam vários processos para a fabricação de cada produto. O problema é determinar, para cada taxa de lucro r no intervalo $[0, R]$, o processo utilizado para a obtenção de cada produto. Apesar das confusões habituais, a análise de Sraffa chega a resultados corretos.

Pelo que vimos no subitem 6.4, o conhecimento de r não basta para determinar os processos efetivamente utilizados quando há produção conjunta. Uma mesma taxa de lucro pode originar diferentes combinações de processos, dependendo da cesta de mercadorias m de consumo por homem-hora empregado. No caso da produção simples, porém, o problema pode ser resolvido independentemente do conhecimento de m, ainda que haja vários processos para a produção dos diferentes produtos. Para $r = R$ a matriz dos processos efetivamente utilizados deve ter raiz de Frobenius $(1 + R)^{-1}$. Para $0 \leqslant r < R$ a desigualdade $r \geqslant R(1 - w)$ assegura $w > 0$. Isto posto, pode-se abandonar a renda nacional padrão, pouco útil no caso, e normalizar os preços tomando-se $w = 1$.

Com essa normalização, as equações do modelo de Sraffa equivalem às do modelo aberto de Leontief com a matriz dos insumos multiplicada por $(1 + r)$. A seleção dos processos mais econômicos se faz como no teorema da não-substituição discutido no subitem 4.5.

Ilustremos o problema com dois exemplos.

Exemplo 1. Tomemos o sistema matricial

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}85 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = (1\,;2;2)$$

Há dois processos para a produção do primeiro bem, o primeiro usando mais capital e menos mão-de-obra do que o segundo.

Para $w = 0$ obtém-se $R = 25\%$ usando o segundo processo para a fabricação do primeiro bem. Para taxas de lucro na faixa $0 \leqslant r < 25\%$ a utilização desse processo implica que o sistema de preços (p_1, p_2), normalizado com $w = 1$, seja determinado pelas equações:

$$0{,}8(1 + r)p_2 + 2 = p_1$$
$$0{,}8(1 + r)p_1 + 2 = p_2$$

ou seja, $p_1 = p_2 = \dfrac{2}{1 - 0{,}8(1 + r)}$.

O primeiro processo não é utilizado, o que exige que, para esses valores de p_1 e p_2 se tenha:

$$0{,}85(1 + r)p_2 + 1 \geqslant p_1$$

o que se verifica para $r \geq 1/9$. Para $r \leq 1/9$ o primeiro produto passa a ser fabricado pelo primeiro processo, o que exige:

$$0{,}85\,(1+r)p_2 + 1 = p_1$$
$$0{,}8\ \ (1+r)p_1 + 2 = p_2$$
$$0{,}8\ \ (1+r)p_2 + 2 \geq p_1$$

a última relação exprimindo que o segundo processo não é utilizado. Obtém-se:

$$p_1 = \frac{1+1{,}7\,(1+r)}{1-0{,}68\,(1+r)^2}; \quad p_2 = \frac{2+0{,}8\,(1+r)}{1-0{,}68\,(1+r)^2}$$

No ponto de reversão do primeiro para o segundo processo, isto é, para $r = 1/9$, os dois grupos de fórmulas dão $p_1 = p_2 = 18$.

O resultado não é surpreendente. O primeiro processo, que usa mais capital e menos mão-de-obra, é o escolhido para taxas de lucro mais baixas. O segundo é empregado para $1/9 \leq r \leq 1/4$.

Exemplo 2. Consideremos o sistema matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}64 & 0 & 0 & 0{,}799 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

com coeficientes de mão-de-obra $c = (1\,;2\,;3{,}33\,;3)$.

Os dois primeiros produtos são básicos, o terceiro não-básico. Como cada produto básico é fabricado por um único processo, obtém-se $R = 25\%$ e

$$P_1 = \frac{1+1{,}28\,(1+r)}{1-0{,}64\,(1+r)^2}; \quad P_2 = \frac{2+(1+r)}{1-0{,}64\,(1+r)^2}$$

o produto não-básico pode ser obtido por dois processos, que indicaremos por *a* e *b*. Conforme o processo usado, o preço do bem será:

$$p_{3a} = (1+r)p_1 + 3{,}33$$
$$p_{3b} = 0{,}799\,(1+r)p_2 + 3$$

O processo utilizado será aquele que der menor preço para o bem em questão. Notemos agora que:

$$p_{3a} - p_{3b} = \frac{0{,}2698\,(1+r)^2 - 0{,}598\,(1+r) + 0{,}33}{1-0{,}64\,(1+r)^2}$$

Há agora dois pontos de reversão para os quais $p_{3a} - p_{3b} = 0$: $r_1 = 3{,}72\%$ e $r_2 = 17{,}92\%$. $p_a - p_b$ é negativo para valores de r entre esses dois pontos, o que significa que o processo *a* é o utilizado para taxas de lucro entre 3,72% e 17,92%. O processo *b* é o escolhido ou para taxas muito baixas ($0 \leqslant r \leqslant 3{,}72\%$) ou muito altas ($17{,}92\% \leqslant r < 25\%$).

O interesse do exercício é exemplificar a possibilidade de pontos de reversão múltiplos, a qual é notada por Sraffa. Esse é o golpe de misericórdia na tentativa da escola austríaca de associar a cada processo um "período de produção" e de afirmar que, quanto menor a taxa de lucro, mais longos os processos escolhidos. A valer essa teoria, o processo *a* do exemplo seria, ao mesmo tempo, mais longo e mais curto que o processo *b*.

7. O modelo de Von Neumann com consumo dos capitalistas

7.1 A dinâmica da produção e dos preços

Ao admitir que os capitalistas reinvistam todos os seus lucros, o modelo de Von Neumann (e seus casos particulares, como o modelo fechado de Leontief) introduz uma simplificação não adotada por Marx. Assim, um reexame fiel dos problemas discutidos em *O Capital* exige que se reformule o modelo de modo a contemplar o consumo dos capitalistas.

Como no item 3, designaremos por $\{x;y\}$ um ponto genérico do cone de Von Neumann C. O vetor insumo x incorpora as cestas de subsistência entregues aos trabalhadores e o cone C obedece aos três axiomas enunciados no subitem 3.1.

Uma parte c_{t-1} da produção y_{t-1} obtida no final do período $t-1$ é agora absorvida pelo consumo dos capitalistas. Da sobra $y_{t-1} - c_{t-1}$ retiram-se os insumos x_t a serem utilizados no período t, os quais incluem os meios de subsistência dos trabalhadores. Assim, a condição de factibilidade se expressa pela desigualdade vetorial:

$$x_t \leqslant y_{t-1} - c_{t-1} \tag{7.1}$$

onde sempre se admitirá:

$$0 \leqslant c_{t-1} < y_{t-1}. \tag{7.2}$$

No início do período $t-1$ os capitalistas contratam o que irão consumir no fim do período ao sistema de preços p_t^e então previsto para o início do período t. O vetor c_{t-1} é decidido em função desse sistema de preços e da renda R_{t-1}^e esperada para o período $t-1$:

$$R_{t-1}^e = (p_t^e, y_{t-1}) - (p_{t-1}, x_{t-1}). \tag{7.3}$$

Admite-se que o valor esperado do consumo dos capitalistas seja uma fração $1 - s$ de sua renda ($0 \leqslant s \leqslant 1$). Isso implica:

$$c_{t-1} = R^e_{t-1} \; f(p^e_t) \tag{7.4}$$

onde o vetor $f(p^e_t)$ é uma função contínua do sistema de preços esperado e onde $(p^e_t, c_t) = (1 - s)R^e_{t-1}$, ou seja:

$$(p^e_t, f(p^e_t)) = 1 - s. \tag{7.5}$$

Obviamente $s = 1$ sempre que R^e_{t-1} for negativa, já que $c_t \geqslant 0$.

Descrevamos agora o funcionamento da economia competitiva. No início do período t o mercado fixa o sistema de preços p_t pelo qual se vende a parte $y_{t-1} - c_{t-1}$ da produção do período anterior não consumida pelos capitalistas. Em função de p_t, do sistema de preços p^e_{t+1} esperado para o início do período $t + 1$ e da taxa de lucro r^e_t esperada para o período t, os produtores escolhem um ponto factível $\{x_t; y_t\}$ do cone de Von Neumann. Além da desigualdade (7.1), as condições de equilíbrio competitivo são as seguintes:

$$(p_t, y_{t-1} - c_{t-1} - x_t) = 0 \tag{7.6}$$

$$(p^e_{t+1}, y_t) = (1 + r^e_t)(p_t, x_t) \tag{7.7}$$

$$(p^e_{t+1}, y) \leqslant (1 + r^e_t)(p_t, x) \text{ para qualquer } \{x; y\} \in C \tag{7.8}$$

(

$$(p_t, q_o) = (p^e_{t+1}, q_o) = 1. \tag{7.9}$$

A equação (7.6) indica que o valor da parcela $y_{t-1} - c_{t-1} - x_t$ da produção não utilizada do período anterior é igual a zero. A igualdade (7.7) indica que o valor esperado da produção do período t é igual ao valor dos insumos aumentado pela taxa prevista de lucro. A desigualdade (7.8) estabelece que, aos sistemas de preços p_t e p^e_{t+1}, nenhum ponto do cone de Von Neumann pode proporcionar rentabilidade esperada superior a r^e_t. Finalmente, a equação (7.9) normaliza os preços tomando como numerário a cesta de mercadorias $q_o > 0$.
Teorema 7.1: Dado o sistema de preços p^e_{t+1} esperado para o início do período $t + 1$, a produção y_{t-1} herdada do período $t - 1$ e o consumo c_{t-1} dos capitalistas no início do período t ($0 \leqslant c_{t-1} \leqslant y_{t-1}$), existe pelo menos um equilíbrio competitivo para o período t. Qualquer equilíbrio competitivo maximiza o valor esperado (p^e_{t+1}, y_t) da produção entre os pontos factíveis de C.

A demonstração é idêntica à do Teorema 3.3. Basta aplicar o teorema de Kuhn e Tucker à maximização de (p^e_{t+1}, y_t) com as condições $\{x_t; y_t\} \in C$ e $x_t \leqslant y_{t-1} - c_{t-1}$.

A demonstração de existência de trajetórias de equilíbrio com perfeita previsão é bem mais complicada, pois nesse caso não mais se pode tomar c_{t-1} como dado. Cuidaremos de um caso particular do problema no subitem 7.2, ao tratar das trajetórias de equilíbrio competitivo com crescimento geométrico.

7.2 As trajetórias de Morishima-Von Neumann

Pesquisemos a existência de trajetórias geométricas de equilíbrio competititvo no modelo de Von Neumann com consumo dos capitalistas. Numa tal trajetória, dita de Morishima-Von Neumann, o sistema de preços p e a taxa de lucro r mantêm-se constantes no tempo, sendo objeto de perfeita previsão. As quantidades físicas expandem-se geometricamente à taxa g. Assim, se no período de 0 a economia opera no ponto $0 \neq \{\hat{x}; \hat{y}\}$ do cone de Von Neumann C, no período t se terá $x_t = (1+g)^t \hat{x}$ e $y_t = (1+g)^t \hat{y}$. Do mesmo modo, designando por $\hat{c}$ o consumo dos capitalistas no final do período 0, $c_t = (1+g)^t \hat{c}$.

A condição de factibilidade (7.1) exprime-se agora por:

$$\hat{y} - \hat{c} - (1+g)\hat{x} \geqslant 0. \tag{7.10}$$

Do mesmo modo, as relações (7.6) a (7.9) substituem-se por:

$$(p, \hat{y} - \hat{c} - (1+g)\hat{x}) = 0 \tag{7.11}$$

$$(p, \hat{y}) = (1+r)(p, \hat{x}) \tag{7.12}$$

$$(p, y) \leqslant (1+r)(p, x) \text{ para qualquer } \{x; y\} \in C \tag{7.13}$$

$$(p, q_o) = 1 \tag{7.14}$$

onde $q_o > 0$ é a cesta de mercadorias escolhida como numerário.

Pela equação (7.3), a renda dos capitalistas no período 0 é igual a $(p, \hat{y} - \hat{x})$. Supõe-se que essa renda seja positiva:

$$(p, \hat{y} - \hat{x}) > 0 \tag{7.15}$$

e que o consumo dos capitalistas, no final do período 0, seja expresso pelo equivalente à equação (7.4):

$$\hat{c} = (p, \hat{y} - \hat{x}) f(p) \tag{7.16}$$

onde a função vetorial contínua $f(p) \geqslant 0$ é tal que para qualquer sistema de preços p:

$$(p, f(p)) = 1 - s. \tag{7.17}$$

Temos que demonstrar que existem: um ponto $\{\hat{x}\ \hat{y}\} \neq 0$ do cone de Von Neumann C; um sistema de preços semipositivo p; e dois reais não-negativos, a taxa de expansão física do sistema g e a taxa de lucro r, que verifiquem as relações (7.10) a (7.16). Para a demonstração suporemos que C seja irredutível com multiplicador máximo factível $\hat{k} > 1$. Essa última hipótese é indispensável para que o sistema possa crescer geometricamente com renda positiva para os capitalistas. A suposição de que C seja irredutível exclui do modelos os bens de luxo que servem exclusivamente à classe capitalista. Ela implica que trabalhadores e capitalistas consumam os mesmos bens, ainda que em quantidades *per capita* muito diferentes e, como tal, representa uma hipótese restritiva. Vale lembrar, todavia, que o modelo se assenta em várias outras hipóteses extremamente restritivas: a) a hora de trabalho se compra por uma cesta fixa de mercadorias; b) os capitalistas poupam uma fração invariável s de sua renda; c) a função consumo dos capitalistas é contínua ainda que os preços de determinados bens caiam a zero.

Para demonstrar a existência de trajetórias de Morishima-Von Neumann, provemos inicialmente o:

Lema 7.1: Para que um ponto $0 \neq \{\hat{x};\hat{y}\} \in C$, um sistema de preços semipositivo p tal que $(p,q_0) = 1$ e uma taxa de lucro positiva r definam uma trajetória de Morishima-Von Neumann é necessário e suficiente que:

$$\hat{y} - (1 + rs)\hat{x} - r(p, \hat{x})\, f(p) \leq 0 \tag{7.18}$$

$$r(p, \hat{x}) > 0 \tag{7.19}$$

$$(p, y) \leq (1 + r)\,(p, x) \text{ para todo } \{x, y\} \in C. \tag{7.20}$$

Em particular, em toda trajetória de Morishima-Von Neumann:

$$g = sr \tag{7.21}$$

isto é, a taxa de expansão física do sistema é igual à taxa de lucro vezes a propensão a poupar dos capitalistas.

Demonstração: Suponhamos que $0 \neq \{\hat{x},\hat{y}\}$, p, r e g satisfaçam as relações (7.10) a (7.16). A desigualdade (7.20) é reprodução da (7.13). Pela igualdade (7.12) conclui-se que $(p, \hat{y} - \hat{x}) = r(p, \hat{x})$. Assim, a inequação (7.15) implica a desigualdade (7.19). Além disso, pela expressão (7.16):

$$\hat{c} = r(p,\hat{x})f(p) \tag{7.22}$$

Levando essa expressão à equação (7.11) e lembrando que $(p, f(p)) = 1 - s$ $(p, \hat{y}) = (1 + g + r(1 - s))(p, \hat{x})$.

Lembrando que $(p, \hat{x}) > 0$ e que, pela equação (7.12), $(p, \hat{y}) = (1 + r)(p, \hat{x})$, segue-se à relação (7.21), $g = sr$. Introduzindo na relação (7.10) esta última expressão e a relação (7.22), obtém-se a desigualdade (7.18).

Reciprocamente suponhamos que $0 \neq \{\hat{x}, \hat{y}\} \in C$ seja um ponto do cone de Von Neumann, *p* um sistema de preços semipositivo e *r* uma taxa de lucro que verifiquem as relações (7.18) a (7.20). (Supõe-se *p* normalizado por $(p, q_0) = 1$.) A desigualdade (7.13) reproduz a relação (7.20). Dela se segue, em particular, $(p, \hat{y}) \leqslant (1 + r)(p, \hat{x})$. Multiplicando escalarmente por *p* a desigualdade (7.18) e lembrando que $(p, f(p)) = 1 - s$, obtém-se $(p, \hat{y}) \geqslant (1 + r)(p, \hat{x})$. Chega-se assim à equação (7.12), $(p, \hat{y}) = (1 + r)(p, \hat{x})$. Daí se segue que $(p, \hat{y} - \hat{x}) = r(p, \hat{x})$ e a desigualdade (7.15) decorre da inequação (7.19). Tomando $\hat{c} = r(p, \hat{x}) f(p)$ e $g = sr$, verificam-se as relações (7.16) e (7.10), esta última como corolário da desigualdade (7.18). Finalmente, como $\hat{y} - \hat{c} - (1 + g)\hat{x} = \hat{y} - r(p, \hat{x}) f(p) - (1 + sr)\hat{x}$, resulta $(p, \hat{y} - \hat{c} - (1 + g)\hat{x}) = (p, \hat{y}) - (1 + r)(p, \hat{x}) = 0$, o que prova a equação (7.11).

Passemos à demonstração da existência das trajetórias de Morishima-Von Neumann. Suponhamos inicialmente que a propensão a poupar dos capitalistas seja positiva e menor do que 1 $(0 < s < 1)$. A cada sistema de preços *p*, isto é, a cada vetor *m*-dimensional semipositivo tal que $(p, q_0) = 1$ associemos o cone 2*m*-dimensional:

$$K(p) = \{sx + (p, x) f(p);\ sy + (p, x) f(p)\} \mid \{x; y\} \in C$$

Verifica-se facilmente que $K(p)$) é um cone de Von Neumann. Seu maior multiplicador factível será indicado por $1 + g_p$.

Para a demonstração dos cinco lemas que se seguem basta supor que o cone de Von Neumann *C* tenha multiplicador factível máximo $\bar{k} \geqslant 1$, dispensando-se a hipótese de irredutibilidade.

Lema 7.2: Para todo sistema de preços p, $0 \leqslant g_p \leqslant \bar{k} - 1$.

Demonstração: Por hipótese existe $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in C$ tal que $\bar{y} \geqslant \bar{x}$, sendo $\{\bar{x}, \bar{y}\} \neq 0$. Logo, $s\bar{y} + (p, \bar{x}) f(p) \geqslant s\bar{x} + (p, \bar{x}) f(p) \neq 0$, o que prova que 1 é multiplicador factível de $K(p)$. Logo $g_p \geqslant 0$.

Reciprocamente, seja $\{s\hat{x}_p + (p, \hat{x}_p) f(p); s\hat{y}_p + (p, \hat{x}_p) f(p)\}$ um vetor de Von Neumann de $K(p)$. Então, como $s\hat{y}_p + (p, \hat{x}_p) f(p) \geqslant (1 + g_p)(s\hat{x}_p + (p, \hat{x}_p) f(p))$, e como $g_p \geqslant 0$, segue-se que $s\hat{y}_p \geqslant (1 + g_p) s\hat{x}_p$. Logo, como $s > 0$, para algum $\{\hat{x}_p; \hat{y}_p\}$ pertencente a *C* e distinto da origem, $\hat{y}_p \geqslant (1 + g_p)\hat{x}_p$. Segue-se que $1 + g_p$ é multiplicador factível de *C*, o que implica $g_p \leqslant \bar{k} - 1$.

Lema 7.3: Seja $\{p_n\} \to p$ uma seqüência convergente de sistemas de preços; g um ponto de aderência da seqüência g_{p_n}. Então, $g \leqslant g_p$.

Demonstração: Seja $\{s\hat{x}_n + (p_n, \hat{x}_n) f(p_n); s\hat{y}_n + (p_n, \hat{x}_n) f(p_n)\}$ um vetor de Von Neumann de $K(p_n)$ normalizado por $\|\hat{y}_n\| = 1$. Pelo Lema 7.2, $\hat{y}_n \geqslant \hat{x}_n$, e portanto $\|x_n\| \leqslant 1$. Como p_n é semipositivo e $(p_n, q_o) = 1$ e como $0 \leqslant g_{p_n} \leqslant \bar{k} - 1$, a seqüência $(3n + 1)$-dimensional $\{\hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{p}_n, g_{p_n}\}$é limitada. Logo, dela se pode extrair uma subseqüência convergente para $\{\hat{x}, \hat{y}, p, g\}$ sendo $\|\hat{y}\| = 1$. Por definição de vetor de Von Neumann:

$$s\hat{y}_n + (p_n, \hat{x}_n) f(p_n) \geqslant (1 + g_p n)(s\hat{x}_n + (p_n, \hat{x}_n) f(p_n))$$

Lembrando que $f(p)$ é contínua e passando ao limite:

$$s\hat{y} + (p, \hat{x}) f(p) \geqslant (1 + g)(s\hat{x} + (p, \hat{x}) f(p))$$

Como C é fechado, $\{\hat{x}; \hat{y}\} \in C$. Logo, pela desigualdade anterior $1 + g$ é um multiplicador factível de $K(p)$. o que prova que $g \leqslant g_p$.

Designemos agora por $F(p)$ o conjunto dos vetores m-dimensionais semipositivos ν, tais que $(v, q_o) = 1$ e:

$(v, sy + (p, x) f(p)) \leqslant (1 + g_p)(v, sx + (p, x) f(p))$; para todo $x \neq y \in C$ ou equivalente:

$$s(v, y) \leqslant s(1 + g_p)(v, x) + g_p (p, x)(v, f(p)) \qquad (7.23)$$

Para todo $\{x; y\} \in C$ $F(p)$ é o conjunto dos sistemas de preços competitivos ν para as trajetórias de Von Neumann de $K(p)$, normalizados com $(v, q_o) = 1$.

Lema 7.4: Para cada sistema de preços, $F(p)$ é convexo e não-vazio.

Demonstração: Pelo Teorema 3.5 $F(p)$ e não-vazio. Verifica-se trivialmente que se ν' e ν'' são vetores semipositivos que respeitam a desigualdade (7.23), sendo $(v', q_o) = (v'', q_o) = 1$, então, para qualquer real $0 \leqslant a \leqslant 1$, $v = (1 - a)v' + av''$ respeita a desigualdade (7.23) e $(v, q_o) = 1$, sendo ν semipositivo.

Lema 7.5: A aplicação $p \to F(p)$ é semicontínua superiormente.

Demonstração: Sejam $\{p_n\} \to p$ e $\{\nu_n\} \to \nu$ seqüências convergentes de vetores m-dimensionais positivos, tais que $(p_n, q_o) = 1$ e $v_n \in F(p_n)$ para todo n. Temos que provar que $v \in F(p)$.

Com efeito, pela desigualdade (7.23), para todo n:

$$s(v_n, y) \leq s(1 + g_{p_n})(v_n, x) + g_{p_n}(p_n, x)(v_n, f(p)) \text{ para todo } \{x; y\} \in C$$

Pelo Lema 7.2, a seqüência $\{g_{p_n}\}$ é limitada. Dela extraiamos uma subseqüência convergente para g. Por passagem ao limite:

$$s(v,y) \leq s(1 + g)(v,x) + g(p,x)(v,f(p)) \text{ para todo } \{x;y\} \in C$$

Pelo Lema 7.3, $g \leq g_p$. Logo:

$$s(v, y) \leq s(1 + g_p)(v, x) + g_p(v, f(p)) \text{ para todo } \{x; y\} \in C$$

o que prova que $v \in F(p)$.

Lema 7.6: Seja C um cone de Von Neumann com multiplicador máximo factível $\hat{k} > 1$; $f(p)$ uma função vetorial contínua e não-negativa tal que $(p, f(p)) = 1-s$, para todo p semipositivo tal que $(p/q_o) = 1$, sendo $q_o > 0$ e $0 < s < 1$. Então existem: um ponto $0 \neq \{\hat{x}; \hat{y}\}$ do cone de Von Neumann C; um vetor semipositivo p tal que $(p, q_o) = 1$; e um real não-negativo r, tais que:

$$\hat{y} - (1 + rs)\hat{x} - r(p, \hat{x})f(p) \geq 0$$

$$(p, y) \leq (1 + r)(p, x) \text{ para todo } \{x; y\} \in C$$

Demonstração: Pelos Lemas 7.4 e 7.5 e pelo teorema do ponto fixo de Kakutani, existe p semipositivo tal que $(p, q_o) = 1$ e $p \in F(p)$. Fazendo $g_p = g$ e $p = v$ na desigualdade (7.23):

$$s(p, y) \leq s(1 + g)(p, x) + g(p, x)(p, f(p)) = (s(1 + g) + g(1-s))(p, x) =$$
$= (g + s)(p, x)$ para qualquer $\{x; y\} \in C$. Tomando $r = g/s$:

$$(p, y) \leq (1 + r)(p, x) \text{ para todo } \{x; y\} \in C.$$

Seja agora $\{s\hat{x} + (p, \hat{x}) f(p); s\hat{y} + (p, \hat{x}) f(p)\}$ um vetor de Von Neumann de $K(p)$. Então, como $1 + g_p = 1 + g$ é o maior multiplicador factível de $K(p)$.

$$s\hat{y} + (p, \hat{x}) f(p) \leq (1 + g)(s\hat{x} + (p, \hat{x}) f(p))$$

ou, como $g = rs$:

$$\hat{y} - (1 + rs)\hat{x} - r(p, \hat{x}) f(p) \geq 0.$$

Teorema 7.2: Seja C um cone irredutível de Von Neumann com multiplicador máximo factível $\hat{k} > 1$. Então, existe em C pelo menos uma trajetória de Morishima-Von Neumann.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $0 < s < 1$. Tendo em vista o Lema 7.1, basta provar que um ponto $\{\hat{x}; \hat{y}\} \neq 0$ do cone de Von Neumann, um sistema de preços p e uma taxa de lucro r que satisfaçam o Lema 7.6 são tais que $r(p, \hat{x}) > 0$. Como r é não-negativo e $\hat{y} - (1 + rs)\hat{x} - r(p, \hat{x}) f(p) \geqslant 0$, segue-se que $\hat{y} \geqslant \hat{x}$. Como C é irredutível, isso implica $\hat{x} > 0$ e portanto $(p, \hat{x}) > 0$.

Provemos que r é positivo. Para tanto, seja $\{\bar{x}; \bar{y}\}$ um vetor de Von Neumann de C. Então $\bar{y} \geqslant \hat{k}\bar{x}$, sendo $\hat{x} > 0$. Logo $\hat{k}(p, \bar{x}) \leqslant (p, \bar{y}) \leqslant (1 + r)(p, \bar{x})$ e portanto:

$$r \geqslant \hat{k} - 1 > 0 \tag{7.24}$$

o que mostra que a taxa de lucro numa trajetória de Morishima-Von Neumann é maior ou igual ao multiplicador máximo factível de C menos 1. Tendo em vista o Lema 7.2 e a relação $g = rs$:

$$s(\hat{k} - 1) \leqslant g \leqslant \hat{k} - 1. \tag{7.25}$$

Cuidemos agora do caso em que $s = 0$, isto é, aquele em que os capitalistas consomem toda sua renda. Nesse caso, $(p, f(p)) = 1$ para todo sistema de preços p. Tomemos uma seqüência decrescente $\{s_n\} \to 0$ de reais positivos e menores do que 1. Substituindo $f(p)$ por $(1 - s_n) f(p)$, a taxa de poupança dos capitalistas será positiva, igual a s_n. Logo, pelo que se demonstrou, existirão: a) uma seqüência $\{\hat{x}_n; \hat{y}_n\}$ de pontos de C tais que $\|\hat{y}_n\| = 1$; b) uma seqüência p_n de sistemas de preços; c) uma seqüência r_n de taxas de lucro, tais que:

$$\hat{y}_n - (1 + r_n s_n)\hat{x}_n - r_n (p_n, \hat{x}_n)(1 - s_n) f(p_n) \geqslant 0$$

$$(p_n, y) \leqslant (1 + r_n)(p_n, x) \text{ para todo } \{x; y\} \in C.$$

A primeira relação implica $\hat{x}_n \leqslant \hat{y}_n$ e portanto $\|\hat{x}_n\| \leqslant \|\hat{y}_n\| = 1$. Logo a seqüência $\{\hat{x}_n; \hat{y}_n\}$ é limitada. Dela também se conclui que a seqüência $\{r_n\}$ das taxas de lucro é limitada. Com efeito, se $\{r_n\}$ fosse ilimitada, existiria uma subseqüência $\{\hat{x}_h; \hat{y}_h\}$ de $\{\hat{x}_n; \hat{y}_n\}$ tal que $(p_h, \hat{x}_h)$ tendesse a zero. Como a seqüência $3m$-dimensional $\{\hat{x}_h; \hat{y}_h; p_h\}$ é limitada, existiria um ponto $\{\hat{x}; \hat{y}\}$ de C e um sistema de preços p tais que $\|\hat{y}\| = 1$, $\hat{y} \geqslant \hat{x}$ e $(p, \hat{x}) = 0$. Mas isso é impossível, pois a irredutibilidade de C exige $\hat{x} > 0$.

Isto posto, da seqüência limitada $\{\hat{x}_n; \hat{y}_n; p_n; r_n\}$ extraiamos uma subseqüência convergente para $\{\hat{x}; \hat{y}; p; r\}$. Por passagem ao limite, e como $s_n \to 0$:

$$\hat{y} - \hat{x} - r(p, \hat{x})\, f(p) \geqslant 0$$

$$(p, x) \leqslant (1 + r)(p, x) \text{ para todo } x; y) \in C.$$

Como $\hat{y} \geqslant \hat{x}$, a irredutibilidade de *C* implica $(p, \hat{x}) > 0$. Pela desigualdade (7.24) resulta $r(p, \hat{x}) > 0$.

No caso dos cones matriciais de Von Neumann $C = \left\{\{Az; Bz\} \mid z \geqslant 0\right\}$, as relações 7.18 a 7.20 transformam-se em:

$$B\hat{z} - (1 + rs)A\hat{z} - r(p, A\hat{z})\, f(p) \geqslant 0 \tag{7.26}$$

$$r(p, A\hat{z}) > 0 \tag{7.27}$$

$$B'p \leqslant (1 + r)A'p \tag{7.28}$$

$\hat{z}$ indicando a intensidade de uso dos processos básicos na trajetória de Morishima-Von Neumann. Dessas relações se conclui facilmente que:

$$(B'p, \hat{z}) = (1 + r)(A'p, \hat{z}) = (1 + r)(p, A\hat{z}) = (p, B\hat{z}). \tag{7.29}$$

7.3 Economia marxista e as trajetórias de Morishima-Von Neumann

As trajetórias de Morishima-Von Neumann solucionam o problema de reprodução, discutido no Livro II de *O capital*. A reprodução simples corresponde ao caso em que os capitalistas consomem toda sua renda, isto é, $s = 0$; a reprodução ampliada, ao caso em que $0 < s < 1$. A análise não só se estende naturalmente à produção conjunta, como dispensa a estranha função investimento postulada por Marx a fim de situar a economia em crescimento geométrico: nas trajetórias de Morishima-Von Neumann os capitalistas procuram as oportunidades mais lucrativas de investimento. O calcanhar-de-aquiles da análise é o já assinalado no item 3: presume-se que alguma coincidência feliz situe a economia nas condições iniciais de uma trajetória geométrica de crescimento.

A título de exercício, introduzamos o consumo dos capitalistas no exemplo numérico do item 3. Temos um sistema matricial de Von Neumann onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Normalizaremos o sistema de preços $p = (p_1, p_2, p_3)$ pela condição $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ e admitiremos que o consumo dos capitalistas seja regido pela função:

$$f(p) = (1 - s) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Examinemos três casos:

a) $s = 1$: esse é o caso em que os capitalistas reinvestem toda sua renda, o do modelo de Von Neumann em sua forma usual. Como vimos no subitem 3.5, a trajetória de Von Neumann expande a economia à taxa de 9,43% por período, que também é a taxa de lucro. As intensidades de uso dos processos nessa trajetória são proporcionais a $z_0 = (0{,}7365; 0{,}0095; 0; 0; 0{,}2540)$. Tem-se $Bz_0 = 1{,}0943Az_0 = (2{,}9840, 2{,}2095, 3{,}2445)$. O sistema de preços é dado por $p = (0{,}3976; 0{,}2487; 0{,}3537)$. Chega-se a $(B' - 1{,}0943A')\,p = (0; 0; -0{,}150; -0{,}428; 0)$. Os processos I, II e V, utilizados na trajetória de Von Neumann, proporcionam uma taxa de lucro exatamente igual a 9,43% por período ao sistema de preços *p*. Os processos III e IV dão taxas de lucro inferiores a esses 9,43% e por isso não são utilizados;

b) $s = 0$: esse é o caso da reprodução simples em que os capitalistas consomem toda sua renda. Encontra-se uma trajetória de Morishima-Von Neumann à mesma taxa de lucro de 9,43% por período e ao mesmo sistema de preços $p = (0{,}3976; 0{,}2487; 0{,}3537)$ do caso em que $s = 1$. As intensidades de uso dos processos nesta trajetória são proporcionais a $z = (0{,}75; 0; 0; 0; 0{,}25)$. Encontra-se $Az = (2{,}75; 2; 3)$ e $Bz = (3; 2{,}25; 3{,}25)$. A renda dos capitalistas $r(p, Az) = 0{,}25$ e seu consumo $r(p, Az) f(p)$ é dado pelo vetor $(0{,}25; 0{,}25; 0{,}25)$. Tem-se $Bz = Az + r(p, Az) f(p)$.

O exercício supõe que, em algum período inicial, o estoque disponível dos três bens seja proporcional a (2,75; 2; 3). A utilização dos processos I, II e V permite que, no fim do período, se obtenham as quantidades (3; 2,25; 3,25). Dessas quantidades, os capitais tiram (0,25; 0,25; 0,25) para o seu consumo e repõem o capital inicial (2,75; 2; 3) para a produção do período seguinte;

c) $s = 0{,}8$: estamos agora diante de um caso de reprodução ampliada. Encontra-se uma trajetória de Morishima-Von Neumann com a mesma taxa de lucro e o mesmo sistema de preços dos casos *a* e *b*. A taxa de crescimento físico do sistema $g = sr = 0{,}8 \times 0{,}0943 = 7{,}544\%$. Os processos básicos se utilizam com intensidades proporcionais a $(0{,}7391; 0{,}0077; 0; 0; 0{,}2532)$. A renda dos capitalistas $r(p, Az) = 0{,}2488$ e o consumo dos capitalistas $r(p, Az)\, f(p) = (0{,}0497; 0{,}0497; 0{,}0497)$. Tem-se $Az = (2{,}7314; 2{,}0154; 2{,}9718)$, $Bz = (2{,}9872; 2{,}2713; 3{,}2455)$ e $Bz = 1{,}07544Az + r(p, Az)\, f(p)$. O exercício supõe que inicialmente o capital empregado na produção seja o vetor $Az = (2{,}7314; 2{,}0154; 2{,}9718)$. A combinação dos processos I, II e V permite que se obtenham as quantidades Bz no fim do período. Retirado o consumo dos capitalistas, sobram as quantidades $1{,}07544\,Az$ para serem empregadas como capital no período seguinte, permitindo que a economia competitiva se expanda geometricamente à taxa de 7,544% por período.

No exemplo anterior a mudança na propensão a poupar dos capitalistas nem altera os preços nem as taxas de lucro das trajetórias de Morishima-Von Neumann. Um exemplo simples, no entanto, ilustra essa possibilidade de mudança dos preços e da taxa de lucro. Tomemos uma economia com dois produtos, um único processo e com a seguinte descrição do consumo dos capitalistas.

$$A = \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \end{bmatrix} \quad f(p) = (1-s) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Indiquemos por g a taxa de expansão física do sistema. Como os capitalistas consomem iguais quantidades de ambos os produtos, haverá sobra do segundo produto se $6 - 5(1+g) > 20 - 18(1+g)$, isto é, se $g > 1/13$. Nesse caso, $p = (p_1, p_2) = (1; 0)$ e portanto $1 + r = 20/18$, ou seja, $r = 1/9$. Como $g = sr$, esse caso ocorre para $s > 9/13$. Haverá sobra do primeiro bem, o que implica $p = (0; 1)$ e portanto $r = 1/5$ se $g < 1/13$, o que implica $s < 5/13$. Para $5/13 \leqslant s \leqslant 9/13$ tem-se $g = 1/13$, $r = 1/13s$, $p = (p_1, p_2)$, onde

$$p_1 = \frac{s - 5/13}{1 - s} \quad ; \; p_2 = \frac{18/13 - 2s}{1 - s}.$$

Num caso particular pode-se assegurar que nem os preços nem a taxa de lucro depende do consumo dos capitalistas: nos sistemas fechados de Leontief, isto é, nos modelos matriciais de Von Neumann do tipo $\{M; I\}$ onde M é uma matriz quadrada indecomponível e I a matriz identidade. Numa trajetória de Morishima-Von Neumann todos os bens devem ser produzidos, já que só estamos tratando de sistemas irredutíveis. Logo, $p = (1 + r) M'p$, sendo p semipositivo. Pelo Teorema 5.10, $1 + r$ é o inverso da raiz de Frobenius e p o vetor de Frobenius (positivo e unicamente determinado a menos de uma constante multiplicativa) da matriz M'.

Com preços todos positivos não pode haver sobra de nenhum bem. Assim, as quantidades produzidas x devem ser tais que:

$$x = (1 + g) Mx + r(p, Mx) f(p) = (1 + g) Mx + r(M'p, x) f(p)$$

ou, como $(1 + r) M'p = p$:

$$(I - (1 + g) M) x = \frac{r}{1 + r} (p, x) f(p) \tag{7.30}$$

Se $s = 1$, isto é, se os capitalistas reinvestem toda a sua renda, $g = r$ e $f(p) = 0$: recaímos no modelo fechado de Leontief, onde x é um vetor de Frobenius de M. Se $0 \leqslant s < 1$, a matriz $(1 + g)M$ possui raiz de Frobenius $(1 + g)/(1 + r) = (1 + sr)/(1 + r) < 1$. Pelo Teorema 5.12 e pela indecomponibilidade de M, $I - (1 + g)M$ será não-singular com inversa positiva. Os vetores da forma:

$$x = \lambda (I-(1+g)M)^{-1} f(p) \qquad (7.31)$$

onde λ indica uma constante positiva, resolvem a equação (7.30). Com efeito: $\lambda(1-s) = \lambda(p, f(p)) = (p, (I-(1+g)M)x) = ((I-(1+g)M')p, x) = (1-(1+g)/(1+r))(p,x)$. Como $g = sr$ resulta:

$$\frac{r}{1+r}(p, x) = \lambda$$

e portanto:

$$\frac{r}{1+r}(p, x) f(p) = (I-(1+g)M)x.$$

Reciprocamente, tomando $\frac{r}{1+r}(p, x) = \lambda$, verifica-se que toda solução da equação (7.30) é expressa pela fórmula (7.31).

Tomemos o exemplo numérico do item 5 em que a matriz *M* é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

A taxa de lucro da economia é $r = 0{,}113913$ e o sistema de preços $p = (0{,}327342; 0{,}226446; 0{,}308436)$. Suponhamos que, a esse sistema de preços, o consumo dos capitalistas se associe ao vetor:

$$f(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}242164 \end{bmatrix}$$

Encontra-se $(p, f(p)) = 1$, o que nos leva à reprodução simples com $s = g = 0$. A equação (7.30) resolve-se para $x = (1; 1{,}4; 1{,}04)$. Encontra-se a renda dos capitalistas $r(p, Mx) = 0{,}0987$ e seu consumo $r(p, Mx) f(p) = (0; 0; 0{,}32) = x - Mx$.

Como vimos no item 5, no caso da produção simples é possível estabelecer uma contabilidade em horas de trabalho, na qual o valor marxista de cada produto é determinado pelos coeficientes técnicos de matérias-primas e de mão-de-obra. Pelo que acabamos de demonstrar, os preços nas trajetórias de Morishima-Von Neumann independem, nesse caso, do consumo dos capitalistas. Isso nos permite usar as fórmulas do subitem 5.5 para transformar valores marxistas em preços de mercado ainda que os capitalistas consumam uma fração constante de sua renda. Há apenas uma ressalva importante e que se refere à expressão marxista:

$$r = \frac{S}{C+V} \qquad (7.32)$$

onde r indica a taxa de lucro (nivelada em todos os setores pela contabilidade em preços), C, V e S, respectivamente, o capital constante, o capital variável e a mais-valia, na contabilidade em valores.

Pelo que foi visto no subitem 5.5, a fórmula anterior, embora não necessariamente se verifique em cada setor produtivo, é válida para o conjunto da economia, desde que os capitalistas reinvistam a totalidade dos lucros. Com efeito, a expressão (7.32) obtém-se imediatamente da fórmula de Morishima-Seton (5.19) multiplicando-se pelo capital variável total V o numerador e o denominador da igualdade:

$$r = \frac{e}{k+1} \cdot$$

A demonstração do teorema de Morishima-Seton usa, entre outras coisas, a observação de as quantidades produzidas nos diversos setores serem as componentes de um vetor de Frobenius da matriz M, o que se verifica nas trajetórias de Von Neumann sem consumo dos capitalistas do modelo fechado de Leontief. A introdução do consumo dos capitalistas pode mudar as proporções em que se produzem os diversos bens e nada assegura, *a priori*, que os vetores determinados pela equação (7.31) sejam vetores de Frobenius da matriz M. Isto posto, não há como sustentar a expressão marxista (7.32) quando há consumo dos capitalistas. No exemplo numérico do subitem 5.5, tomando as quantidades produzidas como descritas pelo vetor (1; 1,4; 1,04) encontrado no exercício anterior, obtém-se $C = 0{,}519273$, $V = 0{,}346183$, $S = 0{,}101818$ para os totais do capital constante, do capital variável e da mais-valia. Segue-se que:

$$\frac{S}{C + V} = 0{,}117647 \neq 0{,}113913 = r.$$

A expressão marxista (7.32) equivale a:

$$\frac{r}{1 + r} = \frac{S}{C + V + S} \tag{7.33}$$

verificando-se para o conjunto da economia sem consumo dos capitalistas como corolário da fórmula de Morishima-Seton. Como o lucro total da economia (com ou sem consumo dos capitalistas) é expresso por:

$$L = r\,(p, Mx) = r\,(M'\,p, x) = \frac{r}{1 + r}\;(p, x)$$

a relação (7.33) equivale a:

$$\frac{L}{(p, x)} = \frac{S}{C + V + S} \cdot$$

No subitem 5.5 normalizamos os preços de modo a se ter $(p, x) = C + V + S$, isto é, de modo a igualar as avaliações da produção total x nas duas contabilidades, a dos valores marxistas e a dos preços de mercado competitivo. Com essa normalização, o total de lucros se igualava ao total de mais-valias. Esse resultado, equivalente ao teorema de Morishima-Seton, não se pode sustentar quando os capitalistas consomem uma fração positiva de sua renda.

A introdução do consumo dos capitalistas em nada altera a análise do item 3 sobre o problema da taxa decrescente de lucro. Ao admitir que, numa economia com rendimentos constantes, as inovações mantivessem os salários inalterados e baixassem as taxas de lucro, Marx tentou provar o impossível. A demonstração é a mesma do subitem 3.6: tomemos como numerário $q_0 = \bar{y}$, onde $\{\bar{x}; \bar{y}\}$ é um vetor de Von Neumann do cone tecnológico K. Então, $\bar{y} \geqslant \hat{k}\bar{x} > 0$, onde $\hat{k}$ é o multiplicador máximo factível em K. Segue-se da relação (7.8) que:

$$\hat{k} = \hat{k}(p^e_{t+1}, \bar{y}) \leqslant \hat{k}(1 + r^e_t)(p, \bar{x}) \leqslant (1 + r^e_t)(p, \bar{y}) = 1 + r^e_t .$$

Em suma, a taxa de lucro esperada tem como piso $\hat{k} - 1$. Inovações equivalem a uma ampliação do cone tecnológico K, só podendo aumentar esse piso.

Referências bibliográficas

Chenery, H. B. & Clark, P. G. *Interindustry economics.* Wiley, 1959.

Debreu, G. & Hernstein, I. N. Non-negative square matrixes. *Econometrica, 21,* Oct. 1953.

Dorfman, R.; Samuelson, P. A. & Solow, R. *Linear programming and economic analysis.* McGraw-Hill, 1958.

Gale, D. The closed linear model of production. In: Kuhn, H. W. & Tucker, A. W., ed. *Linear inequalities and related systems.* Princeton University Press, 1956.

______. *The theory of linear economic models.* McGraw-Hill, 1960.

Kemeny, J. G.; Morgenstern, O. & Thompson, G. L. A generalization of the Von Neumann model of an expanding economy. *Econometrica, 24,* Apr. 1956.

Koopmans, T. C., ed. *Activity analysis of production and allocation.* Wiley, 1951.

Leontief, w. *Studies in the structure of the american economy.* Oxford University Press, 1953.

______. *Input-output economics.* Oxford University Press, 1966.

Marx, K. *Das Kapital.* 4ª ed. rev. e ed. por F. Engels. Hamburgo, 1890.

Morishima, M. *Equilibrium, stability and growth, a multi-sectorial analysis.* Clarendon Press, 1964.

______. *Marx's economics.* Cambridge University Press, 1973.

Neumann, J. von. Uber ein ökonomisches Gleichungsystem und ein Verallgemeinung des Brouwerschen Fixpunkt Satzes. *Ergebmisse eines Mathematisches Kolloquium,* Wien, *8,* 1937.

Nikaido, H. *Convex structures and economic theory.* Academic Press, 1968.

Pasinetti, L. L. *Growth and income distribution.* Cambridge University Press, 1974.

Ricardo, D. The principles of political economy and taxation. In: *The works and correspondence of David Ricardo.* Cambridge University Press, 1976.

Robinson, J. *An essay on marxian economics.* Macmillan, 1949.

Smith, A. An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations. 1776. In: *Encyclopedia Britannica.* 1978.

Sweezy, P. *The theory of capitalist development.* Dennis Dobson, 1942.

Sraffa, P. *Production of commodities by means of commodities.* Cambridge University Press, 1960.

Takayama, A. *Mathematical economics.* Dryden Press, 1974.