A teoria monetária e o equilíbrio geral walrasiano com um número infinito de bens

Aloísio P. Araujo*

1. Introdução; 2 O modelo de Overlapping Generations de Samuelson; 3. A existência de equilíbrio e de ótimos de Pareto com um número infinito de bens.

1. Introdução

O objetivo do presente trabalho é o de apresentar e desenvolver alguns elementos básicos da teoria monetária moderna.

No item 2, apresentamos as motivações do modelo de Overlapping Generations devido a P. Samuelson (1958). Para tal nos baseamos em alguns trabalhos apresentados em uma conferência sobre o tema em 1980, patrocinada pelo Banco Central dos EUA, em Minneapolis (Federal Reserve Bank of Minneapolis). Aqui, cabe ressaltar que, embora de uso corrente na literatura internacional de teoria monetária, o modelo de Overlapping Generations permanece relativamente pouco utilizado no Brasil, daí a importância de sua divulgação. Em particular, utilizamos um trabalho de D. Cass & K. Shell (1980). No item 2 também apresentamos, formalmente, o trabalho de Samuelson (1958).

No item 3 estudamos as questões de existência de alocações de Pareto e do equilíbrio walrasiano para economias com algumas das características das do modelo de Samuelson de Overlapping Generations.

Finalmente, no anexo 1, apresentamos as demonstrações dos teoremas apresentados no item 3.

A seguir, vamos apresentar motivação para o estudo de moeda em economias com um número infinito de bens. Para tal, vamos utilizar-nos de um trabalho de Cass & Shell (1980).

A moeda, que é uma forma de débito do governo, serve a vários propósitos, entre os quais vale ressaltar o de meio de transações e de reserva de valor. Mas para a moeda servir como meio de transações certamente deve servir como reserva de valor. Desse modo, vamos estudar modelos em que esta função está particularmente justificada.

* Professor em tempo parcial na Escola de Pós-Graduação em Economia da FGV; professor no Impa. O autor agradece a P. Klinger Monteiro que muito ajudou na elaboração destas notas.

É claro que num modelo com horizonte finito de tempo a moeda não pode servir como reserva de valor, pois neste caso teria preço zero no último período. Contudo, se este valor é zero no último período, os agentes da economia vão recusar a moeda no período imediatamente anterior, levando o preço, neste período, também para zero e assim por diante, o que faz com que o preço da moeda seja zero em todos os períodos. O modo mais natural de enfrentar essa dificuldade é com um número infinito de períodos e, portanto, um número infinito de bens. Convém notar também a artificialidade dos outros modelos que dão preço positivo à moeda. Assim, por exemplo, os modelos que simplesmente introduzem a moeda na função utilidade ou na de produção caem no mínimo numa circularidade, pois neste caso a utilidade ou a produtividade da moeda dependem do preço.

Mesmo num modelo com um número infinito de períodos, podemos supor que os indivíduos sabem que não viverão eternamente e que sua influência não se estenderá muito além de sua vida, mas supõem que as instituições econômicas contemporâneas são eternas. Um modelo que se encaixa bem nesse contexto é então o modelo de Overlapping Generations: os agentes econômicos têm vida finita, as diversas gerações se sucedendo superpostas, enquanto se supõe que a sociedade econômica permaneça sem término. Podemos acrescentar que os modelos de teoria monetária do tipo Overlapping Generations são genuinamente dinâmicos e desagregativos: há reconhecimento explícito da mortalidade (e vitalidade) dos consumidores e sua evolução, como aparecem claramente os objetivos e restrições a que estão sujeitos os agentes econômicos e, portanto, a origem de seu comportamento individual, tanto como a solução da economia da interação dos diversos agentes econômicos.

Poderíamos achar um tanto quanto pretensiosa a defesa dos modelos de Overlapping Generations com base no seu caráter dinâmico e desagregativo, pois estes são muito elementares – por exemplo, no modelo de Samuelson temos consumidores idênticos, dois períodos de vida, ausência de produção etc.

No entanto, modelos simples servem de guia sobre possíveis generalizações e nos dizem muita coisa importante também; o próprio modelo de Samuelson nos diz que, devido à própria natureza unidirecional e infinita do tempo, um equilíbrio competitivo pode deixar de ser ótimo de Pareto. O exemplo nos diz também que a introdução da moeda é compatível com uma infinidade de equilíbrios monetários (corresponde a $0 < p_m \leqslant \frac{1}{2}$ no exemplo apresentado no item 2).

Para finalizar, devemos lembrar que existem poucos teoremas gerais sobre modelos de Overlapping Generations, pois pouco é conhecido de suas propriedades mais básicas, exceto nas formas mais simples. Mas, nessa pesquisa, o modelo de Samuelson tem também um papel importante pela percepção intuitiva que fornece.

2. O modelo de Overlapping Generations de Samuelson

A economia existe por um número infinito de períodos $t = 1, 2, \ldots$ Existe um único bem que será distinguido pela data em que se torna disponível e que dura somente este período. Notemos que passamos a ter um número infinito de bens: um para cada período $t \geq 1$. A economia possui uma moeda fiduciária.

Nasce somente um consumidor em cada período e este vive dois períodos (incluindo-se o período em que nasceu). No período inicial da economia $t = 1$ existe um único consumidor e este morre em $t = 2$. Supõe-se também que $U_t(c_t^t, c_{t+1}^t) = V(c_t^t) + V(c_{t+1}^t)$ é a função de utilidade do consumidor que nasce no período t, onde c_t^t é o seu consumo quando novo e c_{t+1}^t é o seu consumo quando velho.

O consumidor da primeira geração tem uma dotação de moeda $m_1 = 1$, os outros não possuindo inicialmente nenhuma dotação de moeda. A dotação inicial do t-ésimo consumidor é denotada $y^t = (y_t^t, y_{t+1}^t)$. Cada consumidor pode comprar ou vender (dentro de seu período de vida e valor de suas dotações iniciais) tanto o bem de consumo, a preço p_t no período t e moeda a preço $p_{mt} = p_m$.

Uma alocação factível nessa economia é $((c_t^t, c_{t+1}^t))_{t \geq 1}$ tal que:

a) $(c_t^t, c_{t+1}^t) \geq 0 \quad t \geq 1$;

b) $c_1^1 \geq y_1^1$;

c) $c_t^t + c_t^{t-1} \leq y_t^t + y_t^{t-1} \quad t \geq 2$.

Um equilíbrio nessa economia é um sistema de preços $(p_t)_{t \geq 1}, p_t \geq 0$, um preço $p_m \geq 0$ para a moeda e uma alocação factível $((x_t^t, x_{t+1}^t))_{t \geq 1}$ tal que para todo $t \geq 1$ (x_t^t, x_{t+1}^t) maximiza a utilidade do consumidor t dentro de sua restrição orçamentária.

Para $t = 1$ (x_1^1, x_2^1) maximiza $U_1(c_1^1, c_2^1)$ sujeito a:

a) $(c_1^1, c_2^1) \geq 0$;

b) $p_1 c_1^1 + p_2 c_2^1 \leq p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_m m_1$.

Para $t \geq 2$ (x_t^t, x_{t+1}^t) maximiza $U_t(c_t^t, c_{t+1}^t)$ sujeito a:

a) $(c_t^t, c_{t+1}^t) \geq 0$;

b) $p_t c_t^t + p_{t+1} c_{t+1}^t \leq p_t y_t^t + p_{t+1} y_{t+1}^t$

Uma alocação factível $((c_t^t, c_{t+1}^t))_{t \geq 1}$ é ótimo de Pareto se não existe uma alocação factível $((c'^t_t, c'^t_{t+1}))_{t \geq 1}$ que melhora alguém sem piorar outro:

a) existe $h \geq 1$ com $U_h(c'^h_h, c'^h_{h+1}) > U_h(c_h^h, c_{h+1}^h)$;

b) para todo $t \geq 1$ $U_t(c'^t_{t+1}) \geq U_t(c_t^t, c_{t+1}^t)$.

Supomos V côncava e crescente. Vejamos um equilíbrio (sem moeda) que não é ótimo de Pareto.

Vamos supor $y_t^t = 1$, $y_{t+1}^t = 0$ para todo $t \geqslant 1$. A ausência de moeda corresponde a $p_m = 0$ Seja $x_t^t = x_{t+1}^t = \frac{1}{2}$ $t \geqslant 1$ e $p_t = 1$ $t \geqslant 1$. Temos que $(p_t)_{t \geqslant 1}$, $p_m = 0$ e $((x_t^t, x_{t+1}^t))_{t \geqslant 1}$ é um equilíbrio competitivo que não é ótimo de Pareto.

Verifiquemos isto:

$((x_t^t, x_{t+1}^t))_{t \geqslant 1}$ é uma alocação factível pois $x_1^1 = \frac{1}{2} \leqslant y_1^1 = 1$ e $x_t^t + x_t^{t-1} =$

$= 1 = y_t^t + y_t^{t-1}$ para $t \geqslant 2$.

Agora $(x_t^t, x_{t+1}^t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ maximiza $U_t(c_t^t, c_{t+1}^t) \geqslant 0$ sujeito a $c_t^t + c_{t+1}^t$

$\leqslant y_t^t + y_{t+1}^t = 1, (c_t^t, c_{t+1}^t) \geqslant 0$ pois $U_t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geqslant U_t(\frac{c_t^t + c_{t+1}^t}{2}, \frac{c_t^t + c_{t+1}^t}{2})$

$= 2V(\frac{c_t^t + c_{t+1}^t}{2}) \geqslant U_t(c_t^t, c_{t+1}^t)$. Mas esse equilíbrio não é ótimo de Pareto, pois $((x_t'^t, x_{t+1}'^t))_{t \geqslant 1}$ onde $(x_t'^t, x_{t+1}'^t) = (x_t^t, x_{t+1}^t)$ $t \geqslant 2$ e para $t = 1$ $(x_1'^1, x_2'^1) = (1, \frac{1}{2})$, é uma alocação factível que melhora 1 sem piorar ninguém. Temos, no entanto, que essa nova alocação, com $p_t = 1$ $t \geqslant 1$, $p_m = \frac{1}{2}$ dá um equilíbrio (com moeda) que é ótimo de Pareto. A verificação é simples, pois $((x_t', x_{t+1}'^t))_{t \geqslant 1}$ é ótimo de Pareto e $p_m \cdot m_1 = 1 - x_1^1 = \frac{1}{2}$ é justamente a renda que faltava para o consumidor 1 comprar $\frac{1}{2}$ unidade a mais do primeiro bem.

3. A existência de equilíbrio e de ótimos de Pareto com um número infinito de bens

Uma vez estabelecida a importância para a teoria monetária das economias com um número infinito de bens, passamos ao seu estudo mais detalhado. Em primeiro lugar, vamos analisar o problema da existência de ótimos de Pareto e do equilíbrio walrasiano em economias com um número infinito de bens, mas um número finito de agentes econômicos. Para tal nos utilizamos dos trabalhos de Bewley (1972) e Araujo (1985).

Em seguida, estudamos o problema da existência de equilíbrio walrasiano em economias com um número infinito de bens e de consumidores. Para tal, utilizamos os trabalhos de Wilson (1981).

3.1 *Existência de equilíbrios walrasianos e pontos ótimos de Pareto em economias com um número infinito de bens mas um número finito de agentes econômicos*

Vamos definir inicialmente o contexto em que trabalharemos.

Temos um número infinito de períodos indexados por t: $t = 1, 2, 3, \ldots$ A economia possui um único bem (embora possamos, reinterpretando os símbolos, abranger o caso de um número finito de bens em cada período) e não possui produção – o artigo de Bewley (1972) inclui produção. O número de consumidores é $I \geqslant 1$. A cada consumidor i, $1 \leqslant i \leqslant I$ está associado:

a) o seu conjunto de possibilidades de consumo X_i, onde $X_i = \ell_+^\infty = \{(x_t)_{t \geqslant 1}, x_t \geqslant 0, t \geqslant 1$ e a seqüência é limitada $\}$. A seqüência $(x_t)_{t \geqslant 1} \in X_i$ dá a quantidade (potencialmente) consumida pelo consumidor i no período t, $t = 1, 2, \ldots$;

b) sua relação de preferências $\succcurlyeq_i \subset X_i x X_i$ que é suposta completa, reflexiva e transitiva;

c) sua dotação inicial $\omega_i \in X_i$.

Uma alocação factível é um vetor

$$(x_1, \ldots, x_I), x_\ell \in X_\ell \quad 1 \leqslant \ell \leqslant I \text{ tal que } \sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_i.$$

Uma alocação factível $(x_1, \ldots, x_I)$ é ótimo de Pareto se não existe uma alocação factível $(y_1, \ldots, y_I)$ tal que $y_j \succcurlyeq_j x_j$ $j = 1, \ldots, I$ e para algum consumidor a, $y_a \succ_a x_a$.

Antes de prosseguirmos, precisamos de uma pequena digressão sobre topologias. Essa discussão no caso de um número finito de bens não é necessária, pois as topologias que mencionaremos coincidem.

Se S é um conjunto, uma coleção T de subconjuntos de S é uma topologia em S se

a) $\phi \in T, S \in T$;

b) se $A \in T$ e $B \in T$ então $A \cap B \in T$;

c) toda união de elementos de T está em T: se $A_\alpha \in T$ para $\alpha \in A$ então $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in T$.

Os elementos de T são chamados de abertos.

Dada uma topologia T em ℓ_+^∞ por exemplo, podemos definir precisamente a noção de que, se $\bar{x}$ é preferível a $\bar{y}$, então cestas próximas de $\bar{x}$ são preferíveis a cestas próximas de $\bar{y}$. Se $\bar{x} \succ \bar{y}$ e existem aberto U e V com $\bar{x} \in U$ e $\bar{y} \in V$ tais que se $x \in U$ e $y \in V$, então $x \succ y$. Uma preferência que satisfaz essa definição é dita T contínua.

Uma topologia não determina somente as preferências contínuas, determina também os sistemas de preços admissíveis. Se X e Y são conjuntos e T e T' topologias em X e Y, respectivamente, uma função $f: X \to Y$ é contínua em $\bar{x} \in X$ se para todo $V \in T'$ com $f(\bar{x}) \in V$, existe $U \in T$ com $\bar{x} \in U$ tal que $f(U) \subset V$. Dito em outras palavras, f é contínua em $\bar{x}$ se dado y próximo de $f(\bar{x})$

$(y \in V)$ para todo x suficientemente próximo de $\bar{x}$ $(x \in U)$, $f(x)$ está próximo de y.

Um equilíbrio é um par $((x_1, \ldots, x_I), \pi)$, $\pi \in \ell^1$, $\pi \neq 0$ e $(x_1, \ldots, x_I)$ é uma alocação factível tal que, para todo consumidor i, x_i maximiza $>_i$ na sua restrição orçamentária $\{x \in \ell_+^\infty, \pi x \geqslant \pi\omega_i\}$, isto é, se $y \in \ell_+^\infty$, $\pi y \geqslant \pi\omega_i$ então x_i é preferível ou indiferente a y.

$$\text{Seja } K_1 = \left\{x \in \ell_+^\infty;\ \inf_{i \geqslant 1} x_i > 0\right\}$$

Hipótese de monotonicidade: para todo consumidor i, se $x \in \ell_+^\infty$ e $k \in K_1$, então $x + k >_i x$.

Hipótese de suficiência: $w_i \in K_1$ para todo i.

Hipótese de convexidade: para todo i, $\geqslant_i$ é fracamente convexa $\{x \in \ell_+^\infty;$ $x \geqslant_i y$ é convexo para $y \in \ell_+^\infty$.

Hipótese de continuidade: para todo i, $\geqslant_i$ é contínua na topologia estrita de ℓ^∞ onde T_s a topologia estrita de ℓ^∞ tem a propriedade de que $\{f: \ell^\infty \to \mathcal{R}$, f é linear e T_s contínua$\} = \ell^1$.

- *Teorema 1*

Nessas hipóteses existe um equilíbrio $((x_1, \ldots, x_I)\ \pi)$, π positivo.

Esse é o teorema de existência de equilíbrio de Bewley (caso particular). Não apresentaremos a prova, que é longa.

- *Teorema 2*

A alocação de equilíbrio $(x_1, \ldots, x_I)$ é ótimo de Pareto.

Prova: suponhamos que não fosse. Existiria uma alocação factível $(y_1, \ldots, y_I)$ tal que $y_j \geqslant_j x_j$ para todo j com $(>)$ para algum j. Mas então temos $\pi y_j \geqslant \pi x_j$ para todo j com $(>)$ para algum j, logo

$$\pi\left(\sum_{j=1}^{I} w_j\right) = \pi\left(\sum_{j=1}^{I} y_j\right) = \sum_{j=1}^{I} \pi y_j > \sum_{j=1}^{I} \pi x_j = \pi\left(\sum_{j=1}^{I} x_j\right) = \pi\left(\sum_{j=1}^{I} w_j\right)$$

o que é uma contradição.

A seguir apresentaremos o teorema de não-existência de ótimo de Pareto.

Para o Teorema de Bewley, necessitamos que as preferências sejam contínuas na topologia estrita de ℓ^∞. Seria interessante generalizar este teorema para topologias maiores que a estrita; teríamos, por exemplo, mais preferências contínuas.

O teorema que enunciaremos (e provaremos no anexo 1), embora permitindo preferências não-monótonas, mostra que topologias maiores que a estrita admitem a não-existência de Pareto otimalidade e, em particular, a não-existência de equilíbrio.

- *Teorema 3*

Suponhamos que:
a) T é uma topologia localmente convexa em ℓ^∞, se $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ = "a menor topologia localmente convexa em ℓ^∞ com $(\ell^\infty)' = \ell^1$ e então $\sigma(\ell^\infty, \ell^1) \subset T \subset T_\infty$, onde T_∞ é a topologia da norma em ℓ^∞.
Obs.: as definições de topologia localmente convexa de $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ e T_∞ podem ser vistas por exemplo em um livro de análise funcional mas não são essenciais para o que se segue;
b) para todo i, $\geqslant_i$ é T-contínua;
c) existe $F \subset \ell^\infty$ subespaço de dimensão finita tal que se $x \in \ell_+^\infty$ e $1 \leqslant i \leqslant I$ existe $x' \in \ell_+^\infty \cap F$ com $x' \geqslant_i x$;
d) existe $a > 0$ tal que $w_{it} > a \ \forall i = 1, \ldots, I, \ t \geqslant 1$;
e) vale a hipótese de convexidade.

Então, se toda economia $\epsilon = (X_i, \geqslant_i, \omega_i, i = 1, \ldots, I)$ que satisfaz essas hipóteses possui equilíbrio, temos $T \subset T_S$.

Prova: ver anexo 1.

As hipóteses *a*, *b* e *e* são praticamente necessárias para se provar a existência de equilíbrio. A respeito da hipótese *d*, dificilmente seria aceitável um teorema de existência de equilíbrio (ou, mais geralmente, de pontos ótimo de Pareto) que não abrangesse esse caso. Quanto à hipótese *c*, gostaríamos de restringi-la para preferências monótonas. De acordo com a prova apresentada no anexo 1, necessitaríamos nesse caso da existência de um funcional linear T contínuo e positivo que não estivesse em ℓ^1. Porém, isto não é sempre possível; sobre este ponto, ver, por exemplo, Klinger (1984, seção 3.3).

3.2 *Existência de equilíbrio em economias com um número infinito de bens e de consumidores*

Aqui, como já dissemos, nos baseamos no trabalho de Wilson (1981).

Chamaremos de A o conjunto de consumidores e $X_i = \{(x_t)_{t \geqslant 1}; x_t \geqslant 0$ para todo $t\}$ é o espaço de consumo do consumidor $i \in A$. A preferência $>_i$ de i será suposta, completa, reflexiva e transitiva, contínua na topologia produto do

$\mathbb{R}^N = \{(x_t)_{t \geqslant 1}; x_t$ é real $\}$. Na topologia produto do $\mathbb{R}^N$, a seqüência $(x_t^n)_{t \geqslant 1}$ converge para $(x_t)_{t \geqslant 1}$ se e somente se para todo $t \geqslant 1$ $x_t^n \to x_t$ se $n \to \infty$.

$\epsilon = (X_i, \omega_i, \geqslant_i)_{i \in A}$, onde $\omega_i \in X_i - \{0\}$ é a economia que estudaremos.

Hipótese de convexidade: se $z \geqslant_\alpha x$ e $z \neq x$, então $rz + (1 - r) x >_\alpha x$ para $0 < r < 1$.

Hipótese de monotonicidade: $z \geqslant x$ e $z \neq x$, então $z >_\alpha x$ para z e x em X_α ($Z \geqslant x$ se e só se $Z_i \geqslant x_i$ para $i \geqslant 1$).

Supomos também A infinito e enumerável e $0 < \omega(j) = \sum_{i \in A} \omega^i(j)$ para $j \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Contrariamente às definições apresentadas no subitem 3.1, o sistema de preços será simplesmente um elemento de $\mathcal{R}^N$ Se $p \in \mathcal{R}^N$ definimos $p \cdot x = \liminf_{T \to \infty} \sum_{i=1}^{T} p_i x_i$, $x \in \mathcal{R}^N$.

A restrição orçamentária do consumidor *i* é:
$B_i(p) = \{ x \in X_i; p \cdot (m^i - x) \geqslant 0 \}$. Essa definição de $B_i(p)$ é adequada para economias dinâmicas com um mercado de capitais perfeito. A correspondência de demanda de *i* é $D_i(p) = \{ x \in B_i(p); z \in B_i(p)$ então $x \geqslant_i z \}$.

Uma alocação $(x^i)_{i \in A}$ é factível se $x^i \in X_i$ e $\sum_{i \in A} x^i = w$.

Um equilíbrio competitivo é uma alocação factível $(x^i)_{i \in A}$ e p um sistema de preços tal que $x^i \in D_i(p)$ para todo $i \in A$.

- *Teorema 4*

Existe $p \in \mathcal{R}^N_+$, $p \neq 0$ e uma alocação factível $(x^i)_{i \in A}$ tal que para todo $i \in A$:

a) $0 < p \cdot w^i \leqslant p \cdot x^i < \infty$;

b) $x >_i x^i$ então $p \cdot (w^i - x) < p \cdot (w^i - x^i)$;

c) $p \cdot w^i = p \cdot x^i$ se $w^i(j) > 0$ somente para um número finito de $j \in N$.

Não vamos provar este teorema.

- *Teorema 5*

A economia ϵ tem equilíbrio se:

a) para todo $i \in A$, $w^i(j) > 0$ somente para um número finito de $j \in N$; ou se:

b) existe $B \subset A$ finito e $\epsilon > 0$ tal que $\sum_{i \in B} w^i(j) > \epsilon \cdot \sum_{i \in A} w^i(j)$ para todos menos um número finito de $j \in N$.

Prova: ver anexo 1.

Uma alocação factível $(x^i)_{i \in A}$ é ótimo de Pareto se não existe alocação factível $(z^i)_{i \in A}$ tal que $z^i \geqslant_i x^i$ para todo $i \in A$ e $z^i >_j x^j$ para algum $j \in A$.

- *Teorema 6*

Se $(p, (x^i)_{i \in A})$, $p \geqslant 0$ é equilíbrio para ϵ e $p \cdot w < \infty$ então $(x^i)_{i \in A}$ é ótimo de Pareto.

Prova: ver anexo 1.

Anexo 1

Neste anexo, provamos os teoremas 3, 5 e 6 do item 3.

1. Prova do teorema 3

Suponhamos que vale a e $T \not\subset T_S$. Com T_S é a maior topologia localmente convexa em ℓ^∞ com $(\ell^\infty)' = \ell^1$ e $T \supset \sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, existe um funcional linear p em ℓ^∞, T contínuo que não está em ℓ^1. Como $T \subset T_\infty$, p é T_∞ contínuo e pelo teorema de representação de Yosida-Hewitt existem p_C e p_F T_∞ contínuos, $p = p_C + p_F$, $p_C \in \ell^1$ e p_F puramente finitamente aditivo, $p_F \neq O$ pois $p \notin \ell^1$. Mas p_C é T contínuo, logo p_F é T contínuo.

Definamos agora a economia ϵ : seja $I = 2$, $w_1 = w_2 \in \ell^\infty_{++}$, $w_{11} = 1$ e $p_F(w_1) > 1$ (se $p_F(\ell^\infty_{++}) \leqslant O$ consideramos $p_{F'} = - p_F$).

Sejam $u_1(x) = p_F(x) + x_1$ e $u_2(x) = \sum_{t=1}^{\infty} r_t x_t$, $r_t > O$, $\sum_{t=1}^{\infty} r_t < \infty$

Sejam $>_1$ e $>_2$ as preferências determinadas por u_1 e u_2 respectivamente. As hipóteses de a a e verificam-se facilmente (em c), por exemplo $F = \{re_1 ; r \in R\}$).

Agora suponhamos que existisse equilíbrio $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), q)$. Temos que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ seria ótimo de Pareto. Para provar isto, temos o lema. Se $y \geqslant_i \bar{x}_i$, então $qy \geqslant qw_i$ $i = 1,2$.

Prova. Se $y \geqslant_i \bar{x}_i$ e $qy < qw_i$. Considerando $x = y + re_1$ $r > O$, temos $x >_i \bar{x}_i$ $i = 1,2$ e $qx = qy + rqe_1 < qw_i$ se r é suficientemente pequeno e o lema está provado.

Agora se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ não fosse ótimo de Pareto, existiria (y_1, y_2), $y1 + y_2 = = w_1 + w_2$ $y_1 \geqslant_i \bar{x}_i$ $i = 1, 2$, sendo um deles estritamente preferível. Pelo lema, $qy_i \geqslant qw_i$, $i = 1, 2$ e por $(\bar{x}_2, \bar{x}_2)$ ser equilíbrio $qy_1 > qw_1$ ou $qy_2 > qw_2$ conforme $y_1 >_1 \bar{x}_1$ ou $y_2 >_2 \bar{x}_2$ respectivamente. Mas $q(w_1 + w_2) = q(y_1 + y_2) = = qy_1 + qy_2 > qw_1 + qw_2 = q(w_1 + w_2)$, contradição. Portanto, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é ótimo de Pareto. Como o consumidor 2 melhora se aumentarmos qualquer coordenada de $\bar{x}_2$ e sendo p_F puramente finitamente aditivo, o consumidor 1 é indiferente à retirada de qualquer coordenada $t \geqslant 2$ de $\bar{x}_1$. Temos então $\bar{x}_{1t} = O$ $t \geqslant 2$. Portanto, $u_1(\bar{x}_1) \leqslant w_{11} + w_{12} = 2$. Mas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é equilíbrio, sendo então $x_1 \geqslant_1 w_1$, ou seja, $u_1(\bar{x}_1) \geqslant u_1(w_1) = 1 + p_F(w_1) > 2$, contradição.

2. Prova do teorema 5

Suponhamos que vale a. Sejam p e $(x^i)_{i \in A}$ dados pelo teorema 4. Temos $p \cdot (w^i - x^i) = O$ por a e c do teorema 4, logo b do teorema 4 implica que $x^i \in D_i(p)$ para $i \in A$ e portanto $(p, (x^i)_{i \in A})$ é equilíbrio competitivo.

Suponhamos que vale b. Por a do teorema 4, temos $\infty > \sum_{i \in B} p \cdot w^i =$

$= p \cdot \sum_{i \in B} w^i \geqslant \frac{1}{\epsilon}\ p \cdot w + K$ para um certo K. Logo $p \cdot w < \infty$. Como $p \geqslant 0$, $w^i \geqslant 0$, $x^i \geqslant 0$, $\sum_{i \in A} p \cdot x^i = p \cdot \sum_{i \in A} x^i = p \cdot w = p \cdot \sum_{i \in A} w^i < \infty$. Por *a* do teorema 4, temos $p \cdot x^i = p \cdot w^i$ e logo $p \cdot (w^i - x^i) = 0$. E agora *b* do teorema 4 implica que $(p, (x^i)_{i \in A})$ é equilíbrio.

3. Prova do teorema 6

Inicialmente, provemos que se $z \succcurlyeq_i x^i$, $z \leqslant w$ então $p \cdot (w^i - z) \leqslant 0$. Com efeito, se não fosse, teríamos $p \cdot z < p \cdot w^i$. De $z + w >_i z$ vem por convexidade $z + \lambda w >_i z$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Logo, se λ é pequeno $p \cdot (z + \lambda w) < p \cdot w^i$ em contradição com $x^i \in D_i(p)$.

Seja agora $(z^i)_{i \in A}$ uma alocação factível com $z^i \succcurlyeq_i x^i$ para todo $i \in A$ e $z^J >_J x^j$ para algum $j \in A$. Temos então $p \cdot (w^i - z^i) \leqslant 0$ para todo $i \in A$ e $p \cdot (w^j - z^j) < 0$. De $p \cdot w < \infty$ vem $\sum_{i \in A} p \cdot (w^i - z^i) = p \cdot w - p \cdot \sum_{i \in A} z^i < 0$ em contradição com $\sum_{i \in A} z^i = w$.

Referências bibliográficas

Araujo, A. P. *Demand function with infinitely many goods: non existence results.* Bonn University, 1983.

——————. *A note on the existence of Pareto optima in topological vector spaces.* Impa, 1984.

——————. Lack of Pareto optimal allocations in economies with an infinite number of commodities: the need of impatience. *Econometrica*, Mar. 1985.

Bewley, T. Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. *Journal of Economic Theory, 4*: 514-40, 1972.

Cass, D. & Shell, K. In defense of a basic approach. In: Kareken, J. & Wallace, N., ed. *Models of monetary economics.* Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1980.

Kareken, J. & Wallace, N., ed. *Models of monetary economics.* Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1980.

Klinger, P. *Equilíbrio geral e o Core em economias com infinitos bens.* Dissertação de mestrado. Impa, 1984.

Lucas, R. Expectations and the neutrality of money. *JET, 4*: 103-24, 1972.

Samuelson, P.A. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *JPE, 66*: 467-82, 1958.

Wilson, C. Equilibrium in dynamic models with an infinity of agents. *JET, 1*: 95-11, 1981.