Um paradoxo em expectativas racionais

Mario Henrique Simonsen

O artigo apresenta um paradoxo dos modelos de expectativas racionais que utilizam uma demanda de moeda *à la* Cagan.

Quando o déficit a ser financiado via expansão monetária aumenta, a taxa de inflação (estável) necessária para sustentar tal déficit diminui. Este paradoxo é resolvido dando-se um tratamento adequado à questão da estabilidade destes modelos.

1. O paradoxo; 2. A solução do paradoxo; 3. Instabilidade de Cagan e expectativas racionais.

1. O paradoxo

Uma propriedade conhecida da função demanda de moeda de Cagan é que gera uma curva de Laffer para a arrecadação do imposto inflacionário. O equilíbrio monetário descreve-se pela equação:

$$\frac{B}{P} = e^{-\alpha\pi^*} \quad (\alpha > 0) \tag{1}$$

onde *B* indica a base monetária, *P* um índice de preços devidamente normalizado para dispensar uma constante multiplicativa no segundo membro da equação, π^* a taxa esperada de inflação. Supondo que esta última coincida com a taxa efetiva de inflação, isto é:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \pi = \pi^* \tag{2}$$

a arrecadação do imposto inflacionário será dada por:

$$T_{inf} = \frac{B}{P} = \pi e^{-\alpha\pi} \tag{3}$$

expressão que cresce com a taxa de inflação até $\pi = \frac{1}{\alpha}$ e decresce daí por diante como na figura 1. Em qualquer caso, a arrecadação do imposto inflacionário não pode ultrapassar o seu máximo:

$$(T_{inf})_{max} = \frac{1}{\alpha} e^{-1} \tag{4}$$

Suponhamos que a parcela do déficit público financiada via expansão monetária seja igual a k, em termos reais, e que não haja outra fonte de expansão ou contração da base monetária. Isso implica:

$$\dot{B} = kP \qquad (k > 0) \tag{5}$$

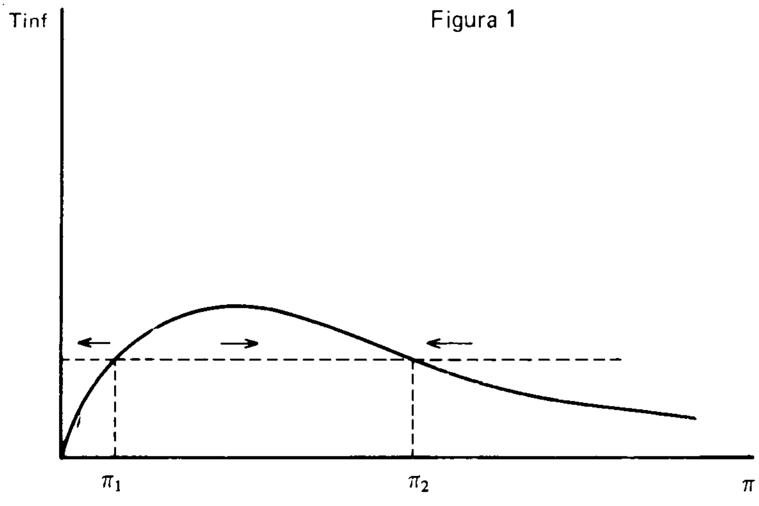
um ponto sobre uma variável indicando sua derivada em relação ao tempo.

É de se presumir que a taxa inflacionária de equilíbrio iguale a arrecadação do imposto inflacionário a k. Isso será impossível, se k for superior ao segundo membro da equação (4), caso em que a economia deverá descambar para uma explosão hiperinflacionária. Admitamos, portanto, que:

$$k < \frac{1}{\alpha} e^{-1} \tag{6}$$

Pelo efeito curva de Laffer há duas taxas de inflação de equilíbrio, uma mais baixa, π^1, outra mais alta, π_2, que igualam a arrecadação do imposto inflacionário a k. Como se observa na figura 1, se k aumenta, π_1, cresce e π_2 decresce. Isso sugere, *a priori*, que o equilíbrio inflacionário estável se localize em π_1. Caso contrário, isto é, se o equilíbrio estável fosse π_2, chegaríamos a uma conclusão paradoxal: cortando-se o déficit financiado via expansão monetária, a taxa de inflação subiria!

Figura 1



Examinemos a dinâmica da taxa de inflação. Indicando por b e por p os logaritmos neperianos de B e P, respectivamente, a equação (1) pode ser reescrita na forma:

$$b - p = -\alpha \pi^*$$

ou, derivando em relação ao tempo:

$$\dot{b} - \pi = -\alpha \dot{\pi}^*$$

Dividindo-se (5) por (1), obtém-se:

$$\frac{\dot{B}}{B} = \dot{b} = ke^{\alpha \pi^*}$$

ou seja:

$$\pi - ke^{\alpha \pi^*} = \alpha \dot{\pi}^* \tag{7}$$

No seu artigo clássico sobre a dinâmica da hiperinflações, Cagan admitiu que as expectativas inflacionárias se formassem segundo a lei adaptativa:

$$\dot{\pi}^* = \beta(\pi - \pi^*) \qquad (\beta > 0) \tag{8}$$

a qual implica que a taxa esperada de inflação seja igual à média ponderada das taxas de inflação observadas no passado com memória decrescente exponencialmente:

$$\pi^*(t) = \beta \int_{-\infty}^{t} e^{\beta(\tau - t)} \pi(\tau)\, d\tau$$

Combinando as equações (7) e (8), obtém-se:

$$\frac{1}{\beta}(\alpha\beta - 1)\dot{\pi}^* = e^{\alpha \pi^*}(\pi^* e^{-\alpha \pi^*} - k)$$

Daí se conclui que o equilíbrio inflacionário estável será igual a π_1 se, e somente se, verificar-se a apelidada condição de estabilidade de Cagan $\alpha\beta < 1$.

Tomemos agora o caso de expectativas racionais. Na ausência de choques, a hipótese equivale à de perfeita previsão, isto é, $\pi = \pi^*$. Introduzindo essa igualdade na equação (7):

$$\alpha \dot{\pi} = e^{\alpha \pi}(\pi e^{-\alpha \pi} - k)$$

o que significa que a inflação cresce enquanto a arrecadação do imposto inflacionário for superior a k e decresce quando $T_{inf} < k$. Isso leva ao diagrama de fase da figura 1, segundo o qual o equilíbrio inflacionário estável com expectativas racionais é igual a π_2. Trata-se de uma conclusão capaz de abalar o prestígio da hipótese de expectativas racionais. Com efeito, ela implica que a redução do déficit público financiado via expansão monetária aumente ainda mais a taxa de inflação. Fazendo o déficit tender a zero, a taxa de inflação explodiria ao infinito!

2. A solução do paradoxo

O que há de errado na análise precedente? Simplesmente o diagrama de fase da figura 1 trata a inflação como uma variável retrospectiva (*backward-looking*), amarrada em suas condições iniciais. Sucede que nos modelos de expectativas racionais não apenas a taxa de inflação mas o próprio nível de preços é uma variável prospectiva (*forward-looking*), determinada pelo comportamento esperado da oferta de moeda. Como tal, nem p nem π estão amarrados por condições iniciais. Isto posto, a discussão de estabilidade anterior é totalmente incompatível com a hipótese de expectativas racionais.

Na realidade, a hipótese de que certas variáveis possam dar saltos, isto é, de que não estejam amarradas a condições iniciais, gera uma indeterminação na solução dos sistemas dinâmicos, traduzidos por equações diferenciais ou de diferenças finitas. Para levantar essa indeterminação os modelos de expectativas racionais costumam recorrer a uma hipótese complementar: a de que determinadas variáveis se confinem em trajetórias limitadas. Isso só é matematicamente possível se os sistemas dinâmicos apresentarem soluções instáveis, sem o que não haveria como levantar as indeterminações e fixar as condições iniciais das variáveis prospectivas. Em outras palavras, instabilidade dinâmica e expectativas racionais caminham juntas.

Tomemos, como primeiro exemplo, a equação de equilíbrio monetário de Cagan em sua versão logarítmica e com a hipótese de perfeita previsão $\pi^* = \pi$, o que implica:

$$b - p = -\alpha \pi = -\alpha \dot{p} \tag{9}$$

Admitamos que a base monetária se expanda a uma taxa constante igual a μ, isto é, que $b = b_o + \mu t$. Obtém-se:

$$-\alpha \dot{p} + p = b_o + \mu t \tag{10}$$

equação diferencial, cuja solução, para a configuração inicial p_o do logaritmo do índice de preços, é dada por:

$$p = (p_o - b_o - \alpha \mu) e^{\frac{1}{\alpha} t} + \mu t + b_o + \alpha \mu \tag{11}$$

o que torna a taxa de inflação:

$$\pi = \dot{p} = \frac{1}{\alpha}(p_o - b_o - \alpha\mu)e^{\frac{1}{\alpha}t} + \mu \tag{12}$$

Como o logaritmo do índice de preços não está amarrado por condições iniciais, há uma infinidade de trajetórias de perfeita previsão para p, uma para cada p_o. A essa altura, introduz-se uma hipótese adicional para determinar p_o: a de que a taxa de inflação permaneça limitada no tempo. Isso exige:

$$p_o = b_o + \alpha\mu \tag{13}$$

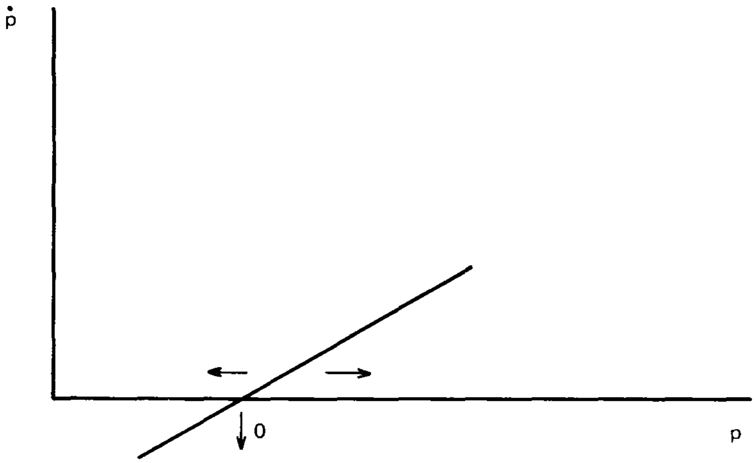
e portanto:

$$p = b_o + \alpha\mu + \mu t \tag{14}$$

$$\pi = \dot{p} = \mu \tag{15}$$

A solução encontrada pelo requisito de limitação é economicamente plausível: a taxa de inflação é igual à taxa de expansão da base monetária. Note-se que pela equação (13) uma mudança súbita e definitiva na taxa de expansão monetária faz saltar o nível geral de preços. Por outro lado, a solução obtida pela hipótese de limitação da taxa de inflação é uma solução instável da equação diferencial (10). Isso fica claro no diagrama de fase da figura 2, que descreve a equação diferencial em questão no caso particular em que $\mu = 0$.

Figura 2



Um outro exemplo é fornecido pelos modelos de ponto de sela que descrevem a interação de uma variável restrospectiva X_1 com uma variável prospectiva X_2 pelo sistema de equações:

$$\dot{X}_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \tag{16a}$$

$$E_t\dot{X}_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 \tag{16b}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} < 0)$$

$$a_{12}a_{22} \neq 0$$

A primeira equação indica que a derivada em relação ao tempo de X_1 é determinada pela configuração das duas variáveis do modelo, sendo afetada por X_2 (já que $a_{12} \neq 0$). A segunda, que X_2 é determinada pela esperança condicional de sua derivada temporal à direita $E_t\dot{X}_2$ e pela configuração da variável restrospectiva X_1. Na ausência de perturbação estocástica, $E_t\dot{X}_2 = \dot{X}_2$, o que permite escrever o sistema sob a notação sintética:

$$\dot{X} = AX + b \tag{17}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

A matriz A, possuindo determinante negativo, possui autovalores $r_1 < 0 < r_2$. Indicando por y_1 e y_2 dois autovetores correspondentes a esses autovalores, a solução geral do sistema é dada por:

$$X = c_1 e^{r_1 t} y_1 + c_2 e^{r_2 t} y_2 - A^{-1}b \tag{18}$$

c_1 e c_2 sendo constantes determinadas pelas condições iniciais X_{10} e X_{20}. Sucede que, embora a variável retrospectiva esteja amarrada por condições iniciais, a prospectiva pode assumir qualquer valor inicial, dependendo das expectativas. Isto posto, há uma infinidade de trajetórias de perfeita previsão, uma para cada configuração inicial X_{20} da variável prospectiva.

Surge mais uma vez o problema de indeterminação em expectativas racionais e que é levantado com uma hipótese adicional de limitação: a de que os agentes econômicos descartem a hipótese de que qualquer das componentes $E_t\dot{X} = \dot{X} = c_1 r_1 e^{r_1 t} y_1 + c_2 r_2 e^{r_2 t} y_2$ tenda ao infinito. Isso exige que $c_2 = 0$ e portanto:

$$X = c_1 e^{r_1 t} y_1 - A^{-1} b \tag{19}$$

Para determinar c_1 e X_{20}, façamos $y_1 = (y_{11}, y_{12})$ e $A^{-1} b = (h_1 ; h_2)$. Tomando $t = 0$ na equação (19), obtém-se:

$$X_{10} = c_1 y_{11} - h_1 \tag{20a}$$

$$X_{20} = c_1 y_{12} - h_2 \tag{20b}$$

Como $a_{12} \neq 0$, segue-se que $y_{11} \neq 0$. Isto posto, a equação (20*a*) determina c_1 a partir da posição inicial X_{10} da variável retrospectiva e a equação (20*b*) a posição inicial X_{20} da variável prospectiva. Note-se que uma mudança no vetor b faz saltar a variável prospectiva X_2. Com a hipótese de limitação chega-se à única trajetória convergente de perfeita previsão dada pela equação (19), na qual o vator X converge para o ponto de sela $-A^{-1} b$. É importante notar, porém, que essa trajetória é uma solução instável do sistema (17), o qual não admite soluções estáveis.

Estamos agora em condições de resolver o paradoxo apresentado no item anterior: com expectativas racionais, o diagrama de fase da figura 1 nada mais é do que um guia para as previsões dos agentes econômicos, previsões que se realizarão na ausência de perturbação estocástica. O diagrama diz que os agentes econômicos dispõem de quatro possibilidades:

a) projetar uma taxa de inflação variável, inicialmente inferior a π_1, e tendendo para menos infinito;

b) projetar a taxa de inflação em π_1;

c) projetar a taxa de inflação em π_2;

d) projetar uma taxa de inflação variável, inicialmente superior a π_1 e convergindo para π_2.

A hipótese usual de limitação da taxa de inflação descarta a primeira possibilidade. Restam as três outras. Para levantar a indeterminação é preciso introduzir alguma hipótese adicional. Uma suposição plausível é de que os agentes econômicos acreditem que a taxa de inflação seja função crescente do déficit público financiado via expansão monetária. Com essa suposição, descartam-se as hipóteses *c* e *d* e a taxa de inflação salta imediatamente para π_1.

3. Instabilidade de Cagan e expectativas racionais

É curioso que a literatura macroeconômica recente tenha caído na armadilha metodológica que levou ao paradoxo apresentado no item 1. A figura 1 realmente descreve o problema da convergência da taxa de inflação no caso da instabilidade de Cagan, em que $\alpha\beta > 1$. É óbvio também que a hipótese de perfeita previsão é formalmente associada à instabilidade de Cagan, bastando fazer β tender ao infinito na equação (8). A grande diferença é que, na análise de Cagan, a taxa esperada de inflação é determinada pelo comportamento passado da inflação, sendo portanto uma variável retrospectiva, amarrada nas suas condições iniciais. A hipótese de expectativas racionais liberta a taxa esperada de inflação dessa âncora, tornando-a dependente exclusivamente das expectativas de crescimento da oferta de moeda.

Curiosamente, o mesmo tipo de problema surge no modelo que supõe constante a taxa de expansão da base monetária. Tomando logaritmos na equação (1) e derivando em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{b} - \pi = -\alpha\dot{\pi}^*$$

Supondo constante a taxa de expansão da base monetária $\dot{b} = \mu$ e tomando a equação de expectativas adaptativas de Cagan:

$$\frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta)\dot{\pi}^* + \pi^* = \mu$$

Equação que leva a trajetórias explosivas para π^*quando $\alpha\beta > 1$. A instabilidade resulta de que π^*está vinculada a condições iniciais, por ser uma variável retrospectiva. A hipótese de expectativas racionais chega a uma equação diferencial semelhante. Mas como a taxa esperada de inflação não está sujeita a condições iniciais fixas, introduz-se uma hipótese de limitação que faz com que π^* salte para o equilíbrio estacionário igual a μ.

Uma explicação heurística para o paradoxo talvez se encontre no fato de que a literatura econômica freqüentemente se refere às trajetórias convergentes nos modelos de expectativas racionais como trajetórias estáveis. Na realidade, como se discutiu no item anterior, elas costumam ser dinamicamente instáveis.

Bibliografia

Black, Fischer. Uniqueness of the price level in monetary growth models with rational expectations. *Journal of Economic Theory*, 7(1): 53-65, Jan. 1974.

Bruno, Michel & Fischer, Stanley. *Expectations and the high inflation trap*. MIT, 1985. (Unpublished.)

Cagan, Philip. The monetary dynamics of hyperinflation. In: Friedman, Milton, ed. *Studies in the quantity theory of money*. University of Chicago Press, 1956.

Sargent, Thomas & Wallace, Neil. Rational expectations and the dynamics of hyperinflation. *International Economic Review*, *14* (2): 328-50, June 1973.