Equilíbrio aproximado em economias com ausência de convexidade*

Renato Fragelli Cardoso**

Este trabalho apresenta uma revisão da literatura sobre a existência de equilíbrio geral em economias em que as preferências individuais não são convexas e as tecnologias das firmas são descritas por conjuntos da possibilidade de produção não-convexos. A ausência de convexidade das preferências equivale a abandonar a hipótese de que o consumidor prefere a diversificação à especialização. A não-convexidade dos conjuntos de possibilidades de produção corresponde a retornos crescentes de escala na produção. Embora a hipótese de convexidade seja necessária para se provar a existência de equilíbrio competitivo, prova-se que ao se considerar economias sem tal hipótese, chega-se a um equilíbrio aproximado, cuja medida de desequilíbrio *per capita* decresce com o aumento do número de agentes.

1. Introdução

A existência de equilíbrio competitivo em economias com produção e consumo foi provada por Arrow-Debreu em 1954, a partir das hipóteses de que a produção de cada empresa é divisível, aditiva e não admite retornos crescentes de escala, e de que as preferências de cada consumidor levam-no a gostar mais de diversificar seu consumo entre vários bens do que concentrá-lo em apenas alguns.

Um modelo mais realista deve levar em conta que diversos processos de produção, principalmente na indústria, não são divisíveis — não se produz meio automóvel — ou convexos — a indústria química opera em regime de proporções fixas. Analogamente, a convexidade das preferências é igualmente irrealista em diversas situações em que a satisfação proporcionada por um bem está associada ao consumo de uma quantidade não inferior a um certo valor mínimo — dificilmente meia dose de uísque e meia de gin seriam preferidas a uma dose inteira de um dos dois. Em que medida as hipóteses de convexidades são essenciais à existência de equilíbrio? Esta questão pode ser ilustrada tomando-se

* O presente trabalho resume o capítulo 4 da dissertação de mestrado *Tópicos de convexidade e aplicações à teoria econômica*. O autor agradece às sugestões e comentários recebidos de Carlos Ivan Simonsen Leal.
** Mestre em economia pela Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE/FGV).

Primeira empresa: retornos constantes de escala

Figura 1a

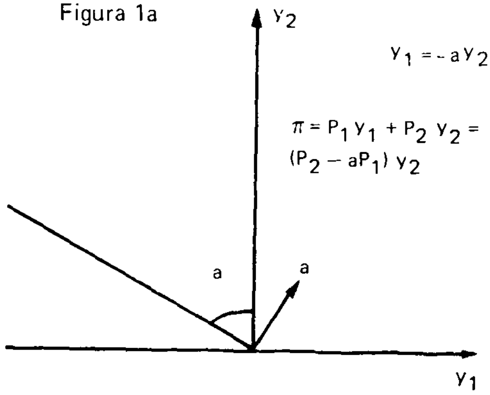
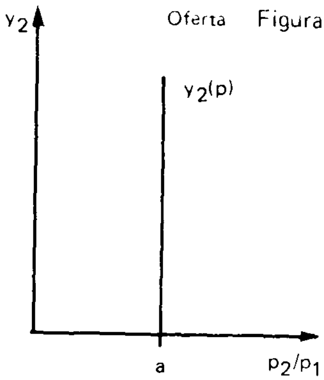


Figura 1b



Segunda empresa: retornos constantes de escala e dois processos

Figura 2a

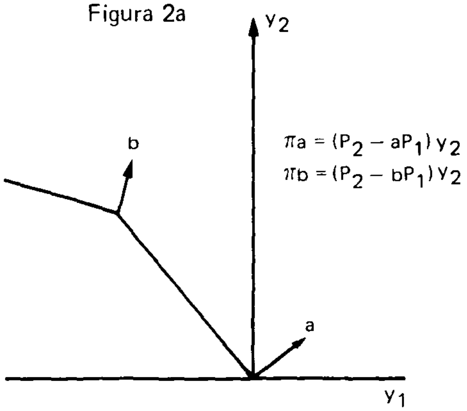
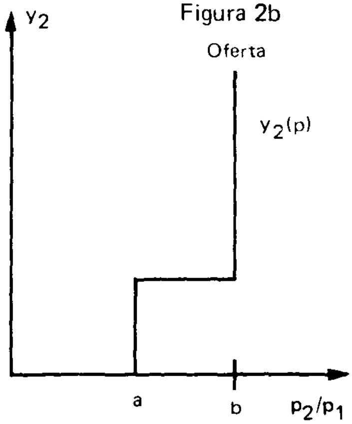


Figura 2b



Terceira empresa: retornos decrescentes de escala

Figura 3a

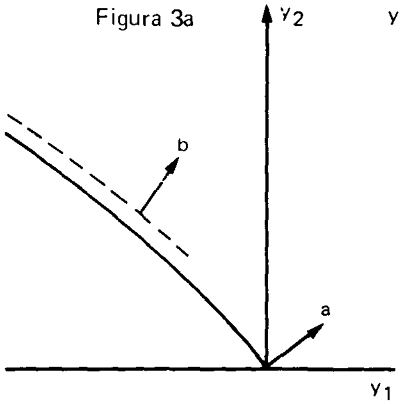
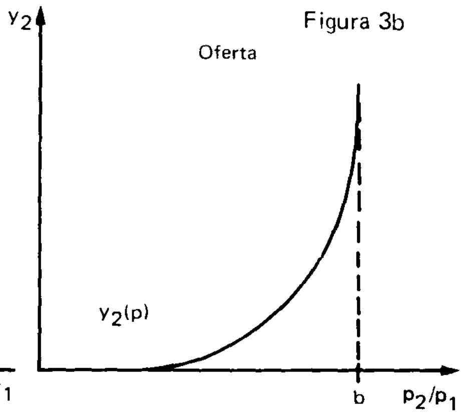


Figura 3b

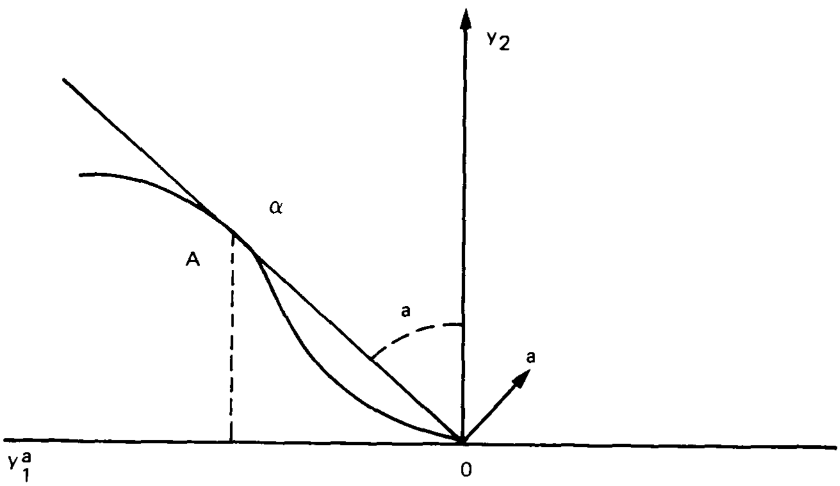


empresas que produzem um único bem Y_2 a partir de um único insumo Y_1, com preços respectivamente iguais a P_1 e P_2:

Nos três exemplos, em que o conjunto de possibilidades de produção é convexo, a curva de oferta não apresenta descontinuidades. Se existissem várias firmas, a oferta agregada seria contínua. Dada uma demanda agregada contínua, o vetor de preços $p = (p_1, p_2)$ ficaria determinado, bem como as quantidades y_1 e y_2.

Suponhamos agora que a economia seja composta de uma única empresa, a qual apresenta um conjunto de possibilidades de produção não-convexo representado no gráfico y_1 x y_2 pela figura 4.

Figura 4



Esta empresa, ao utilizar uma quantidade de insumo y_1, produz o nível de produto $y_2 = f(y_1)$.

A empresa só terá produção não-nula se puder ter lucro não-negativo:

$$\pi = p_2 \cdot f(y_1) - p_1 y_1 \geqslant 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{y_1}{f(y_1)} \leqslant \frac{p_2}{p_1}$$

Para $p_2/p_1 = a$ há dois níveis de produção possíveis: $y_2 = y^a_2$ e $y_2 = 0$.

Qualquer nível de produção entre 0 e y^a_2 traria lucro negativo para a empresa. As curvas de oferta de produto e demanda pelo fator estão nas figuras 5 e 6.

Figura 5

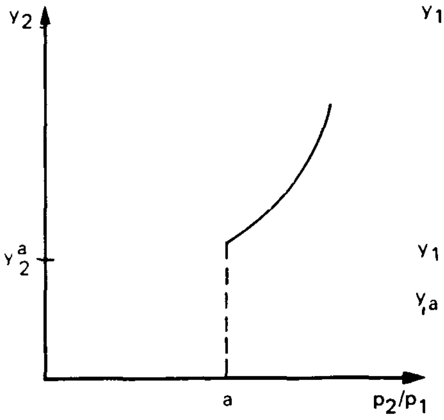
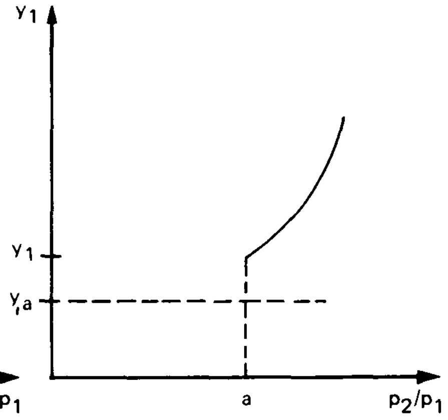


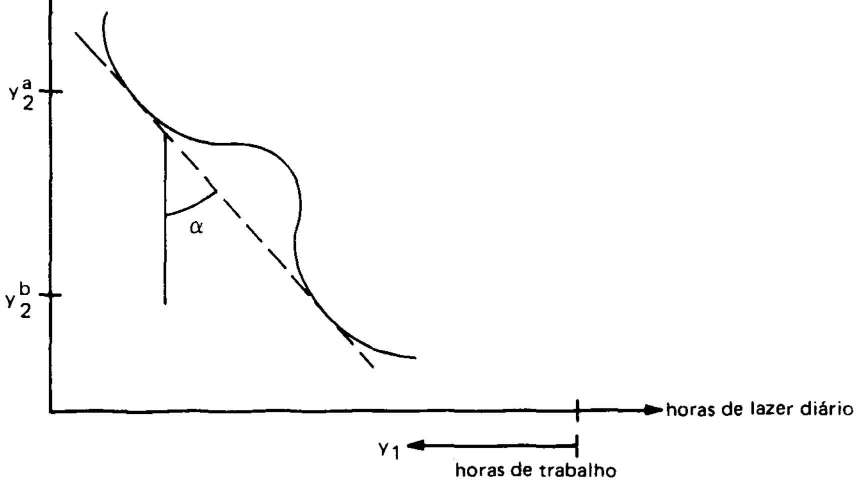
Figura 6



Se houver uma oferta do fator $\bar{y}_1 < y^a_1$, não há equilíbrio neste mercado. A não-convexidade do conjunto de possibilidades de produção gerou uma curva de oferta descontínua que impede o equilíbrio.

Do mesmo modo que geramos curvas de oferta de produto e demanda de fator descontínuas a partir de um conjunto de possibilidades de produção não-convexo, podemos gerar curvas de demanda pelo produto e oferta de trabalho não-contínuas para um indivíduo a partir de preferências não-convexas (ver figuras 7 e 8).

Figura 7



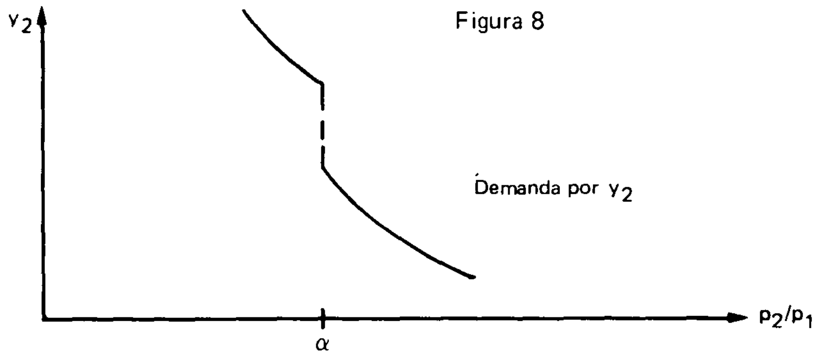
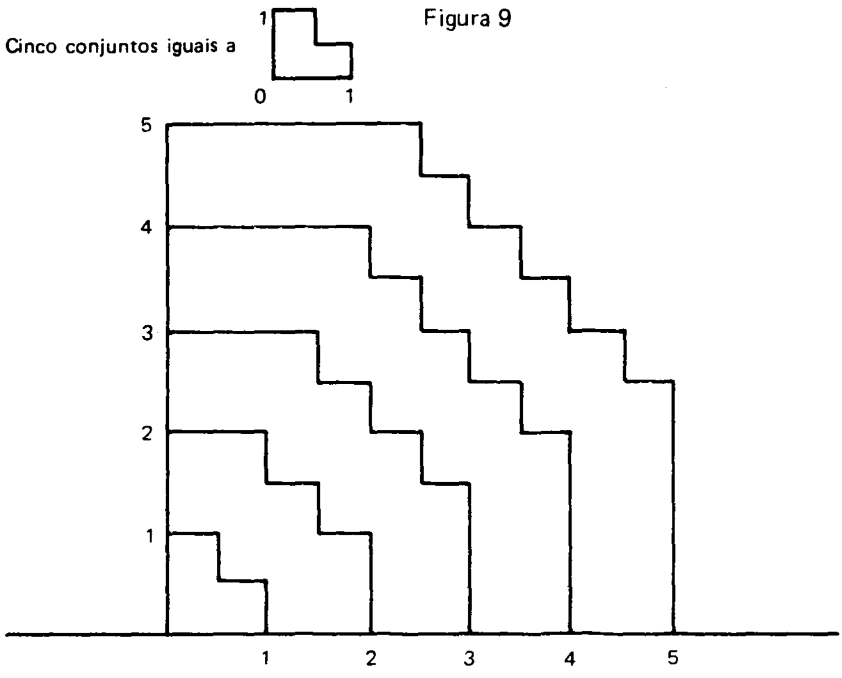


Figura 8

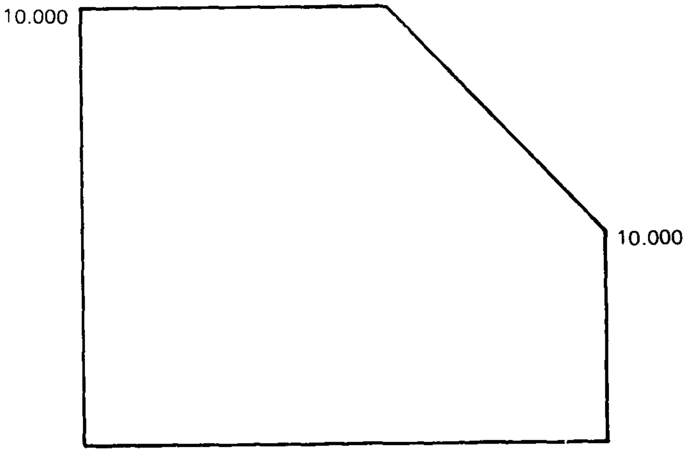
Os desequilíbrios gerados pela ausência de convexidade das preferências e dos conjuntos de produção vistos isoladamente tendem a se reduzir quando se considera a economia em termos agregados. Este fato ocorre porque os conjuntos de produção e consumo (sujeitos a certo nível de satisfação) somados tendem a reduzir o "grau de não-convexidade" em termos relativos, isto é, o grau de não-convexidade do conjunto agregado dividido por uma medida de tamanho da economia — como por exemplo o número de agentes econômicos. A intuição por trás deste fenômeno está no fato de que diferentes conjuntos de diferentes agentes apresentam isoladamente diferentes não-convexidades, mas, quando somados, as convexidades tendem a se cancelar gerando conjuntos agregados aproximadamente convexos. Mesmo na hipótese de conjuntos não-conve-

Figura 9



vos exatamente iguais, a não-convexidade do conjunto agregado fica menor, em termos relativos, conforme a figura 9.

Se tivéssemos um número muito grande de agentes, o conjunto somado aproximar-se-ia do formato a seguir:



Neste trabalho daremos um tratamento rigoroso a este fato, que descrevemos heuristicamente. O trabalho está dividido em três itens:

O item 2 contém uma prova do teorema de Shapley-Folkman. Este teorema e o Teorema II.1 serão utilizados nos itens seguintes.

No item 3 apresentamos uma breve revisão do modelo de Arrow-Debreu, para, em seguida, verificarmos quais as conclusões deste modelo ao se abandonar a hipótese de convexidade. Provamos que, neste caso, há um equilíbrio aproximado que se distancia do equilíbrio compensado de uma magnitude que depende do "grau de não-convexidade" dos conjuntos de produção e consumo dos agentes econômicos e independe do tamanho da economia.

No item 4 analisamos uma economia de trocas sem preferências convexas, considerando como medida de desequilíbrio o valor de mercado do excesso de demanda. Provamos que existe um equilíbrio aproximado cuja medida de desequilíbrio depende apenas das dotações iniciais mas não do "grau de não-convexidade" das preferências.

2. O Teorema de Shapley-Folkman

Para provarmos o Teorema de Shapley-Folkman precisaremos de alguns lemas que apresentamos a seguir.

Definição

Diz-se que um sistema de equações

$x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$

$x^i \in R^n$ admite solução não-negativa $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r)$

se $\bar{a}_j \geq 0$ para $j = 1,2,\ldots, r$.

Lema II.1

Sejam $x, x^1, x^2, \ldots, x^r$ vetores em R^n tais que existe uma solução *não-negativa* para as *n* equações.

$x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$, onde $r > n$

Então existe uma solução também não-negativa para estas *n* equações com no máximo *n* dos termos positivos.

Prova: por hipótese, existe uma solução $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r)$ tal que $\bar{a}_j \geqslant 0$ para todo *j*. Se o número de termos positivos entre estes for igual a *n*, o lema está provado. Se este número for superior a *n*, temos que provar que há uma outra solução com *n* termos positivos.

Provemos que caso hajam *n + 1* coeficientes a_j positivos, pode-se encontrar uma solução com apenas *n* termos positivos. Esta mesma argumentação poderia ser repetida caso houvesse *n + 2, n + 3, n + 4, ..., r* coeficientes positivos, até se chegar a *n + 1*.

Seja a solução $a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r)$ em que por remuneração podemos admitir $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1} > 0, \bar{a}_{n+2} = \ldots = \bar{a}_r = 0$.

Como os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ pertencem ao espaço R^n, eles são linearmente dependentes, isto é:

$c'_1 x' + c'_2 x^2 + \ldots + c'_n x^n + c'_{n+1} x^{n+1} = 0$ com algum $c'_j \neq 0$. Por renumeração podemos supor $c_1 > 0$ e tomar $c_j = \dfrac{c'_j}{c'_1}$, obtendo: $x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} = 0$ como $x = \bar{a}_1 x^1 + \bar{a}_2 x^2 \cdots + \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1} x^{n+1} + 0 x^{n+2} + \cdots + 0$. Todo $c_j > 0$ tome $b = \min(\dfrac{a_j}{c_j})$ para todo $c_j > 0$.

Para $j = k$ ter-se-á $b = \dfrac{\bar{a}_k}{c_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$ temos: $-b(1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1}) = 0$ $x = \bar{a}_1 x^1 + \bar{a}_2 x^2 + \ldots + \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1} x^{n+1} + 0 x^{n+2} + \ldots + 0 x^r$ logo, $x = (\bar{a}_1 - b_1) x^1 + (\bar{a}_2 - bc_2) x^2 + \ldots + (\bar{a}_n - bc_n) x^n + (\bar{a}_{n+1} - bc_{n+1}) x^{n+1} + 0 x^{n+2} + \cdots + 0 x^r$ para $j = k$, temos $(\bar{a}_j - bc_j) = (\bar{a}_k - bc_k) = 0$, obtendo-se a solução $(\bar{a}_1 - b, \bar{a}_2 - bc_2, \ldots, \bar{a}_{k-1} - bc_{k-1}, 0, \bar{a}_{k+1} - bc_{k+1} \cdots \bar{a}_{n+1} - bc_{n+1}, 0, 0, \ldots, 0)$ que possui *n* termos positivos e $r - n$ termos nulos.

Q. F. D.

Lema II.2. (Teorema de Caratheodory)

Seja $A \subset R^n$ e $x \in co(A)$, isto é, $x = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i$, $\quad a_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$, $x^i \in A$.

Então x é combinação convexa de no máximo $n + 1$ dos x^i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots, r$.

Prova: considere as $n = 1$ equações com r incógnitas dadas por:

$$\text{por: } x = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i \quad \text{(n equações)}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \quad \text{(1 equação)}$$

Por hipótese, estas $n + 1$ equações têm uma solução não negativa pois $a_i \geqslant 0$. Podemos usar o *Lema IV.1,* bastando ampliar a dimensão do espaço R^n para R^{n+1}, temos:

$$y \in R^{n+1}, \; y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \cdots & x_1^r \\ x_n^1 & x_2^2 \cdots & x_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^1 & x_1^2 \cdots & x_n^r \\ 1 & 1 \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}$$

Nesta notação as $n + 1$ equações são dadas por $\; y = \sum_{i=1}^{r} a_i y^i$.

onde $y^1, y^2, \ldots, y^r \in R^{n+1}$

Pelo *Lema II.1* há uma solução $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots, \bar{a}_r)$

com no máximo $n + 1$ dos coeficientes a_j positivos. Logo,

$$y = \sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i y^i \Rightarrow x = \sum_{i \in S} \bar{a}_i x^i,$$

onde S é o conjunto dos índices $i = 1, 2, \ldots, r$, tal que $a_i > 0$.

Q.E.D.

Teorema II.1

Sejam $B^1, B^2, \ldots, B^r \subset R^n$. Seja $x \in \sum_{j=1}^{r} co(B^j)$ isto é, $x = \sum_{j=1}^{r} x^j, x^j$

$\in co(B^j)$ para $j = 1, 2, \ldots, r$.

Então existem $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^r, \in co(B^j)$ e $x = \sum_{j=1}^{r} \bar{x}^j$ com a propriedade

$\bar{x}^j \in B^j$ para todo j com excessão de no máximo um número n destes $\bar{x}^j$.

Prova: por hipótese $x = \sum_{j=1}^{r} x^j$, onde $x^j \in co(B^j)$. Pelo *Lema II .2*, cada x_j é uma combinação convexa de no máximo $n + 1$ elementos, de B^j, isto é:

$$x = \sum_{j=1}^{r} x^j, \qquad x^j = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^j x_i^j \in B^j, j=1, \ldots, r. \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i^j = 1$$

temos,

$$x = \sum_{j=1}^{r} x^j = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 x_i^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r x_i^r \quad (n \text{ equações})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1 \ldots\ldots \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r = 1 \; (r \text{ equações})$$

Para aplicar o *Lema II.2*, ampliemos o espaço R^n para R^{n+r}

$$y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+r} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} [x] = (n, 1) \\ [1] = (r, 1) \end{matrix}$$

$$y_i^j \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^j \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{vetor } (n,1) \\ \longrightarrow \text{vetor } (r,1) \end{matrix}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 y_i^1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 y_i^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r y_i^r$$

Temos $n + r$ equações e $(n + 1)\, r$ incógnitas a_i^j, $j = 1, \ldots, r$
$i = 1, \ldots, n + 1$. Pelo *Lema II .2*, há uma solução não-negativa com no máximo $n + r$ termos positivos, ou seja,

$$\bar{a} = (\underbrace{\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n+1}^1}_{\text{coeficientes dos pontos de } B^1}; \bar{a}_1^2, \ldots, \bar{a}_{n+1}^2; \ldots; \underbrace{\bar{a}_1^r, \ldots, \bar{a}_{n+1}^r}_{\text{coeficientes dos pontos de } B^r})$$

Na solução $\bar{a}$ existem $n + r$ coeficientes positivos e os $(n + 1)\, r - (n + r) = n(r-1)$ outros coeficientes são todos nulos. $x \in co(B^1) + \ldots + co(B^r)$, logo, no mínimo um dos coeficientes de cada B^j é positivo (isto é mostrado por $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^j = 1$

1, para $j = 1,2,\ldots, r$). Se para um certo j houver $a^j_i = 1$ para algum i, então o ponto do co(B^j) associado a este a^j_i pertence ao conjunto B^j. Se para um mesmo j houver mais de um i tal que $a^j_i > 0$, então é possível que a combinação convexa dos correspondentes pontos não pertença a B^j.

Defina para cada $j = 1,2\ldots r$ o conjunto de coeficientes

$S^j = a^j_i : a^j_i > 0$ Sabe-se que $\# S^j \geq 1$ e $\sum_{j=1}^{r} \# S^j \leq n + r$. A igualdade $\sum_{j=1}^{r} \# S^j = r + n$ ocorre se para todo S^j tivermos $\# S^j \leq 2$. Neste caso existem exatamente $r - n$ conjuntos S^j com $\# S^j = 1$ e n conjuntos S^j com $\# S^j = 2$. Para j tal que $\# S^j = 1$, temos $a^j_i = 1$ para algum i e o ponto do co(B^j) associado a este a^j_i pertence a B^j. Para j tal que $\# S^j = 2$ existem a^j_i e a^j_k positivos e a combinação convexa dos x^j_i e x^j_k associados a estes coeficientes pode ou não pertencer a B^j. Se as n combinações convexas $a^j_i\, x^j_i + a^j_k\, x^j_k$ tais que $\# S^j = 2$ *não pertencerem* aos respectivos conjuntos B^j, teremos o caso de maior número de conjuntos B^j tais que $x^j \notin B^j$, sendo este número igual a n.

Corolário II.1

Seja F uma família de conjuntos compactos $S_i \in R^n$, $i = 1,2\ldots, m$, e $x \in \text{co}\,(\sum_{i=1}^{m} S_i)$. Então F pode ser dividida em duas subfamílias F_1 e F_2, onde F_1 possui no máximo n elementos, tal que:

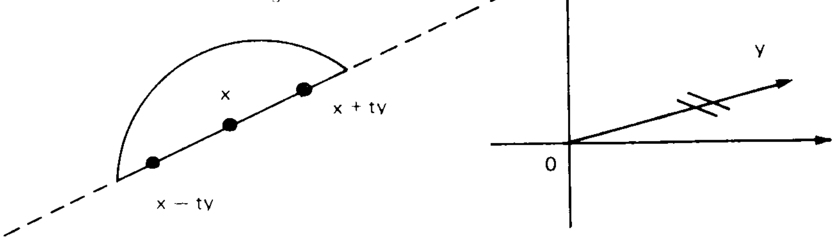
$$x \in \text{co}(\sum_{S \in F_1} S) + \sum_{S \in F_2} S, \text{ ou}$$

$$x = x_1 + x_2, \text{ com } x_1 \in \text{co}(\sum_{S \in F_1} S), x_2 \in (\sum_{S \in F_2} S).$$

Definição

Um vetor y é uma *direção facial* sobre $x \in C$ se $x + ty \in C$ para todo $|t|$ suficientemente pequeno.

Figura 10



Lema II.3

Seja $S \in R^n$, $x \in co(S)$. Então existe um subconjunto finito $T \subset S$ tal que $x \in co(T)$ e $\bar{x} - x$ é uma direção facial sobre x em $co(S)$ para todo $\bar{x} \in T$.

Prova: pelo *Lema II.2*, podemos afirmar que x é uma combinação convexa de no máximo n + 1 elementos de S. Tomando-se T como o conjunto formado por estes elementos, conclui-se que existe $T \in S$ finito.

Para provar a segunda parte do teorema, tomemos $T = \{x_1\, x_2, \ldots, x_k\}$ onde $k \leq n+1$, e $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \bar{x}_j$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$. Suponha por absurdo que para algum x_j, $x - x_j$ não é direção facial sobre x em $co(S)$. Podemos supor $x_j = x_1$ sem perda de generalidade. Teremos $x + t(x_1 - x) \notin co(T)$ para algum t, com $|t|$ pequeno. $x + t(x_1 - x) \notin co\,(T)$, logo $(1-t)x + tx_1 \notin co(T)$, isto implica

$$(1-t) \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, x_j + tx_1 \notin co(T).$$

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j\, \bar{x}_j \notin co\,(T), \text{ para } \beta_j = (1-t)\,\alpha_j,\ j = 2, \ldots, k \text{ e}$$

$\beta_1 = (1-t)\,\alpha_1 + t$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j = (1-t)\alpha_1 + t + \sum_{j=2}^{k} (1-t)\alpha_j = (1-t) \sum_{j=1}^{k} \alpha_j + t = 1 - t + t = 1$$

logo, $x + t(x_1 - x)$ é uma combinação convexa de elementos de T, contradizendo a hipótese de $x + t(x_1 - x) \notin co(t)$.

Q.E.D.

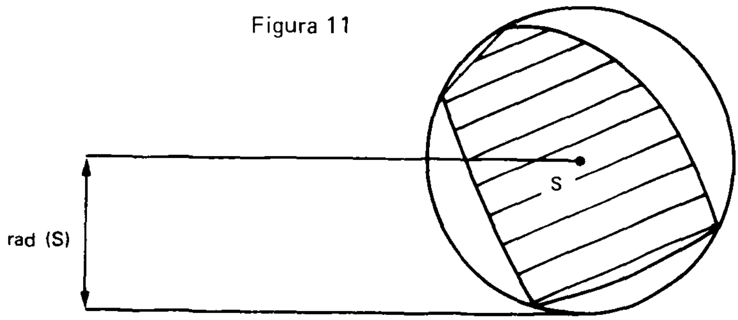
Definição

O *raio* de um conjunto compacto $S \subset R^n$ é definido por: rad (S) =

$$= \min_{x \in R^n} \max_{y \in S} \|x-y\|.$$

rad(s) é igual ao raio da menor bola fechada que contém S.

Figura 11



Lema II.4

Para toda família finita F de conjuntos compactos S e todo $x \in co\left(\sum_{S\in F} S\right)$, existe $y \in \sum_{S\in F} S$ tal que $\|x-y\|^2 \leqslant \sum_{S\in F} (\text{rad}\,(S))^2$

Prova: por indução finita, se $\#\ F = m = 1$,

$x = \sum_{y\in T} \alpha(y)\, y$, para $T \subset S$ finito e $\alpha(y) \geqslant 0$, $\sum_{y\in T} \alpha(y) = 1$ tome x^* de modo a minimizar $\max_{y\in S} \|x-y\|$ de modo a termos $\text{rad}\,(s) = \max_{y\in S} \|x^*-y\|$.

$0 = x - x = x - \sum_{y\in T} \alpha(y)\, y = \sum_{y\in T} \alpha(y)\,(x-y)$

tomando-se o produto interno com o vetor $x - x^*$

$$0 = \sum_{y\in T} \alpha(y) \langle x - x^*, x-y \rangle.$$

A igualdade acima impede que se tenha $\langle x - x^*, x - y \rangle > 0$ para todo $y \in T$, de modo que para algum $y \in T$ $\langle x - x^*, x - y \rangle \leq 0$. Mas $[\text{rad}(s)]^2 \geqslant \|x^* - y\| = \|(x - x^*) - (x - y)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x - x^*\|^2 - 2 \langle x - x^*, x - y \rangle \geqslant \|x - y\|^2$
portanto a desigualdade (*) vale para $m = 1$.

Admitindo que (*) vale para m, provemos para $m + 1$ se

$x \in co\left(\sum_{j=1}^{m+1} S_j\right) = co\left(\sum_{j=1}^{m} S_j\right) + co\,(S_{m+1})$ teremos

$x = x^1 + x^2$, $x^1 \in co\left(\sum_{j=1}^{m} S_j\right)$ e $x^2 \in co\,(S_{m+1})$ pela hipótese de indução,

existe $y^1 \in \sum_{j=1}^{m} S_j$ tal que $\|x^1 - y^1\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} [\text{rad}\,(S_j)]^2$.

Tomemos z^0 que minimiza $\|x - y^1 - z\|$ para $z \in co(S_{m+1})$.
Então para todo $z^0 \in co(S_{m+1})$ temos:
$\|x - y^1 - z^0\|^2 \leq \|x - y^1 - x^2\|^2 = \|x^1 - y^1\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} [\text{rad}\,(S_j)]^2$
Para todo $z \in co(S_{m+1})$, $t z + (1 - t) z^0 \in co(S_{m+1})$, $0 < t \leq 1$, temos,
$\|x - y^1 - z^0\|^2 \leq \|x - y^1 - [t z + (1 - t) z^0]\|^2 = \|x - y^1 - z^0 - t(z - z^0)\|^2 = \|x - y^1 - z^0\|^2 - 2t \langle x - y^1 - y^0, z - z^0 \rangle + t^2 \|z - z^0\|^2$, logo,
$\langle x - y^1 - z^0, z - z^0 \rangle \leq t \|z - z^0\|^2$. Fazendo-se $t \to 0$, $\langle x - y^1 - z^0, z - z^0 \rangle \leq 0$, para todo $z \in co(S_{m+1})$. Pelo *Lema II.3* existe um subconjunto finito $T \subset S_{m+1}$ tal que $z^0 \in co(T)$ e como (*) vale para $m = 1$ temos,
$\|y^2 - z^0\|^2 \leq [\text{rad}\,(T)]^2 \leq [\text{rad}\,(S_{m+1})]^2$.
Pelo mesmo *Lema II.3* $y^2 - z^0$ é uma direção facial sobre z^0 em $co(S_{m+1})$,

logo $z^0 + t(y^2 - z^0) \in co(S_{m+1})$ para $|t|$ suficientemente pequeno. Para $z = z^0 + t(y^2 - z^0)$, $\langle x - y^1 - z^0, [z^0 + t(y^2 - z^0)] - z^0 \rangle \leq 0$ $t \langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle \leq 0$.

Como t pode ser negativo ou positivo, temos $\langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle = 0$ para $y = y^1 + y^2 \in \sum_{j=1}^{m+1} S_j$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - y^1 - y^2\|^2 = \|(x - y^1 - z^0) - (y^2 - z^0)\|^2 = \|x - y^1 - z^0\|^2 - 2 \langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle + \|y^2 - z^0\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} [rad(S_j)]^2 + \leqslant \sum_{j=1}^{m} [rad(S_{m+1})]^2 = \sum_{j=1}^{m+1} [rad(S_j)]^2,$$

o que mostra a validade de (*).

Q.E.D.

Finalmente apresentamos o

Teorema II.2 (Shapley-Folkman)

Seja F uma família de conjuntos compactos $S \subset R^n$ tais que $rad(S) \leq L$ para todo $S \in F$. Então para toda subfamília finita $F' \subset F$ de m elementos $S^1, \ldots, S_m$ e todo ponto $x \in co(\sum_{j=1}^{m} S_j)$ existe um $y \in \sum_{j=1}^{m} S_j$ tal que $\|x - y\| \leq L\sqrt{n}$.

Prova: pelo *Lema II.4* para todo $x \in co(\sum_{j=1}^{m} S_j)$ existe um $y \in \sum_{j=1}^{m} S_j$ tal que $\|x - y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} [rad(S_j)]^2$. Se $m \leq n$, $\|x - y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} [rad(S_j)]^2 \leq \sum_{j=1}^{m} L^2 = mL^2 \leq nL^2$.

Se $m > n$, pelo Corolário II.1, $x = x_1 + x_2$; sendo $x_1 \in co(\sum_{S \in F'_1} S)$ e $x_2 \in \sum_{S \in F'_2} S$ onde F'_1 e F'_2 são duas subfamílias disjuntas de F' sendo o número máximo de elementos de F'_1 igual a n. Temos $x - x_2 \in co(\sum_{S \in F'_1} S)$.

Como F'_1 tem no máximo n elementos, aplicando-se o *Lema IV.5* podemos obter $y_1 \in \sum_{S \in F'_1} S$ tal que $\|(x - x_2) - y_1\|^2 \leq \sum_{S \in F'_1} [rad(S)]^2 \leq \sum_{S \in F'_1} L^2 \leq n L^2$ tomando-se $y = y_1 + x_2$ temos $|x - y|^2 \leq nL^2$, o que prova $\|x - y\| \leq L\sqrt{n}$.

Q.E.D.

3. **O modelo de produção e consumo** [1]

3.1 *O modelo de Arrow-Debreu (resumo)*

Em uma economia existem n bens que são produzidos por m firmas. Cada firma f é caracterizada por um conjunto de possibilidades da produção Y_f, o qual satisfaz aos axiomas:

A.1 — Y_f é um subconjunto convexo e fechado do R^n *contendo* θ (g = 1, ..., m).

[1] O item 3 baseia-se em Starr (1969) e Arrow & Hahn (1971)

Este axioma significa que a produção é divisível ($y_f \in Y_f$ implica $\lambda y_f \in Y_f$), aditível ($y_f^1, y_f^2 \in Y_f$ implica $y_f^1 + y_f^2 \in Y_f$) e não admite retornos crescentes de escala ($y_f \in Y_f$, $0 \leq \lambda \leq 1$ então $\lambda y_f = \lambda y_f + (1 - \lambda)\, \theta \in Y_f$). O fato de Y_f ser fechado significa pontos arbitrariamente próximos de y_f pertencem a Y_f. $\theta \in Y_f$ significa que a empresa pode decidir nada produzir.

Definindo o *conjunto de possibilidades de produção da economia* por $Y = \sum_f Y_f$, temos os axiomas:

A.2 — Se $y \in Y$ e $y \leq \theta$, então $y = \theta$

A.3 — $Y \quad (-Y) = \phi$

O axioma *A.2* significa que não se pode ter um vetor de produção agregada com um componente positivo, a menos que pelo menos um componente seja negativo, isto é, para haver alguma produção, é necessário algum fator de produção. O axioma *A.3* significa que não podem haver dois vetores de produção em que os insumos de um são exatamente os produtos do outro. Isto decorre do fato de que algum fator de produção é usado em qualquer atividade produtiva, mas os fatores da produção, por hipótese, não podem ser produzidos pelas firmas.

O consumo de economia é representado por indivíduos. Cada indivíduo *h* é caracterizado por um *conjunto de possibilidades de consumo* X_h, o qual satisfaz aos axiomas:

A.4 — X_h é um subconjunto convexo e fechado do R_+^n, o qual é limitado inferiormente, isto é, existe um vetor $\bar{\bar{x}}_h$ tal que $\bar{\bar{x}}_h \leq x_n$ para todo $x_h \in X_h$.

Este último axioma exclui de X_h as cestas de bens insuficientes para manter a vida do indivíduo *h*.

A.5 — Cada consumidor possui uma dotação inicial $\bar{x}_n$ tal que $\bar{x}_n \quad x_h$ para algum $x_h \in X_h$ e uma participação de d_{hf} nos lucros da empresa f, $d_{hf} \geq 0$, $\sum_h d_{hf} = 1$ para todo *f*.

O axioma acima afirma que cada consumidor *h* possui uma dotação positiva de cada bem. Trata-se de uma hipótese forte que facilita muito a prova da existência de equilíbrio. A existência de equilíbrio, contudo, pode ser provada com uma hipótese mais fraca, mas envolvendo maior complicação matemática (veja Arrow-Debreu, 1954).

Definição

Seja $P > \theta$ um vetor de R^n que representa o sistema de preços. Denomina-se M_h (P) a *renda do indivíduo h* ao sistema de preços *P*.

$$M_h(P) = < P, \bar{x}_h > + \Sigma\, d_{hj}\, \pi_f(P)$$

onde $\pi_f(P)$ é o lucro da empresa *f* ao sistema de preços P.

Note-se que os axiomas *A.1*, *A.4*, e *A.5* garantem que $M_h(P) > 0$ para todo *P*, pois por *A.1* nenhuma empresa opera com lucro $< P, y_f >$ negativo, pois pode fazer $y_f = \theta$, e por *A.4* e *A.5*, $\bar{x}_h \leqslant \theta$ logo $< P, \bar{x}_h > > 0$.

As preferências dos consumidores são descritas pelo axioma abaixo.

A.6 — Para cada consumidor *h* existe uma relação de ordem em X_h representada por($\underset{h}{\dot{\geqslant}}$) significando "preferido ou indiferente", entre pares de elementos de X_h satisfazendo às propriedades abaixo.

a) Transitividade

$$x_h^1 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^2 \text{ e } x_h^2 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^3 \text{ implica } x_h^1 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^3$$

b) Ordenação

Para todo x_h^1, x_h^2, temos $x_h^1 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^2$ ou $x_h^2 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^1$

c) Continuidade

Para todo x_h^0, os conjuntos x_h: $\{x_h \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^0\}$ e $\{x_h : x_h^0 \dot{\geqslant} x_h\}$ são fechados

d) Convexidade semi-estrita

Se $x_4^1 \underset{h}{\dot{>}} x_h^2$ e $0 \leq \alpha < 1$, então $(1 - \alpha)\, x_h^1 + \alpha x_h^2 \underset{h}{\dot{>}} x_h^2$

e)Não-saciedade

Se $x_h^0 \in X_h$, então existe $x_h \in X_h$ tal que $x_h \underset{h}{\dot{>}} x_h^0$

O símbolo($\underset{h}{\dot{>}}$) significa *preferido* e é definido por: $x_h^1 \underset{h}{\dot{>}} x_h^2$ significa $x_4^1 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^2$ mas não ocorre $x_h^2 \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^1$

O axioma *A.6.a* afirma que duas cestas podem sempre ser comparadas. *A.6.b* é a hipótese que permitirá ao indivíduo maximizar sua satisfação. *A.6.c* significa que se uma cesta x_h^1 é preferida a x_h^2, então existem conjuntos de cestas S^1 e $S^2 \subset X_h$ próximos a x_h^1 e x_h^2 respectivamente, tais que, se $x^1 \in S^1$ e $x^2 \in S^2$, então $x^1 \dot{>}_h x^2$. *A.6.d* indica que o consumidor prefere a diversificação à especialização. Finalmente *A.6.e* assegura que sempre se pode encontrar uma cesta que agrade mais ao consumidor, isto é, o consumidor é insaciável.

Com estes axiomas prova-se a existência de um equilíbrio caracterizado por um vetor de preços P^*, pontos de produção y_f^* de cada firma, pontos de consumo x_h^* de cada indivíduo obedecendo a:

1) $P^* > \theta$;

2) $\sum_h x_h^* \leqslant \sum_f y_f^* + \sum_h \bar{x}_h$;

3) $< p^*, y_f^* > = \pi_f(p^*)$, para todo f

4) $< p^*, x_h^* > = M_h(p^*)$,,para todo h.

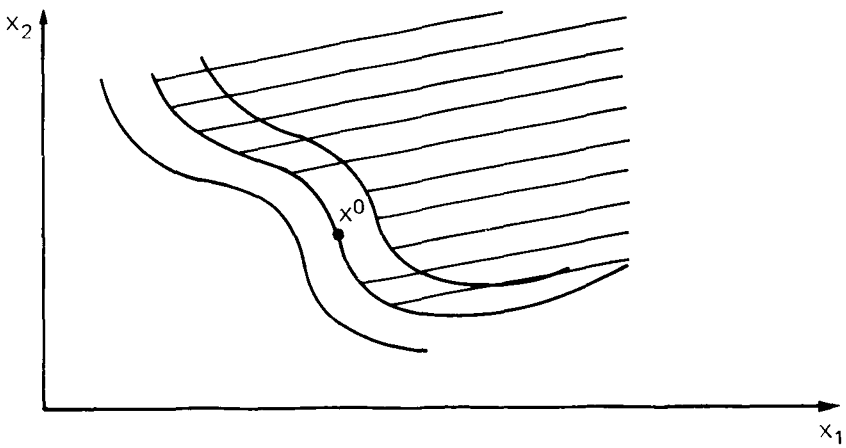
5) $< p^*, \hat{x}_h > \geq < p^*, x_h^* >$ para todo $\hat{x}_h \in X_h$ tal que $\hat{x}_h \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^*$

O item (1) afirma que o vetor de preços não pode ser negativo ou nulo; (2) significa que as restrições de dotações de fatores de produção são respeitadas; (3) diz que cada firma maximiza seu lucro ao sistema de preços P^*; (4) afirma que cada consumidor gasta toda sua renda com bens de consumo; (5) significa que nenhum consumidor pode gastar menos com uma cesta de bens que seja preferida ou indiferente à cesta escolhida.

3.2 *O modelo de produção e consumo sem convexidade*

Em que medida o relaxamento das hipóteses de convexidade contidas nos axiomas *A.1* e *A.6.d* compromete a existência de equilíbrio? Para analisar formalmente esta questão, tomemos uma economia competitiva descrita pelos axiomas *A.1-A.6*, sem as referidas hipóteses de convexidade. A nova ordenação de preferências descreve conjuntos de pontos preferidos a um x_h^0, isto é, $\{x_h : x_h \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^0\}$ não-convexos de acordo com a figura 12.

Figura 12



Para podermos comparar o equilíbrio alcançado por esta economia com o equilíbrio (compensado) do modelo de Arrow-Debreu, faremos a "convexificação" de nossa economia não-convexa. Para isto, definamos a "ordenação convexificada" por:

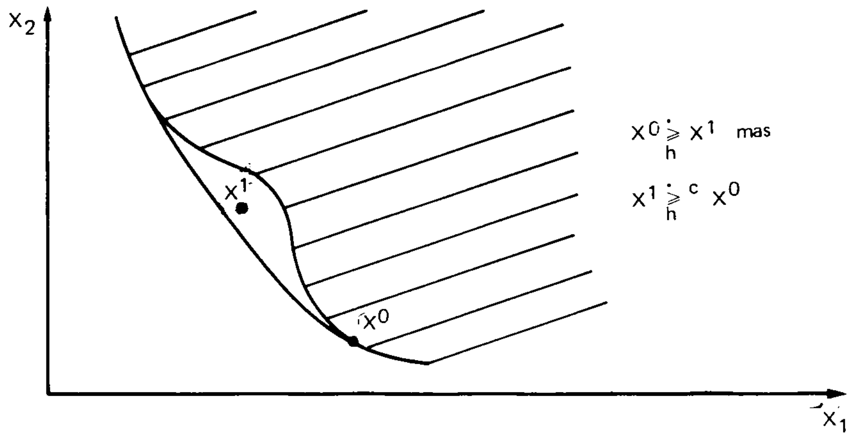
Definição

$x_h^1 \underset{h}{\dot{\geqslant}}^{c} x_h^2$ significa que para todo x_h^0 tal que $x_h^2 \in co(\{x_h : x_h \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^0\})$ tem-se $x_h^1 \in co(\{x_h : x_h \underset{h}{\dot{\geqslant}} x_h^0\})$. (veja figura 13)

A economia convexificada será descrita por:

I — Os axiomas *A.1-A.3* são satisfeitos com $co(Y_f)$ no lugar de Y_f.

Figura 13



II — Os axiomas *A.4-A.6* são satisfeitos com $\succsim^c_h$ no lugar de $\succsim_h$.

A economia convexificada satisfaz às condições necessárias à existência de um equilíbrio compensado, isto é, existe um vetor de preços $P^* > 0$ e uma alocação $(x_1^*, \ldots, x_H^*; \; y_1^*, \ldots, y_F^*) = (x^*, y^*)$ tal que:

1) $x^* \leq y^* + \bar{x}$, onde $\bar{x} = \sum_{h=1}^{H} \bar{x}_h$;

2) y_f^* maximiza $< p^*, y_f^* >$ sujeito a $y_f \in co(Y_f)$;

3) x_h^* minimiza $< p^*, x_h^* >$ sujeito a $x_h \succsim^c_h x_h^*$;

4) $<p^*, x_h^*> = M_h^* = <p^*, \bar{x}_h> + \sum_{f=1}^{F} d_{hf} <p^*, y_f^*>$.

A economia convexificada, portanto, possui um equilíbrio compensado com as propriedades de factibilidade, otimização para cada agente econômico e satisfação às restrições orçamentárias de cada indivíduo. A economia não-convexificada terá um vetor de preços p^* e duas alocações (x^*, y^*) e (x^+, y^+), a primeira sendo factível e a segunda sendo um ótimo para cada agente e satisfazendo às restrições orçamentárias individuais. Tal que em termos agregados as duas alocações estão próximas. Definamos, pois, este equilíbrio:

Definição

Um equilíbrio compensado aproximado do módulo *A* é um vetor de preços $P^* > \theta$ e duas alocações (x^*, y^*) e (x^-, y^-) tais que:

a) $x^* \leq y^* + \bar{x}$;

b) $p_i^* = 0$ se $x_i^* < y_i^* + \bar{x}_i$;

c) y_f^+ maximiza $< p^*, y_f >$ para $y_f \in Y_f$;

d) x_h^+ minimiza $< p^*, x_h >$ sujeito a $x_h \underset{h}{\gtrdot} x_h^+$,

e) $< p, x_h^+ > = M_h^+ = < p^*, \bar{x}_h > + \sum_{f=1}^{F} d_{hf} < p^*, y_f^+ > =$

$= M_h^* = < p^*, \bar{x}_h > + \sum_{f=1}^{F} d_{ih} < p^*, y_f^* >$;

f) $\|(x^* - y^*) - (x^+ - y^+)\| \leq A$;

Antes de provarmos a existência do equilíbrio acima, vejamos o conceito de raio interno de um conjunto, que vem a ser uma medida de não-convexidade.

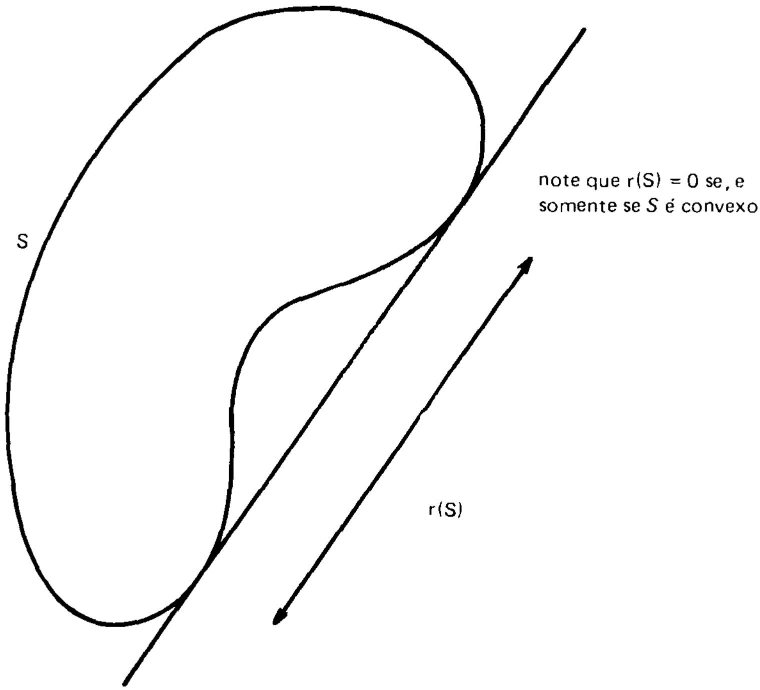
Definição

O *raio interno* de um conjunto S, r(s) é definido por:

$$r(s) = \sup_{x \epsilon co(S)} \inf_{x \epsilon co(T)} rad\ (T)$$

Para a compreensão deste conceito, parta de $x \epsilon co(S)$ e obtenha um subconjunto finito $T \subset S$ tal que $x \epsilon co(T)$. Para cada x, faça T variar e tome o ínfimo de rad(T); a seguir defina como r(S) ao supremo sobre todos os $x \epsilon co(S)$ de todos estes ínfimos.

Figura 14



A seguir provaremos que o equilíbrio compensado aproximado existe e que seu módulo é $A = L\sqrt{n}$, onde L é o maior grau de não-convexidade dos conjuntos de possibilidade de produção e consumo (sujeito à restrição $x_h \underset{h}{\succsim} x_h^+$ para todo h) e n é o número de bens.

O resultado $|(x^* - y^*) - (x^* - y^*)| \leq A = L\sqrt{n}$ indica que no equilíbrio aproximado a discrepância entre o excesso de demanda agregada na economia convexificada $(x^* - y^*)$ e excesso análogo na economia não-convexificada $(x^+ - y^+)$ é limitada por um fator que independe do tamanho da economia (medida pelo número de agentes, por exemplo). Isto equivale a dizer que a discrepância dividida pelo número de agentes (discrepância *per capita*) tende a zero quando a economia cresce.

Teorema III.1 — Existência de equilíbrio compensado aproximado

Sob as hipóteses I e II que caracterizam a economia convexificada, se existe L tal que $r(Y_f) \leq L$ para todo f e $r(\{x_h : x_h \underset{h}{\succsim} x_h^+\}) \leqslant L$ para todo h, existe um equilíbrio compensado aproximado de módulo $L\sqrt{n}$, onde n, onde n é o número de bens.

Prova: sejam P^* e (x^*, y^*) um equilíbrio para a economia convexificada. O equilíbrio de cada empresa $y^*_f \in co(Y_f)$ é uma combinação convexa de um subconjunto finito $T_f \subset Y_f$. Como $r(Y_f) \leq L$, conclui-se que $rad(T_f) \leq L$.

Temos $y_f^* = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f)\, y_f, \quad \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) = 1$

Multiplicando-se escalarmente por P^* obtemos

$$< p^*, y_f^* > = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) < p^*, y_f >$$

mas $y_f \in T_f \in Y_f \in co(Y_f)$ para todo $y_f \in T_f$. Pela maximização de lucro em $co(Y_f)$, conclui-se que $< p^*, y^*_f > \geqslant < p^*, y_f >$ para todo $y_f \in T_f$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha(y_f) > 0$ para todo $y_f \in T_f$, pois caso algum $\alpha(y_f = 0$ podemos retirar este y_f de T_f. Com $\alpha(y_f) > 0$ para todo $y_f \in T$ e $\sum_{y_f \in T} \alpha(y_f) = 1$ e a expressão $< p^*, y_f^* > = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) < p^*, y_f > \geqslant < p^*, y_f >$, obtém-se $< p^*, y^*_f > = < p^*, y_f >$ para todo $y_f \in T_f$. Portanto: todo $y_f \in T_f$ maximiza $< p^*, y_f >$ para $y_f \in Y_f$. O mesmo argumento utilizado para a produção pode ser repetido para o consumo, pois $\{x_h : x_h \underset{h}{\succsim^c} x_h^*\} = co(\{x_h : x_h \underset{h}{\succsim} x_h^0\})$ e portanto existe um subconjunto finito $S_h \subset \{x_h : x_h \underset{h}{\succsim} x_h^0\}$ tal que $rad(S_h) \leq L$ e $x^*_h \in co(S_h)$. Conclui-se que: todo $x_h \in S_h$ minimiza $< p^*, x_h >$ para $x_h \underset{h}{\succsim} x_h^0$ e $< p^*, x_h > = < p^*, x^*_h >$ para todo $x_h \in S_h$.

Estas expressões mostram que podemos escolher S_h de forma a ter $x_h^0 \in S_h$ e que todos os elementos de S_h são indiferentes. Temos:

$$x^* - y^* = \sum_{h=1}^{H} x_h^* - \sum_{f=1}^{F} \in \sum_{h=1}^{H} co(S_h) + \sum_{f=1}^{F} co(-T_f)$$

$$= co\left(\sum_{h=1}^{H} S_h + \sum_{f=1}^{F} (-T_f)\right)$$

Como $\mathrm{rad}(S_h) \leq L$ e $\mathrm{rad}(-T_f) \leq L$ para todo *h* e *f*, podemos aplicar o Teorema de Shapley-Folkman para garantir a existência de um ponto

$$x^t - y^t \in \sum_{h=1}^{H} S_h + \sum_{f=1}^{F} (-T_f)$$

tal que

$\|(x^* - y^*) - (x^t - y^t)\| = \|(x^* - x^t) - (y^* - y^t)\| \leq L\sqrt{n}$

Q.E.D.

4. O modelo de economia de trocas [2]

4.1 *Introdução*

No modelo de economia de produção e consumo apresentado no item 3.2 utilizamos como medida de desequilíbrio o grau de não-convexidade dos conjuntos de produção e consumo dos agentes econômicos. Neste item apresentamos um modelo de economia de trocas em que a medida de desequilíbrio utilizada é o valor de mercado do excesso de demanda.

Seja o vetor $x \in R^k$, o conjunto $A \subset R^k$ usaremos as seguintes notações:

$$\|x\|_M = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i| \qquad \|x\|_S = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

$|x|$ é o vetor com $|x|_i = |x_i|$

$\tilde{P}$ = conjunto de preferenciais em R^k_+ obedecendo às hipóteses contidas no axioma *A.6* do item e à exceção de *A.6.d* (convexidade semi-estrita).

4.2 *O modelo*

Uma economia de trocas será caracterizada por uma função $\epsilon : A \rightarrow \tilde{P} \times R^k_+$ onde *A* é um conjunto finito de agentes econômicos. Para o agente $a \in A$, $\geq_a$ é a projeção de $\epsilon(a)$ **sobre** $\tilde{P}$ — representando as preferências de *a* — e e (a) é a projeção de $\epsilon(a)$ sobre R^k_+ — definindo as dotações iniciais de *a*.

Uma alocação é uma função $f : A \rightarrow R^k_+$ tal que $\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} e(a)$.

Para uma economia ϵ, $M(\epsilon) = \max\{\|e(a_1) + \ldots + e(a_k)\|M' \; a_1, \ldots, a_k \in A, a_i$ distintos$\}$ Um vetor de preços $P \in R^k_+$ é tal que $\|P\|_S = 1$. Sendo *S* o conjunto de todos os preços e $\mathring{S}$ seu interior, se $P \in \mathring{S}$ definimos $C(p) = 1/\min\{p_1, \ldots, p_k\}$. Para $P \in \mathring{S}$ e $a \in A$, definimos o conjunto D(p,a) denominado "demanda do agente *a* ao preço *P*" por $D(p,a) = \{x \in R^k_+ : \langle p, x\rangle \leqslant \langle p, e(a)\rangle$ e $\langle p, y\rangle \leq \langle p, e(a)\rangle$ implica $x \gtrsim_a y\}$. A demanda agregada *per capita* é o conjunto $D(p) = \sum_{a \in A} D(p,a)/|A|$.

[2] O item 4 baseia-se em Anderson (1982).

Apresentaremos um teorema que prova a existência de um equilíbrio aproximado. As três afirmações nele contidas podem ser interpretadas por:

1. O valor de mercado do excesso de demanda absoluto *per capita* é pequeno, isto é, o valor de mercado do ajuste de estoques necessário para equilibrar todos os mercados é pequeno.
2. Pode-se obter uma cota para a norma do excesso de demanda. Como C(p) depende de *P* que é endógeno, seu uso não é adequado como medida de desequilíbrio. Tal problema, contudo, poderia ser contornado tomando-se uma cota superior para C(p), por exemplo, a máxima taxa marginal de substituição β: dado *P* o vetor de equilíbrio aproximado, $P_i/P_j \leq \beta$, logo $C(p) \leq k\beta$. A conclusão (2) também mostra que existe uma alocação que é próxima ao equilíbrio em termos agregados, embora possa gerar grandes desvios em relação ao equilíbrio para alguns agentes tomados individualmente.
3. Existe uma alocação tal que nenhum agente dispensa mais do que uma pequena fração de sua demanda, isto é, nenhum indivíduo se sente muito insatisfeito em aceitar a alocação ao invés de obter a cesta determinada pela sua demanda.

Teorema IV.1 — Existência de equilíbrio aproximado

Seja uma economia de trocas finita $\epsilon : A \to \tilde{P} \times R^k_+$, com $|A| = n$ e $\sum_{a \in A} e(a) \geqslant \Theta$. Então existe $P \in \overset{o}{S}$ tal que $\sum_{a \in A} e(a)/n \in co(D(p))$. Para tal *P* existe uma alocação $h: A \to R^k_+$ tal que $<p,h(a)> = <p,e(a)>$ para todo *a* e uma cesta $g(a) \epsilon D(p,a)$ tal que:

(1) $< p, |\sum_{a \in A} (g(a) - e(a))| > \leqslant < p, \sum_{a \in A} |g(a) - h(a)| > \leqslant 2M(\epsilon)$

(2) $\| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \|_M \leqslant \sum_{a \in A} \| g(a) - h(a) \|_M \leqslant 2C(p).M(\epsilon)$

(3) Existe uma alocação $f: A \to R^k_+$ tal que $< p, f(a) > = < p, e(a) >$ para todo *a* e

$f(a)_j \geqslant g(a)_j \, [1 - (2.C(p).M(\epsilon) / \sum_{a \in A} e(a)_j)]$ para todo $a \in A$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Prova: por um argumento de equilíbrio geral baseado em ponto fixo (veja Hildenbrand,1974, p.149-150) pode-se provar que existe um vetor $P \in \overset{o}{S}$ tal que $\sum_{a \in A} c(a)/n \epsilon co(D(p))$. Pelo *LemaII.3* existe $h(a) \epsilon D(p,a)$ tal que $\sum_{a \in A} e(a) = \sum_{a \in A} h(a)$ e $h(a) \in D(p,a)$ para o máximo *k* agentes $a_1, \dots, a_k$ Escolha arbitrariamente $g(a_i) \in D(p,a_i)$. Para todo $1 \leq i \leq k$ e faça $g(a) = h(a)$ para todo $a \epsilon \{a_1, \dots, a_k\}$. Desta forma $g(a) \in D(p,a)$ para todo *a*. Como, por hipótese, as preferências $\underset{2}{\geq}$ a são monótonas e $g(a) \in D(p,a)$ para todo *a*, temos $<p,g(a)> = <p,e(a)>$ para todo a

$\in$A. Mas h(a)$\in$co(D(p,a)) implica $<p,h(a)> = <p,e(a)>$ para todo *a*. Podemos, pois, escrever

$$< p, \left| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right| > = < p, \left| \sum_{a \in A} (g(a) - h(a)) \right| >$$

$$\leqslant < p, \sum_{a \in A} \left| g(a) - h(a) \right| >$$

$$= < p, \sum_{i=1}^{k} \left| g(a_i) - h(a_i) \right| >$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left| < p, g(a_i) > - < p, h(a_i) > \right|$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{k} < p, e(a^i) >$$

$$= 2 < p, \sum_{i=1}^{k} e(a_i) >$$

$$\leqslant 2 \left\| \sum_{i=1}^{k} e(a_i) \right\|_M$$

$\leqslant$ 2.M(ϵ), o que prova (1).

Para provarmos (2), notemos que

$$\left\| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right\|_M \leqslant \sum_{a \in A} \left\| g(a) - h(a) \right\|_M$$

$$\leqslant < p, \sum_{a \in A} \left| g(a) - h(a) \right| > 1/\min \{ p_1, \ldots, p_k \}$$

$\leq$ 2 M(ϵ) C(P), o que prova (2)

Para obtermos (3), tomemos o conjunto de índices definido por

$$J = \left\{ j : \sum_{a \in A} e(a)_j < \sum_{a \in A} g(a)_j \right\} \text{ e}$$

$$r(a)_j = \begin{cases} g(a)_j \left(\sum_{b \in A} e(b)_j / \sum_{b \in A} g(b)_j \right), \text{ se } j \in J \\ g(a)_j, \text{ se } j \notin J \end{cases}$$

Criaremos a alocação $f: A \to R^k_+$ com o auxílio da expressão anterior. Para tal, notemos que:

(i) $r(a) \geqslant \theta$, pois a demanda $g(a)j$ pelo j-ésimo bem não pode ser negativa.

(ii) $\sum_{a \in A} r(a) \leqslant \sum_{a \in A} e(a)$, pois para $j \in J$ temos

$$\sum_{a \in A} e(a)_j < \sum_{a \in A} g(a)_j, \text{ o que implica } r(a)_j < g(a)_j.$$

$$r(a)_j = g(a)_j \left(\sum_{b \in A} e(b)_j / \sum_{b \in A} g(b)_j \right)$$

$$\sum_{a \in A} r(a)_j = \sum_{a \in A} g(a)_j \left(\sum_{b \in A} e(b)_j / \sum_{b \in A} g(b)_j \right) = \sum_{a \in A} e(a)_j \text{ ; para}$$

$j \notin J$, temos $\sum_{a \in A} e(a)_j \geqslant \sum_{a \in A} g(a)_j$

$$r(a)_j = g(a_j)$$

$$\sum_{a \in A} r(a)_j = \sum_{a \in A} g(a)_j \leqslant \sum_{a \in A} e(a)_j$$

(iii) $< p, r(a) > \leqslant < p, g(a) > = < p, e(a) >$, pois

$r(a)_j \leqslant g(a)_j$ e $P_j > 0$.

A última igualdade decorre de $g(a) \in D(p,a)$.
Definamos, portanto,

$f: A \to R^k_+$ por $f(a) = r(a) +$

$$+ \sum_{b \in A} (e(b) - r(b)) \frac{< p, e(a) - r(a) >}{< p, \sum_{b \in A} (e(b) - r(b)) >}$$

Por (i), (ii) e (iii) concluímos $f(a) \geq \theta$. Notemos que

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} r(a) + \sum_{a \in A} (e(a) - r(a)) = \sum_{a \in A} e(a),$$

o que prova que f é uma alocação, temos ainda $<p,f(a)> = <p,r(a)> + <p,e(a) - r(a)> = <p,e(a)>$ para $j \in J$,

$$f(a)_j \geqslant r(a)_j = g(a)_j \geqslant g(a)_j \left(1 - 2\,C(P)\;M(\epsilon) / \sum_{a \in A} e(b)_j\right)$$

Para $j \in J$.

$$J(a)_j = r(a)_j = g(a)_j \frac{\sum_{b \in A} e(b)_j}{\sum_{b \in A} g(b)_j}$$

$$= g(a)_j \left[1 - \frac{\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b_j))}{\sum_{b \in A} (g(b)_j} \right]$$

Como para $j \in J$ tem-se $\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b)_j) > 0$ e para

todo $x \in R^k_+$, $\| x \|_M = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i \geqslant x_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b)_j) \leqslant \| \sum_{b \in A} (g(b) - e(b)) \|_M \leqslant 2\,C(P)\;M(\epsilon)$$

de acordo com (2).

$$\text{temos} \quad f(a)_j \geqslant g(a)_j \left[1 - \frac{2\,C(P)\;M(\epsilon)}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right]$$

$$\geqslant g(a)_j \left[1 - 2\,C(P)\;M(\epsilon) / \sum_{b \in A} e(b)_j \right]$$

que completa a prova de (3).

Abstract

This paper is a survey on the existence of general equilibrium in economies with non-convex preferences and technologies. The absence of convex preferences is equivalent to abandoning the hypothesis that the consumer prefers the diversification to the specialization. The non-convex technologies represent increasing returns to scale. Although the hypothesis of convexity is necessary to prove the existence of a competitive equilibrium, it can be shown that even without convexity there is an approximate equilibrium with a measure of *per capita* disequilibrium hat decreases as the number of agents increases.

Referências bibliográficas

Anderson, R. M. Market value approach to approximate equilibria. *Econometrica, 50*(1) Jan. 1982.

Arrow, K. J. & Debreu, G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica, 22* 1954.

______ & Hahn, F. *General competitive analysis*. San Francisco, Holden-Day, 1971. cap. 3, 4, 5 e 7.

Hildenbrand, W. *Core and equilibria of a large economy*. Princeton, Princeton University Press, 1974.

Starr, R. M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica, 37*(1), Jan. 1969.