Soluções analíticas exatas para a taxa interna de retorno*

Clovis de Faro**

Regra geral, dado que o problema é equivalente ao da determinação da raiz positiva de um polinômio de grau *n*, não é possível obter-se uma solução analítica exata para a determinação da taxa interna de retorno de um dado fluxo de caixa. Entretanto, para certas situações particulares, que são financeiramente interpretadas como correspondendo a tipos específicos de operações de empréstimo, mostra-se que as correspondentes taxas internas de retorno podem ser facilmente explicitadas.

1. Introdução; 2. Estudo de alguns casos particulares; 3. Conclusão.

1. Introdução

Sendo dado um projeto, caracterizado pela seqüência de fluxos de caixa líquidos periódicos $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, onde $a_0 a_n \neq 0$, diz-se que $i > -1$ é uma taxa interna de retomo (TIR) do projeto se for anulada a sua função valor atual. Ou seja, se for verificada a relação:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i)^{-j} = 0 \qquad (1)$$

Fazendo-se $x = 1/(1 + i)$, segue-se, então, que a determinação da (s) taxa (s) intena (s) de retomo do projeto considerado é equivalente à busca das raízes reais, positivas, do seguinte polinômio do grau *n* em *x*:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad (2)$$

Ora, como é fartamente sabido do estudo da teoria das equações, não é em geral possível, se $n > 4$, calcular as raízes de $P(x)$ por intermédio de soluções ana-

*Uma versão anterior deste trabalho foi apresentada ao VII Enegep (Encontro Nacional de Engenharia de Produção), realizado em Niterói, de 6 a 9 de outubro de 1987.

**Da EPGE/FGV, do TPP/UFF e da FCE/Uerj.

R. Bras. Econ.	Rio de Janeiro	v. 42	nº 2	p. 139-149	abr./jun. 1988

líticas. Assim, regra geral, a determinação da TIR de um dado projeto só pode ser efetuada de maneira aproximada, fazendo-se uso de um procedimento de cunho iterativo, tais como os algoritmos de Boulding e de Newton-Raphson, ou o método da bisseção, como discutido em Faro (1985).

No que se segue, iremos focalizar a chamada classe de projetos do tipo investimento simples, que é caracterizada pelo fato de que $a_0 < 0$ e $a_j \geqslant 0$, j = 1,2, ..., n. Para esta classe, visto que temos uma única variação de sinal na seqüência formada pelos coeficientes do correspondente polinômio em x, decorre da bem conhecida Regra de Sinais de Descartes que temos sempre uma e somente uma TIR. Além do mais, como iremos discutir, existem certos casos particulares de projetos do tipo investimento simples para os quais, por meio de soluções analíticas relativamente simples, se pode calcular o valor exato de sua correspondente TIR. Ressalta também que, como veremos, em muitos casos a respectiva expressão algébrica para a TIR pode ser facilmente justificada por meio de uma simples interpretação financeira.

2. Estudos de alguns casos particulares

Sem que se tenha a pretensão de efetuar um levantamento exaustivo, este item contém a análise de sete casos particulares de projetos do tipo investimento simples, alguns dos quais foram anteriormente abordados em Faro (1985), para os quais o valor da correspondente TIR pode ser calculado por meio de fórmulas algébricas.

Com o intuito de propiciar uma imediata interpretação financeira para alguns dos resultados que serão apresentados, suponha-se que $-a_0$ representa o valor de um empréstimo, o qual deve ser restituído por intermédio da seqüência de n pagamentos periódicos $a_1, a_2, ..., a_n$. Obviamente, estaremos interessados no caso em que a soma desses n pagamentos periódicos é diferente do valor financiado, $-a_0$; pois, caso contrário, segue-se de (1) que a correspondente TIR, que é interpretada como sendo a taxa cobrada no empréstimo, é nula.

2.1 O caso de pagamento único

O caso mais trivial, que será aqui abordado tão-somente para que a análise contemple as situações mais conhecidas, é aquele onde $a_j = 0$, para j = 1, 2, ..., n − 1, com unicamente a_n sendo positivo. Em tal eventualidade, como é bem conhecido, decorre imediatamente de (1) que:

$$i = (-a_n/a_0)^{1/n} - 1 \qquad (3)$$

2.2 O caso de dois pagamentos

Sendo m um inteiro positivo, considere-se o caso onde $a_j = 0$ se $j \neq m$ ou se $j \neq n = 2m$. Ou seja, efetivamente, tem-se somente os pagamentos a_m e a_n. Neste caso, segue-se que o valor da TIR, i, deve ser tal que:

$$a_0 + a_m (1 + i)^{-m} + a_n (1 + i)^{-2m} = 0 \qquad (4)$$

Logo, definindo-se a incógnita auxiliar

$$y = (1 + i)^{-m} \qquad (5)$$

verifica-se que precisamos tão-somente resolver uma equação do segundo grau em y. Como só a raiz positiva é de interesse, pois que $i > -1$, decorre de (4) e (5) que o valor procurado da TIR será dado por:

$$i = \left| ((a_m^2 - 4a_0 a_n)^{1/2} - a_m)/(2a_n) \right|^{-1/m} - 1 \qquad (6)$$

Por oportuno, é interessante notar as seguintes situações especiais, cujas soluções são decorrências imediatas das análises dos casos que serão abordados nos subitens 2.3, 2.4 e 2.5, respectivamente.

a) $a_n = a_m - a_0$

Em tal eventualidade, tem-se:

$$i = (1 - a_m/a_0)^{1/m} - 1 \qquad (6a)$$

b) $a_n/a_m = - 2a_m/a_0$

Teremos agora:

$$i = (a_n/a_m)^{1/m} - 1 \qquad (6b)$$

c) $2(2a_n - a_m) = - a_0$

Para esta situação, tem-se:

$$i = \{1 + 2(a_n - a_m)/a_0\}^{1/m} - 1 \qquad (6c)$$

2.3 O caso de pagamento periódico dos juros

Consideremos agora a situação na qual $a_j = P > 0$, $j = 1, 2 ..., n - 1$, e $a_n = P - a_0$. Decorre de (1) que o valor da TIR deve ser solução da seguinte equação:

$$V(i) = a_0 + P\,[1 - (1 + i)^{-n}]/i - a_0(1 + i)^{-n} = 0 \qquad (7)$$

É fácil verificar, por substituição direta, que $V(-P/a_0) = 0$. Por conseguinte, em face da unicidade da taxa interna de retorno para projetos do tipo investimento simples, a TIR do fluxo de caixa em apreço é:

$$i = -P/a_0 \qquad (8)$$

Tal particular tipo de fluxo de caixa, que havia sido anteriormente estudado por Boulding (1936), apresenta a seguinte interpretação financeira. O valor financiado, $-a_0$, deve ser resgatado mediante o pagamento periódico dos juros, calculados à taxa $i = -P/a_0$, com o principal sendo restituído no final dos n períodos que correspondem ao prazo do empréstimo.

2.3.1 O caso onde os juros periódicos são cobrados antecipadamente

Uma variante do caso considerado neste subitem é aquela em que $a_0 = P - K < 0$, $a_j = P > 0$, $j = 1, 2, ..., n - 1$, e $a_n = K > 0$. Decorre de (1) que devemos agora resolver a seguinte equação em i:

$$V(i) = P - K + P\,[1 - (1 + i)^{-n}]/\,i + (K - P)\,(1 + i)^{-n} = 0 \tag{9}$$

Como pode ser facilmente verificado, $V(P/(K-P)) = 0$. Logo, em face da unicidade da TIR para projetos do tipo investimento simples, conclui-se que a solução procurada é:

$$i = P/(K - P) \tag{10}$$

Relativamente à correspondente interpretação financeira desta variante, denotemos $P = f\,K$, para $0 < f < 1$. Deste modo, podemos interpretar P como sendo o valor dos juros que são periodicamente cobrados à taxa de desconto f, incidente sobre o valor financiado K. Sendo um resultado clássico da matemática financeira (cf. Faro, 1982, p. 85-86), decorre, então, que a taxa efetiva de juros que está sendo cobrada é igual a:

$$i = f/(1 - f) \tag{10a}$$

Neste ponto, convém observar que, do ponto de vista formal, não existe nenhuma distinção entre a variante aqui considerada e o caso geral de pagamento periódico dos juros. A única diferença é a relativa à correspondente interpretação financeira. Assim, por exemplo, sendo dado o fluxo de caixa no qual $a_0 = -200$; $a_j = 20$, $j = 1, 2, ..., n - 1$, e $a_n = 220$, podemos ter as duas seguintes interpretações financeiras: a) o empréstimo de 200 unidades de capital deve ser resgatado mediante o pagamento periódico dos juros vencidos, calculados à taxa $i = 20/200 = 10\%$ por período, com o principal sendo restituído no fim dos n períodos que correspondem ao prazo total da operação de financiamento considerada; b) o empréstimo de 220 unidades de capital deve ser resgatado mediante o pagamento antecipado dos juros periódicos vincendos, calculados à taxa de desconto $f = 20/220 \simeq 9{,}09\%$ por período, com o principal sendo também restituído no fim dos n períodos.

2.4 O caso de pagamentos em progressão geométrica

Suponha-se agora que as prestações formem uma progressão geométrica; isto é: $a_j = P\,\varphi^{j-1}$, $j = 1, ..., n$, com $P > 0$ e $\varphi > 0$. Tendo em vista (1), segue-se que devemos resolver a seguinte equação em i:

$$V(i) = a_0 + \begin{cases} P\left\{1 - [\varphi/(1+i)]^n\right\} / (1 + i - \varphi), \text{ se } \varphi \neq 1 + i \\ nP/\varphi, \text{ se } \varphi = 1 + i \end{cases} \quad (11)$$

É, então, de conclusão imediata que, se for verificada a relação

$$\varphi = -nP/a_0 \quad (12)$$

teremos que a TIR do fluxo de caixa em questão será igual a:

$$i = \varphi - 1 \quad (13)$$

Deve-se observar que, para valores de φ que não satisfaçam a relação (12), não é, em geral, possível a determinação do valor exato da correspondente TIR.[1]

2.4.1 Empréstimo com cláusula de correção monetária prefixada

Supondo a presença de inflação, para a qual se estima a taxa periódica constante Θ, reconsideremos o caso onde o empréstimo de $-a_0$ unidades de capital deve ser resgatado mediante o pagamento periódico dos juros vencidos, à taxa real, fixada *ex-ante*, R. Agora, para que se leve em conta o efeito da inflação, o valor do primeiro pagamento será fixado em $-Ra_0(1 + \Theta)$; O valor do segundo em $-Ra_0(1 + \Theta)^2$; ...; e o valor do *n*-ésimo em $-Ra_0(1 + \Theta)^n$, mais o valor monetariamente corrigido do principal, que é $-a_0(1 + \Theta)^n$. Deste modo, os pagamentos periódicos dos juros formam uma progressão geométrica de razão igual a $1 + \Theta$, com a taxa periódica aparente que está sendo cobrada no empréstimo sendo igual a

$$i = (1 + \Theta)(1 + R) - 1 \quad (14)$$

Conseqüentemente, se o fluxo de caixa considerado for tal que $a_j = P\varphi^{j-1}$, $j = 1, 2, ..., n-1$, com $a_n = P\varphi^{n-1} - a_0\varphi^n$, decorre que o valor da correspondente TIR será dado por:

$$i = \varphi - 1 - P/a_0 \quad (15)$$

Observando que a equação que deve ser resolvida é:

$$V(i) = a_0 + P\left|1 - [\varphi/(1+i)]^n\right| / (1 + i - \varphi) - a_0[\varphi/(1+i)]^n = 0 \quad (16)$$

é fácil verificar, por substituição direta, que, efetivamente, $V(\varphi - 1 - P/a_0) = 0$.

Assim, por exemplo, considere-se o fluxo de caixa {– 100.000, 20.000, 22.000, 24.200, 26.620, 190.333 }. Observando-se que φ = 1, 1, segue de (15)

[1] Note-se que, se $\alpha = 1$, teremos o caso de pagamentos constantes, o qual tem tido extensivamente estudado na literatura sobre o assunto. Para a análise de algumas fórmulas aproximadas, bem como de extensões para o caso geral onde $\varphi \neq 1$, veja Faro (1981).

que a sua TIR é igual a 30% por período. Ou seja, o fluxo pode ser interpretado como associado à um empréstimo de 100 mil unidades de capital, contratado à taxa periódica real R = 20.000/(100.000 x 1,1) $\simeq$ 18,18% por período. Sendo que os juros, monetariamente corrigidos de acordo com a taxa de inflação periódica constante $\Theta = 10\%$, devem ser pagos no fim de cada um dos cinco períodos do empréstimo, com o principal, também monetariamente atualizado, sendo restituído no fim de tal prazo.

Cabe ainda notar que, obviamente, se $\varphi = 1$, que corresponde ao caso onde não há correção monetária prefixada, recairemos no que foi estudado no subitem 2.3.

2.5 O caso de pagamentos em progressão aritmética

Consideremos agora o caso onde a seqüência de pagamentos periódicos forma uma progressão aritmética. Isto é, seja o caso onde $a_j = P + \gamma(j - 1) > 0, j = 1, \ldots, n$, com $\gamma \neq 0$ sendo a razão da progressão, que tanto pode ser positiva quanto negativa.

Tendo em vista (1) segue-se que a TIR do fluxo de caixa ora considerado é a taxa *i* tal que:

$$V(i) = a_0 + P\,[1 - (1+i)^{-n}]/i + (\gamma/i)\left|[1-(1+i)^{-n}]/\,i - n\,(1+i)^{-n}\right| = 0 \qquad (17)$$

No caso particular em que se verifica a relação

$$n\,(n\gamma + P) + a_0 = 0 \qquad (18)$$

é fácil ver, mediante simples substituição em (17), que $V(n\gamma/a_0) = 0$. Por conseguinte, para este caso particular, tem-se que a correspondente TIR é dada por:

$$i = n\gamma/a_0 \qquad (19)$$

Com relação à respectiva interpretação financeira, que se refere ao caso particular em apreço, basta que se recorde do chamado sistema de amortizações constantes (SAC). Isto é, o capital emprestado, $-a_0$, deve ser resgatado por meio de *n* prestações, compostas de uma parcela constante de amortização, no valor de $-a_0/n$, e de uma parcela de juros determinada, em cada caso, pela aplicação da taxa *i* sobre o saldo devedor remanescente. Deste modo, como o saldo devedor decresce linearmente, a *j*-ésima prestação deve ser tal que:

$$a_j = -\,a_0/n + ia_0\left|(j-1)/n - 1\right|, j = 1, \ldots, n \qquad (20)$$

Ou seja, as prestações seguem uma progressão aritmética, com razão $\gamma = ia_0/n$.

Deste modo, dado o fluxo de caixa $\{-1.000, 400, 360, 320, 280, 240\}$, no qual se identifica $\gamma = -40$, como a relação (18) é satisfeita, segue-se de (19) que a correspondente TIR é igual a 20% por período. Por outro lado, no caso do fluxo de caixa $\{-50, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para o qual $\gamma = 1$, temos agora que a sua TIR é negativa, sendo igual a -10% por período. O ponto a destacar é que, em ambos os casos, os respectivos fluxos de caixa correspondem a empréstimos que devem ser resgatados pelo SAC.

2.6 O caso de um duplo empréstimo

Estudemos agora a situação que, por motivos que serão esclarecidos a seguir, denominamos de caso de um duplo empréstimo. Tal situação, em termos de fluxo de caixa, é caracterizada pelo fato de que, sendo *n* um número par, tem-se que, para $j = 1, 2, ..., n - 1$:

$$a_j = \begin{cases} P_1 > 0, \text{ se } j \text{ for ímpar} \\ P_2 > P_1, \text{ se } j \text{ for par} \end{cases} \tag{21}$$

com

$$a_n = P_2 - a_0 \tag{22}$$

Para esta eventualidade, é fácil verificar, como decorre de (1), que a equação que devemos resolver para a determinação da correspondente TIR pode ser escrita como:

$$V(i) = a_0 + P_1 [1 - (1+i)^{-n}]/i + (P_2 - P_1) [1 - (1+i)^{-n}]/[i(2+i)] - a_0 (1+i)^{-n} = 0 \tag{23}$$

Para a resolução da equação dada por (23), iremos fazer uso da interpretação financeira seguinte. Imaginemos que o valor financiado, como sempre igual a $-a_0$, é constituído por dois distintos empréstimos: o primeiro no valor E_1, o segundo no valor E_2, e tais que, sendo $k > 1$, tenha-se:

$$\begin{cases} E_1 = -a_0/k \\ E_2 = -(k-1)\, a_0/k \end{cases} \tag{24}$$

Para o primeiro empréstimo, os juros periódicos vencidos serão cobrados à taxa *i*, com o principal sendo restituído no fim dos *n* períodos do prazo de resgate. Deste modo, devemos ter $P_1 = iE_1$.

Quanto ao segundo empréstimo, os juros vencidos serão cobrados a cada dois períodos, à mesma taxa *i* do primeiro empréstimo, com o principal também devendo ser restituído no fim do prazo *n*. Conseqüentemente, devemos ter $P_2 - P_1 = i(2+i)\, E_2$.

Decorre, então, da interpretação financeira apresentada, que a taxa *i* que está sendo cobrada no empréstimo total deve ser solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} k = -ia_0/P_1 \\ P_2 - P_1 = (2+i)(k-1)P_1 \end{cases} \tag{25}$$

Logo, observando que a interpretação financeira requer $i > 0$, é de imediata conclusão que a TIR do fluxo de caixa considerado será dada por:

$$i = -\left\{2a_0 + P_1 + [(2a_0 + P_1)^2 - 4a_0(P_1 + P_2)]^{1/2}\right\} / (2a_0) \qquad (26)$$

Como ilustração deste caso temos o fluxo de caixa {–10.000, 100, 1.990, 100, 1.990, 100, 11.990}, para o qual a correspondente TIR é igual a 10% por período. Tal fluxo pode ser interpretado como se o primeiro empréstimo fosse de 1 mil unidades de capital e o segundo de 9 mil unidades de capital. Para o primeiro, os juros periódicos são iguais a 100; para o segundo, os juros são iguais 1.890, e devem ser pagos a cada dois períodos.

2.7 Taxa líquida real de um empréstimo com pagamentos constantes em termos correntes

Concluindo nossa análise, consideremos o caso recentemente estudado em Leung & Tanchoco (1986). A situação diz respeito a um empréstimo de valor $-a_0$, o qual deve ser pago por meio de n prestações anuais constantes, calculadas à taxa anual conhecida $\rho > 0$. Dado que se estima a presença de inflação, à taxa anual constante Θ, sem que haja cláusula de correção monetária para o valor das prestações, e que, para fins de imposto de renda, os juros anuais são dedutíveis, deseja-se estimar o valor da taxa efetiva anual real, i, que está sendo implicitamente cobrada, na hipótese de que a alíquota para fins de cálculo do imposto de renda mantenha-se constante e igual a t.

A preços correntes, o valor da prestação anual constante é

$$P = -a_0\rho/[1 - (1 + \rho)^{-n}] \qquad (27)$$

Também a preços correntes, denotando-se por C_k o valor do saldo devedor logo após o pagamento da k-ésima prestação, e lançando mão do chamado método prospectivo (cf. Faro, 1982, p. 235-6), segue-se que o valor da parcela de juros contida na k-ésima prestação, para k = 1, 2, ..., n, é:

$$J_k = \rho C_{k-1} = \rho P[1 - (1 + \rho)^{-n+k-1}]/\rho$$

ou

$$J_k = P[1 - (1 + \rho)^{-n+k-1}] \qquad (28)$$

Deste modo, tendo em vista a estimativa da taxa de inflação e a alíquota do imposto de renda, segue-se que, a preços da data do empréstimo, o valor efetivo do k-ésimo pagamento, para k = 1, 2, ..., n, é igual a:

$$a_k = P\left\{1 - t[1 - (1 + \rho)^{-n+k-1}]\right\}(1 + \Theta)^{-k} \qquad (29)$$

Por conseguinte, em face de (1), segue-se que a taxa efetiva anual, em termos reais, cobrada no financiamento considerado, é a TIR i tal que:

$$V(i) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} P\{1 - t[1 - (1+\rho)^{-n+k-1}]\}[(1+\Theta)(1+i)]^{-k} = 0 \quad (30)$$

Em seu trabalho, Leung & Tanchoco (1986) fazem extensivo uso do ferramental analítico genericamente denominado transformada *Z*, ou geométrica, para a determinação de uma expressão sob forma fechada para a equação (30). Embora tal ferramental seja de grande valor em si mesmo, não há necessidade de sua aplicação na situação em apreço; basta que se proceda como no caso estudado no subitem 2.4. Para tanto, analogamente ao feito pelos autores citados, é conveniente introduzir a notação:

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \rho \\ \beta = (1 + \Theta)(1 + i) \end{cases} \quad (31)$$

Podemos, então, reescrever (30) como:

$$V(i) = a_0 + P\{(1-t) \sum_{k=1}^{n} \beta^{-k} + t\alpha^{-n-1} \sum_{k=1}^{n} (\alpha/\beta)^k\} = 0 \quad (30a)$$

Para a obtenção de uma forma fechada para a expressão (30*a*), precisamos distinguir dois casos:

a) $\alpha = \beta$

Em tal eventualidade, devemos ter:

$$V(i) = a_0 + P\{(1-t)\left[\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha - 1}\right] + n\,t\,\alpha^{-n-1}\} = 0 \quad (32)$$

Ou seja, tendo em vista o valor de *P* como dado por (27), decorre que devemos ter:

$$t\,\{1 - n\rho(1+\rho)^{-n-1}/[1-(1+\rho)^{-n}]\} = 0 \quad (32a)$$

igualdade esta que só ocorre no caso trivial onde t = 0;

b) $\alpha \neq \beta$

Neste caso, que é o de verdadeiro interesse prático, teremos que (30*a*) pode ser escrita como:

$$V(i) = 1 - \frac{\rho}{1-(1+\rho)^{-n}} \left\{ \frac{t}{\beta - \alpha} (\alpha^{-n} - \beta^{-n}) + \frac{1-t}{\beta - 1} (1 - \beta^{-n}) \right\} = 0 \quad (33)$$

O ponto que merece ser aqui destacado é que, como apontado por Leung & Tanchoco (1986), a solução da equação (33) é dada simplesmente por

$$i = \{(1-t)\rho - \Theta\} / (1 + \Theta) \tag{34}$$

Para a comprovação de tal resultado, repetiremos aqui, por sua pertinência, a análise desenvolvida por aqueles autores. Para tanto, iniciemos reescrevendo (33) de tal modo que:

$$\frac{(\alpha-1)\alpha^n}{\alpha^n-1}\left\{\frac{1-t}{\beta-1}\left(1-\frac{1}{\beta^n}\right)+\frac{t}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^n}-\frac{1}{\alpha^n}\right)\right\}-1=0$$

ou

$$(\alpha-1)\alpha^n\left\{\frac{1-t}{\beta-1}\left(\frac{\beta^n-1}{\beta^n}\right)+\frac{t}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n\beta^n}\right)\right\}+1-\alpha^n=0$$

ou

$$t(\alpha-1)\alpha^n\left\{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n\beta^n(\alpha-\beta)}-\frac{\beta^n-1}{(\beta-1)\beta^n}\right\}=\alpha^n-1-\frac{(\alpha-1)\alpha^n(\beta^n-1)}{(\beta-1)\beta^n}$$

ou

$$t\left\{\frac{(\alpha^n-\beta^n)(\beta-1)-(\beta^n-1)\alpha^n(\alpha-\beta)}{\alpha^n\beta^n(\alpha-\beta)(\beta-1)}\right\}=\frac{\alpha^n-1}{(\alpha-1)\alpha^n}-\frac{\beta^n-1}{(\beta-1)\beta^n}$$

ou

$$t\left\{\frac{\alpha^n\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^{n+1}+\beta^n-\alpha^{n+1}\beta^n+\alpha^{n+1}}{\alpha^n\beta^n(\alpha-\beta)(\beta-1)}\right\}=$$

$$\frac{\alpha^n\beta^{n+1}-\beta^{n+1}+\beta^n-\alpha^{n+1}\beta^n+\alpha^{n+1}-\alpha^n}{\alpha^n\beta^n(\alpha-1)(\beta-1)}$$

ou

$$t=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}$$

do que decorre a relação (34).

3. Conclusão

Como é bem sabido, para a determinação do valor numérico da taxa de retorno de um dado fluxo de caixa é, em geral, necessário que se faça uso de um procedimento de cunho iterativo. Tais procedimentos, além de extremamente tediosos, só são capazes de produzir soluções aproximadas.

Todavia, como discutimos aqui, existem certos tipos particulares de seqüências de fluxos de caixa, para os quais é possível a determinação do valor numérico das respectivas taxas internas de retorno, mediante o emprego de fórmulas exatas. Ademais, em muitos desses casos tais fórmulas podem ser facilmente justificadas por intermédio de interpretações financeiras de caráter imediato.

Abstract

In general, as the problem is equivalent to the computation of the positive root of a n^{th} degree polynomial, it is not possible to have an exact analytical solution for the internal rate of return of a given cash flow. However, for some particular cases, which can be interpreted as corresponding to specific loan operations, it is shown that the corresponding internal rates of return can be easily made explicit.

Referências bibliográficas

Boulding, K.E. Time and investment. *Economica, 3*(10):196-220, 1936.

Faro, C. de. Closed-form expressions for the approximate evaluation of interest rates: extensions to the geometric sequence of payments case. *The Engineering Economist, 27*(1):80-9, 1981.

——. *Matemática financeira.* 9. ed. São Paulo, Atlas, 1982.

——. *A eficiência marginal do capital como critério de avaliação econômica de projetos de investimentos.* Rio de Janeiro, IBMEC/PNPE, 1985.

Leung, L.C. & Tanchoco J.M.A. Alternative methods for cash-flow modelling. *The Engineering Economist, 31*(4):303-16, 1986.