Leilões de privatização: uma análise de equilíbrio*

Flávio Marques Menezes**

Examinamos neste trabalho um leilão de objetos múltiplos no qual o leiloeiro aumenta o preço solicitado até que a soma dos lances submetidos pelos participantes seja igual ou menor que a quantidade de objetos a serem vendidos. Tal mecanismo representa uma versão estilizada de um leilão do Programa Brasileiro de Privatização. Computamos a sua solução e identificamos uma família de equilíbrios nos quais tal mecanismo é eficiente mas produz resultados desapontadores em termos da receita total.

1. Introdução

A partir de 1989, a economia brasileira tem sofrido uma série de reformas que objetivam conduzi-la a uma estrutura de mercado mais liberal. Enquanto algumas mudanças vêm ocorrendo de forma bastante acelerada, tais como a liberalização parcial do comércio exterior e do setor de capitais, outras têm evoluído mais lentamente. Em particular, diversos segmentos da sociedade têm argumentado que o Programa Brasileiro de Privatização, que prevê a venda de várias empresas pertencentes parcialmente ou em sua totalidade ao governo federal, não está sendo executado na velocidade necessária.

Neste trabalho examinamos uma versão estilizada do processo de venda

* Esta pesquisa contou com o auxílio financeiro do CNPq. Agradeço os comentários de Richard Engelbrecht-Wiggans e Charles Kahn a uma versão anterior deste trabalho. Agradeço ainda os comentários dos participantes do Seminário de Teoria Econômica na Universidade de Illinois. Dois pareceristas da RBE apresentaram diversas sugestões que melhoraram substancialmente a qualidade deste trabalho. Quaisquer erros remanescentes são da inteira responsabilidade do autor.

** Do IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, e da Australian National University, Canberra, Austrália.

da Companhia Siderúrgica de Tubarão (CST) e sugerimos o formato do equilíbrio de tal mecanismo. Este estudo, todavia, não objetiva única e exclusivamente prever o comportamento dos participantes, mas também prover um *benchmark* para que possamos interpretar os resultados do leilão.

Nossas conclusões destacam não só a importância de se examinar, *ex-ante*, os mecanismos selecionados, mas também a complexidade do problema, justificando a necessidade de se conceder mais tempo para a execução do programa de privatização. Vale mencionar que existe uma proposta para a utilização de um tipo de mecanismo semelhante na venda de títulos do Tesouro dos EUA.[1] O Tesouro dos EUA espera vender cerca de US$1 trilhão em novos títulos este ano.

Nossa análise de equilíbrio, do ponto de vista da teoria de leilões, é interessante *per se*, uma vez que o número de trabalhos sobre leilões com objetos múltiplos é muito limitado. Por exemplo, a bibliografia de Stark & Rothkopf (1979) menciona cerca de 500 trabalhos sobre leilões, mas apenas uma dúzia desses estudos analisam leilões com mais de um objeto. Essa tendência não mudou na última década.[2]

Em adição, nossa análise explora as conexões existentes entre a teoria de leilões e a literatura sobre jogos de negociação.[3] Sugerimos que essa abordagem pode ser útil na extensão da teoria de leilões além do trabalho de Milgrom & Weber (1982).

Este trabalho tem a seguinte organização: na seção 2, descrevemos o processo de venda da CST e relacionamos alguns pontos que, apesar de não estarem no escopo desta pesquisa, devem ser eventualmente investigados. A seção 3 contém uma revisão da parte da literatura sobre jogos de negociação relevante para nossa análise. Na seção 4, apresentamos uma versão estilizada do leilão de privatização e a análise de equilíbrio sob distintas estruturas informacionais. Finalmente, apresentamos as conclusões principais na seção 5.

1 Ver, por exemplo, Stevens & Dumitru (1992) e o Joint report on the government securities market (1992). Chari & Weber (1992) explicam a diferença entre o leilão discriminatório empregado correntemente e o leilão uniforme que começou a ser utilizado experimentalmente em setembro de 1992. Eles sugerem, sem demonstrar, que o equilíbrio proposto permanece inalterado quando os agentes possuem uma função de demanda por títulos (ao invés de um único valor conforme suposto tradicionalmente na teoria de leilões). Nossa análise sugere, contudo, que tal argumento pode ser incorreto.

2 Ver, por exemplo, as revisões de literatura de McAfee & McMillan (1987) e Milgrom (1989).

3 Milgrom (1987) destaca a importância de se compreender melhor a relação entre as teorias de leilões, de jogos de negociação e de equilíbrio competitivo. Wilson (1987), por exemplo, provê uma discussão inicial sobre esse assunto.

2. O processo de venda e uma agenda para pesquisa

Descrevemos, nesta seção, o processo de venda da Companhia Siderúrgica de Tubarão (CST) e mencionamos alguns dos itens que merecem ser eventualmente analisados. O objetivo da venda era alienar a totalidade das ações da CST, que se encontrava em propriedade do governo federal (89% do capital total).

Esse processo de venda teve três estágios distintos. Inicialmente, 12,4% do total de ações foram oferecidos aos empregados da empresa a um preço fixo. Tais ações foram vendidas em lotes de 1 milhão, incluindo 290 mil nominativas, 180 mil preferenciais tipo A e 530 mil preferenciais tipo B.

Na primeira parte do segundo estágio, 70,9% do total de ações foram oferecidos em lotes de 1 milhão (incluindo 51% do total de ações com direito a voto) através de um leilão de "lances selados". A participação neste estágio foi limitada aos indivíduos ou fundos de pensão nacionais ou corporações com sede no Brasil que comprovaram a habilidade financeira para liquidar as operações em potencial.

Na segunda etapa do segundo estágio, 14% do total de ações nominativas (representando 5,7% do capital total) foram também oferecidos através de leilão. As restrições à participação nessa etapa foram menores. Os participantes potenciais foram obrigados simplesmente a demonstrar capacidade financeira que os habilitasse a liquidar eventuais operações.

No terceiro e último estágio, os atuais acionistas minoritários tinham o direito de adquirir as ações vendidas no segundo leilão a um preço médio (nesse caso, o resultado do segundo leilão seria cancelado) ou de vender as suas posições correntes.

Caso o último evento se concretizasse, os ganhadores de cada um dos leilões seriam obrigados a adquirir uma quantidade de ações proporcional às suas aquisições de ações nominativas nos dois leilões a um preço médio.

A descrição acima revela uma variedade de temas que merecem investigação adicional, tanto do ponto de vista teórico quanto de política econômica. Por exemplo, é importante determinar se esse mecanismo é eficiente[4] e, em caso positivo, se provê a receita máxima dentre a família de mecanismos eficientes.

Em adição, um resultado conhecido da teoria de leilões estabelece que o leiloeiro pode enfrentar um *trade-off* entre maximização de receita e eficiência (na forma definida na nota 4) ao fixar o preço mínimo. Assim, conviria ao leiloeiro fixar esse preço de forma a igualar o valor mínimo atribuído

[4] Definimos eficiência de tal forma que o evento "todas as ações vendidas" ocorre com probabilidade um. Adicionalmente, o teorema de Coase (1960) estabelece que a distribuição da propriedade de uma empresa em uma economia não é relevante, na medida em que os custos de transação sejam desprezíveis.

pelo governo a cada lote de ações? Outra questão de interesse ainda não resolvida pela literatura de leilões diz respeito ao método ótimo de vender produtos heterogêneos: o leiloeiro deve vender os diferentes tipos de ações em lotes ou separadamente?

Uma das questões mais importantes refere-se à existência e ao formato do equilíbrio desse processo de venda. Essa questão se relaciona à comparação desse mecanismo com outros métodos de venda, tais como os leilões de "lances selados", utilizados na venda de títulos do Tesouro dos EUA, os quais são abertos à participação de qualquer indivíduo, e cujas alocações são feitas a preços múltiplos. Outras possibilidades incluem a venda seqüencial de lotes em leilões independentes e a venda de opções de compra de um certo número de lotes de ações de determinado tipo a um preço fixo.

Neste trabalho estudamos especificamente a solução de uma versão estilizada da parte do processo de venda referente ao primeiro leilão, e nos abstraímos da discussão das demais questões. Descrevemos, a seguir, o funcionamento desse leilão.

O primeiro leilão é executado em duas etapas. Na primeira fase, o leiloeiro inicia a venda anunciando o preço mínimo e solicitando lances dos participantes, os quais submetem simultaneamente propostas que correspondem à quantidade de lotes que se comprometem a adquirir àquele preço.

Caso o total de lances submetidos (TL) seja inferior à quantidade total de lotes que estão sendo vendidos (QT), o leiloeiro anuncia o cancelamento do leilão. Caso TL seja igual a QT, o leiloeiro anuncia o fim do leilão e as quantidades de lotes alocadas a cada participante.

Quando TL é maior que QT, o leiloeiro anuncia um preço mais elevado e solicita uma nova rodada de lances. O leiloeiro continua aumentando o preço até que TL seja inferior ou igual a QT. Se TL for igual a QT, o leiloeiro anuncia o fim do leilão e as quantidades de lotes alocadas a cada participante.

Quando TL é maior que QT, o leiloeiro anuncia um preço mais elevado e solicita uma nova rodada de lances. O leiloeiro continua aumentando o preço até que TL seja inferior ou igual a QT. Se TL for igual a QT, o leiloeiro confirma os lances a esse preço e o leilão é encerrado. Caso TL seja inferior a QT, o leiloeiro confirma os lances a esse preço (digamos p^*) e segue para a próxima fase. Nesse leilão os participantes não podem aumentar seus lances de um período para outro, isto é, a seqüência de lances deve ser não-crescente.

O leiloeiro inicia o segundo passo anunciando a quantidade de lotes existentes ao preço imediatamente inferior a p^*. Se o total de lances nesse estágio for inferior ao total de lotes remanescentes, o leiloeiro cancela o leilão (inclusive o resultado da primeira parte). Caso o total de lances seja superior ou igual ao total de lotes existentes, o leiloeiro distribui os lotes de forma proporcional aos lances de cada participante. Somente aqueles que tenham submetido lances na primeira parte podem participar dessa fase.

O processo acima reflete a possibilidade de que as estratégias de elaboração de lances não sejam contínuas, mesmo que as funções de demanda o sejam. Note-se que os participantes podem submeter lances apenas na forma de quantidades discretas (lotes de 1 milhão de ações) e, conseqüentemente, é necessária a existência de algum mecanismo artificial para "forçar" o ajuste do mercado. Assim, interpretamos a segunda fase do leilão como um instrumento para ajustar possíveis "sobras" da primeira fase e argumentamos que tal ajuste não pode ser estrategicamente importante. Analisamos, na seção 4, uma versão simplificada desse mecanismo.

3. Relação entre as teorias de jogos de negociação e de leilões

Apresentamos, nesta seção, a parte da teoria de jogos de negociação que será útil ao definirmos os conceitos de equilíbrio adequados ao mecanismo que estamos analisando, bem como destacamos alguns dos problemas passíveis de aparecer também na nossa análise de equilíbrio.

Iniciamos essa revisão pelo modelo mais simples: o jogo de demanda de Nash, que descreve uma situação similar àquela que estamos analisando. Trata-se de um modelo estático, onde dois agentes têm que concordar na divisão de uma torta. Os agentes submetem lances simultâneos, correspondendo à fração da torta que cada um deseja. Caso a soma dos lances seja inferior ou igual ao tamanho da torta, cada participante recebe o equivalente ao seu lance. Do contrário, não recebem pedaço algum e a torta é desperdiçada.

O conjunto de equilíbrios de Nash para esse jogo inclui todas as soluções eficientes, isto é, que não desperdiçam pedaço algum da torta. Esse conjunto possui, em particular, um equilíbrio onde o jogador 1 recebe a torta inteira e o jogador 2 não recebe nenhum pedaço, e outro equilíbrio onde o inverso ocorre. O conceito de um equilíbrio perfeito em subjogos em nada auxilia no processo de seleção de um equilíbrio mais adequado, uma vez que esse jogo não possui nenhum subjogo próprio (além dele mesmo).[5]

Nash (1950) propôs uma série de axiomas que indicavam a forma "correta" de dividir a torta. Tais axiomas induzem um par de alocações (x,y) – correspondendo respectivamente às frações dos jogadores 1 e 2 – tal, que o produto $(x-x_0)(y-y_0)$ seja maximizado desde que $x + y$ seja igual ao tamanho total da torta. x_0 e y_0 representam as utilidades *(payoffs)* referentes ao *status quo* (ou seja, correspondentes à ausência de um acordo e conseqüentemente ao desperdício da torta). Esse equilíbrio é conhecido na literatura como a **solução de Nash** para o modelo de negociação.

[5] Ver, por exemplo, Nash (1953), Selten (1975), Binmore (1987 a), Osborne & Rubinstein (1990) e Fudenberg & Tirole (1991).

Nash (1953) sugere o exame de jogos não-cooperativos, cujos equilíbrios de Nash equivaleriam à sua solução axiomática para jogos de negociação (essa idéia de relacionar as abordagens axiomática e estratégica é conhecida na literatura como o Programa Nash). Especificamente, a solução de Nash requer que o equilíbrio seja resistente a perturbações na estrutura do jogo. Uma técnica semelhante foi utilizada por Selten (1975) para definir a noção de equilíbrio perfeito.

Osborne & Rubinstein (1990), por exemplo, explicam o jogo de demanda de Nash através de um jogo perturbado, onde existe incerteza na vizinhança da fronteira do conjunto de demandas compatíveis (que denotaremos por S). Esses autores assumem que, quando um par de demandas (x,y) que pertence a S encontra-se próximo à vizinhança de S, existe a possibilidade de que a solução seja dada por (0,0) (isto é, a ocorrência de um desacordo), em vez de acordo (x,y).

Qualquer par de demandas $(x,y) \in R_+ \times R_+$ induz um acordo com probabilidade $P(x,y)$ e um desacordo com probabilidade $1 - P(x,y)$. Caso (x,y) não pertença a S, temos que $P(x,y) = 0$. Para todos os pares no interior do conjunto S, a função P satisfaz: $0 < P(x,y) \leq 1$. As funções de utilidade dos jogadores 1 e 2 no jogo perturbado são dadas respectivamente por $x\ P(x,y)$ e $y\ P(x,y)$. A função $P: R_+ \times R_+ \rightarrow [0,1]$ é por hipótese diferenciável e semicôncava.

Vale destacar que a ocorrência de um desacordo é um equilíbrio possível para o jogo perturbado. Por exemplo, considere-se qualquer par de estratégias nas quais cada jogador pede mais do que poderia obter em qualquer acordo factível. Contudo, Osborne & Rubinstein demonstram que o conjunto de equilíbrios que geram um acordo com probabilidade positiva possui um número limitado de elementos. Tais equilíbrios convergem para a solução de Nash, na medida em que o jogo perturbado converge para o jogo de demanda de Nash. Esses autores apresentam ainda um exemplo, onde mostram que a diferenciabilidade da função P é crucial para a obtenção desse resultado. Binmore (1987*a*) chega à mesma conclusão, adotando uma abordagem distinta.

Os modelos de Rubinstein e Stähl contribuíram substancialmente para a construção de uma teoria de jogos de negociação. Rubinstein (1982) considera um jogo onde dois agentes têm que concordar sobre a forma de dividir uma torta de tamanho 1. Os jogadores se alternam ao fazerem ofertas que consistem em propostas quanto à divisão da torta.

O jogador 1 submete lances nos períodos 0, 2, 4,... O jogador 2, por sua vez, pode rejeitar ou aceitar a oferta do seu adversário. Ao aceitar a oferta, o jogador 2 termina o jogo. Caso contrário, o jogadores continua e é a vez de o jogador 2 fazer uma oferta (isto é, ele submete lances nos períodos 1, 3, 5,...) que pode ser aceita ou rejeitada pelo jogador 1. Por exemplo, se a oferta $(x, 1\text{-}x)$ é aceita no período t as utilidades são dadas por $(\delta_1^t x, \delta_2^t (1\text{-}x))$, onde $\delta_1 \in [0,1]$ e $\delta_2 \in [0,1]$ e representam, respectivamente, os fatores de desconto dos jogadores 1 e 2.

Esse jogo possui múltiplos equilíbrios de Nash. Em particular, qualquer divisão da torta é um equilíbrio de Nash, bem como o seguinte perfil: "O jogador 1 demanda sempre $x = 1$ e recusa todas as ofertas menores; o jogador 2 oferece sempre $x = 1$ e aceita qualquer oferta". Fundenberg & Tirole (1991) ressaltam que esse perfil não é um equilíbrio perfeito em subjogos, uma vez que, caso o jogador 2 rejeite o lance do jogador 1 e ofereça uma fração $x > \delta_1$, o jogador 1 se beneficiaria ao aceitar tal oferta, porque de outra forma ele receberia no máximo a torta inteira no próximo período, o que geraria um total de utilidade de apenas δ_1.

Nesse contexto, o único equilíbrio perfeito em subjogos é tal que o jogador 1 oferece $(1-\delta_1)/(1-\delta_1\delta_2)$ no primeiro período e o jogador 2 aceita a oferta. Entretanto, quando $\delta_1 = \delta_2$, esse equilíbrio converge para (1/2, 1/2) na medida em que δ_1 se aproxima da unidade (isto é, na medida em que o intervalo de tempo entre as ofertas é reduzido) e a vantagem que o jogador 1 tem, por ser o primeiro a jogar, desaparece.

O modelo de Rubinstein é uma extensão do trabalho de Stähl (1972), que considera uma versão desse jogo com horizonte finito, onde a técnica de indução retroativa pode ser usada para caracterizar o único equilíbrio perfeito em subjogos. A demonstração da existência de um equilíbrio único no modelo de Rubinstein, onde o horizonte de tempo é infinito, pode ser realizada, por exemplo, através de um processo de dominância condicional iterativa, o qual não elimina nenhum equilíbrio perfeito em subjogos.[6]

Osborne & Rubinstein (1990) introduzem a incerteza no modelo de ofertas alternadas de Rubinstein. O jogo pode terminar após qualquer rodada com uma probabilidade exógena. Considerando que os jogadores são indiferentes quanto ao período no qual um acordo é atingido, esses autores demonstram que o equilíbrio perfeito em subjogos converge para a solução de Nash (de um problema de negociação definido de forma apropriada) quando a probabilidade de término do jogo converge para zero.

Chatterjee & Samuelson (1987*a*), por outro lado, examinam a seguinte versão dinâmica do jogo de demanda de Nash: os jogadores submetem ofertas simultâneas (x_1, x_2) onde x_1 denota o percentual da torta de tamanho 1 que o agente 1 está solicitando e x_2 a quantidade que o jogador 2 oferece ao seu oponente. Assim, se após a primeira rodada tivermos $x_1 = x_2 = x$, então o jogo termina e o jogador 1 recebe x enquanto que o jogador 2 recebe $1-x$. Quando $x_1 > x_2$ existe excesso de demanda e o jogo continua. Caso $x_1 < x_2$, o jogo termina e o jogador 1 recebe $x = (x_1 + x_2)/2$ enquanto que o agente 2 recebe $1 - x$.

Quando um acordo é alcançado no período t, as utilidades dos jogadores

[6] Fudenberg & Tirole (1991), por exemplo, caracterizam o único equilíbrio perfeito em subjogos para o modelo de Rubinstein através dessa técnica.

1 e 2 são dadas por, respectivamente, $x\delta_1^t$ e $(1-x)\delta_2^t$, onde $\delta_1^t \in [0,1]$ e $\delta_2^t \in [0,1]$ denotam novamente os fatores de desconto. Esses autores mostram que até mesmo o conceito de equilíbrio perfeito é insuficiente para discriminar entre os múltiplos equilíbrios existentes. Em particular, qualquer solução que seja individualmente racional (*individually rational*) corresponde a um equilíbrio perfeito em estratégias puras, incluindo a possibilidade de desacordo perpétuo e soluções ineficientes.

Adicionalmente, Chatterjee & Samuelson introduziram o conceito mais restritivo de um equilíbrio universalmente perfeito. Para verificarmos se um determinado equilíbrio é perfeito, basta construir uma única seqüência arbitrária de jogos perturbados cujos equilíbrios convirjam para o equilíbrio em questão, mas a definição de um equilíbrio universalmente perfeito exige que cada seqüência convergente dos jogos perturbados apresente uma seqüência de equilíbrios que venha a convergir para o equilíbrio em questão. Essa restrição adicional, contudo, não aumenta a capacidade de discriminar entre os diversos equilíbrios existentes.

Analisamos, no restante desta seção, a teoria de jogos de negociação com informação incompleta. Vários modelos de negociação iterada foram desenvolvidos nos últimos 10 anos, mas a maior parte desses trabalhos prevê soluções ineficientes. Fudenberg & Tirole (1991) destacam que a teoria de jogos de negociação com informação incompleta constitui uma série de exemplos e não um conjunto coerente de resultados.

Enquanto que em modelos com informação completa é razoável esperar-se que um acordo seja atingido logo no primeiro período, na presença de informação incompleta os jogadores podem-se comportar de modo a fazer com que seus oponentes acreditem que eles estão em uma posição de negociação superior. Conseqüentemente, pode-se necessitar de mais de um período para que um acordo seja alcançado, e existe a possibilidade de desacordo perpétuo.

Vários estudos indicaram que jogos de negociação iterada com informação assimétrica possuem uma multiplicidade de equilíbrios de Nash bayesianos.[7] Além disso, o conceito de equilíbrio perfeito em subjogos tem poder limitado, uma vez que esse jogo não tem outros subjogos próprios. Assim, diversos autores se utilizaram de refinamentos de equilíbrio mais restritos, como por exemplo a noção de equilíbrio seqüencial de Kreps & Wilson (1982).

Rubinstein (1985*b*) estende seu modelo de negociação iterada com ofertas alternadas sob informação completa para considerar uma situação em que o jogador 2 pode enfrentar dois custos de permanência distintos: C_H ou C_L, com $C_L < C_1 < C_H$. Enquanto o jogador 2 tem informação privada sobre seu próprio custo e sabe o custo do seu oponente, o jogador 1 observa

7 Ver, por exemplo, Fudenberg & Tirole (1983), Cramton (1984), e Rubinstein (1985*b*).

o seu próprio tipo, mas apenas sabe que com probabilidade p_H o jogador 2 será fraco (isto é, possuirá custo de permanência elevado) e com probabilidade $1 - p_H$ ele será forte (isto é, possuirá o custo de permanência mais baixo).

Como resultado da análise de Rubinstein (1982), sabemos que, quando os custos de permanência são relativamente baixos e é do conhecimento comum (*common knowledge*) que o jogador 2 é fraco, o jogador 1 obtém a torta inteira. Se é do conhecimento comum que o jogador 2 é forte, então o jogador 1 obtém apenas uma utilidade residual, uma vez que ele tem a vantagem de ser o primeiro a jogar. Assim, em um jogo onde o participante 1 não sabe o tipo de jogador 2, este último tentará convencer seu oponente de que é forte.

Formalmente, dois jogadores são introduzidos no lugar do participante 2: 2_L e 2_H. No período 0, o jogador 1 faz uma oferta (x_0) que pode ser aceita ou rejeitada por um dos dois tipos possíveis, 2_H e 2_L. Caso a oferta seja aceita, o jogo termina no período 0 e a solução é dada por x_0. Se a oferta é rejeitada, então o jogador 2 faz uma contra-oferta, a qual pode depender do seu tipo e da oferta anterior do jogador 1.

Uma história nesse jogo é uma seqüência de propostas e respostas. Uma estratégia é um conjunto de ações para cada história factível. Uma tripla de estratégias (uma para cada um dos jogadores 1, 2_H e 2_L) induz, do ponto de vista do jogador 1, uma distribuição de probabilidade em relação às possíveis soluções: com probabilidade p_H, as utilidades correspondem às estratégias dos jogadores 1 e 2_H, e com probabilidade $1-p_H$, correspondem às estratégias de 1 e 2_L. Assim, o jogador 1 tem que comparar as duas distribuições de probabilidade em relação aos resultados e, conseqüentemente, o domínio de suas preferências deve ser estendido para incluir loterias nesse espaço. Rubinstein assume que os jogadores estão interessados apenas em maximizar a utilidade esperada (ou seja, os participantes são neutros em relação ao risco).

Adicionalmente, o comportamento ótimo do jogador 1 em todas as histórias possíveis depende da especificação das suas crenças (*beliefs*) em relação ao tipo do jogador 2. Em particular, a noção de equilíbrio seqüencial requer um perfil de estratégias e um perfil de crenças do jogador 1 com respeito ao tipo do seu oponente.

A noção de equilíbrio seqüencial de Rubinstein difere da definição original de Kreps & Wilson da seguinte forma: enquanto os dois conceitos exigem racionalidade seqüencial (isto é, as estratégias de cada jogador devem ser ótimas posteriormente a qualquer história) e consistência (isto é,

[8] Além disso, após qualquer comportamento inesperado por parte do jogador 2, o jogador 1 faz uma nova conjectura sobre o tipo do seu oponente. O comportamento em equilíbrio deve ser consistente com essa nova conjectura, na medida em que nenhum outro desvio seja observado, e dado que o jogador 1 não muda a sua crença sobre o tipo do jogador 2 como resultado de algum desvio de sua própria parte.

o sistema de crenças deve ser consistente com a fórmula de Bayes)[8], a definição de Rubinstein faz a exigência adicional de que o jogador 1 jamais mudará de idéia uma vez que esteja convencido da identidade do jogador 2.[9]

Rubinstein demonstra que quando a probabilidade de o jogador 2 ser fraco é suficientemente alta, e os custos de permanência são desprezíveis, o jogador 1 obtém a maior parte da torta em todos os equilíbrios seqüenciais. Caso essa probabilidade seja pequena, a noção de equilíbrio seqüencial não introduz nenhuma informação adicional para auxiliar na escolha de uma solução adequada, uma vez que o conjunto de equilíbrios inclui praticamente todos os acordos possíveis.

Gul & Sonnenschein (1988), usando um modelo similar, mostram que, ao contrário do que ocorre na presença de informação completa, um acordo é sempre alcançado com atraso quando o jogador 2 é forte, mas tal atraso nunca ultrapassa um período. Esses autores demonstram que em qualquer equilíbrio seqüencial em que as regras de ofertas e contra-ofertas dadas pelas estratégias de 2_L e 2_H dependem somente das crenças do jogador 1, um acordo é alcançado no máximo no segundo período.

Osborne & Rubinstein (1990), por outro lado, restringem ainda mais o conjunto de equilíbrios ao limitarem as crenças dos jogadores quando eventos inesperados ocorrem.[10] Esses autores definem um perfil racional de crenças ao restringirem o sistema de crenças do jogador 1 àquelas em que, após qualquer história em que ele ainda não esteja completamente certo de que o jogador 2 é forte, a seguinte condição seja satisfeita: para determinadas ofertas rejeitadas pelo jogador 2 e para algumas contra-ofertas, ou o jogador 1 atribui probabilidade 1 ao evento em que o seu oponente é forte ou seu sistema de crenças permanece inalterado.

Rubinstein & Osborne referem-se a um equilíbrio que satisfaça essa condição sobre o sistema de crenças como um equilíbrio seqüencial racional.[11] Demonstram que o jogo acima tem um equilíbrio desse tipo onde um acordo é alcançado no período 0 quando $0 < p_H < 1$.

Em edição, Binmore (1987*b*) examina uma versão do jogo de demanda de Nash com informação incompleta, onde cada um dos jogadores pode assumir um número finito de tipos distintos. Nesse contexto, cada indivíduo observa o seu próprio tipo, mas sabe apenas a distribuição dos tipos do seu

[9] Essa hipótese é evidentemente forte, como destacam Madrigal, Tan & Werlang (1987). Esses autores mostram um exemplo de um jogo onde uma restrição desse tipo elimina todos os equilíbrios seqüenciais.

[10] Essa análise baseia-se em Rubinstein (1985*a*,*b*).

[11] Um parecerista da RBE apontou corretamente que tal noção coincide com o conceito de equilíbrio seqüencial perfeito ("perfect sequential equilibrium") proposto por Grossman & Perry (1986).

adversário. Binmore assume que os agentes possuem funções utilidade do tipo Von Neumman-Morgenstern e que a utilidade de cada um depende apenas do seu tipo.

Esse autor demonstra que existe um equilíbrio onde um acordo é atingido por uma margem bem reduzida *(just-compatible-commitment)*, de tal modo que todos os tipos possíveis do jogador 1 demandariam x_1 e todos os tipos possíveis do jogador 2 demandariam x_2, sendo a soma dessas duas quantidades igual à oferta total. Esses equilíbrios não revelam informação alguma sobre o verdadeiro tipo dos agentes (equilíbrios do tipo *pooling*), mas são eficientes. Binmore mostra também que é possível obter equilíbrios do tipo *separating*, nos quais um desacordo ocorre com probabilidade positiva.

Chatterjee & Samuelson (1987*b*), por sua vez, examinam um jogo de negociação entre um vendedor, que possui determinado objeto, e um comprador em potencial. O valor mínimo aceitável pelo vendedor é igual a s_L, com probabilidade k_L, ou a s_H, com probabilidade $1-k_L$. O valor que o comprador atribui ao objeto é dado por b_L, com probabilidade w_L, ou por b_H, com probabilidade $1-w_L$, onde $s_L < b_L < s_H < b_H$. Da mesma forma que na análise de Binmore, cada agente observa o seu próprio tipo, mas sabe apenas a distribuição dos valores do seu oponente. Esses dois agentes fazem propostas alternadamente e as utilidades do comprador e do vendedor são descontadas, respectivamente, pelos fatores δ_s e δ_b.

Chatterjee & Samuelson restringem sua análise às ofertas do conjunto $\{b_L, s_H\}$. Demonstram que existe único equilíbrio de Nash e o processo de negociação prossegue por um número finito de períodos (endogenamente determinado). Os vendedores com um alto valor mínimo oferecerão s_H e os compradores com valor elevado para o objeto farão uma oferta b_L. Após a primeira rodada, todos os agentes com valores baixos seguem uma estratégia mista, de tal modo que selecionam as duas ofertas em cada período com uma certa probabilidade. Os agentes reduzem suas expectativas de que o seu oponente possui um valor baixo à medida que o jogo prossegue.

Chatterjee & Samuelson (1988) analisam o equilíbrio desse jogo no caso em que as ofertas não são restritas apenas ao conjunto $\{b_L, s_H\}$. Esses autores mostram que, nesse contexto, existe uma multiplicidade de equilíbrios (inclusive aquele descrito acima), conforme já tinha sido observado também por Cramton (1992).

Concluindo: por um lado, o resultado referente ao modelo de ofertas alternadas de Rubinstein com informação completa, que prediz que um acordo é alcançado sem atraso, indica que um resultado similar pode prevalecer no leilão que estamos analisando. Por outro, a multiplicidade de equilíbrios no modelo de ofertas simultâneas é um indicador de que tal fenômeno pode ocorrer no processo de seleção de equilíbrio do leilão de privatização. Na próxima seção demonstraremos que em qualquer equilíbrio perfeito de Pareto um acordo sobre a divisão dos lotes de ações é alcançado sem atraso. Contudo, existe um número infinito de equilíbrios onde cada jogador aceita receber uma alocação que garanta pelo menos um lucro equivalente ao que ele receberia com probabilidade 1 no estágio final. (Transformamos um jogo potencialmente infinito em um jogo que termina com probabilidade 1 a partir de um determinado estágio).

4. A análise de equilíbrio

Iniciamos esta seção pela descrição da versão estilizada do leilão de privatização que utilizaremos em nossa análise de equilíbrio. Dois participantes, que serão representados pelas letras *a* e *b*, neutros em relação ao risco, com funções de demanda contínuas, convexas e negativamente inclinadas – que serão representadas por $D_a(p_t)$ e $D_b(p_t)$, participarão do leilão de uma quantidade QT de lotes de ações. Supomos que a demanda do jogador *a* é igual a zero quando o preço atinge um valor arbitrário, que denotaremos por p_s.

O leiloeiro inicia o processo anunciando o preço inicial p_0 e solicitando que os participantes submetam lances simultâneos (quantidades de lotes que eles desejam adquirir àquele preço). Os participantes podem submeter lances correspondentes a qualquer ponto no intervalo [0,QT]. Caso a soma dos lances (TL) seja inferior ou igual a QT, o leiloeiro anuncia as alocações de cada participante que correspondem às quantidades solicitadas. Caso TL seja superior a QT, o leiloeiro aumenta o preço (de uma constante positiva Δ) até que o total de lances seja no máximo igual a QT, quando cada participante recebe o equivalente ao seu lance. É importante destacar que o leiloeiro não é um participante ativo nesse jogo.

Seja $p_t = p_0 + \Delta t$ o preço na rodada *t*, $t = 0,1,2,...$ Representaremos por p^* o nível de preço, de tal modo que pela primeira vez a soma das demandas seja inferior à quantidade total de lotes.

Vale explorar ainda a relação existente entre o fator de desconto δ na teoria de jogos de negociação e a constante Δ, que corresponde ao aumento de preço na eventualidade de existir excesso de demanda. Conforme observamos na seção anterior, a existência do fator de desconto δ induz um acordo na primeira rodada no jogo de negociação alternada de Rubinstein. Os agentes definem suas estratégias de elaboração de ofertas e contra-ofertas de forma a serem indiferentes entre receber um determinado valor hoje e um valor descontado no futuro. Analogamente, no decorrer da nossa análise, ficará claro que o aumento do preço induz os agentes a "coordenarem" suas ações para que um acordo seja alcançado também no período inicial.

Note-se que o nosso modelo corresponde ao primeiro leilão do processo de venda, exceto pelo fato de que o leilão original é cancelado caso TL seja inferior a QT na primeira rodada. Além disso, enquanto no leilão original todas as ações que não foram vendidas são alocadas em um segundo leilão cujas regras foram descritas na seção anterior, na nossa versão estilizada existe a possibilidade de que parte das ações não sejam vendidas.

Argumentamos que a importância estratégica desse segundo leilão é limitada, uma vez que o seu preço inicial corresponde ao último preço, de tal modo que TL seja inferior a QT. Assim, qualquer equilíbrio da versão estilizada, de tal sorte que todas as ações sejam vendidas, também é um equilíbrio do leilão original, embora o inverso não seja verdadeiro. Vale mencionar, contudo, que a principal característica do jogo original é mantida, ou seja, as estratégias de elaboração de lances dependem das funções de demanda e das expectativas quanto ao comportamento dos demais adversários.

A seguir, definimos formalmente a estrutura do jogo, ou seja, especificamos estratégias, o lucro esperado e os conceitos de equilíbrio adequados. Primeiro, seja H_t o conjunto de histórias possíveis do jogo nos períodos 0 até t-1, e seja h_t uma história em particular. Por exemplo, uma história factível consiste em os jogadores *a* e *b* darem lances de respectivamente x_0 e y_0 no período 0 com $x_0 + y_0 = \text{QT}$, e portanto o jogo terminaria após a primeira rodada. Em adição, para qualquer história h_t, a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$x_0 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_{t-1} \; e \; y_0 \geq y_1 \geq \ldots \geq y_{t-1} \quad (1)$$

onde os diversos x e y denotam os lances submetidos respectivamente pelos participantes *a* e *b* nos períodos 0 até t-1.

Uma *estratégia pura* no período t para o participante *a* é um mapa de H_t em [0,QT] que satisfaça a condição (1) para todas as histórias que satisfazem (1). Uma *estratégia mista* é uma medida de probabilidade no conjunto de estratégias puras. Pelo teorema de Kuhn podemos definir uma estratégia de comportamento (*behavior strategy*) X para o jogador *a* que especifique uma distribuição de probabilidade no intervalo [0,QT] para cada história h_t que satisfaça a restrição (1). Uma definição similar aplica-se ao jogador *b*, e denotaremos sua estratégia de comportamento por Y. Cada estratégia pura gera uma *solução* para o leilão, que descreveremos por (x,y,t), onde x e y denotam as alocações dos jogadores *a* e *b* ao preço p_t (e, portanto, na rodada t). A solução referente à possibilidade de desacordo perpétuo será representada por $(0,0,\infty)$. Definiremos o conjunto $S = \{(x,y): x + y \leq QT\}$ como o conjunto de alocações factíveis.

As estratégias X e Y geram uma medida $F((x,y,t)|(X,Y))$ para o conjunto de soluções que representa a distribuição de probabilidade do evento "um par de lances factíveis é submetido no período t e o jogo termina". Note-se que essa medida é definida no espaço de soluções $SxN \cup \{(O,O,\infty)\}$. X e Y também geram a medida $G((x,y,t)|(X,Y,h_t))$ condicional à história h_t.

Se a solução do leilão é dada pela tripla (x,y,t), então o lucro do jogador a (b) equivale ao excedente do consumidor resultante da aquisição de x unidades (y unidades) ao preço p_t:

$$\pi_a(p_t, x) = \int_0^x D_a^{-1}(w)\, dw - p_t x \tag{2}$$

$$\pi_b(p_t, y) = \int_0^y D_b^{-1}(w)\, dw - p_t y \tag{3}$$

$\pi_i(p_t, x_t)$ denota o lucro do agente i ao preço p_t (e conseqüentemente demanda $D_i(p_t)$) ao dar um lance de x_t. O lucro esperado é definido por:

$$E[\pi_a] = \int_{S \times N} \pi_a(p_t, x)\, dF((x, y, t) \mid (X, Y)) \tag{4}$$

$$E[\pi_b] = \int_{S \times N} \pi_b(p_t, y)\, dF((x, y, t) \mid (X, Y)) \tag{5}$$

Temos então as seguintes definições:

Definição 1: Um par de estratégias (X^*, Y^*) é um equilíbrio de Nash deste jogo se no período t:

$$X^* = \underset{X}{\operatorname{argmax}} \int_{S \times N} \pi_a(p_t, x)\, dF((x, y, t) \mid (X, Y^*)) \tag{6}$$

$$Y^* = \underset{Y}{\operatorname{argmax}} \int_{S \times N} \pi_b(p_t, x)\, dF((x, y, t) \mid (X^*, Y)) \tag{7}$$

Serão necessários alguns passos preliminares para definirmos a noção de equilíbrio perfeito em subjogos. Primeiro, podemos interpretar o jogo da rodada t em diante, com uma história h_t, como um jogo independente, porque os dois jogadores conhecem a história h_t de jogadas anteriores ao período t. Esse jogo será representado por $\Gamma(h_t)$.

Um par de estratégias (X,Y) do jogo original induz uma estratégia $(X,Y)|h_t$ em $\Gamma(h_t)$, de tal forma que $X|h_t$ e $Y|h_t$ representam as restrições de X e Y à história ht. O lucro nesses subjogos são calculados a partir da medida condicional G.

Definição 2: Um par de estratégias (X, Y) é um *equilíbrio perfeito em subjogos* do jogo original se, para cada história h_t, a restrição $(X, Y) \mid h_t$ for um equilíbrio de Nash de $\Gamma(h_t)$. Alternativamente, essa noção de equilíbrio satifaz uma versão modificada das expressões (6) e (7), onde a medida F é substituída pela medida condicional G.

Como destacam Fudenberg & Tirole (1991, p. 74), o conceito de equilíbrio perfeito em subjogos coincide com a solução do processo de indução retroativa em jogos finitos[12] de informação completa. O único equilíbrio de Nash de $\Gamma(h_t)$, no estágio final, equivale a ter os dois participantes escolhendo suas ações ótimas da forma prevista pela indução retroativa. O único equilíbrio de Nash no penúltimo estágio, dado que os jogadores se comportaram como o previsto por Nash na última rodada, também equivale à solução prevista pelo processo de indução retroativa, e o mesmo raciocínio é válido para os estágios anteriores. Nosso mecanismo caracteriza-se por um número infinito de ações possíveis a cada estágio. Para uma extensão do conceito de indução retroativa em jogos infinitos de informação perfeita, ver Fudenberg & Tirole (p. 128-30).

4.1 Agentes com informação completa

Nesta subseção resolvemos o modelo do leilão de privatização com informação completa, ou seja, quando cada participante observa a demanda do seu adversário. Como o leiloeiro não é um participante ativo desse jogo, podemos considerá-lo um programa de computador que anuncia um preço inicial p_0, recolhe os lances, e verifica se TL é igual, superior ou inferior a QT. Para cada um desses eventos o programa adota uma ação diferente, ou seja, caso TL seja igual a QT, o jogo termina e cada participante recebe o equivalente ao seu lance ao preço inicial; se o segundo evento ocorrer, o leiloeiro aumenta o preço de uma constante positiva Δ até que TL $\leq$ QT, quando cada participante receberá o número de lotes demandados; finalmente, caso o terceiro evento ocorra, o jogo termina e cada jogador recebe o equivalente ao seu lance. Note-se que o leiloeiro anuncia em cada rodada o resultado do jogo, e cada participante pode então computar o lance do seu adversário. Conforme indicado anteriormente, p^* é tal que pela primeira vez $D_a(p^*) + D_b(p^*) \geq$ QT. Na presença de informação completa, p^* também é do conhecimento comum. T denotará a rodada na qual p^* é atingido.

Nas proposições a seguir demonstraremos que, apesar da existência de uma multiplicidade de equilíbrios de Nash, de tal forma que um acordo pode ser alcançado com atraso, identificamos uma família de equilíbrios na qual o leilão termina com probabilidade 1 após a rodada inicial. Transformamos um jogo de horizonte infinito em um jogo que termina com probabilidade 1 quando o preço atinge o nível imediatamente inferior a p^*. Nas rodadas anteriores, os jogadores comparam seu lucro com o lucro que poderiam receber naquele período. Eles recusam qualquer oferta que implique um lucro inferior a essa quantia, adiando um acordo. Além disso, os jogadores submetem lances inferiores ou iguais às suas demandas em qualquer equilíbrio perfeito de Pareto.

12 Jogos com horizonte de tempo finito e com um número finito de movimentos possíveis.

Com o objetivo de caracterizar o conjunto de equilíbrios de Nash, utilizaremos as seguintes definições:

Definição 3: Uma solução factível (x,y,t) é *racionalmente individual* se ambos os participantes recebem no máximo suas demandas ao preço p_t. Uma solução factível (x,y,t) é eficiente se $x + y = QT$.

Proposição 1: Para qualquer solução factível que satisfaça racionalidade individual e que seja eficiente existe um equilíbrio de Nash tal que esta solução ocorre com probabilidade 1. Em adição, a solução "desacordo perpétuo" também pode ser sustentada por um equilíbrio de Nash.

Demonstração: Consideramos uma solução (x,y,t) racionalmente individual e eficiente e construímos um equilíbrio de Nash que sustente essa solução. Consideremos uma estratégia do seguinte tipo: o jogador *b* submete lances no valor de QT até a rodada t-1 e, a partir daí, submete lances de y. Computemos a resposta ótima do jogador *a*, que pode receber no máximo QT-y em qualquer rodada posterior a t-1. Uma vez que QT-y é inferior ou igual a $D_a(p_t)$, o lucro esperado do jogador *a* é maximizado através de um lance de $x = QT - y$ na rodada t, com lances iguais ou superiores QT $- y$ nas rodadas anteriores a t e com lances arbitrários após t. Em particular, uma resposta ótima é submeter lances de QT até a rodada t-1 e lances de x a partir da rodada t. Assim, acabamos de demonstrar que é possível construir um equilíbrio de Nash que suporte uma solução arbitrária, desde que esta satisfaça racionalidade individual e eficiência.

Para completar essa demonstração precisamos verificar se a solução "desacordo perpétuo" é um equilíbrio de Nash. Basta verificar que, se um jogador sempre submete um lance QT, o lucro do seu oponente é igual a zero com probabilidade 1. Conseqüentemente, a resposta ótima do seu oponente é submeter um lance qualquer no intervalo [0,QT]. Em particular, submeter um lance de QT em todas as rodadas é uma resposta ótima. ■

Observe-se que a noção de equilíbrio perfeito em subjogos é incapaz de eliminar, por exemplo, o perfil "submeter sempre um lance igual a QT". O raciocínio do último parágrafo da demonstração acima aplica-se trivialmente em cada subjogo possível. Aliás, esse resultado é consistente com o modelo de ofertas simultâneas de Chatterjee & Samuelson discutido na seção anterior. Com o fito de eliminar equilíbrios dessa natureza, utilizamo-nos de uma variação da noção de equilíbrio perfeito. Para tal precisamos definir um jogo perturbado e noções de equilíbrio apropriadas.

Definição 4: O jogo $\in$-*perturbado* é aquele no qual cada jogador comete um erro e submete um lance de zero em uma determinada rodada com probabilidade $\in$.

Definição 5: Um *equilíbrio* $\in$*-restrito* do jogo perturbado é um par de estratégias mistas que maximizam o lucro de cada jogador. Um *equilíbrio perfeito* é o limite de equilíbrios do tipo $\in$-restrito quando $\in$ converge para zero.

Uma vez que existe uma probabilidade positiva de que um jogador cometa um erro e submeta um lance de zero, a estratégia dos participantes em um equilíbrio $\in$-restrito deve incorporar tal possibilidade, como demonstraremos na proposição abaixo.

Proposição 2: Não existe equilíbrio $\in$-restrito para o jogo perturbado de informação completa, para um Δ fixo e para $\in$ suficientemente pequeno, onde:

a) o jogo termina após a rodada T-1; e

b) ambos os jogadores recebem uma alocação que gera um lucro inferior ao mínimo que eles receberiam na rodada T-1 com probabilidade (1-$\in$).

Adicionalmente, é possível construir um equilíbrio $\in$-restrito onde um acordo é alcançado apenas na rodada T-1.

Temos ainda o seguinte lema.

Lema 1: Os participantes não submetem lances superiores às suas demandas nas rodadas $t \geq T$ do jogo perturbado.

Demonstração: Denotaremos por s o período em que p_s é tal que a demanda do jogador a atinge O. Nessa rodada, o jogador b submete um lance igual à sua demanda e o jogo termina. O papel desempenhado por $\in$ é o de eliminar situações nas quais o jogador b submeteria um lance de QT e onde a resposta ótima do jogador a seria inclusive submeter um lance de QT. No jogo perturbado, dada a possibilidade de que o jogador b cometa um erro e submeta um lance de zero (o que ocorre com probabilidade $\in$), a resposta ótima do jogador a é submeter um lance igual à sua demanda (zero). Caso contrário, ele teria um lucro negativo.

Analisemos esse jogo perturbado na rodada s-1. Se o jogador b submete um lance de $y \geq QT - D_a(p_{s-1})$, então a resposta ótima do jogador a é acomodar, pois ele pode obter no máximo um lucro igual a zero na próxima rodada. Se o jogador b submete um lance $y < QT - D_a(p_{s-1})$, então a resposta ótima é submeter um lance igual à sua demanda. Ou seja, acabamos de demonstrar que no período s-1 o jogador a submete um lance menor ou igual à sua demanda. Observe-se que o mesmo argumento é válido em termos de estratégias mistas. Em particular, os jogadores atribuem, em equilíbrio, probabilidade zero ao evento "submeter um lance superior à sua demanda". Analogamente, a resposta ótima do jogador b é submeter um lance equivalente à sua demanda (desde que p_{s-1} seja superior a p^*). Assim, o único equilíbrio $\in$-restrito nessa rodada é dado por $D_a(p_{s-1})$, $D_b(p_{s-1})$, s-1). (Formalmente, cada jogador submete um lance de $D_i(p_{s-1})$, i = a, b, com probabilidade (1- $\in$) e de zero com probabilidade $\in$.)

Examinemos, agora, a rodada s-2. O jogador *a* aceita qualquer oferta que gere um lucro maior ou igual a π (p_{s-2}, D_a (p_{s-1})). Denotaremos a alocação correspondente a este lucro por *w*. Se o jogador *b* oferecer y $\geq$ QT – D_a (p_{s-2}), e *a* receber pelo menos *w*, então este último aceita a oferta. Do contrário, a resposta ótima do jogador *a* é adiar o jogo. Se o jogador *b* submeter um lance de y < Qt – D_a (p_{s-2}), então a resposta ótima de *a* é submeter um lance igual à sua demanda.

Evidentemente, se o jogador *b* oferece ao seu oponente uma quantia qualquer no intervalo [w, QT], então o jogador *a* submete um lance que será no máximo igual à sua demanda. Ou seja, não adianta *a* ser um negociador "duro", pois ele receberá, no evento de um desacordo em *s*-2, $D_a(p_{s-1})$ com probabilidade 1 na próxima rodada. A questão é saber como o jogador *a* se comportará caso *b* lhe ofereça menos que *w*, o que o induz a adiar o acordo. Argumentamos que, nesse caso, o jogador *a* submeterá um lance de D_a (p_{s-2}) porque ele receberá essa quantia somente quando seu oponente cometer um erro e ele não, o que ocorre com probabilidade (1–$\in$)$\in$. Assim, *a* maximiza seu lucro ao submeter um lance equivalente à sua demanda, isto é, *a* não submete lances superiores a D_a (p_{s-2}), considerando que p_{s-2}, considerando que p_{s-2} é ainda superior a p^*, e portanto a resposta ótima do jogador *b* é submeter um lance de D_b (p_{s-2}). Quaisquer outros pares de estratégias são eliminados e o único equilíbrio $\in$-restrito em *s*-2 é dado por D_a (p_{s-2}), D_a (p_{s-2}), s-2).

Finalmente, esse argumento pode ser utilizado de forma recursiva para mostrar que os participantes não submetem lances superiores a suas demandas em qualquer rodada $t \geq T$. Esse argumento, contudo, não se estende a rodadas anteriores a *T*-1, quando surge uma complicação adicional, notadamente a multiplicidade de equilíbrios. Isso pode fazer com que os participantes se comportem de forma mais agressiva no presente para que possam alcançar um acordo mais favorável no futuro. Assim, existe a possibilidade de que um acordo seja alcançado com atraso. ■

Demonstração da proposição 2: O lema 1 implica que o único equilíbrio $\in$-restrito no período *T* é tal que o jogador *i*, *i* = *a*, *b*, submete um lance de D_i (p^*) com probabilidade 1-$\in$ e de zero com probabilidade $\in$. Assim, transformamos um jogo com horizonte de tempo infinito em um jogo que termina com probabilidade 1, caso o preço alcance p^*.

Examinaremos, a seguir, o período *T*-1. Mostraremos que não é ótimo para o jogador *a* submeter um lance superior à sua demanda nessa rodada. Se o jogador *b* submeter um lance *y* < QT – $D_a(p_{T-1})$, então a resposta ótima de *a* é submeter um lance equivalente à sua demanda. Caso não haja um acordo, ele receberá a mesma alocação na próxima rodada, o que gerará um lucro estritamente inferior.) Por outro lado, se o jogador *b* submete um lance de $y \geq QT - D_a(p_{T-1})$, então *a* adia um acordo caso não receba uma alocação maior ou igual *a* *w*, onde *w* representa uma vez mais uma alocação que gera um montante de lucros igual ao que ele receberia com probabilidade (1-∈) na próxima rodada. No caso de o jogador *b* oferecer a *a* uma alocação inferior a *w*, este último adia um acordo ao submeter um lance igual à sua demanda (pelas razões alinhavadas na demonstração do lema 1). Assim, o jogador *a* não submete um lance superior a $D_a(p_{T-1})$. Uma conclusão similar vale para o jogador *b*.

A seguir, mostraremos que, em equilíbrio, o jogador *b* não oferece ao participante *a* uma alocação inferior a *W*.[13] Se o jogador *b* oferece menos que *w*, então o jogador *a* adia o acordo para a próxima rodada, quando *b* receberá $D_b(p^*)$. Contudo, caso *b* ofereça $w + \xi$, $\xi > 0$, no período *T*-1, ao jogador *a*, este aceita, desde que ξ seja fixo e satisfaça $\pi(p_{t-1}, w + \xi) > \pi(p^*, D_a(p^*))$. (As funções de demandas são contínuas e negativamente inclinadas.)

Caso o jogador *b* ofereça uma quantia $x > w$, o jogador *a* aceitará o mínimo entre *x* e $D_a(p_{T-1})$, i.e., o jogador *a* submete um lance igual ou inferior à sua demanda no período *T*-1. (Apresentamos, a seguir, um exemplo de que tal afirmação não é válida para rodadas anteriores a *T*-1.)

Em resumo, os lances do jogador a, em equilíbrio, pertencem ao intervalo $[\underline{x}, \overline{x}]$, onde $\underline{x} = \min\{QT - \overline{y}, w\}$, $\overline{x} = \min\{D_a(p_{T-1}), QT - \underline{y}\}$, e onde $\underline{y}$ e $\overline{y}$ representam definições análogas para o jogador *b*. Os lances de *b* em equilíbrio pertencem ao intervalo $[\underline{y}, \overline{y}]$.

Adicionalmente, ∈ deve ser suficientemente próximo de zero, para que um jogador aceite qualquer oferta que gere um lucro maior que o lucro do período *T* com probabilidade (1-∈), i.e., se ∈ é suficientemente maior que zero, então cada participante ficará tentado a submeter um lance equivalente à sua demanda, mesmo sabendo que não é factível. Supomos que ∈ satisfaça a seguinte restrição para qualquer *x* pertencente ao conjunto dos lances de equilíbrio do jogador *a* (com uma condição similar para o jogador *b*):

$$(1 - \varepsilon)\,\pi_a(p_{T-1}, x) > \varepsilon(1 - \varepsilon)\,\pi_a(p_{T-1}, D_a(p_{T-1})) \tag{8}$$

Em síntese, demonstramos que um acordo é alcançado no máximo no período T-1 em qualquer equilíbrio ∈-restrito, para um Δ fixo e para ∈ próximo de zero. Mostramos ainda que podemos eliminar todas aquelas estratégias de elaboração de lances que gerem um lucro total inferior a,

[13] Excluímos o sinal de igualdade para evitar situações nas quais o jogador *a* pode ser indiferente entre adiar um acordo ou acomodar o lance do seu oponente. Essa restrição não tem qualquer efeito sobre a natureza do processo de seleção de equilíbrio.

respectivamente, $\pi_a(\underline{x}, p_{T-1})$ e $\pi_b(\underline{y}, p_{T-1})$. Para completar essa demonstração apresentaremos um exemplo no qual existe um equilíbrio $\in$-restrito em que um acordo é alcançado apenas na rodada T-1.

Considere um leilão com dois participantes, onde $D_a(p_t) = (4-p_t)^2$, $D_b(p_t) = (4-p_t)$, QT = 4, e $O \leq p_t \leq 4$. Seja $p_0 = 2{,}3$ e $\Delta = 0{,}1$. Note que quando $p^* = 2{,}5$, i.e., na terceira rodada, a demanda total é pela primeira vez menor que QT, e de acordo com a análise acima o jogador *a* submete um lance de 2,25 enquanto o jogador *b* submete um de 1,5. Na segunda rodada, os jogadores aceitam qualquer oferta na qual recebam uma alocação nos intervalos [2,4, 2,56] para o jogador *a* e [1,44, 1, 6] para o jogador *b*.

Examinemos um equilíbrio do seguinte tipo: se o jogador *b* submete um lance de 4 na rodada inicial, então o jogador *a* percebe que seu oponente é um negociador forte e portanto oferece 2,4 na segunda e 2,25 na última rodada. Se jogador *b* submete um lance diferente de 4 na primeira rodada, então *a* dá um lance de 2,56 na segunda e o equivalente à sua demanda na última rodada. Assim, podemos verificar que a resposta ótima de *a* e *b* corresponde, respectivamente, às seguintes seqüências de lances: (2,89 , 2,4 , 2,25) e (4, 1,6 , 1,5). O participante *b* prefere esperar para receber 1,6 na segunda rodada (o que gera um lucro de 1,28) do que acomodar a demanda do seu adversário na primeira rodada. O jogador *a*, por sua vez, submete um lance equivalente à sua demanda, dada a existência de uma probabilidade $\in$ de que seu oponente cometa um erro. Observe-se que, neste exemplo, o jogador *b* se recusa a acomodar a demanda de *a* na primeira rodada, o que geraria um lucro de 1,271, estritamente superior ao mínimo que ele aceitaria na rodada 2(1,26). ■

Argumentamos, contudo, que o equilíbrio descrito no exemplo acima não é plausível. Os jogadores deveriam ser capazes de inferir alguma informação do fato de que *a* aceita receber uma alocação de 2,4 na segunda rodada. Em particular, argumentamos que o equilíbrio acima deveria ser eliminado uma vez que ambos os jogadores poderiam inferir que o jogador *a* aceitaria receber essa mesma alocação na rodada inicial (o que geraria um lucro maior para os dois jogadores).

A intuição é a de que ameaças envolvendo equilíbrios perfeitos inferiores de Pareto não têm credibilidade. Intuitivamente, um equilíbrio $\in$-restrito do jogo perturbado é $\in$-perfeito de Pareto, se ele não envolve ameaças dessa ordem.[14]

Destacamos que apesar de o conceito de equilíbrio perfeito de Pareto impor usualmente fortes restrições ao conjunto de equilíbrios, demonstraremos que existe uma seqüência infinita de equilíbrios dessa natureza no

[14] Para uma discussão desta e de outros conceitos de equilíbrio em jogos com estágios múltiplos e para uma extensão dessa noção para jogos com mais de dois jogadores, ver Bernheim, Peleg & Whinston (1987).

jogo que analisamos. Em adição, em qualquer desses equilíbrios concretiza-se um acordo na rodada inicial.

Definição 6: Um equilíbrio $\in$-restrito é *$\in$-perfeito de Pareto* no jogo perturbado se, para qualquer t e toda história h_t, o lucro correspondente à continuação do jogo pertencer ao conjunto de soluções eficientes de Pareto no período t-1. Um *equilíbrio perfeito de Pareto* é o limite de qualquer equilíbrio $\in$ perfeito de Pareto quando $\in$ converge para zero.

Observe-se que o caráter recursivo dessa definição poderia ser inconsistente com um jogo com horizonte de tempo infinito. Contudo, tal dificuldade é superada, uma vez que demonstraremos que o jogo termina com probabilidade 1 em no máximo T-1 rodadas.

Proposição 3: O conjunto de equilíbrios $\in$-perfeitos de Pareto de jogo perturbado, para um Δ fixo e $\in$ suficientemente próximo de zero de forma a satisfazer a condição (8') abaixo, é descrito por todas as triplas (x,y,O), onde os pares (x,y) satisfazem:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)\,\pi_a(p_0, x) &> \varepsilon(1-\varepsilon)\,\pi_a(p_0, D_a(p_0)) \\ (1-\varepsilon)\,\pi_b(p_0, y) &> \varepsilon(1-\varepsilon)\,\pi_b(p_0, D_b(p_0)) \end{aligned} \tag{8'}$$

$$\pi_a(p_0, x) \geq \pi_a(p_{T-1}, \underline{x}) \tag{9a}$$

$$\pi_b(p_0, y) \geq \pi_b(p_{T-1}, \underline{y}) \tag{9b}$$

$$x \leq D_a(p_0) \tag{9c}$$

$$y \leq D_b(p_0) \tag{9d}$$

$$x + y = TS \tag{9e}$$

Demonstração: Basta começar a análise pelo período T-1, uma vez que já demonstramos que todos os candidatos a equilíbrio nos quais um acordo é alcançado após a rodada T-1 podem ser eliminados. De fato, caracterizamos o conjunto de equilíbrios $\in$-restritos no período T como triplas (x,y,T-1), onde $x \in [\underline{x},\bar{x}]$, $y \in [\underline{y},\bar{y}]$, x + y = QT. (Condicional à continuação do jogo até a rodada T-1 e desde que satisfaçam a condição 1.)

Observe-se, entretanto, que todo par (x,y) é dominado, no sentido de Pareto, por um outro equilíbrio em que os jogadores atingem o mesmo acordo na rodada anterior. Podemos usar esse argumento de forma recursiva para mostrar que qualquer par (x,y) é dominado por um equilíbrio em que cada jogador recebe a mesma alocação na rodada inicial. Pela mesma razão, um par (x,y) é dominado por qualquer outro par no período 0 que gere um montante de lucros superior para pelo menos um dos participantes (sem diminuir o lucro de outro participante).

Essas observações são válidas para qualquer equilíbrio ϵ-restrito, onde um acordo é alcançado em uma rodada $t > 0$. Assim, a exigência de que as alocações satisfaçam a condição de Pareto elimina todas as soluções nas quais os participantes recebem menos que o lucro mínimo e nas quais um acordo não é alcançado imediatamente.

Finalmente, observe-se que não existe equilíbrio ϵ-perfeito de Pareto no qual os jogadores recebam mais que sua demanda. Isso deve-se à exigência de que as estratégias sejam ótimas no sentido de Pareto em todos os subjogos, o que evita que os jogadores submetam lances superiores à sua demanda.

Para completar essa demonstração, incluímos o formato das estratégias de elaboração de lances em equilíbrio: o jogador *a* submete repetidamente um lance de x até atingir sua demanda. A partir desse momento, ele submete lances equivalentes à sua demanda. O jogador *b* submete lances de y até alcançar sua demanda, quando então passa a submeter lances iguais à sua demanda. ∎

Vale mencionar que não é possível caracterizar o conjunto de equilíbrios do tipo ϵ-restrito do jogo perturbado, uma vez que não podemos garantir que um jogador aceite uma oferta no período T-2 que gere um lucro maior ou igual ao mínimo que ele receberia no período T-1 com probabilidade 1. (Essa observação é válida evidentemente para todos os períodos anteriores.) A razão é que um jogador pode submeter lances de forma mais agressiva com o objetivo de garantir a sua alocação máxima no período seguinte. Entretanto, ao analisarmos equilíbrios perfeitos de Pareto, podemos inferir que, se um jogador aceita um determinado acordo, então ele aceitaria essa mesma alocação em rodadas anteriores, o que geraria um lucro maior.

É interessante observar que nos equilíbrios perfeitos de Pareto os participantes não submetem lances superiores às suas demandas. Existe um resultado semelhante na teoria de leilões seqüenciais que estabelece que os participantes nunca submetem lances superiores aos seus valores.[15]

Adicionalmente, para qualquer valor de ϵ suficientemente próximo de zero e para um Δ fixo, os equilíbrios descritos acima correspondem aos equilíbrios ϵ-perfeitos de Pareto do jogo perturbado respectivo. Assim, o limite destes equilíbrios quando ϵ se aproxima de zero define o conjunto de equilíbrios perfeitos de Pareto do jogo original, conforme estabelecido na proposição a seguir.

[15] Ver, por exemplo, Engelbrecht-Wiggans (1991) e Engelbrecht-Wiggans & Menezes (1993).

Proposição 4: O limite de equilíbrios $\in$-perfeitos de Pareto, quando $\in$ converge para zero e para $p_0 < p^*$, define o conjunto de equilíbrios de Pareto do jogo original, onde cada jogador recebe uma alocação, ao preço inicial, que gera um montante de lucros maior ou igual ao que receberia ao preço p_{T-1}. Essas alocações geram um lucro maior ou igual ao lucro gerado pelo equilíbrio competitivo do jogo. Observe-se que quando $p_0 \geq p_T$, o único equilíbrio perfeito é dado por $(D_a(p_0), D_b(p_0), O)$.

Apresentamos, a seguir, um exemplo que ilustra a análise desenvolvida.

Exemplo 1: Supomos que $D_a(p_t) = D_b(p_t) = 4 - p_t$, $0 \leq p_t \leq 4$, $QT = 4$, $p_0 = 1$ e $\Delta = 0{,}1$. Os jogadores podem submeter qualquer lance no intervalo [0,4]. Em qualquer período t um par de lances (x,y) gera um lucro total igual a:

$$\pi_a(p_t, x) = (4 - p_t)x - x^2/2, \text{ se } x + y \leq QT$$

$$= 0, \; se \;\; x + y \; > QT$$

$$\pi_b(p_t, y) = (4 - p_t)y - y^2/2, \text{ se } \; x + y \leq QT$$

$$= 0, \; se \;\; x + y \; > QT$$

Na solução competitiva cada jogador recebe duas unidades ao preço $p^* = 2$. Para cada alocação individualmente racional e eficiente podemos construir um equilíbrio de Nash que suporte essa solução. Para eliminarmos o equilíbrio "predatório" (4,4), definimos um jogo perturbado onde cada jogador comete um erro e submete um lance de zero com probabilidade $\in$.

Para calcular o equilíbrio do jogo perturbado examinamos a rodada na qual $p^* = 2$. Nenhum dos dois oponentes submete lances superiores a duas unidades, pois existe a possibilidade de cometer um erro. Conseqüentemente, eles também não submetem lances inferiores a 2 (pois de outra forma não estariam maximizando lucro). Em resumo, cada jogador submete um lance de 2 com probabilidade $(1-\in)$. O lema 1 garante que essa estratégia é dominante e que o jogo termina com probabilidade 1. Cada jogador recebe um lucro de 2 com probabilidade $(1-\in)$. (Dado que $\in$ seja suficientemente próximo de zero.)

Examinemos agora a rodada anterior, quando $p = 1{,}9$. Nessa rodada os jogadores aceitam receber qualquer alocação no intervalo [1,9 , 2,1]. Podemos então calcular o lucro mínimo, i.e., $\pi_i(1{,}9 \,,\, 1{,}9) = 2{,}185$, i = a,b.

No período 0, os lances de equilíbrio pertencem ao intervalo [1,3], e cada combinação possível de lances que induzam um acordo corresponde a um equilíbrio perfeito de Pareto. (Note-se que uma unidade do bem ao preço inicial gera um lucro de 2,5.) Quando $\in$ se aproxima de zero, o conjunto de equilíbrios perfeitos de Pareto é tal que um acordo é sempre alcançado na rodada inicial.

4.2 Incerteza unilateral

Nesta subseção resolvemos o leilão quando um dos participantes detém informação privilegiada. Especificamente, a função de demanda do jogador *a* é do conhecimento comum, enquanto que a função de demanda do jogador *b* só é conhecida por ele próprio. O jogador *a* sabe apenas que a demanda do seu oponente pode ser igual a $D_{bL}(p_t)$ com probabilidade w_0 e $D_{bH}(p_t)$ com probabilidade $1-w_0$, onde $D_{bL}(p_t) < D_{bH}(p_t)$ para todo p_t.

Além disso, analisamos um caso especial no qual o leilão é encerrado após a terceira rodada. Tal restrição foi imposta com o objetivo de facilitar a identificação do conjunto de equilíbrios do jogo original. De fato, podemos identificar equilíbrios seqüenciais do jogo restrito com propriedades interessantes. Contudo, podemos construir exemplos onde os equilíbrios do jogo restrito não são válidos no jogo original.

Dada a existência de informação privilegiada, o jogador *b* pode ter um incentivo para tentar convencer seu oponente de que ele está em uma situação de negociação superior. Assim, devemos estender a noção de estratégia para incorporar esta nova estrutura informacional. Um *perfil de estratégias* é uma tripla (X, Y_L, Y_H) que corresponde, respectivamente, à estratégia de elaboração de lances dos jogadores *a*, b_L e b_H. Um tal perfil pode induzir tanto uma solução que corresponda às estratégias (X,Y_L) com probabilidade w_0, quanto uma solução que corresponda às estratégias (X,Y_H) com probabilidade $(1-w_0)$.

Observe-se que o conceito de equilíbrio de Nash bayesiano pode suportar um número infinito de soluções, inclusive a possibilidade de desacordo perpétuo, uma vez que crenças sobre crenças não são importantes. Para verificar se um determinado perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash bayesiano basta computar a resposta ótima de cada jogador, dado o seu conjunto de crenças e a estratégia do seu oponente. Um resultado análogo à proposição 1 pode ser trivialmente obtido.

Utilizaremos o conceito de equilíbrio seqüencial de Kreps & Wilson (1982). Esse refinamento incorpora a idéia de que crenças a respeito de crenças são importantes. Em particular, tal conceito inclui crenças tanto no caminho de equilíbrio quanto fora dele.

Um sistema de crenças do jogador *a* sobre o tipo do seu oponente é representado por uma função w cujo domínio é o conjunto de ações do jogador *b* e cuja imagem é o intervalo [0,1], i.e., o jogador *a* observa a ação do seu oponente e a transforma em uma avaliação da probabilidade de que *b* seja do tipo demanda reduzida.

Esse sistema deve satisfazer a condição de que a crença inicial é dada por

w_0, e deve ser consistente no sentido de Kreps e Wilson, ou seja, sempre que possível deve ser atualizado de acordo com a regra de Bayes.

Definição 7: Um *equilíbrio seqüencial* desse jogo consiste em um perfil de estratégias (X, Y_L, Y_H) e em um sistema de crenças w, que satisfazem:

a) racionalidade seqüencial: a estratégia de cada jogador deve ser ótima após todas as histórias possíveis;

b) as crenças devem ser consistentes: a crença do jogador *a* deve ser consistente com a probabilidade w_0 com a qual ele enfrenta um jogador do tipo demanda baixa. À medida que o jogo continua, o jogador *a* deve atualizar suas crenças, sempre que possível, pela regra de Bayes.

Denotaremos por p_L o nível de preços em que a soma das demandas é igual a QT no caso em que *b* é do tipo demanda baixa. De forma similar, representaremos por p_H o preço que equilibra oferta e procura quando *b* possui uma demanda elevada. As quantidades que equilibram o mercado nos dois casos — $(D_a(p_L), D_{bL}(p_L))$ e $(D_a(p_H), D_{bH}(p_H))$ — são pontos focais na construção dos equilíbrios seqüenciais para esse jogo. Em adição, a escolha do preço inicial e de Δ também são relevantes.

Evidentemente, quando $p_0 > p_H$ e para qualquer Δ, o único equilíbrio seqüencial é dado por $(D_a(p_0), D_{bL}(p_0), 0)$ e $(D_a(p_0), D_{bH}(p_0), 0)$, dependendo do tipo do jogador *b*. Para simplificar, examinaremos o caso em que $p_0 < p_L \leq p_1 < p_H \leq p_2$. Mostraremos que podem existir equilíbrios do tipo *separating* ou do tipo *pooling.*

Proposição 5: É possível construir equilíbrios seqüenciais para o jogo restrito, cujo formato depende da crença inicial do jogador *a*, das funções de demanda e de Δ. Nesses equilíbrios alcança-se um acordo em no máximo duas rodadas.

Demonstração: Mostraremos, em primeiro lugar, que para valores apropriados para a crença inicial e funções de demanda, o seguinte perfil de estratégias é um equilíbrio seqüencial: o jogador *a* submete um lance de $D_a(p_L)$ no período inicial; se ele observa $D_{bH}(p_H)$ no período O, então ele submete um lance de $QT-D_{bH}(p_H)$ na segunda rodada e de min $D_a(p_2), QT-D_{bH}(p_H)$ na última rodada. Caso contrário, ele submete um lance de $D_a(p_1)$ na segunda e de $D_a(p_2)$ na última rodada. A seqüência de lances do jogador b_L é dada por $\{D_{bL}(p_L), D_{bL}(p_1), D_{bL}(p_2)\}$, enquanto que a seqüência do jogador b_H corresponde a $\{D_{bH}(p_H), D_{bH}(p_H), D_{bH}(p_2)\}$.

Observe-se que dados o incremento no preço e a estratégia do participante *a*, a seqüência de lances do jogador b_L é uma resposta ótima, uma vez que ao imitar um jogador do tipo demanda elevada ele poderia obter $D_{bH}(p_H)$ na rodada seguinte, quando desejaria receber no máximo $D_{bL}(p_1)$, o que geraria um lucro inferior ao que ele receberia na rodada inicial ao submeter seu lance de equilíbrio. Em suma, um agente do tipo demanda baixa não tem interesse em esperar até a próxima rodada para alcançar um acordo. Para o jogador b_H, contudo, pode valer a pena esperar uma rodada em vez de receber D_{bL} (p_L) na rodada inicial. Ele prefere esperar sempre que:

$$\pi_{bH} (P_0, D_{bL} (p_l)) \leq \pi_{bH} (p_1, D_{bH} (p_H)) \tag{10}$$

Do ponto de vista do jogador *a*, e dada a sua crença inicial a respeito do tipo do seu adversário, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\begin{aligned} \pi_a (p_0, QT - D_{bH} (p_H)) \leq w_0 \, \pi_a (p_0, D_a (p_L)) + \\ (1 - w_0) \, \pi_a (p_1, QT - D_{bH} (p_H)) \end{aligned} \tag{11}$$

A condição (11) estabelece que, dada a estratégia do jogador *b*, *a* prefere uma loteria, na qual ele recebe $D_a(p_L)$ com probabilidade w_0 na rodada inicial ou QT-D_{bH} (p_H) com probabilidade 1-w_0 na próxima rodada, ao invés de receber este último valor com probabilidade 1 ao preço p_0. Observe-se que as condições (10) e (11) devem ser satisfeitas simultaneamente para garantir a consistência das crenças.

Examinaremos agora o que ocorre quando somente a condição (10) é válida.

Neste caso, *a* prefere receber QT-D_{bH} (p_H) na rodada inicial. Sua resposta ótima é submeter lances de QT-D_{bH} (p_H) aos preços p_0 e p_1 e de D_a (p_2) na última rodada. A resposta ótima do jogador b_H é usar a mesma seqüência de lances apontada no parágrafo anterior. A resposta ótima do jogador b_L, contudo, é submeter a seguinte seqüência (min $\{D_{bL} (p_0), D_{bH} (P_H)\}$, min $\{D_{bL} (p_1), D_{bH} (p_H)\}$, $D_{bL}(p_2)$). Para verificar se este perfil é um equilíbrio, precisamos verificar se a nova estratégia do jogador *a* ainda é uma resposta ótima para a estratégia de *b*. Mas, evidentemente, *a* prefere garantir um acordo no período 0 do que esperar um período a receber uma loteria cujo valor esperado é menor que o lado direito da expressão (11). Referiremo-nos a este tipo de equilíbrio como um equilíbrio do tipo *pooling* agressivo, porque o tipo de demanda baixa recebe a mesma alocação de um agente com demanda elevada.

Finalmente, consideramos uma situação na qual somente a condição (11) é válida. Nessa circunstância, o jogador b_H submete lances que obedecem à seguinte seqüência: (D_{bL} (p_L), min $\{D_{bL} (p_L), D_{bH} (p_1)\}$, $D_{bH}(p_2)$). A resposta ótima do jogador *a* corresponde a submeter um lance de D_a (p_L) na rodada inicial e lances equivalentes à sua demanda, aos preços p_1 e p_2. Vale ressaltar que b_L se comporta da mesma forma que anteriormente. Assim, verifica-se trivialmente que a estratégia de b_H é ótima com respeito à nova estratégia de a. Referiremo-nos a equilíbrios desta natureza como equilíbrios do tipo *pooling* não-agressivos. ■

O exemplo abaixo considera os efeitos da inclusão de rodadas adicionais no jogo restrito. Tal inclusão destina-se a nos auxiliar na investigação da natureza dos equilíbrios seqüenciais do jogo original.

Exemplo 2: Consideraremos um leilão onde QT = 4, $D_a (p_t) = 4 - p_t$ e o jogador b possui uma demanda reduzida $D_{bL} (p_t) = 4 - p_t$ com probabilidade $w_0 = 0{,}2$ e uma demanda elevada $D_{bH} (p_t) = 6 - p_t$ com probabilidade 0,8. Supomos que $p_0 = 1{,}5$ e que $\Delta = 1$. Neste jogo p_L e p_H são dados por, respectivamente, 2 e 3. Argumentamos que existe um equilíbrio seqüencial do tipo *pooling* não-agressivo da seguinte forma: "Os lances do jogador a são de {2,1,5, 0,5}, os lances de b_L são dados pela seqüência {2,1,5,0,5}, enquanto os de b_H são dados por {2,2,2}."

Considerando como dadas as estratégias de a e b_H, e fácil verificar que a resposta ótima do jogador b_L corresponde a alcançar um acordo no período 0, pois do contrário ele estaria disposto a receber no máximo 1,5 na próxima rodada, o que geraria um lucro estritamente menor. Um jogador b com demanda elevada também prefere receber 2 ao preço original do que receber 2,5 na próxima rodada. Conseqüentemente, a estratégia do jogador a é uma resposta ótima à estratégia de b. Neste exemplo, um equilíbrio do tipo *separating* não existe, pois um agente com demanda elevada não está disposto a esperar para receber uma alocação maior.

Vale destacar que a introdução de rodadas adicionais no fim do jogo não altera o equilíbrio descrito acima, porque nessas rodadas os jogadores já atingiram as suas funções de demanda. Assim, poderíamos ser tentados a concluir que esse equilíbrio seria válido para o jogo com um número arbitrário de períodos. Contudo, essa afirmação não é verdadeira, pois ao introduzirmos uma rodada adicional no início do jogo (i.e., $p_0 = 0{,}5$), podemos mostrar que existe também um equilíbrio do tipo *separating*: "O jogador a submete um lance de 2 ao preço p_0 e caso observe que o lance do seu oponente é igual a 3, então ele dá um lance de 3 na rodada inicial, um lance de 1 aos preços p_1 e p_2 e de 0,5 na última rodada. Se o jogador a observa um lance de 2 na rodada inicial, então ele submete um lance de 2 ao preço p_1 e lances iguais à sua demanda após esse período. Um jogador b com demanda reduzida submete lances de 2 nas duas primeiras rodadas e lances equivalentes à sua demanda posteriormente. Um jogador b com demanda elevada submete lances de 3 em todas as rodadas."

Para verificar se este é um equilíbrio seqüencial, basta observar que um jogador do tipo demanda reduzida não se interessa em imitar um do tipo demanda elevada porque ele estará disposto a receber no máximo 2,5 ao preço p_1, o que gera um lucro inferior àquele gerado por um acordo na rodada inicial onde este jogador recebe 2.

Para um jogador com demanda elevada, a condição (10) é satisfeita, já que ao esperar um período ele pode obter a mesma alocação que receberia ao imitar o jogador do tipo demanda reduzida. Finalmente, a condição (11) é satisfeita do ponto de vista do jogador *a* desde que sua crença inicial de que seu oponente é do tipo demanda reduzida seja igual a 0,2. Em síntese, esse perfil de estratégias e esse sistema de crenças representam um equilíbrio seqüencial.

A seguir, examinaremos um exemplo no qual tanto o preço inicial quanto o incremento nos preços são baixos, isto é, analisaremos o caso em que $p_0 < p_1 < p_2 < p_L \leq p_H$. Neste exemplo construímos um equilíbrio seqüencial em que um acordo é alcançado somente na última rodada.

Exemplo 3: Considere a seguinte modificação no exemplo 2: $p_0 = 0{,}5$ e $\Delta = 0{,}1$. O perfil de estratégias a seguir é um equilíbrio seqüencial onde um acordo é alcançado na última rodada: "Os jogadores *a* e *b* (independentemente do seu tipo) submetem lances de 3 aos preços p_0 e p_1 e de 2 na última rodada." Esse perfil é um equilíbrio porque os dois jogadores preferem receber 2 na última rodada a acomodar os lances do seu oponente e receber uma alocação de 1 na rodada inicial.

Finalmente, é possível mostrar que se estendermos os exemplos acima mencionados para o jogo não-restrito, considerando $p_0 < p_L$ e um Δ pequeno, os equilíbrios acima identificados deixam de ser válidos.

Esses resultados são obviamente inconclusivos e portanto são ainda necessários esforços adicionais de pesquisa para determinar um refinamento do equilíbrio mais adequado a jogos de informação incompleta com um número infinito de ações.

5. Conclusão

Analisamos, neste trabalho, o equilíbrio de um leilão de objetos múltiplos com preços ascendentes que foi utilizado na venda da CST sob os auspícios do Programa Brasileiro de Privatização. Um mecanismo semelhante vem sendo sugerido como um novo instrumento para a venda de títulos do Tesouro dos EUA.

Utilizamo-nos de um modelo com dois indivíduos para demonstrar que, na presença de informação completa, um acordo é alcançado imediatamente no período inicial em qualquer equilíbrio perfeito de Pareto. Nesses equilíbrios, cada participante recebe uma alocação que lhe garante pelo menos o montante de lucro que receberia com probabilidade 1 na última rodada do jogo. Além disso, cada participante recebe no máximo sua demanda ao preço inicial.

Vale mencionar que os equilíbrios dessa natureza (cuja estratégia é tal que cada jogador submete um lance constante até que atinja sua demanda, quando então o participante passa a submeter lances iguais à sua demanda) são válidos na presença de mais de dois jogadores, desde que consideremos um conceito apropriado de equilíbrio.

Duas características importantes desse mecanismo se sobressaem. Por um lado, trata-se de um mecanismo eficiente, uma vez que gera a venda de todos os lotes com probabilidade 1. Por outro lado, a família de equilíbrios descrita acima é tal que a receita é minimizada. Esse *trade-off* também existe na teoria tradicional de leilões, onde existe uma correlação negativa entre o valor do preço mínimo exigido e a probabilidade de que o objeto seja vendido.

Assim, o mecanismo em análise pode ser apropriado à venda de empresas cuja transferência para o setor privado a sociedade considera prioritária, mas certamente não deverá ser utilizado se existe alguma preocupação com relação à maximização de receita.

Na presença de informação incompleta, ou seja, quando existe incerteza com relação às demandas dos participantes, os resultados perdem seu poder de previsão. Conforme mencionamos na seção 3, esse fenômeno é comum à teoria de jogos de negociação com informação incompleta. Para um jogo com número reduzido de estágios identificamos um equilíbrio seqüencial no qual um acordo é alcançado em no máximo duas rodadas. Contudo, podemos construir exemplos em que um acordo é alcançado na última rodada. Adicionalmente, tais equilíbrios podem não corresponder a qualquer equilíbrio do jogo original (com um número indefinido de etapas).

Finalmente, ressaltamos que a análise acima, além de prever o comportamento dos participantes em equilíbrio, deve ser interpretada com um *benchmark* para avaliarmos os resultados do leilão real. Nesse sentido, uma possível extensão deste trabalho poderia incorporar a existência de participantes com "tamanhos" diferentes, o que nos permitiria contrastar o comportamento em equilíbrio de investidores individuais (com uma demanda marginal para os lotes de ações) com o de grupos com maior poder de influenciar os resultados (tais como fundos de pensão). Menezes (1993) examina leilões de objetos múltiplos onde os jogadores são substituídos por agentes com inteligência artificial e conclui que, à medida que o número de jogadores competitivos aumenta, a solução se aproxima do equilíbrio competitivo. Dessa forma, a determinação da estrutura de mercado torna-se importante para a avaliação da capacidade de predição do modelo analisado acima.

Abstract

In this paper we examine an ascending-price multiple-object auction where the auctioneer increases the price until the total amount bid is less than or equal to the number of objects to be sold. This mechanism represents a stylized version of an auction within the brazilian privatization program. We compute its solution and identify a family of equilibria where a sale is completed at the initial round with probability one. Hence, although this mechanism is efficient, it produces disappointing results in terms of revenue maximization.

Referências bibliográficas

Berheim, B. D.; Peleg, B. & Whinston, M. D. Coalition-proof Nash equilibria I: concepts. *Journal of Economic Theory, 42:* 1-12, 1987.

Binnmore, K. G. Nash bargaining II. In: Binmore, K. G. & Dasgupta, P., eds. The economics of bargaining. Oxford, Blackwell, 1987a.

______. Nash bargaining and incomplete information. In: Binmore, K. G. & Dasgupta, P. eds. op. cit., 1987b.

Chari, V.V. & Weber, R.J. How the U.S. Treasury should auction its debt. *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1992. p. 3-12.
Chartterjee, K. & Samuelson, L. Perfect equilibria in simultaneous-offers bargaining. Working Paper 12-87-3. Department of Economics, Pennsylvania State University, 1987a.

_____ & _____. Bargaining with two-sided incomplete information: an infinite horizon model with alternating offers. *Review of Economic Studies, 54*: 175-92, 1987b.

______ & ______. Bargaining under two-sided incomplete information: the unrestricted offers case. *Operations Research, 36:* 605-18, 1988.

Coase, R. The problem of social cost. *Journal of Law and Economics,3*: 1-44, 1960.

Cramton, P.C. Bargaining with incomplete information: An infinite horizon model with continuous uncertainty. *Review of Economic Studies,51*: 579-94, 1984.

_____. Strategic delay in bargaining with two-sided uncertainty. *Review of Economic Studies, 59* (1): 205-26, 1992.

Department of the Treasury Securities and Exchange Commission & Board of Governors of the Federal Reserve System. Joint report on the government securities market. Washington, DC, Jan. 1992

Engelbrecht-Wiggans, R. Sequential Auctions of non-identical objects. Faculty Working Paper nº 91-0161. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1991.

_____ Menezes, & F. M. Sequential auctions with participation costs. 1993. (mimeogr.)

Fudenberg, D. & Tirole, J. Sequential bargaining under incomplete information *Review of Economic Studies, 50*: 221-48, 1983.

_____ & _____ *Game theory*. Cambridge, The MIT Press, 1991.

Grossman, S. J. & Perry, M. Perfect sequential equilibrium. *Journal of Economic Theory, 39*: 97-119, 1986.

Gul, F. & Sonneschein, H. On delay in bargaining with one-sided uncertainty. *Econometrica, 56*: 601-11, 1988.

Kreps, D. M. & Wilson, R. Sequential equilibria. *Econometrica, 50*: 863-94, 1982.

Madrigal, V.; Tan, T.C.C. & Werlang, S. Ribeiro da Costa. Support restrictions and sequential equilibria. *Journal of Economic Theory,43*: 329-34, 1987.

McAfee, R.P. & McMillan, J. Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature, 25*: 699-738, 1987.

Menezes, F.M. Ascending-price multiple-object auctions with AAI agents. 1993 (mimeogr.).

Milgrom, P. Auction theory. In:Bewley, T. ed. *Advances in economic theory: Fifth World Congress*. Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

_____. Auctions and bidding: A primer. *Journal of Economic Perspectives,3*: 3-22, 1989.

Nash, J.F. The bargaining problem. *Econometrica, 18*: 155-62, 1950.

_____. Two person cooperative games. *Econometrica, 21*: 128-40, 1953.

Osborne, M. J. & Rubinstein, A. *Bargaining and markets.* San Diego, Academic Press, 1990.

Rubinstein, A. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica, 50*: 97-109, 1982.

_____. A bargaining model with incomplete information about time preferences. *Econometrica, 53*: 1.151-72, 1985a.

_____. Choice of conjectures in a bargaining game with incomplete information. In: Roth, A.E., ed. *Game theoretic models of bargaining*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985b.

Selten, R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory, 4*: 25-55, 1975.

Stahl, I. *Bargaining theory*. Stockholm, Economics Research Institute, Stockholm School of Economics, 1972.

Stark, R. M. & Rothkopf, M. H. Competitive bidding: a comprehensive bibliography. *Operations Research, 27*: 364-90, 1979.

Stevens, E. J. & Dumitru, D. Auctioning treasure securities. Economic Commentary, Federal Reserve Bank of Cleveland, 1992.

Wilson, R., Game-theoretic analyses of trading processes. In: Bewley, T., ed., op.cit., 1987.