Avaliação econômica de concessões na indústria de produção de petróleo*

Tara Keshar Nanda Baídya**
Fernando Antônio L. Aiube***

Palavras-chave: análise econômica de projetos; opções reais; investimentos na indústria do petróleo; finanças em tempo contínuo; processos estocásticos; solução numérica de equações diferenciais parciais.

O tema tratado neste artigo insere-se no contexto de orçamentação de capital. O objetivo básico é estabelecer o valor monetário de um projeto de produção de petróleo. Supondo-se a existência de uma área sob concessão por um período de tempo finito onde está instalado o projeto. O artigo estuda um modelo para avaliação econômica de projetos petrolíferos considerando as incertezas econômicas (oriundas da evolução dos preços do barril de óleo no mercado *spot*) e as incertezas da reserva da jazida. A incerteza da reserva resume as incertezas técnicas da engenharia de petróleo. O desenvolvimento do modelo é baseado na programação dinâmica em tempo contínuo, sendo resolvido um problema de controle estocástico ótimo. Apesar de as considerações e hipóteses enfocarem uma aplicação específica para a indústria do petróleo, o modelo analisado pode ser facilmente adaptado para valoração de diferentes projetos relativos a outras atividades industriais.

This paper aims at determining the monetary value of a petroleum production project, taking into consideration the uncertainties in the oil price and in the petroleum reserve of the field. The variable reserve uncertainty includes the most important technical uncertainties of a petroleum production project.
The concepts developed in the continuous time finance and of the option price theory are used here. The oil price and reserve are assumed to follow a geometric Brownian process. The lease on the oil field is assumed to terminate after a certain period of time. No restriction is made about the type of the function utility of the owner of the project. Under these conditions the optimal quantity of oil extraction from the ground is determined using the stochastic dynamic programming methodology. This value is then substituted in the original equation. The result is a non-linear non-homogenous second order partial differential equation, the solution of which gives the monetary value of the project. The model could be adapted to other projects of different industries, although our hypothesis are relative to oil project.

1. Introdução

Este artigo busca determinar o valor monetário de um ativo real, no caso um projeto de produção de petróleo,[1] considerando as incertezas do preço do óleo e do volume da jazida.

* Artigo recebido em out. 1995 e aprovado em ago. 1996. Os autores agradecem os comentários dos participantes do XXX Cladea, onde este artigo foi primeiramente apresentado.
Os autores são gratos, da mesma forma, a dois revisores anônimos da RBE, pelos comentários que permitiram o aprimoramento deste artigo. Ressaltamos que erros ou omissões remanescentes são de nossa responsabilidade.
** Professor do Depto. de Engenharia Industrial da PUC-RJ.
*** Engenheiro de petróleo de E&P - Petrobras.

[1] Conforme o Código de Reservas de Petróleo, o termo "petróleo" é definido como uma mistura constituída predominantemente de hidrocarbonetos, que ocorre na natureza nos estados sólido, líquido ou gasoso. O termo óleo é a porção do petróleo existente na fase líquida.

Modernamente, os estudos em finanças inseridos nesta linha de pesquisa têm usado como ferramenta principal a teoria das opções e os conceitos de finanças em tempo contínuo. Pode-se definir a teoria das opções como o conjunto de metodologias utilizadas para valorar ativos derivativos. A primeira solução de equilíbrio, que estabeleceu o preço de um ativo derivativo (opção de compra européia), deve-se a Black e Scholes (1973), em um pioneiro artigo que inaugurou uma nova etapa dos conhecimentos em finanças. A teoria das opções, desenvolvida para avaliar ativos financeiros, tem sido empregada com freqüência para estabelecer o preço de ativos reais. Nos últimos anos, tamanha é a variedade de trabalhos nesta área que é notória uma forte tendência para o uso da teoria das opções em substituição à abordagem clássica. A teoria das opções rompeu os limites acadêmicos e tem mostrado muita receptividade na indústria. Ela permite avaliar as inúmeras opções que ocorrem em função da mudança de cenários previstos, sendo, portanto, capaz de anexar à avaliação econômica o aspecto gerencial da tomada de decisão.

Este artigo usa principalmente os conceitos de finanças em tempo contínuo. As variáveis consideradas como incertas são o preço do óleo (S) e a reserva da jazida (R), supondo que tais variáveis tenham processos de difusão conhecidos.

Muitos aspectos do estudo de Mörck, Schwartz e Stangeland (1989), sobre a avaliação de um recurso renovável sob condições de incerteza dos preços e do estoque do produto, são enfocados neste artigo. O trabalho dos três pesquisadores foi o maior motivador para o desenvolvimento deste estudo. Situações aplicáveis a um recurso renovável foram adaptadas para um recurso petrolífero. Enquanto um recurso natural apresenta um estoque variável em função do seu crescimento natural, a variação da reserva de petróleo é função do nível de conhecimento que se possui da jazida.

O artigo ora apresentado difere conceitualmente daquele dos autores acima em dois pontos fundamentais. O *primeiro* é relativo à formulação do modelo. Aqui, a formulação é feita a partir da maximização do valor esperado dos fluxos de caixa futuros. Fazemos uso da programação dinâmica para a solução de um problema de controle estocástico ótimo. O *segundo* refere-se ao fato de que é possível obter o modelo apresentado por aqueles autores sem fazer qualquer hipótese quanto ao tipo da função utilidade do proprietário do projeto.

É freqüente a consideração $dR = -q\, dt$. Neste trabalho, q é a taxa de extração instantânea, e t o tempo corrente. Essa equação afirma que as alterações da variável reserva (dR) são decorrentes apenas do montante que é extraído da jazida.

Quando o recurso mineral é o petróleo, existem outras considerações adicionais. A reserva de petróleo de uma jazida é função de inúmeros parâmetros que, em geral, não são conhecidos com certeza absoluta. O montante atual da reserva de um campo é o melhor estimador dessa variável, pois foi obtido com as melhores e as mais recentes informações. O convívio com inúmeras incertezas técnicas constitui uma rotina da indústria do petróleo. À medida que novos dados são revelados, a reserva de um campo sofre alterações. Esses dados surgem em conseqüência da evolução gradual do conhecimento. A perfuração de novos poços em uma jazida é o fator que mais agrega informações sobre essa reserva. Desta maneira, ela está sujeita a modificações. Isto é, suas variações não decorrem tão-somente da produção de petróleo. Elas são resultantes de inúmeros eventos, que conferem sua natureza estocástica, sendo possível estabelecer processos estocásticos que modelam a evolução dessa variável ao longo do tempo.

O propósito deste artigo é determinar o valor monetário de um projeto sob concessão. Assim, supomos que os investimentos para o desenvolvimento do campo foram realizados. O ativo projeto é avaliado supondo as incertezas do preço e da reserva, admitindo-se que possuam processos estocásticos definidos. Essas duas variáveis de estado são as mais relevantes nos estudos convencionais de viabilidade econômica utilizados pela indústria.

O arrendatário (ou proprietário) atua maximizando o valor do ativo projeto. A variável de controle é a taxa de extração de petróleo, q (ou seja, a vazão de produção da jazida). Ele possui pleno poder para ajustar a variável de controle em seu ponto ótimo. O valor do ativo é definido como a soma dos fluxos de caixa futuros. A função fluxo de caixa depende de variáveis estocásticas que possuem processos de difusão conhecidos. Supomos um ambiente de aversão ao risco, onde é válida a relação de equilíbrio postulada pelo CAPM intertemporal. Supomos, ainda, a existência de um mercado de capitais, admitindo que a carteira de mercado segue um processo geométrico browniano. Essas suposições permitem a derivação sem a necessidade de fazer quaisquer hipóteses acerca da função utilidade do proprietário. O modelo resultante é traduzido por uma EDP (equação diferencial parcial) de segunda ordem, não-linear e não-homogênea. Implementamos sua solução numérica pelo método das diferenças finitas.

A seção 2 deste artigo apresenta uma breve revisão bibliográfica do tema. As duas seções subseqüentes apresentam a descrição e formulação matemática do problema. Posteriormente, é apresentada a derivação do modelo. Até esse ponto procuramos apresentar o estudo sob uma forma mais genérica. Na seção que trata das considerações adicionais, são apresentadas algumas simplificações que adequam o trabalho ao caso da indústria do petróleo. Na seção seguinte, a EDP do modelo é resolvida numericamente e são apresentados os resultados obtidos. A última seção conclui o trabalho, ressaltando os aspectos mais relevantes advindos da pesquisa.

2. Trabalhos precedentes sobre o tema

Esta seção descreve alguns trabalhos que fundamentaram esta pesquisa, relativos à avaliação econômica de ativos reais através da teoria das opções. São mencionados predominantemente os trabalhos que tratam da avaliação econômica de recursos minerais exauríveis. Para um aprofundamento sobre a avaliação econômica de ativos reais, sugerimos três obras recentemente publicadas que, pela repercussão nos meios acadêmicos, já são consideradas como referências clássicas. A primeira delas é o livro de Dixit e Pindyck (1994). A segunda é o livro de Trigeorgis (1995), que reúne diferentes modelos para avaliação de ativos reais. A terceira, Trigeorgis (1996), é a mais recente e apresenta um enfoque mais didático.

Tourinho (1979) apresentou o primeiro trabalho que fez uso da teoria das opções para avaliar um ativo real. Trata-se de uma tese de doutorado apresentada na Universidade de Berkeley, que constituiu um trabalho pioneiro dentro desse tema. Estudou a avaliação de um recurso mineral e associa este recurso a um ativo que pode ser negociado em mercados. A reserva no subsolo é tratada como uma opção sobre o primeiro ativo. Em princípio, o estudo adota um cenário de certeza para os preços dos produtos e, então, avalia a reserva. Posteriormente, considera que os preços seguem um processo geométrico browniano e determina o valor da reserva sob esta condição de incerteza. Mostra que o valor da opção é a diferença obtida entre os resultados sob condições de incerteza e certeza. A opção, em geral, é positiva. Assim, o valor da reserva, no instante ótimo de investir, será maior sob condição de incerteza que aquele sob condição de certeza. O estudo conclui também que o aumento da incerteza implica maior valor para a reserva.

Brennan e Schwartz (1985) estudam os investimentos em recursos minerais e fazem uma aplicação para avaliar uma mina de cobre. A derivação do modelo é feita considerando a técnica de ativos contingenciais (ou avaliação por arbitragem). Esses autores supõem que o valor da mina é função dos preços do produto, do estoque (ou reserva) e do tempo. Para eles, os preços seguem um processo geométrico Browniano e o comportamento da reserva é não-estocástico. O modelo é incrementado de tal forma que permite o gerenciamento do projeto (mina de cobre) em função das oscilações dos preços. Desta forma, estabelece os pontos ótimos de abertura ou fechamento da mina. O trabalho faz uso da técnica de controle estocástico para ajustar permanentemente a taxa de extração em seu ponto ótimo. O modelo obtido é uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem em relação a uma das variáveis independentes (preço). O problema é resolvido numericamente. *A solução analítica é feita para o caso particular de uma mina com reserva infinita.* Após determinar o valor do projeto, o estudo analisa a decisão de investir, calculando o valor desta opção e também o ponto ideal do investimento em função dos preços dos produtos.

Oliveira (1990) utiliza o modelo proposto por Brennan e Schwartz (1985), adaptando-o para um recurso petrolífero. Considera que o valor da jazida é proporcional a sua reserva e que a vazão de produção é estabelecida tecnicamente. Essas hipóteses permitem a resolução analítica, que outrora fora realizada numericamente. O autor estabelece, então, as políticas ótimas de gerenciamento (abertura, fechamento e abandono) e o instante ótimo de aproveitamento da jazida. Conclui que a análise através da metodologia clássica revela valores subótimos, se comparada com a abordagem pela teoria das opções.

MacDonald e Seigel (1985) estudam a avaliação de uma firma e a decisão de investimento quando há a possibilidade de corte da produção tão logo as receitas operacionais sejam inferiores aos custos. A incerteza é considerada a partir de processos estocásticos para os preços dos produtos gerados. O ambiente é considerado primeiramente neutro ao risco. Posteriormente, inclui a situação de aversão ao risco. O estudo utiliza a relação de equilíbrio descrita pelo CAPM intertemporal. A derivação do modelo é obtida definindo-se o valor da firma como a soma dos valores esperados dos fluxos de caixa futuros. Todas as soluções são obtidas analiticamente. A conclusão mais importante é que, sob a consideração de aversão ao risco, o aumento na volatilidade dos preços pode diminuir o valor da firma se os preços dos produtos estiverem positivamente correlacionados com o mercado. Entretanto, pode também aumentar o valor se os preços tiverem correlação negativa com o mercado ou simplesmente não tiverem qualquer correlação.

MacDonald e Seigel (1986) avaliam a opção de aguardar para investir em projetos de investimentos irreversíveis. Consideram que tanto o valor do projeto quanto o investimento seguem processos de difusão do tipo geométrico browniano. O modelo é derivado a partir da maximização do valor esperado da opção. Consideram sempre o caso em que a opção de investir é perpétua, ou seja, não há um prazo finito para que a decisão seja tomada. Neste caso, é possível resolver o problema analiticamente. Analisam o caso da taxa de desconto adequada, supondo que o investidor é avesso ao risco e possuidor de uma carteira diversificada. Assim, necessita apenas ser recompensado pelo risco sistemático do projeto. Os autores apresentam resultados evidenciando que, no instante ótimo, o valor do projeto supera em duas vezes o valor da opção.

Majd e Pindyck (1987) utilizam a teoria das opções para analisar investimentos em projetos considerando um tempo finito de construção dos mesmos. Interpretam os investimentos como seqüenciais. Cada parcela investida representa o direito adquirido para investir em uma nova etapa. O projeto pode ser retardado, na expectativa de que apareçam novas informações.

Consideram que os investimentos podem ser feitos a uma taxa máxima de aplicação, e que o projeto somente se torna produtivo (gera receitas) após completado. O problema é visto como uma opção composta, onde cada parcela fornece o direito de investimento em uma próxima etapa. O ativo primário é o valor do projeto completo. Os autores admitem que essa variável possui um processo de difusão geométrico browniano durante todo o período de construção do projeto. Assumem que o valor do projeto completo pode ser replicado pelos ativos existentes no mercado. Assim, com base na técnica das opções (análise contingencial ou avaliação por arbitragem), determinam o valor do programa de investimentos. Consideram o investimento como parâmetro exógeno e completamente irreversível. O valor do programa de investimentos é função de duas variáveis de estado, sendo a primeira o montante que ainda será investido e a outra o valor do projeto completo. O valor da opção de investir é a solução de uma EDP de segunda ordem. A resolução é implementada numericamente.

Paddock, Seigel e Smith (1988) estudam a avaliação de uma propriedade petrolífera submetida a um contrato de arrendamento (uma situação próxima ao caso de um contrato de risco). Os autores consideram no modelo todas as etapas envolvidas no processo de aproveitamento de uma jazida. Admitem uma fase exploratória, onde o investimento é feito para o conhecimento da jazida. Posteriormente, consideram uma fase de desenvolvimento, quando, então, a jazida se torna apta a produzir. Desta forma, o investimento em exploração cria uma opção, para o detentor do *lease*, de receber um ativo denominado reserva não-desenvolvida. Por sua vez, quando de posse de reservas não-desenvolvidas, o proprietário tem a opção de desenvolvê-las mediante investimentos, e receber reservas desenvolvidas. Esta é uma situação típica de uma opção de opção, e é denominada opção composta. A abordagem é feita com base na existência de um mercado onde são negociadas reservas desenvolvidas de petróleo. Os autores assumem que os valores monetários das reservas negociadas seguem um processo geométrico browniano. A reserva não-desenvolvida pode ser avaliada mediante a suposição de tal processo de difusão. O seu valor é a solução de uma EDP de segunda ordem, que é implementada numericamente. Após estabelecerem o valor da reserva não-desenvolvida, os autores determinam o valor da opção de fazer os investimentos no desenvolvimento da produção e possuir reservas desenvolvidas. Nesta fase, é feita uma hipótese simplificadora quanto ao momento ótimo de se iniciar os investimentos. Considera-se que o instante ótimo é aquele imediatamente após uma bem-sucedida campanha exploratória.

Apesar de abranger todas as etapas presentes na indústria do petróleo, esse trabalho adota uma hipótese fundamental que parece pouco realista. Admite a existência de um mercado onde são negociadas reservas desenvolvidas. Os parâmetros de *drift* e volatilidade, que são usados no modelo proposto, deveriam ser tomados desse mercado a partir de uma reserva de característica similar àquela cujo preço se deseja estabelecer. No entanto, os autores fazem uso de uma conhecida regra prática para chegar à volatilidade de que necessitam. Consideram que os preços das reservas desenvolvidas situam-se em torno de um terço dos preços do óleo no mercado *spot*. Assumem que a variância dos preços no mercado *spot* será um boa *proxy* para a variância dos preços das reservas desenvolvidas.

Para a maioria dos casos, a consideração de que o valor de um projeto evolui segundo um processo de difusão significa apenas uma abstração (Pindyck, 1991). Embora seja válida para o caso de propriedades petrolíferas, outra situação parece mais factível. Trata-se do caso em que a variável econômica básica é o ativo primário. O projeto é, assim, um ativo contingencial ou derivativo. A justificativa de tal argumento está no fato de que os mercados de negociação da *commodity* óleo são muito mais amplos e difundidos que aqueles onde são negociadas propriedades petrolíferas.

Bjerksund (1991) analisa os investimentos em projetos petrolíferos na Noruega. O objetivo do estudo é investigar as alternativas de intervenção governamental, de maneira a incentivar os proprietários (detentores dos direitos de produção) de reservas a investirem em projetos de produção. A Noruega possui uma reserva expressiva de petróleo. Os investimentos nesse segmento da economia significam a possibilidade de reduzir os elevados índices de desemprego causados pela depressão que afetou aquele país em 1989. A fonte de incerteza do modelo é oriunda dos preços do óleo, que evoluem segundo um processo geométrico browniano. A derivação é realizada pela técnica de avaliação por arbitragem. É analisado o caso em que o proprietário pode retardar o investimento indefinidamente. Verifica-se a situação em que o governo pode recomprar a reserva pelo preço de mercado se a mesma não for desenvolvida até uma data futura. Por fim, é examinada a situação em que o governo readquire a reserva e providencia seu imediato desenvolvimento pela empresa governamental.

Mörck, Schwartz e Stangeland (1989) estudam a avaliação de um recurso florestal sob condições de incerteza dos preços e do estoque do produto. Os autores supõem um ambiente de aversão ao risco e a validade do CAPM intertemporal. Consideram que o proprietário do recurso florestal possui função de utilidade logarítmica. A EDP resultante é de segunda ordem e não-linear. A aplicação a um caso prático é feita mediante simplificações do modelo genérico obtido. A simplificação mais relevante é aquela que muda o ambiente de aversão ao risco para neutralidade ao risco. A solução numérica, implementada após as simplificações, é obtida usando-se o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.

As idéias que são apresentadas neste artigo foram norteadas fundamentalmente pelo trabalho acima. À semelhança de um recurso natural, que evolui devido ao seu crescimento natural, um campo de petróleo apresenta reservas que variam, ao longo do tempo, em função do nível de conhecimento que se tem da jazida. A partir deste fato, pode-se adaptar o modelo para um recurso petrolífero. Não obstante tal fato, ressaltamos na seção anterior as diferenças fundamentais entre os dois trabalhos.

3. Descrição do problema

Considere que o proprietário (arrendatário) da jazida tem um prazo limite para exercer os direitos de investir e explorá-la comercialmente. Este trabalho procura conhecer o valor monetário do projeto ou da jazida. Admita que os investimentos para o desenvolvimento do campo de petróleo foram realizados. Tanto o arrendatário quanto o governo (ou a empresa governamental) têm interesse em determinar o valor do ativo em questão.

O modelo é formulado a partir do fato de que o proprietário (arrendatário) atua maximizando o valor do seu ativo. Controla este valor através da variável q, que é a taxa de extração de petróleo. Procura, a cada instante, ajustá-la em seu ponto ótimo, de tal sorte que maximiza sua riqueza. Assim, o valor V do ativo é a maximização do valor esperado da soma dos fluxos de caixa líquidos trazidos ao instante presente. Esta maximização está sujeita ao processo de difusão das duas variáveis de estado: preços e reservas.

Vamos apresentar, nesta seção e nas duas subseqüentes, o estudo em caráter mais genérico. Na seção que trata das considerações adicionais acerca do modelo, introduziremos algumas simplificações e trataremos mais especificamente da aplicação do mesmo à indústria do petróleo.

O processo de difusão dos preços do óleo é admitido como sendo um processo geométrico browniano. Tourinho (1979) foi o primeiro pesquisador a adotar tal consideração. Ele justifica sua abordagem afirmando que os preços do óleo variam em face da descoberta de novas reservas, do desenvolvimento de reservas conhecidas, das mudanças nas tecnologias de produção e das alterações nas preferências dos agentes atuantes no mercado. Tais fatos são independentes entre si e de certa forma aleatórios. O resultado da ação conjunta desses fatores poderia gerar o processo estocástico postulado. Dixit e Pindyck (1994:77-8) afirmam que testes estatísticos, considerando uma longa série histórica (120 anos) dos preços do óleo, mostram que o processo de reversão à média é aceito. Contudo, se o teste é realizado sobre um período que abrange 30 a 40 anos, o processo geométrico browniano é aceito em detrimento daquele de reversão à média. Para um horizonte de tempo compatível com a vida de uma jazida petrolífera (25 a 30 anos), é bastante razoável adotar o processo geométrico browniano como aquele que melhor define a evolução dos preços do óleo.

O processo de difusão da variável reserva é admitido como sendo geométrico browniano. Tal consideração baseia-se em vários trabalhos. Mencionamos três deles nos próximos parágrafos.

Pindyck (1980) estuda o mercado de recursos minerais exauríveis. Examina o efeito de duas fontes de incerteza no comportamento dos preços do produto nesse mercado: a incerteza da demanda e a incerteza da reserva. Tanto a demanda quanto a reserva são modeladas como processos estocásticos. Na modelagem da reserva como processo estocástico (passeio aleatório), o autor deixa bem evidente a razão pela qual o faz. Ele menciona: "As estimativas dos volumes sofrerão alterações ao longo do tempo devido aos resultados de investigações geológicas que estendem os limites conhecidos do reservatório. Tais variações são oriundas de novas informações que resultam da atividade exploratória ou mesmo do acompanhamento da produção da jazida" (Pindyck, 1980:1.207). A equação (3) dessa obra (p. 1.207) define a dinâmica da reserva como um processo estocástico.

Sundaresan (1984) investiga as condições de equilíbrio de preços nos mercados *spot* e futuro de um recurso mineral não-renovável. Verifica como o declínio de produção de um recurso mineral é capaz de influenciar sua taxa de extração e o equilíbrio dos preços dos ativos negociados sobre o recurso. O autor utiliza para a variável reserva uma modelagem onde considera duas fontes de incertezas. A primeira está ligada a um processo de Gauss-Wiener, que independe das atitudes do produtor. A segunda fonte de incerteza está relacionada ao esforço exploratório do produtor e é modelada segundo um processo de Poisson.[2]

Aiube (1995) realiza testes de aderência considerando dados históricos de quatro campos de petróleo da bacia de Campos. Para os casos analisados aceita-se a hipótese de uma distribuição lognormal para a reserva da jazida. De fato, a variável reserva possui valores não-negativos. O volume atual da reserva é conhecido, e, no futuro, esse volume é incerto. Ele depende de vários eventos, que definirão seu estado no futuro. É, pois, um processo markoviano.

[2] Os trabalhos de Pindyck (1980) e Sundaresan (1984) adotam processos estocásticos de difusão para a variável reserva, a exemplo do que é apresentado pela equação (2), mais adiante. Em Sundaresan (1984) são feitas considerações sobre o processo de Poisson associado à dinâmica da reserva. Nessa mesma referência (p. 497), veja a equação (1) que define o processo estocástico para a variável reserva. Anexado ao processo de Gauss-Wiener está o de Poisson, que considera a possibilidade de saltos bruscos na variável reserva, modelando situações em que ocorrem descobertas significativas de volumes de petróleo que são acrescentados aos volumes já conhecidos.

Além das variáveis de estado, a maximização da função lucro líquido será também sujeita à condição terminal, ou seja, o proprietário devolve o ativo ao governo (ou à empresa governamental) no fim do prazo da concessão.

4. Formulação do problema

O problema proposto é estabelecer o valor monetário do projeto de uma reserva desenvolvida, cujo proprietário tem os direitos de lavra por um período de tempo finito.

Seja, então, T a data final desse período. O instante presente será denotado por t. Seja t' o tempo corrente, tal que $t \leq t' \leq T$. Por τ será designado o tempo remanescente, ou seja, o período que abrange o intervalo de tempo de t' até T.

Seja S a variável de estado que representa o preço do óleo no mercado *spot*. Admitiremos que sua dinâmica seja:

$$\frac{dS}{S} = \mu_S(S,t')dt + \sigma_S(S,t')dZ_S \tag{1}$$

onde μ_s (S, t') e σ_s (S, t') são, respectivamente, o *drift* e a volatilidade instantâneos do processo, e dZ_s é o incremento do processo padrão de Wiener.

Considerando que a dinâmica da reserva seja

$$dR = \left[\mu_R(R,t') - q(S,R,t')\right]dt' + \sigma_R(R,t')dZ_R \tag{2}$$

onde μ_R (R, t') e σ_R (R, t') são, respectivamente, o *drift* e a volatilidade instantâneos do processo, dZ_R é o incremento do processo padrão de Wiener e q (S, R, t') é a vazão instantânea de petróleo.

A maioria dos trabalhos na área de finanças que trata da avaliação de recursos esgotáveis considera que o estoque desses recursos é uma variável determinística. Em geral, esses trabalhos admitem que toda variação do estoque (ou reserva) é decorrente apenas da sua produção. Assim, é muito comum a definição: $dR = -qdt$, onde dR é a variação da reserva ou do estoque do produto, e q sua taxa de extração.

Neste trabalho, a variável reserva possui outro enfoque, sendo considerada estocástica. Ou seja, suas variações não se devem tão-somente à produção de óleo. Ao procedermos desta maneira, introduzimos no problema de avaliação econômica de recursos esgotáveis uma característica peculiar da atividade petrolífera. A partir da descoberta de um campo de petróleo, inicia-se o acúmulo de informações sobre a jazida. Periodicamente os volumes de óleo são recalculados à luz de novos dados. Estas informações, que continuamente são processadas, procedem de diversas fontes. A maior parte é oriunda de novas perfurações. Da mesma forma, o acompanhamento da produção e os estudos e interpretações geológicas implicam freqüentemente alterações do volume conhecido de petróleo. A reserva de uma jazida torna-se tão mais confiável quanto melhor a qualidade dos dados que dão suporte ao seu cálculo.

O projeto cujo preço está sendo determinado é um ativo contingencial ou derivativo do ativo primário barril de óleo. O valor do projeto da reserva desenvolvida é função de duas variáveis estocásticas S e R, e do tempo corrente t':

$$V = V(S, R, t')$$

O fluxo de caixa instantâneo, após os impostos, advindo da produção de óleo é descrito pela função $\pi(S,R,q(S,R,t'),t')$, de acordo com a equação:

$$\pi(S,R,q(S,R,t'),t') = q(S,R,t')S - C(q,t') - H(S,R,q(S,R,t'),t') \tag{3}$$

onde $C(q,t')$ é a função custo operacional de produção, e $H(.)$ é o valor das taxas incidentes (imposto de renda e *royalty*).

O valor das taxas $H(.)$, resultante do *royalty* e do imposto de renda, pode ser escrito como:[3]

$$H(S,R,q(S,R,t'),t') = \delta_r q(S,R,t')S + \delta_c\left[(1-\delta_r)Sq(S,R,t') - C(q,t')\right] \tag{4}$$

onde δ_r e δ_c são as alíquotas do *royalty* e do imposto de renda, respectivamente. Substituindo a equação (4) em (3), podemos escrever:

$$\pi(S,R,q(S,R,t'),t') = (1-\delta_c)\left[(1-\delta_r)q(S,R,t')S - C(q,t')\right] \tag{5}$$

A função lucro será considerada convexa no nível dos preços S, tal que:

$$\hat{\pi}(S,R,q(S,R,t') = \max\{0, \pi(S,R,q(S,R,t'),t')\} \tag{6}$$

O proprietário do projeto da reserva desenvolvida será remunerado continuamente pelos fluxos de caixa descritos na equação (5). Portanto, ele considera seu ativo como tendo o valor esperado da soma dos fluxos de caixa líquidos descontados ao tempo presente, e atuará maximizando esse valor esperado. A função objetivo $\hat{\pi}(.)$ depende das variáveis de estado S e R, que são estocásticas, e da variável de controle (ou função de controle) $q(.)$. Ele está diante de um problema de controle estocástico ótimo e deverá ajustar a função de controle $q(.)$ em seu nível ideal, de modo a atingir o ótimo da função objetivo.

O problema do controle estocástico ótimo com que se depara o proprietário pode, então, ser formulado como:

$$V(S,R,t) = \max_{q(S,R,t')} E_t \int_t^T \hat{\pi}(S,R,q(S,R,t'),t')\exp(-\gamma(t'-t))dt \tag{7}$$

[3] A função fluxo de caixa líquido, $\pi(.)$, pode assumir outras definições. Foram considerados, apenas, o *royalty* e o imposto de renda como taxas incidentes. Outras considerações para $\pi(.)$ não implicam problemas adicionais ao estudo aqui desenvolvido.

sujeito às variáveis de estado:

$$\frac{dS}{S} = \mu_S(S,t')dt' + \sigma_S(S,t')\,dZ_S \tag{8}$$

$$dR = \left[\mu_R(R,t') - q(S,R,t')\right]dt' + \sigma_R(R,t')\,dZ_R \tag{9}$$

e ainda sujeito à condição terminal, para todo S e R:

$$V(S,R,T) = 0 \tag{10}$$

onde E_t é o operador expectância, dado que se conhecem as variáveis de estado no instante t. O parâmetro γ é a taxa de desconto. As variáveis de estado S e R são tais que $S \geq 0$ e $R \geq 0$. Os processos descritos por (8) e (9) possuem barreiras de absorção[4] em $S = 0$ e $R = 0$, respectivamente. A variável de controle, descrita pela função $q(S,R,t')$, é tal que $q(S,R,t') \in [0,q_m]$. A vazão q_m significa o limite técnico máximo que é possível produzir com as instalações do projeto.

Nesta seção, onde foi apresentada a formulação do problema, uma observação ainda se faz necessária. A equação (7) maximiza o valor esperado da soma dos fluxos de caixa trazidos ao instante presente ao longo de toda a duração do direitos do proprietário. O integrando refere-se somente aos valores positivos de $\pi(S,R,q(S,R,t'),t')$, conforme definidos na equação (6). Seja, então, $\bar{t}$, tal que $t \leq \bar{t} \leq T$ e $\pi(S,R,q(R,S,\bar{t}),\bar{t}) < 0$. Neste instante há prejuízo. O proprietário não abandona o projeto. Ele aguarda por melhores preços com a jazida fechada.[5] Assumiremos que o fechamento momentâneo da jazida e a reentrada não acarretam qualquer ônus adicional. Por essa razão não avaliaremos as opções de reabertura e fechamento. Por conseguinte, a jazida voltará a produzir em $t' > \bar{t}$, tão logo $\pi(S,R,q(S,R,t'),t')$ seja positivo.[6]

5. Derivação do modelo proposto

O problema do controle estocástico ótimo é resolvido usando a equação de Bellman. Para simplificar a notação, e sem qualquer perda de generalidade, o problema será tratado a partir da data inicial $t = 0$; conseqüentemente, será abandonado o indicador de "linha" para o tempo. Agora o instante t representa uma data tal que $0 \leq t \leq T$. Podemos, então, escrever:[7]

---

[4] Isto significa que, quando as variáveis de estado atingem esses valores, aí permanecem. Para mais detalhes sobre processos estocásticos ver, entre outros, Dixit & Pindyck (1994) e Shimko (1992).

[5] A definição da função lucro, tal qual a equação (6), não significa que ela seja descontínua, mas apenas que é convexa. Para mais detalhes sobre a possibilidade de encerramento da produção e a definição da função lucro, sugerimos o modelo analisado por MacDonald e Seigel (1985:332-4), onde destacamos a equação (1), a figura 1 e a equação (4').

[6] Veja Brennan & Schwartz (1985) e Oliveira (1990), que tratam do gerenciamento de projetos avaliando as opções de reabertura e fechamento dos mesmos.

[7] A derivação do modelo será desenvolvida no domínio da função $V(S,R,t)$: $S > 0$, $R > 0$ e $0 \leq t < T$. Isto significa que $V(.) \neq 0$, quaisquer S, R, t dentro do domínio acima.

$$\gamma V(S,R,t) = \max_{q(S,R,t)} \left[\pi(S,R,q(S,R,t),t) + \frac{1}{dt} E_t(dV(S,R,t)) \right] \tag{11}$$

onde $\frac{1}{dt}E_t(.)$ significa o operador diferencial de Itô.

A equação (11) é uma relação de equilíbrio.[8] O lado esquerdo é o retorno total do ativo V por unidade de tempo, em um ambiente de aversão ao risco. O lado direito é o fluxo de caixa instantâneo mais o ganho de capital por unidade de tempo, que este ativo proporciona ao seu proprietário.

Sendo $V = V(S,R,t)$ e usando o lema de Itô, o diferencial dV será:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial R}dR + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}(dR)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R}(dS)(dR) \tag{12}$$

Substituindo as equações (8) e (9) em (12) e escrevendo de forma abreviada, temos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}(\mu_S S dt + \sigma_S S dZ_S) + \frac{\partial V}{\partial R}\left[(\mu_R - q)dt + \sigma_R dZ_R\right] + \frac{\partial V}{\partial t}dt +$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma_S^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}\sigma_R^2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R}S\sigma_R\sigma_S\rho_{SR}dt$$

onde ρ_{SR} é o coeficiente de correlação instantâneo entre os incrementos dos processos padrões de Wiener, dZ_S e dZ_R. Dividindo ambos os membros por V:

$$\frac{dV}{V} = \left[\mu_S S\frac{\partial V}{\partial S} + (\mu_R - q)\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\sigma_R^2\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \rho_{SR}\sigma_R\sigma_S S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R}\right]V^{-1}dt + \sigma_S S\frac{\partial V}{\partial S}V^{-1}dZ_S + \sigma_R\frac{\partial V}{\partial R}V^{-1}dZ_R$$

ou, então, pode-se escrever:

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_{VS}^{\bullet} dZ_S + \sigma_{VR}^{\bullet} dZ_R \tag{13}$$

onde:

$$\sigma_{VS}^{\bullet} = \sigma_S(S,t)S\frac{\partial V}{\partial S}V^{-1} \tag{14}$$

$$\sigma_{VR}^{\bullet} = \sigma_R(R,t)\frac{\partial V}{\partial R}V^{-1} \tag{15}$$

[8] Veja em Dixit & Pindyck (1994:122) uma consideração idêntica, apresentada através da equação (25).

A equação (13) define o processo de difusão para o valor do projeto. Então, o operador diferencial de Itô aplicado a dV será:

$$\frac{1}{dt}E_t(dV) = \mu_S S\frac{\partial V}{\partial S} + (\mu_R - q)\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} +$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma_R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \rho_{SR}\sigma_R\sigma_S S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R} \tag{16}$$

Substituindo as equações (5) e (16) em (11), temos:

$$\gamma V(.) = \max_{q(.)}\left\{(1-\delta_c)[(1-\delta_r)q(.)S - C(.)] + \mu_S S\frac{\partial V}{\partial S} + (\mu_R - q)\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + \right.$$

$$\left.\tfrac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \tfrac{1}{2}\sigma_R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \rho_{SR}\sigma_R\sigma_S S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R}\right\} \tag{17}$$

Supondo uma economia onde seja válido o CAPM intertemporal, derivado por Merton (1973), podemos escrever:

$$\text{retorno esperado do projeto} = r + \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_M^2}\left[\frac{1}{dt}E_t\left(\frac{dM}{M}\right) - r\right] \tag{18}$$

onde:

M indica a carteira de mercado;

σ_{VM} é a covariância do ativo projeto com o mercado, por unidade de tempo;

σ_M^2 é a variância do mercado;

r é a taxa livre de risco, admitida como constante;

$\frac{1}{dt}E_t\left(\frac{dM}{M}\right)$ é o retorno esperado do mercado por unidade de tempo.

Admitindo que a carteira de mercado[9] segue um movimento geométrico browniano, podemos escrever:

---

[9] Admitindo-se a existência de uma carteira de mercado com um processo estocástico definido, contorna-se a dificuldade relativa à necessidade de se conhecer a função utilidade do proprietário. Mörck, Schwartz e Stangeland (1989) estudam um recurso renovável e admitem que o proprietário possui função utilidade logarítmica.

$$\frac{dM}{M} = \mu_M dt + \sigma_M dZ_M \tag{19}$$

onde μ_M e σ_M são o *drift* e a volatilidade do mercado, respectivamente, admitidos como estacionários. Assim, a equação (18) pode ser reescrita como:

$$\gamma = r + \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_M^2}(\mu_M - r) \tag{20}$$

A covariância por unidade de tempo dos processos descritos pelas equações (13) e (19) pode ser calculada como:

$$\sigma_{VM} = \frac{COV\left(\frac{dV}{V}, \frac{dM}{M}\right)}{dt} = \sigma_{\dot{V}S}\sigma_M \rho_{SM} + \sigma_{\dot{V}R}\sigma_M \rho_{RM} \tag{21}$$

Introduzindo na equação acima as equações (14) e (15), temos:

$$\sigma_{VM} = \rho_{SM}\sigma_M \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} V^{-1} + \rho_{RM}\sigma_M \sigma_R \frac{\partial V}{\partial R} V^{-1} \tag{22}$$

E também pode ser escrito que:

$$\sigma_{VM} = \phi_S S \frac{\partial V}{\partial S} V^{-1} + \phi_R \frac{\partial V}{\partial R} V^{-1} \tag{23}$$

sendo que:

$$\phi_S = \rho_{SM}\sigma_M \sigma_S \tag{24}$$

$$\phi_R = \rho_{RM}\sigma_M \sigma_R \tag{25}$$

A medida de risco de um projeto β_p, analogamente à medida de risco de um título, pode ser definida como:

$$\beta_p = \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_M^2} = \left[\frac{\phi_S S \frac{\partial V}{\partial S} + \phi_R \frac{\partial V}{\partial R}}{\sigma_M^2}\right] V^{-1}$$

Usando na equação anterior as definições em (24) e (25), temos:

$$\beta_p = \left[\frac{\rho_{SM}\sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} + \rho_{RM}\sigma_R \frac{\partial V}{\partial R}}{\sigma_M} \right] \frac{1}{V} \tag{26}$$

Introduzindo σ_{VM}, fornecido pela equação (23), na equação (20), temos:

$$\gamma = r + \theta_M \left(\phi_S S \frac{\partial V}{\partial S} V^{-1} + \phi_R \frac{\partial V}{\partial R} V^{-1} \right) \text{ onde } \theta_M = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M^2}$$

Aqui, θ_M pode ser definido como o preço de risco de mercado por unidade de risco. Multiplicando esta equação por V e levando-a na equação (17), teremos:

$$0 = \max_{q(S,R,t)} \left\{ (1-\delta_c)\left[(1-\delta_r)q(S,R,t)S - C(q,t)\right] - rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \right.$$

$$(\mu_S(S,t) - \theta_M \phi_S) S \frac{\partial V}{\partial S} + \left[\mu_R(R,t) - q(S,R,t) - \theta_M \phi_R\right] \frac{\partial V}{\partial R} +$$

$$\left. \frac{1}{2}\sigma_S^2(S,t)S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_R^2(R,t)\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \rho_{SR}\sigma_R(R,t)\sigma_S(S,t)S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R} \right\} \tag{27}$$

O valor do projeto deverá satisfazer a equação (27) e as seguintes condições terminal e de contorno:

- No prazo final de seus direitos, o proprietário avaliará seu projeto com valor nulo (pois terá que devolver a área sob concessão ao governo). Trata-se da condição terminal descrita na formulação do problema:

$$V(S, R, T) = 0 \qquad \forall S \in [0, \infty] \qquad \forall R \in [0, R_{\max}] \tag{28}$$

- A condição de contorno seguinte retrata o que ocorre na barreira de absorção dos preços, isto é, quando, $S = 0$. Em um processo geométrico browniano, quando a variável atinge a barreira de absorção[10] ela aí permanece (por esta razão, o nome de *barreira de absorção*). Se o preço do óleo é 0, o projeto nada vale, logo:

$$V(0,R,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \qquad \forall R \in [0, R_{\max}] \tag{29}$$

[10] Veja em Shimko (1992:10) algumas propriedades do processo geométrico browniano.

• A condição de contorno seguinte mostra o que ocorre com o valor do projeto se o preço do óleo no mercado *spot* tender a valores muito elevados:

$$\lim_{S \to \infty} \frac{\partial V(S,R,t)}{\partial S} = k_0 R \qquad \forall t \in [0,T] \qquad \forall R \in [0, R_{max}] \tag{30}$$

onde $k_0 = (1 - \delta_c)(1 - \delta_r)$.

A equação (30) é obtida a partir da equação (5). Derivando a equação (5) em relação a S, obtemos $\partial\pi/\partial S = (1-\delta_c)(1-\delta_R)q$. Em situações onde o preço do óleo assume valores extremamente elevados, o proprietário é impelido a produzir a reserva da jazida instantaneamente. Neste caso, podemos substituir q por R. A taxa de variação do lucro, $\partial\pi/\partial S$, será a própria taxa de variação do valor do projeto, $\partial V/\partial S$. Assim, resulta a equação (30).

• Para a situação de esgotamento total da reserva (completa exaustão), o valor do projeto será igual a 0. Trata-se da barreira de absorção da variável reserva.

$$V(S,0,t) = 0 \qquad \forall S \in [0,\infty] \qquad \forall t \in [0, T] \tag{31}$$

•Admitindo que haja uma quantidade máxima de petróleo que a jazida pode conter fisicamente e denominando este volume R_{max}, o valor do projeto não se alterará devido às variações no volume de petróleo quando este volume tender a R_{max}.

$$\lim_{R \to R_{max}} \frac{\partial V(S,R,t)}{\partial R} = 0 \qquad \forall S \in [0,\infty] \qquad \forall t \in [0, T] \tag{32}$$

A condição de contorno expressa pela equação (32) mostra que, para valores extremamente elevados de volume de petróleo, a taxa de variação de V em relação a R é nula. O valor do projeto não se altera, pois as variações de R (quando R tende a R_{max}) são muito pequenas.[11]

O valor do ativo derivativo projeto petrolífero deverá satisfazer a equação (27), bem como as condições expressas nas equações (28)-(32). A equação (27) é válida em um ambiente de aversão ao risco e envolve um parâmetro que está relacionado à preferência do investidor. Este parâmetro é o *drift*, μ_S, ou seja, o retorno esperado do ativo barril de óleo.

[11] O valor de R_{max} é aquele oriundo do cálculo da reserva de petróleo com os parâmetros mais otimistas de porosidade da rocha, saturação de óleo e fator volume de formação. Não nos aprofundaremos nesses conceitos, pois são específicos da engenharia de petróleo e estão fora dos objetivos deste artigo.

6. Considerações adicionais acerca do modelo

A equação (27) e as condições terminal e de contorno, definidas em (28)-(32), fornecem o valor do projeto de uma reserva de petróleo desenvolvida. Nesta seção, mantemos a consideração de aversão ao risco e introduzimos outras condições.

A *primeira consideração* diz respeito à correlação entre os volumes de petróleo e os preços do barril no mercado *spot*. Assumimos que os preços no mercado *spot* não se alteram em face das mudanças oriundas da dinâmica da variável reserva. Mesmo tratando-se de um campo "gigante", esta hipótese é verdadeira, dada a grande dimensão do mercado onde a *commodity* petróleo é negociada. Assim, podemos dizer que $\rho_{SR} = 0$. Ou seja, os processos padrões de Wiener dessas duas variáveis não são correlacionados.

A *segunda consideração* refere-se à maximização do termo entre colchetes de (27). A condição de primeira ordem será:

$$-\frac{\partial V(.)}{\partial R}+\frac{\partial \pi(.)}{\partial q}=0 \tag{33}$$

Calculando a derivada parcial da função lucro em relação a q, temos:

$$\frac{\partial \pi(S,R,q,t)}{\partial q}=(1-\delta_c)(1-\delta_r)S-(1-\delta_c)\frac{\partial C(q,t)}{\partial q} \tag{34}$$

A função custo será definida como:[12]

$$C(q,t)=C_0+C_1q+\frac{1}{2}C_2q^2 \tag{35}$$

onde:

C_0 é o custo fixo, $C_0>0$;

C_1 é o custo variável linear, $C_1 \geq 0$;

C_2 é o custo variável quadrático, $C_2>0$.

Diferenciando a equação (35) em relação a q e substituindo-a na equação (34) e, posteriormente, em (33), teremos:

$$q^*(S,R,t)=\frac{(1-\delta_r)S-C_1}{C_2}-\frac{\partial V/\partial R}{(1-\delta_c)C_2}$$

[12] A função custo, definida por (35), significa que o custo marginal $\left(\frac{\partial C}{\partial q}=C_1+C_2q\right)$ é crescente.

A política ótima de produção da jazida pode ser definida como:

$$q^* (S,R,t) = 0$$

se $\pi(S,R,q,t) \leq 0$; e

$$q^*(S,R,t) = \frac{(1-\delta_r)S - C_1}{C_2} - \frac{\partial V / \partial R}{(1-\delta_c)C_2} \qquad (36)$$

se $\pi(S,R,q,t) > 0$

Assim, o proprietário fecha a jazida quando cessam os lucros. Aguarda, então, por melhores preços. Deve-se enfatizar que não estão sendo considerados os custos adicionais para o fechamento e reabertura do projeto. A verificação da condição de segunda ordem, que garante a existência do máximo, é imediata. O valor de $q^*(.)$ será introduzido na equação (27).

A *terceira consideração* admite que a dinâmica da reserva seja lognormal, e ainda que o processo seja estacionário,[13] podemos escrever:

$$\mu_R(R,t) = \mu_R R \quad \text{e} \quad \sigma_R(R,t) = \sigma_R R$$

Na *quarta consideração*, o tempo remanescente dos direitos do proprietário é escrito como $\tau = T - t$. Desta forma, a condição terminal ($t = T$) é transformada em condição inicial. Ou seja, quando $t = T$, ter-se-á $\tau = 0$. Ainda, pode-se escrever que $d\tau = - dt$.

A *quinta consideração* adota a hipótese de que não há correlação entre a dinâmica da reserva e a do mercado (as alterações no volume de petróleo não afetam o mercado). Trata-se de uma consideração análoga à primeira. Assim, $\rho_{RM} = 0$ e, conforme a equação (25), $\phi_R = 0$. Em conseqüência, a medida de risco do projeto, definida na equação (26), deverá modificar-se para:

$$\beta_p = \frac{\rho_{SM}\sigma_S S \, \partial V / \partial S}{\sigma_M V} \qquad (37)$$

Introduzindo essas considerações no modelo, ele será reescrito como:

$$\tfrac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \tfrac{1}{2}\sigma_R^2 R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + [\mu_S - \theta_M \phi_S] S \frac{\partial V}{\partial S} +$$

---

[13] Assumir que o processo da variável reserva é estacionário equivale a dizer que o *drift* e a volatilidade, determinados a partir de séries históricas, permanecem constantes ao longo do tempo.

$$\left[\mu_R R - \frac{(1-\delta_r)S - C_1}{C_2}\right]\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{\partial V}{\partial \tau} - rV + \frac{1}{2(1-\delta_c)}\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 + G(S) = 0 \tag{38}$$

onde:

$$G(S) = \frac{(1-\delta_c)}{2C_2}[(1-\delta_r)S - C_1]^2 - (1-\delta_c)C_0$$

sujeita às seguintes condições inicial e de contorno:

$$V(S,R,0) = 0 \qquad \forall S \in [0,\infty] \qquad \forall R \in [0,\mathrm{R}_{\max}] \tag{39}$$

$$V(0,R,\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in [0,T] \qquad \forall R \in [0,\mathrm{R}_{\max}] \tag{40}$$

$$\lim_{S \to S_{\max}} \frac{\partial V(S,R,\tau)}{\partial S} = k_0 R \qquad \forall \tau \in [0,T] \qquad \forall R \in [0,\mathrm{R}_{\max}] \tag{41}$$

$$V(S,0,\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in [0,T] \qquad \forall S \in [0,\infty] \tag{42}$$

$$\lim_{R \to R_{\max}} \frac{\partial V(S,R,\tau)}{\partial R} = 0 \qquad \forall \tau \in [0,T] \qquad \forall S \in [0,\infty] \tag{43}$$

Neste ponto fazemos uma ressalva: a EDP expressa em (38) é não-linear e a sua resolução será numérica. Isto requer que as variáveis independentes (S, R e τ) sejam discretizadas. Assim, torna-se relevante definir a função $V(.)$ em uma região limitada do seu domínio. Em outras palavras, estaremos buscando a solução para a função $V(.)$ nesta região. Por esta razão, escrevemos S tendendo a $S_{\max}$, e não mais S tendendo ao infinito. Estamos considerando que uma boa *proxy* para $S \to \infty$ é S tendendo a $S_{\max}$, onde $S_{\max}$ representa um valor significativamente alto do preço do barril em sua série histórica.

A EDP expressa por (38), acrescida das equações (39)-(43), traduz um problema de valor inicial e de contorno. A sua solução é o valor do projeto maximizado, que está associado à reserva desenvolvida, em uma economia avessa ao risco.

Esta EDP é de segunda ordem, possui coeficientes não-constantes, é não-homogênea e não-linear. A não-linearidade se deve à presença da derivada parcial de V em relação a R, que está elevada ao quadrado. A solução deste problema foi obtida numericamente. A próxima seção apresenta os principais resultados alcançados.

7. Resultados da solução numérica

O problema de valor inicial e de contorno, expresso pela EDP (38) e condições (39)-(43), foi resolvido numericamente. Desconhecemos tratamento analítico para tal problema. Foi utilizado o método das diferenças finitas.[14] A não-linearidade foi resolvida usando-se o método de Newton-Raphson. Esta seção apresenta os principais resultados obtidos. Adotamos os seguintes parâmetros para exemplificar a utilização do modelo:

a) volatilidade dos preços — 25% ao ano;
b) *drift* dos preços — 10% ao ano;
c) nível máximo dos preços — US$52,00/barril;
d) volatilidade da reserva — 19,5% ao ano;
e) *drift* da reserva — 0,5% ao ano;
f) nível máximo da reserva — 300 milhões de barris;
g) taxa livre de risco — 5,5% ao ano;
h) volatilidade do mercado — 27,6% ao ano;
i) *drift* do mercado — 6% ao ano;
j) correlação preço do óleo-mercado — -0,6;
k) alíquota do imposto de renda — 25%;
l) alíquota do *royalty* — 4%;
m) reserva do campo (atual) — 200 milhões de barris;
n) preço do óleo (atual) — US$17,33/barril;
o) custo fixo de produção — US$10 milhões;
p) custo variável linear — US$0,5/barril;
q) custo variável quadrático — US$0,005/barril^2;
r) número de períodos — 40;
s) duração de cada período — 3 meses.

Os valores considerados nesse exemplo foram tomados usando-se os critérios reportados abaixo.

Os parâmetros relativos ao preço do óleo foram tomados de séries históricas do mercado *spot*, abrangendo o período de 1986 a 1993. A volatilidade utilizada está na faixa citada por Dixit e Pindyck (1994:401).

Os valores do *drift* e da volatilidade da reserva foram usados dentro da faixa que se obteve a partir da análise feita por Aiube (1995).

O valor atual da reserva está dentro da ordem de grandeza de algumas acumulações de grande porte encontradas na bacia de Campos. O nível máximo da reserva é aquele obtido com os parâmetros mais otimistas, conforme foi mencionado.

Os parâmetros do mercado foram tomados a partir de séries históricas do Ibovespa no período de 1986 a 1993. A correlação do Ibovespa com os preços do óleo foi calculada a partir dessas séries históricas.

Os custos foram tomados com base nos custos anuais de várias jazidas produtoras da bacia de Campos, compreendendo o período de 1986 a 1991.

O *grid* definido para a solução do problema foi ajustado fazendo um refinamento até chegar à conclusão sobre o tamanho ideal. Assim, as variáveis preço do óleo e reserva foram discretizadas em 60 subintervalos.

---

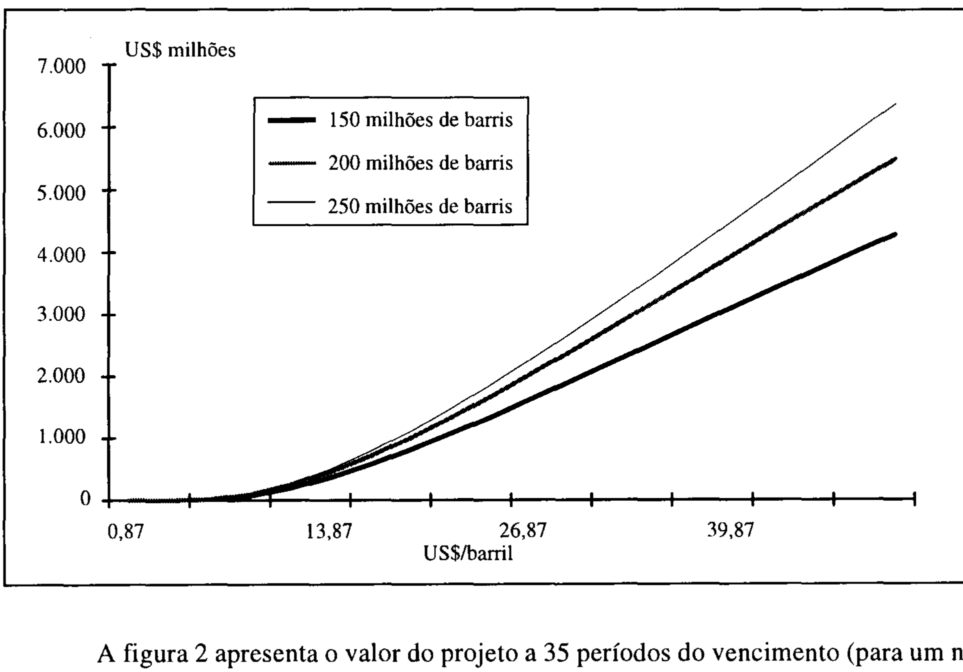
[14] Para mais detalhes sobre o método das diferenças finitas veja, entre outros, Ames (1969). Para a utilização do método das diferenças finitas aplicado a finanças, citamos Brennan & Schwartz (1977), Schwartz (1977), Hull (1989) e Hull & White (1990). Para a comparação de diferentes técnicas numéricas para a solução de problemas em finanças, citamos Geske & Shastri (1985).

A solução é obtida a partir da resolução de um sistema linear da forma $AX = B$, onde A é uma matriz esparsa e pentadiagonal de ordem 3600. A convergência para o método de Newton-Raphson foi obtida com duas a três iterações para cada período analisado. O tempo de processamento gasto para resolver o problema por inteiro, utilizando o computador de grande porte IBM9021-820/4VF, foi de 4 minutos e 35 segundos. A discretização das variáveis em subintervalos menores aumentou em demasia o tempo computacional, sem resultar em diferenças significativas na resposta obtida para a função $V(.)$. Reportamos, a seguir, os principais resultados obtidos.

O valor atual (ou presente a 40 períodos do vencimento) do projeto, para um nível de preço de US$17,33 / barril e um nível de reserva de 200 milhões de barris, é de US$1.023,75 milhões. Isto significa que o valor encontrado para a reserva desenvolvida foi de US$5,12/ barril de óleo. Aqui cumpre uma ressalva. O valor encontrado de US$5,12/barril condiz com os indicadores comumente reportados pela indústria de petróleo para uma reserva desenvolvida, já considerado o porte da jazida avaliada.

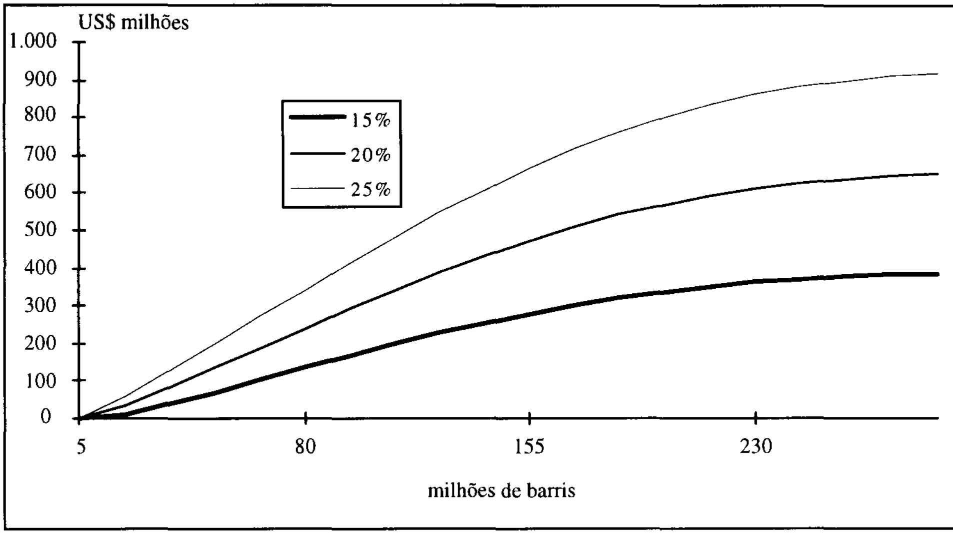
A figura 1 apresenta o valor do projeto a 35 períodos do vencimento *versus* o preço do óleo para três níveis diferentes de reserva (R = 150 milhões de barris; 200 milhões de barris e 250 milhões de barris). O valor do projeto (ativo derivativo), à semelhança de uma opção de compra financeira, é crescente e convexo relativamente aos preços do óleo (ativo primário).

Figura 1
Valor do projeto *versus* preço do óleo para diferentes níveis de reserva



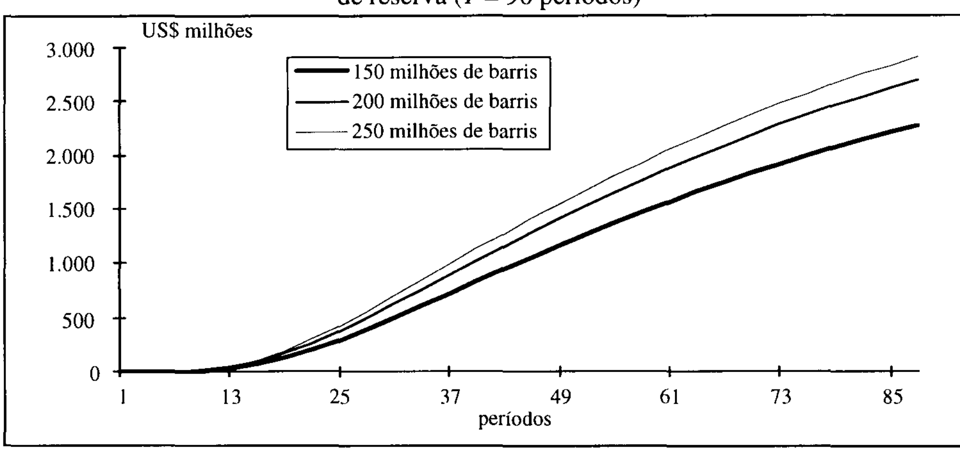
A figura 2 apresenta o valor do projeto a 35 períodos do vencimento (para um nível de preço de US$17,33/barril) *versus* a reserva para diferentes volatilidades dos preços (σ_S = 15%, 20% e 25%). O resultado mostra que, sob uma condição de incerteza crescente de preços, o valor V cresce: $\dfrac{\partial V(.)}{\partial \sigma} > 0$.

Figura 2
Valor do projeto *versus* reserva para diferentes volatilidades dos preços



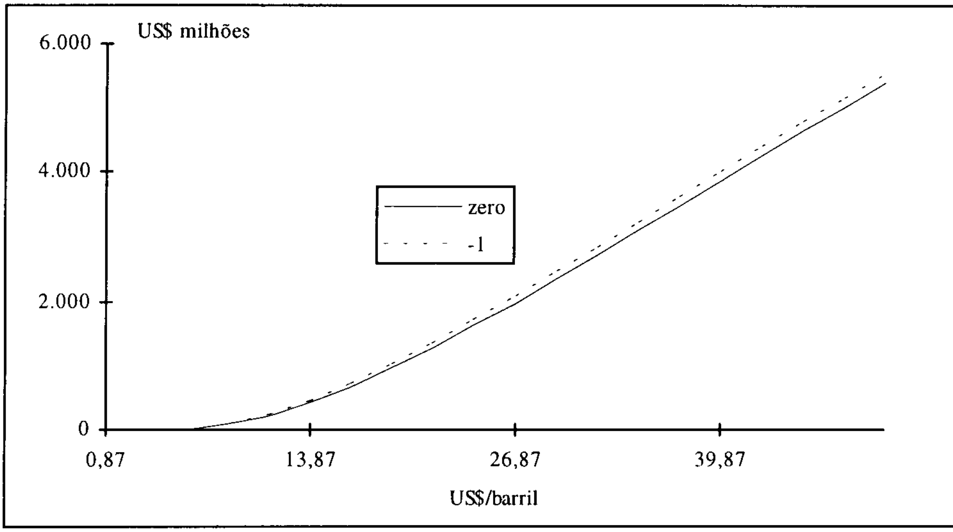
A figura 3 mostra o valor do projeto para um nível de preços de US$17,33 / barril *versus* o número de períodos remanescentes para o vencimento dos direitos do proprietário. São considerados três níveis distintos de reservas (R = 150 milhões de barris; 200 milhões de barris e 250 milhões de barris). Foi utilizado um prazo de 90 períodos, ou seja, 270 meses. Este prazo é maior que aquele reportado no caso-base.

Figura 3
Valor do projeto *versus* número de períodos para maturação para diferentes níveis de reserva (T = 90 períodos)



A figura 4 mostra o valor do projeto a 35 períodos do vencimento *versus* o preço do óleo para uma reserva de 200 milhões de barris. Examinaram-se os casos extremos de dois coeficientes de correlação entre o preço do óleo e a carteira de mercado. Fica evidente a pouca sensibilidade do valor do projeto em relação a este parâmetro. O valor do projeto aumenta à medida que diminui o coeficiente de correlação (aumenta a correlação negativa). Isto ocorre porque uma maior correlação negativa implica valores menores de γ. Por sua vez, menores taxas de desconto acarretam aumento de V.

Figura 4
Valor do projeto *versus* preço do óleo para casos extremos de coeficiente de correlação



8. Conclusões e considerações finais

Este trabalho absteve-se de analisar as diferentes formas de contratos de concessão na atividade petrolífera. Para tal, sugerimos Blitzer, Lessard e Paddock (1984), que abordam os riscos envolvidos em cada modalidade de contrato, diferenciando a economia de países importadores e exportadores de petróleo. Simulam o quanto cada parte, contratante e contratada, pode auferir, utilizando para tal a abordagem clássica.

Neste estudo foi considerado um processo de difusão geométrico browniano para a variável reserva. A avaliação econômica leva em consideração tal fato. Adotando processos estocásticos para a reserva de uma jazida, podemos contemplar os estudos de viabilidade econômica com as incertezas do estoque desta *commodity*. Quando o recurso mineral é o petróleo, as incertezas das reservas traduzem a incerteza técnica da atividade petrolífera. Simplificações que considerem o processo da reserva determinístico e os direitos de lavra por um tempo infinito implicam maiores facilidades para a derivação do modelo e para a solução numérica da EDP.

Na derivação deste modelo não utilizamos qualquer restrição acerca do tipo de utilidade do proprietário. Isto elimina a dificuldade imposta pela necessidade do conhecimento de tal informação. O modelo considera uma carteira de mercado que segue um processo de difusão geométrico. O modelo resultante ficará em função dos parâmetros de *drift* e volatilidade do mercado.

Se, em vez de maximizarmos a função valor em relação à variável de controle q, considerarmos q^* (q ótimo) como um valor único e dimensionado tecnicamente, pode-se obter uma grande simplificação. A EDP será linear, o procedimento numérico será simplificado e o tempo computacional, despendido pela solução numérica, será reduzido.

O valor do projeto, como mostra a figura 2, é crescente com a incerteza dos preços. Tal fato advém da definição da função lucro como convexa em relação à variável S. Este fato é uma conseqüência direta da desigualdade de Jensen.

Conforme mostra a equação (37), a medida de risco do projeto possui o mesmo sinal que o coeficiente de correlação entre os preços do óleo no mercado *spot* e o índice de mercado. Para países importadores de petróleo, onde tal produto é um componente relevante em sua matriz energética, este coeficiente de correlação deve ser negativo. A correlação negativa traduz uma situação econômica interna desfavorável ante a elevação dos preços do óleo no mercado internacional. Isto torna a medida de risco, β_p, menor que 0, significando que, em tal situação, esses países aceitam projetos de exploração-produção com prêmio de risco negativo.

Este artigo limitou-se a valorar o projeto petrolífero a partir das receitas advindas unicamente da produção de óleo. Uma extensão para este estudo poderia incorporar as receitas oriundas da produção de gás. Esta análise deve passar, antes, por uma investigação acerca do tipo de modelo a ser adotado para a variável preço do gás.

Referências bibliográficas

Aiube, Fernando Antônio L. *Avaliação econômica de projetos petrolíferos sob condições de incertezas de preços e reservas*. Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RJ, 1995. (Dissertação de Mestrado.)

Ames, William F. *Numerical methods for partial differential equations*. London, Thomas Nelson and Sons, 1969.

Bjerksund, Petter. The cost of a promise to develop an oil field within a fixed future date. In: Lund, D. & Øksendal, B. (eds.). *Stochastic models and option values*. New York, North Holland, 1991.

Black, Fischer & Scholes, Myron. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*:637-59, 1973.

Blitzer, Charles R.; Lessard, Donald R. & Paddock, James L. Paddock. Risk bearing and the choice of contract forms for oil exploration and development. *The Energy Journal, 5*(1), 1984.

Brennan, Michael J. The price of convenience and valuation of commodity contingent claims. In: Lund, D. & Oksendal, B. (eds.). *Stochastic models and option values*. New York, North-Holland, 1991.

——— & Schwartz, Eduardo S. The valuation of American put options. *The Journal of Finance, 32*:449-62, May 1977.

——— & Schwartz, Eduardo S. Evaluating natural resource investments. *Journal of Business, 58*:135-57, Jan. 1985.

Dixit, Avinash K. & Pindyck, Robert S. *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, 1994.

Geske, Robert & Shastri, Kuldeep. Valuation by approximation: a comparison of alternative option valuation techniques. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 20*:45-71, Mar. 1985.

Hull, John. *Options, futures and other derivative securities*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1989.

——— & White, Alan. Valuing derivative securities using the explicit difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25*:87-100, Mar. 1990.

MacDonald, Robert & Seigel, Daniel. Investment and valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review, 26*:331-49, June 1985.

——— & ———. The valuation of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics, 101*:707-28, Nov. 1986.

Majd, Saman & Pindyck, Robert S. Time to build, option value and investment decisions. *Journal of Financial Economics*, *18*:7-27, Mar. 1987.

Merton, Robert C. An intertemporal asset pricing model. *Econometrica*, *41*:867-87, Sept. 1973.

Mörck, Randall; Schwartz, Eduardo S. & Stangeland, David .The valuation of forestry resources under stochastic prices and inventories. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *24*:473-87, Dec. 1989.

Oliveira, Carlos Alberto P. *Avaliação e gerência de jazidas de petróleo: uma abordagem pela teoria das opções.* Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RJ, 1990. (Dissertação de Mestrado.)

Paddock, James L. Seigel, Daniel R. & Smith, James L. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. *Quarterly Journal of Economics*, *103*:479-508, Aug. 1988 .

Pindyck, Robert S. Uncertainty and exhaustible resource markets. *Journal of Political Economy*, *88*:1.203-25, 1980.

———. Irreversibility, uncertainty and investment. *Journal of Economic Literature*, *29*:1.110-52, Sept. 1991.

Schwartz, Eduardo S. The value of warrants: implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, *4*:79-93, 1977.

Shimko, David C. *Finance in continuous time: a primer.* Miami, Kolb, 1992.

Sundaresan, Suresh M. Equilibrium valuation of natural resources. *Journal of Business*, *57*:493-518, 1984.

Tourinho, Octavio A. *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach.* Berkeley, University of California, 1979. (PhD Thesis.)

Trigeorgis, Lenos (ed.) *Real options in capital investment: model, strategies, and applications.* 1995.

———. *Real options: managerial flexibility and strategy in resource allocation.* Cambridge, Mass., MIT Press, 1996.