Uma nota sobre os índices Divisia

Roberto Castelo Branco

1. Introdução; 2. A propriedade de invariância; 3. A independência à trajetória.

1. Introdução

A investigação do processo de crescimento econômico dos países, tanto no que diz respeito à construção de séries temporais para o produto real como à identificação das fontes geradoras do próprio crescimento, conduziu à ampla utilização dos índices Divisia. [1, 2]

Esses índices são definidos, sob a forma de taxas de variação, como a soma ponderada das taxas de crescimento das variáveis a serem indexadas, onde os pesos se constituem na participação de cada componente no valor total. Desse modo, chamando, por exemplo, de $\{q_1\ (S),\ q_2\ (S),\ \ldots\ q_n\ (S)\}$ o conjunto de observações que se deseja agregar sob a forma de índice e de $\{p_1\ (S),\ p_2\ (S),\ \ldots\ p_n\ (S)\}$ o vetor de preços associado, podemos expres-

[1] O desenvolvimento original dos índices Divisia é encontrado em Divisia (1925).

[2] Sobre o emprego desses índices em estudos sobre crescimento econômico, veja, por exemplo, Denison (1967), Jorgenson & Griliches (1967), Langoni (1974) e Haddad (1975).

sar matematicamente, em termos contínuos, a taxa de crescimento de um índice Divisia de quantidade, como:

$$\frac{\dot{Q}(S)}{Q(S)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{P_i(S)\, q_i(S)}{\sum_{i=1}^{n} P_i(S)\, q_i(S)} \; \frac{\dot{q}_i(S)}{q_i(S)} \right] \qquad (1.1)$$

Os pontos colocados acima das variáveis denotam suas derivadas com relação ao tempo.

A integração de (1.1) produz:

$$Q(\Gamma) = exp \left\{ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(S)\, q_i(S)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(S)\, q_i(S)} \; \frac{\dot{q}_i(S)}{q_i(S)} \right] ds \right\} \qquad (1.2)$$

onde Γ é a curva descrita pela trajetória dos q_i durante o intervalo de tempo [0, t].

O propósito desta nota é o de discutir as propriedades de invariância e independência à trajetória e expor seu significado econômico, procurando dessa forma complementar o trabalho sobre números-índices elaborado por Carvalho.[3] A propriedade mais conhecida e uma das mais importantes, a da dualidade entre os índices de preços e quantidades, não será discutida aqui dado que já foi abordada no artigo acima mencionado. Essa característica dos índices Divisia permite, inclusive, que se defina um índice de preços a partir de (1.1), bastando que se invertam, na mesma, os papéis dos preços e das quantidades; assim, as considerações feitas para os índices de quantidade são igualmente válidas para os de preços.

2. A propriedade de invariância

Um índice é invariante se para qualquer trajetória das observações da variável indexada que se situe inteiramente dentro da superfície de transformação correspondente, por exemplo, uma isoquanta, mantiver seu valor inalterado.

A relevância dessa propriedade pode ser entendida de forma mais clara através de um exemplo. Imaginemos, então, uma economia produ-

[3] Veja Carvalho (1975).

zindo, num período t dois produtos A e B com uma dotação fixa de fatores de produção de acordo com a situação representada na figura 1.

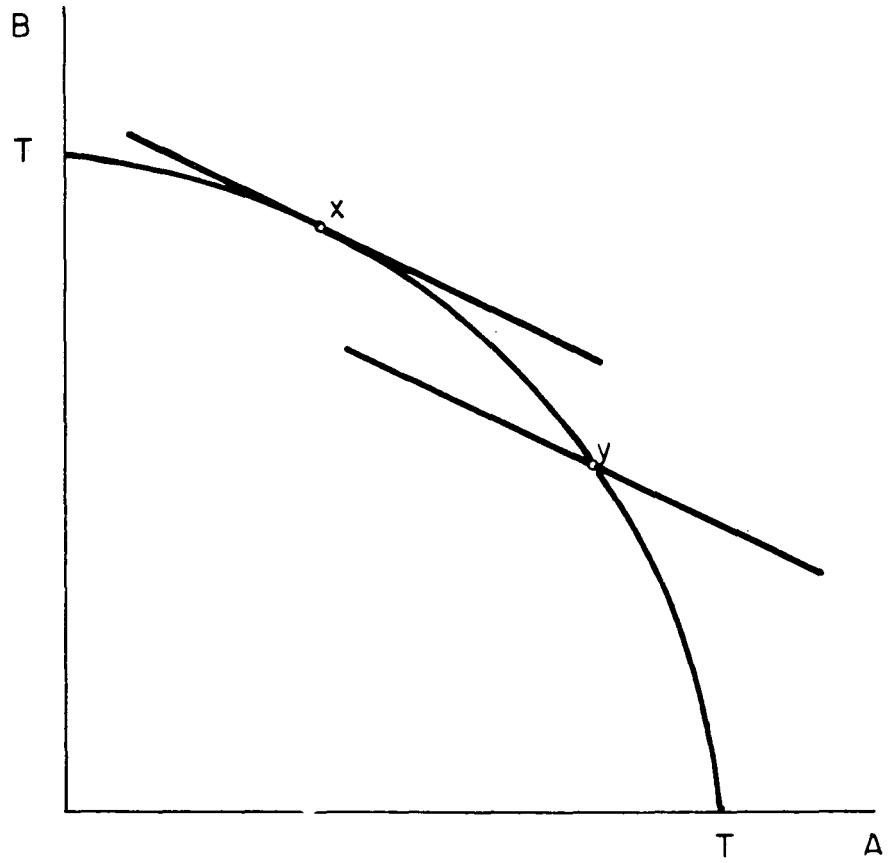

Figura 1

O problema que se apresenta consiste no seguinte: se no período t essa economia produz no ponto x da curva de transformação TT, e entre t e $t + 1$ move-se ao longo dessa curva de x para y, deseja-se saber o que acontecerá ao índice de produto computado.

Intuitivamente, como não ocorreram, conforme nossa suposição, inovações tecnológicas, e a dotação de fatores é fixa, quantitativa e qualitativamente, havendo apenas mudança na composição do produto, o resultado esperado é que o índice permaneça constante entre os instantes t e $t + 1$.

O emprego de índices com sistemas de pesos fixos pode levar-nos a obter resultados enganadores: admitindo-se que a economia opere em regime de competição e não existam externalidades, se os pesos do índice forem os preços no período t teremos um declínio aparente do produto ao passarmos de x para y e inversamente um aumento se utilizarmos como peso os preços no período $t + 1$.[4]

Os índices Divisia consideram, entretanto, conforme podemos notar em (1.2), um sistema de pesos variável que procura captar o efeito das mudanças desse sistema ao longo do tempo. Desse modo, sob as condições de competição perfeita e ausência de externalidades, os índices Divisia gozam da propriedade de invariância.

Ao longo da curva de transformação, sabe-se que:

$$\frac{d\ B}{d\ A} = -\frac{P_A}{P_B} \tag{2.1}$$

de modo que :

$$\frac{d\ Q}{Q} = \frac{P_A\ d\ A + P_B\ d\ B}{P_A\ A + P_B\ B} = 0$$

Além disso, os índices Divisia são os únicos a satisfazerem essa propriedade, o que é demonstrado rigorosamente por Richter.[5]

3. A independência à trajetória

Uma das características que se requer de um bom índice econômico é que seu valor num determinado período dependa dos níveis, nesse período, da variável indexada e não do percurso ao longo do qual os níveis foram sendo alcançados.

Os índices Divisia são integrais de linha, que sendo dependentes da trajetória, podem fazer com que uma multiplicidade de valores esteja associada a um dado ponto no conjunto das variáveis indexadas.

Consideremos, com referência à figura 2, uma economia com uma dotação fixa de fatores produzidos inicialmente no ponto x da curva de transformação TT. Suponhamos que, sem se processar qualquer alteração nos fatores e na tecnologia utilizada, a composição do produto se modifique gradualmente ao longo do tempo até se situar no ponto y de TT,

[4] Esse é um argumento que sugere cautela no emprego dos índices Laspeyres e Paasche.

[5] Richter (1966).

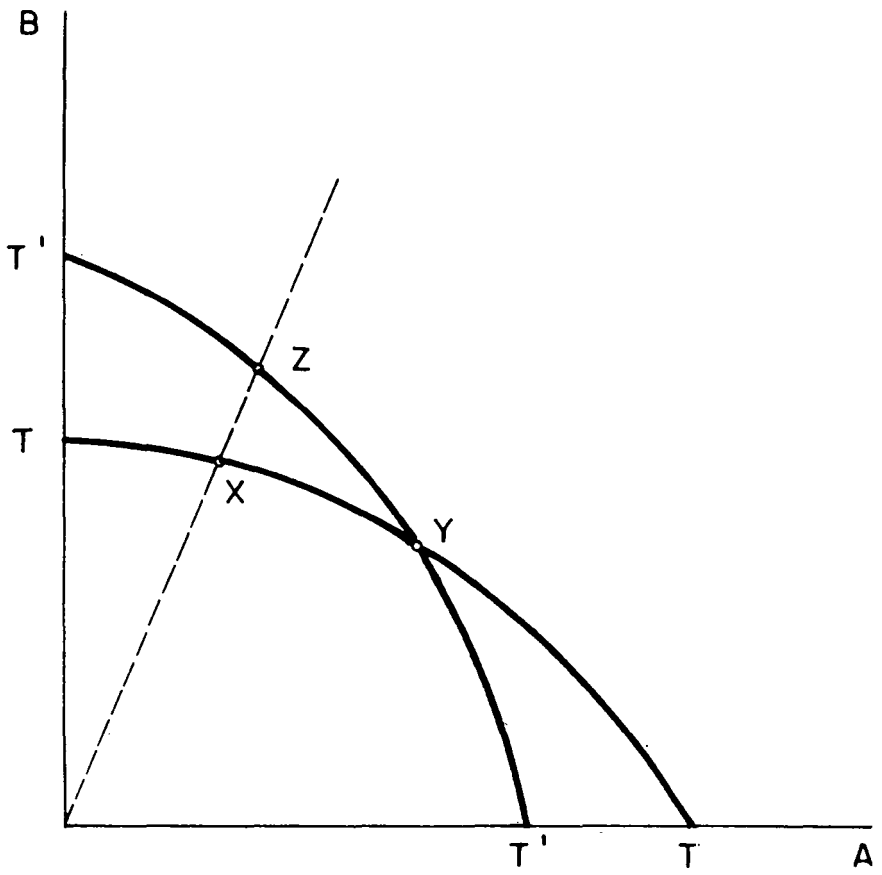

Figura 2

o que, dada a propriedade de invariância, não acarreta mudanças no índice de produto.

Imaginemos agora que com a economia trabalhando no ponto *y* ocorra uma alteração gradual na dotação de fatores de modo que a curva de transformação se desloque para *T'T'*, o que também não vai implicar mudança no índice, já que a economia permaneceu produzindo em *y*. O movimento dessa economia de *y* para *z* não provoca da mesma forma modificação no valor do índice, dada a propriedade de invariância.

Finalmente, consideremos a passagem de *z* para *x* através de uma linha reta ocasionando uma redução no índice, já que as quantidades produzidas diminuíram. Então, voltamos ao ponto de partida, porém com o valor

do índice inferior ao inicial. Por outro lado, se revertermos a trajetória ($x \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow z$) obteríamos uma elevação arbitrária no valor do índice.

Entretanto, Hulten,[6] baseando-se no teorema da função potencial,[7] mostra que, se as condições abaixo forem satisfeitas, a integral de Divisia é independente do percurso no espaço R^n.

a) existência de uma função f das variáveis indexadas contínua e diferencial no espaço R^n;

b) f é homogênea linear;

c) existência de um vetor de preços normal a cada ponto de f.

Essas condições são um tanto restritivas, especialmente a (b), que, todavia, de acordo com a demonstração de Hulten[8] pode ser relaxada gerando-se em contrapartida um viés na taxa de crescimento do índice igual ao grau de homogeneidade da função.

A condição (a) é bastante válida, pois se não supusermos a existência de um agregado ver-nos-íamos diante de uma indeterminação fundamental na medida em que estaríamos impossibilitados de avaliar a *performance* ao índice, dada a inexistência de um valor real associado aos seus componentes.

Por outro lado, a condição (c) equivale a uma condição de maximização em competição perfeita na ausência de externalidades. Como um vetor normal à superfície é o gradiente da equação dessa superfície,[9] para um índice de fatores de produção, por exemplo, (c) corresponde à condição tradicional de que os mesmos são remunerados pelas suas produtividades marginais.

Existem dois importantes corolários ao teorema de Hulten. Em primeiro lugar, se as variáveis que se deseja agregar, $\{q_1 (S), q_2 (S), \ldots q_n (S)\}$, formarem um subconjunto de um conjunto de variáveis $\{q_1 (S), q_2 (S), \ldots q_m (S)\}$, $m > n$, então a condição de existênica do agregado requer, de acordo com o teorema de Leontief[10] sobre agregação consistente, que qualquer função que contenha as m variáveis seja levemente separável[11] numa função das n variáveis do problema de agregação e numa outra das

[6] Hulten (1973).

[7] Veja a respeito Apostal (1957).

[8] Hulten (1973).

[9] Veja a respeito Spiegel (1963).

[10] Leontief (1947).

[11] A condição de separabilidade forte exigiria que a função fosse aditiva.

$m - n$ variáveis restantes. Esse é o principal problema encontrado na agregação de diferentes tipos de um fator de produção, tendo em vista que exceto para os casos de nenhuma ou perfeita substituição entre os mesmos, a existência de um agregado consistente requer a igualdade das elasticidades parciais de substituição entre quaisquer dos tipos do fator indexado e outros fatores da função de produção, [12] o que nem sempre é verdade. [13]

O segundo corolário diz respeito aos valores tomados pelo índice. Obedecida a condição (c), o índice Divisia conserva, a menos de uma normalização para algum período-base, todas as informações relativas ao problema de agregação. O verdadeiro impacto deste resultado pode ser observado através da taxa de variação do índice Divisia, em termos discretos.

$$log\ Q_s - log\ Q_{s-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (g_{i,s} + g_{i,s-1})\ (log\ q_{i,s} - log\ q_{i,s-1}) \quad (3.1)$$

onde:

$$g_{i,s} = \frac{p_i(S)\ q_i(S)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(S)\ q_i(S)}$$

Essa contrapartida discreta possui duas propriedades importantes:

a) sempre pode ser computada a partir das observações de preços e quantidades;

b) aproxima-se da forma contínua (1.2) à medida que $\Delta s \to 0$, o que permite usar o índice discreto para aproximar os verdadeiros valores da relação existente no esapço R^n.

Dessa forma, satisfeitas as condições (a, c), pode-se concluir que os índices Divisia se constituem na melhor escolha entre os números-índices.

Finalmente, resta a implicação de que se o índice Divisia é independente da trajetória ele também é necessariamente invariante. De fato, as condições (a, c) permitem que se reescreva (1.1) como

$$\frac{\dot{Q}(S)}{Q(S)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i\ q_i(S)}{\sum_{i=1}^{n} f_i\ q_i(S)} \frac{\dot{q}_i(S)}{q_i(S)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ \dot{q}_i(S)}{f}$$

[12] Veja demonstração em Berndt & Christensen (1973).

[13] Especialmente no caso da mão-de-obra dada a hipótese de *capital-skill complementarity;* evidência empírica apoiando essa hipótese pode ser encontrada em Griliches (1969) e Fallon & Layard (1975).

onde os f_i são as derivadas parciais de $f\{q_i(S), q_2(S), \ldots, q_n(S)\}$ em relação a cada um de seus componentes. Para uma trajetória que se mantenha, por exemplo, totalmente numa curva de transformação, $\Sigma f_i \dot{q}_i = 0$. Portanto, para tais trajetórias

$$\frac{\dot{Q}(S)}{Q(S)} = 0 \qquad \text{e} \qquad Q(\Gamma) = 1 \quad ,$$

o que acarreta na invariância do índice.

Bibliografia

Apostol, T. *Mathematical analysis*. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1957.

Berndt, E. & Christensen, L. The internal structure of functional relationships: separability, substitution and aggregation. *Rev. Econ. Studies*, v. 40, p. 403-10, July, 1973.

Carvalho, J. L. Uma nota sobre números-índices. *Rev. Brasileira de Economia*, v. 29, n. 1, p. 60-88, jan./mar. 1975.

Denison, E. *Why growth rates differ*. Washington, D. C., The Brookings Institution, 1967.

Fallon, P. & Layard, P. Capital skill complementarity, income distribution and output accounting. *Journal of Political Economy*, v. 83, n. 2, 1975.

Griliches, Z. Capital-skill complementarity. *Rev. Econ. Statist.*, v. 51, p. 465-8, Nov. 1969.

Griliches, Z. & Jorgenson, D. The explanation of productivity change. *Rev. Econ. Studies*, v. 34, p. 343-50, 1967.

Haddad, C. Crescimento do produto real brasileiro. *Rev. Bras. Economia*, v. 29, n. 1, p. 3-26, jan./mar. 1975.

Hulten, C. Divisia index numbers. *Econometrica*, n. 41, n. 6, p. 1017-25, Nov. 1973.

Langoni, C. G. *As causas do crescimento econômico do Brasil*. Rio de Janeiro, APEC, 1974.

Leontief, W. Introduction to the theory of the internal structure of functional relationships. *Econometrica*, v. 15, p. 361-73, 1947.

Richter, M. Invariance axioms and economic indexes. *Econometrica*, v. 34, n. 4, p. 739-55, Out. 1966.

Spiegel, M. *Advanced calculus*. New York, N. Y., McGraw Hill, 1963.