Uma nota sobre demanda derivada

José L. Carvalho *

1. A demanda por trabalho de uma firma; 2. A demanda por trabalho da indústria.

Os fatores de produção são demandados pela necessidade que se tem em usá-los no processo produtivo para gerar bens de consumo final, intermediário ou mesmo outros fatores de produção. Assim, ao estudarmos a demanda por qualquer fator de produção estaremos estudando uma demanda que deve ser derivada, dada a tecnologia existente, da demanda pelo bem final a cuja produção este fator se destina.

Ao discutirmos especificamente a demanda por trabalho, procuramos em primeiro lugar estabelecer o comportamento do indivíduo para, a partir deste comportamento, através da agregação, obter demanda por trabalho para o mercado como um todo.

1. A demanda por trabalho de uma firma

Vamos admitir que seja possível combinar-se dois fatores de produção, capital (K) e trabalho (L), de modo a produzir-se um determinado bem

* Professor de economia da EPGE/FGV.

(X).[1] As técnicas existentes nos fornecerão os métodos de produção. O "conjunto eficiente" destes métodos será agregado através de uma relação entre os fatores de produção e o produto, definida como função de produção.[2]

Admitindo-se que o produtor procure maximizar seus lucros sujeito às restrições técnicas representadas pela função de produção e considerando-se os mercados nos quais o produtor compra ou aluga seus fatores de produção e vende seu produto como mercados de concorrência perfeita, o comportamento do produtor é facilmente determinado pela solução da maximização condicionada:

$$\text{Maximizar } \pi = px - (\omega l + rk) \tag{1}$$

Sujeito às restrições

$$\left.\begin{aligned} x &= f\ (k,\ l) \\ x \geq 0,\ k &\geq 0,\ l \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

onde:

x = Quantidade a ser produzida pelo produtor
p = Preço do produto no mercado
ω = Preço do fator trabalho no mercado
r = Preço do serviço do fator capital no mercado
$f\ (k, l)$ = Função de produção
k = Quantidade de serviço de capital demandada pelo produtor para produzir x
l = Quantidade de serviço de mão-de-obra demandada pelo produtor para produzir x
π = Lucro

Assim, a maximização de (1) sujeita a (2) deve, não só determinar a quantidade de X a ser produzida como a quantidade de k e l a ser adquirida, isto é, as demandas pelos fatores de produção. A quantidade a ser produzida deve ser tal que o custo marginal de produção se iguale ao preço do produto. As demandas pelos fatores de produção devem corresponder às produtividades marginais de cada fator:

[1] É evidente que necessitaríamos de matérias-primas além dos fatores de produção para a elaboração de X. Nossas conclusões não se alteram caso as matérias-primas mantenham uma proporção fixa com o produto, isto é, $X = a_i\ M_i$ onde a_i é o fator fixo de proporcionalidade para cada matéria-prima M_i.

[2] Para uma revisão dos conceitos de função de produção e outras indicações bibliográficas, veja: Brown, M. *On the theory and measurement of technological change*. Cambridge, Cambridge University Press, 1966. p. 9-12.

$$CM_g(x) = p \qquad (3)$$

$$f_k = \frac{r}{p} \qquad (4)$$

$$f_l = \frac{\omega}{p} \qquad (5)$$

$$f_k = \frac{\partial x}{\partial k} = \text{Produtividade marginal do capital}$$

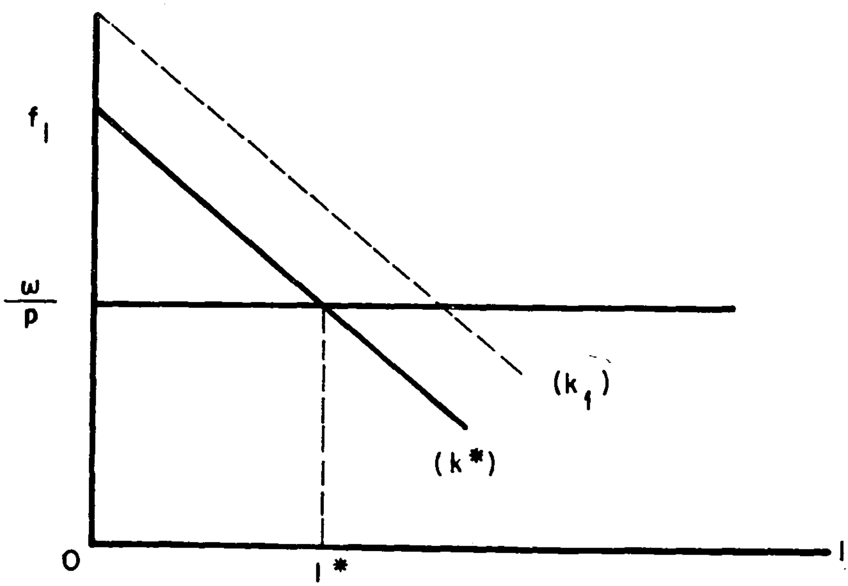
$$f_l = \frac{\partial x}{\partial l} = \text{Produtividade marginal do trabalho}$$

Modificações podem ser introduzidas na análise, de modo a se levar em consideração outras formas de mercado geradas por imperfeições tanto no mercado de produto como no mercado de fatores. Estas distorções, entretanto, são irrelevantes para os nossos propósitos.

É mais ou menos intuitivo que a produtividade marginal de qualquer fator de produção deva, de modo geral, ser função da quantidade de todos os fatores usados na produção. Assim, admitindo válido o princípio da produtividade marginal decrescente, e considerando a quantidade de capital (k) constante, poderemos representar a demanda por trabalho pela firma:

Figura 1

Demanda por trabalho para uma firma



Como ω e p são dados para a firma em concorrência perfeita, a partir de $f(k, l)$, f_l fica determinada, implicando a quantidade ótima de trabalho (l^*) a ser adquirida. Mudanças na quantidade de capital ou na tecnologia, aqui representada por mudanças na função de produção $f(k, l)$, devem provocar deslocamentos na curva de produtividade marginal do trabalho. Variações no salário (ω) ou no preço do produto provocam movimentos ao longo de uma mesma curva de produtividade.

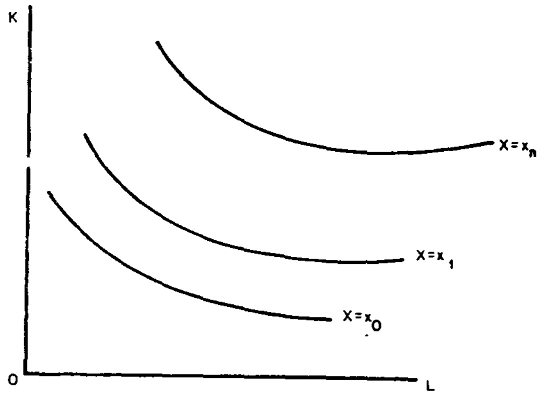
Assim, os elementos importantes na determinação da demanda por trabalho de uma firma são: preço do produto, o preço relativo dos fatores de produção e a técnica a ser utilizada. Podemos generalizar os resultados obtidos até agora, permitindo a variação do fator de produção capital. Dados os preços dos fatores de produção o produtor procurará através da maximização condicionada de seus lucros igualar a taxa marginal de substituição entre os fatores $\left(\frac{f_k}{f_l}\right)$ ao preço relativo destes fatores:

$$\left(\frac{r}{\omega}\right) = \frac{f_k}{f_l} \quad \text{(basta dividir 4 por 5)}$$

Graficamente, é possível representar uma função de produção a dois fatores num sistema cartesiano a duas dimensões mantendo-se o produto ou um dos fatores de produção constante. É tradição representar-se a função de produção através de um conjunto de isoquantas definidas no plano $(K; L)$:

Figura 2

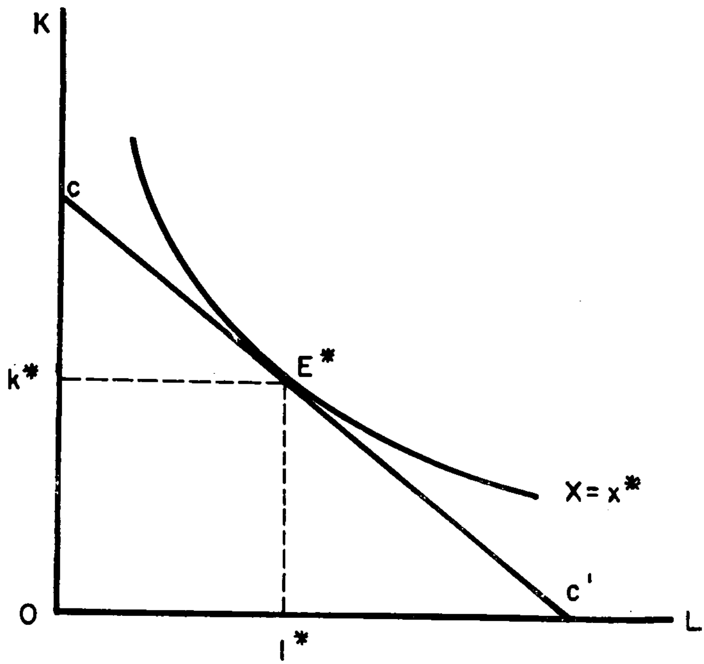
Representação da função de produção no plano **(K, L)**



Dados os preços do produto e dos fatores de produção, a maximização de (1) sujeita a (2) pode ser representada graficamente:

Figura 3

Equilíbrio do produtor para preços dados

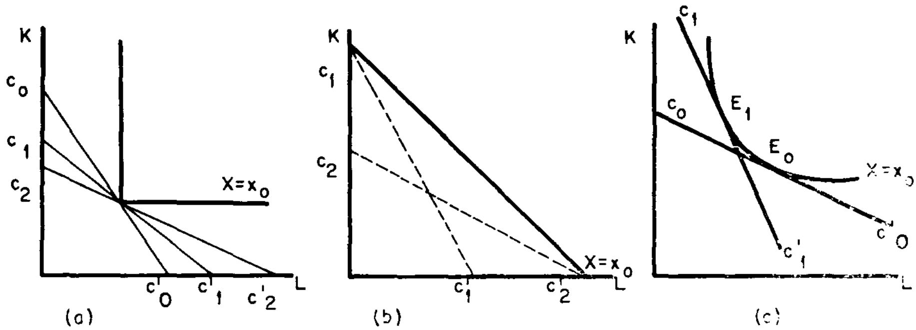


E^* é o ponto de equilíbrio para o produtor que produzirá x^* pelo uso de k^* e l^* dos fatores. Por meio da figura 3 será ainda possível captar-se os efeitos sobre as quantidades demandadas de fatores devido às mudanças de preços relativos ou do preço do produto. Mudanças nos preços relativos provocarão mudanças na inclinação $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ da curva de custos $c\,c'$.

Sabemos que a tecnologia retratada pela função de produção reflete-se na forma de cada uma das isoquantas da figura 2. Assim, o efeito da mudança nos preços relativos fica condicionado à tecnologia existente. A seguir apresentamos alguns casos extremos:

Figura 4

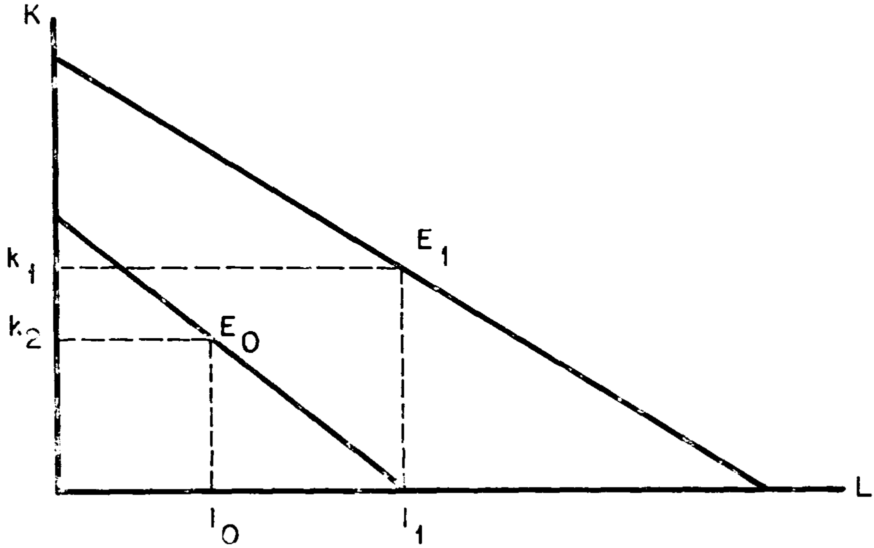
Tecnologia e substituição entre fatores



Nos três casos, procuramos observar os efeitos da mudança nos preços relativos dos fatores, mantendo a quantidade a ser produzida constante e fazendo variar o conhecimento tecnológico. No caso (a), a tecnologia impossibilita qualquer substituição entre os fatores, eliminando a possibilidade de qualquer efeito de preços relativos sobre o uso dos fatores; no caso (b) uma pequena mudança nos preços relativos acarreta mudança radical no uso dos fatores; no caso (c), a substituição entre os fatores é parcial e talvez o caso mais comum.

As dificuldades em se identificar os efeitos dos preços relativos, da técnica e da mudança na quantidade do produto, sobre a utilização dos fatores, prende-se à impossibilidade de se observar cada um destes efeitos separadamente. As observações empíricas nos fornecem as variações na quantidade demandada de cada fator que, de modo geral, ocorrem simultaneamente com as variações nos preços destes fatores, no preço e na quantidade produzida do produto final e em alguns casos com variações na técnica usada. Assim, em termos gráficos, o que observamos são pontos como E_0 e E_1 na figura 5.

Figura 5
Problema de identificação empírica da fonte de variação na quantidade demandada por fatores de produção



É claro que informações mais completas podem ser obtidas, a um determinado custo, de modo que uma melhor análise empírica da demanda por trabalho pela firma possa ser elaborada.

2. A demanda por trabalho da indústria[3]

Como a indústria é composta de várias firmas, a demanda por trabalho para uma indústria deve ser o somatório das demandas de cada uma das firmas. Vamos considerar uma indústria que possua n firmas iguais, todas maximizando lucro. O que pretendemos é determinar em que medida variações nos preços relativos dos fatores, as condições de demanda do produto final e a tecnologia existentes afetam a demanda por trabalho.

Seja,

$x = f\ (k, l)$ a função de produção para cada firma. (6)

f é tal que os retornos de escala são constantes:

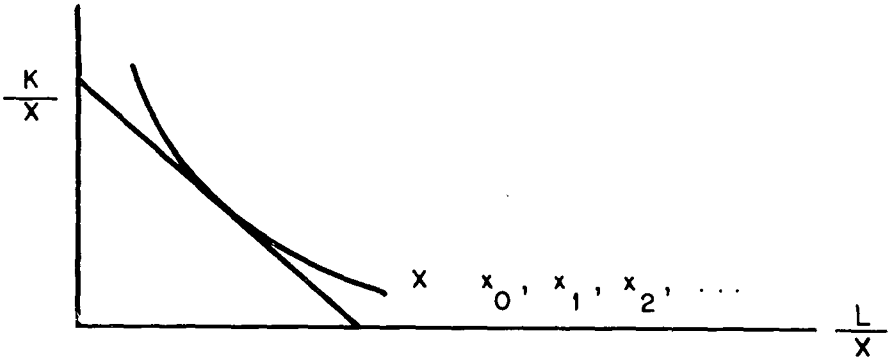
$$\left.\begin{aligned} x &= l\, f\left(l, \frac{k}{l}\right) = l\, F\,(\phi) \quad \text{onde} \quad \phi = \frac{k}{l} \\ x &= l\, F\,(\phi) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

[3] Nesta parte, nosso trabalho fundamenta-se em anotações de aulas proferidas pelo Prof. H. G. Lewis em seu curso Economics 341 (Demanda por trabalho) na Universidade de Chicago.

Como (6) possui retornos constantes de escala, o mapa de isoquantas no plano (K, L) pode ser reduzido a uma única isoquanta no plano $\left(\frac{K}{X}, \frac{L}{X}\right)$

Figura 6

Representação gráfica da função de produção no plano $\left(\frac{K}{X}, \frac{L}{X}\right)$



Se definirmos ρ como a taxa marginal de substituição, isto é, $\left(\frac{f_l}{f_k}\right)$ teremos:

$$\rho = \rho \ (\phi) \text{ devido aos retornos constantes de escala} \tag{8}$$

A mudança nos preços relativos acarretará uma variação na utilização dos fatores. Este efeito deve ser captado pela elasticidade de substituição definida como: [4]

$$\sigma = \left.\frac{E\phi}{E\rho}\right|_x$$

Vamos supor, para efeito de derivação da demanda por trabalho, que cada firma deverá estar em equilíbrio de longo prazo. A necessidade desta hipótese reside no desejo de conhecermos o efeito completo da mu-

[4] E é um operador tal que $Ez = d \log z$

A barra vertical indica que a relação é tomada para um valor constante da variável subscrita, no caso o produto.

σ deve medir a substituição entre os fatores ao mesmo nível de produto. Essa definição de σ é válida para qualquer função de produção.

dança dos preços relativos sobre a utilização dos fatores — no curto prazo, a possibilidade de substituição entre trabalho e capital fica reduzida pela rigidez do equipamento instalado.

As condições de equilíbrio no longo prazo são:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\omega}{r} \\ C' = \overline{C}^* = p \end{cases} \tag{9}$$

onde

C' = Custo marginal

$\overline{C}^*$ = Custo médio mínimo

Defina-se

$$(1 - m) = \frac{E\,F(\phi)}{E\phi} \tag{10}$$

isto é, $(1 - m)$ é a elasticidade da produtividade média do trabalho com referência à relação capital-trabalho.

Se aplicarmos o operador E à função de produção em (7) obtemos:

$$Ex = El + \frac{E\,F(\phi)}{E\phi}\,E\phi$$

$$Ex = El + (1 - m)\,E\phi$$

mas, $$\phi = \frac{k}{l} \quad \text{e} \quad E(\phi) = Ek - El$$

logo, $$Ex = m\,El + (1 - m)\,Ek$$

Podemos reinterpretar $(1 - m)$ como a elasticidade do produto com relação ao capital e m como a elasticidade do produto em relação ao trabalho. Note-se que $m + (1 - m)$ deve ser igual à unidade devido à hipótese de retornos constantes de escala. Se os retornos de escala são constantes e cada firma está em equilíbrio de longo prazo, é possível demonstrar-se que a elasticidade parcial do produto com relação a um fator é igual à proporção deste fator no custo do produto.

$$m = a,$$

sendo a a proporção do trabalho no custo total de produção de x.

Com a função de produção (7) temos:

$$\frac{x}{l} = F(\phi) \text{ para cada empresa}$$

Para a indústria como um todo, temos:

$$\sum_i x_i = X$$

$$\sum_i l_i = L$$

A produtividade média do trabalho para a indústria deve ser igual a esta produtividade média em cada firma uma vez que todas as firmas são iguais. O mesmo é válido para ϕ.

$$\frac{l}{x} = \frac{1}{F(\phi)}$$

$$E\left(\frac{l}{x}\right) = -\frac{E\,F(\phi)}{E\phi}\,E\phi = -(1-m)\,E\phi \tag{11}$$

Por (8) $$\rho = \rho(\phi)$$

$$E\rho = \frac{E\rho}{E\phi}\,E\phi$$

mas, $$\frac{E\rho}{E\phi} = \frac{1}{\sigma}$$

$$E\rho = \frac{1}{\sigma}\,E\phi \tag{12}$$

Introduzindo (12) em (11)

$$E\left(\frac{l}{x}\right) = -(1-m)\sigma\,E\rho$$

mas em equilíbrio $$\rho = \frac{\omega}{r}$$

$$E\left(\frac{l}{x}\right) = -(1-m)\,\sigma E\left(\frac{\omega}{r}\right) \quad \text{mas,} \quad m = a$$

$$E\left(\frac{l}{x}\right) = -(1-a)\,\sigma E\left(\frac{\omega}{r}\right) \tag{13}$$

Para a indústria como um todo,

$$E\left(\frac{L}{X}\right) = -(1-a)\,\sigma E\left(\frac{\omega}{r}\right) \tag{14}$$

$$EL = EX - (1-a)\,\sigma E\left(\frac{\omega}{r}\right) \tag{14'}$$

Suponha que a demanda por X para a indústria seja definida como:

$$X = \gamma\ (p\ D) \tag{15}$$

onde γ é a função de demanda, D representa o efeito de todas as outras variáveis, que não o preço de X, sobre a quantidade demandada do produto, isto é, renda, preço de outros bens, etc.

$$EX = ED - \eta\ Ep$$

onde η é a elasticidade da demanda de X com relação ao seu preço p.

Pela condição de equilíbrio das empresas temos:

$$C' = \bar{C}^* = p$$

Como só possuímos dois fatores, K e L, a preços r e ω, o custo total é definido para cada firma:

$$CT = r\ k + \omega\ l$$

$$\frac{C\,T}{x} = \bar{C} = r\frac{k}{x} + \omega\frac{l}{x} \tag{17}$$

Aplicando o operador E em (17)

$$E\bar{C} = (m-a)\,E\phi + a\,E\omega + (1-a)\,Er\text{[5]}$$

[5] Diferenciando (17): $d\bar{C} = \omega\, d\left(\frac{l}{x}\right) + \left(\frac{l}{x}\right) d\omega + r\, d\left(\frac{k}{x}\right) + \left(\frac{k}{x}\right) dr$ dividindo por $\bar{C}$

$$\frac{d\bar{C}}{\bar{C}} = \frac{\omega l}{\bar{C}x}\, d\left(\frac{l}{x}\right)\frac{1}{\left(\frac{l}{x}\right)} + \frac{l\omega}{x\bar{C}}\, d\omega\,\frac{1}{\omega} + \frac{rk}{x\bar{C}}\, d\left(\frac{k}{x}\right)\frac{1}{\left(\frac{k}{x}\right)} + \frac{rk}{\bar{C}x}\, dr\left(\frac{1}{r}\right)$$

mas $\bar{C}x = CT$ e $\frac{\omega l}{CT} = a$ (proporção do custo do trabalho no custo total) $\frac{rk}{CT} = (1-a)$. Note ainda que por definição $\frac{dz}{z} = Ez$

$$E\bar{C} = a\,E\omega + (1-a)\,Er - a\,E\left(\frac{1}{x}\right) + (1-a)\,E\left(\frac{k}{x}\right)$$

Pela definição de $(1-m)$ temos:

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = -(1-m)\,E\phi, \quad \text{e} \quad E\left(\frac{k}{x}\right) = m\,E\phi$$

Portanto:

$$E\bar{C} = a\,E\omega + (1-a)\,Er - a\,(1-m)\,E\phi + (1-a)\,m\,E\phi$$
$$E\bar{C} = (m-a)\,E\phi + a\,E\omega + (1-a)\,Er$$

mas, em equilíbrio sabemos que $m = a$ e $E\overline{C} = E\overline{C}^* = Ep$ logo,

$$Ep = a\ E\omega + (1 - a)\ Er \tag{18}$$

Introduzindo Ep em (16)

$$EX = ED - \eta\ \{a\ E\omega + (1 - a)\ Er\} \tag{19}$$

Substituindo (19) em (14') obtemos as variações da demanda agregada por trabalho:

$$EL = ED - \eta\ \{a\ E\omega + (1 - a)\ Er\} - (1 - a)\ \sigma\ E\left(\frac{\omega}{r}\right)$$

Colecionando os termos em $E\omega$ e Er temos:

$$EL = ED - \{\eta\ a + (1 - a)\ \sigma\}\ E\omega + (1 - a)\ (\sigma - \eta)\ Er \tag{20}$$

De posse de (20), estamos aptos a fazer inferências a respeito dos efeitos sobre a demanda por trabalho, provocados pelas variações nos preços dos fatores (ω e r), pelas variações na elasticidade da demanda do bem final (η), pelas variações nas técnicas adotadas (a e σ) e pelas variações de demanda (D) provocadas por variações na renda, no preço de outros bens finais, etc. É bom observar que a relação $\frac{EL}{E\omega}$ define a elasticidade parcial da demanda por trabalho com relação ao seu preço (ω).

A elasticidade da demanda derivada tem sido objeto de estudos dos economistas há bastante tempo.[6] Marshall, um dos primeiros a definir demanda derivada, estabeleceu em seus *Principles,* com base em certas simplificações – como a da função de produção ser do tipo limitativo ($\sigma = 0$) – a relação entre a elasticidade de demanda derivada e a elasticidade de demanda do bem final, a participação deste fator nos custos totais, e a elasticidade de oferta dos demais fatores de produção. Mais tarde, de maneira muito hábil, Hicks em seu *The theory of wages* ampliou e qualificou melhor o trabalho de Marshall. Mais recentemente, a análise de demanda por um fator de produção foi formalizada para funções de produção que se utilizam de mais de dois fatores.[7]

Toda nossa discussão anterior é suficiente para que se entenda, pelo menos em parte, o processo de absorção de mão-de-obra. Parece-nos que a

[6] Para uma excelente discussão do problema e uma extensa referência bibliográfica veja Hicks, J. R. *The theory of wages*. 2. ed. London, Macmillan, 1966. especialmente p. 241-6 e 273-84.

[7] Diewert, W. E. A note on the elasticity of derived demand in the *n* factor case. University of Chicago, Aug. 1969. CMSBE Report, n. 6.926 provavelmente já publicado.

exposição deixou claro as relações que existem entre a demanda por mão-de-obra, a tecnologia, a demanda pelo bem final e os preços relativos dos fatores. Assim, torna-se importante a elaboração de estudos não só sobre as tecnologias usadas na produção industrial brasileira, mas, também, sobre o grau de utilização do capital existente. Esta análise não pode ser feita sem uma integração do efeito dos preços relativos dos fatores. Por outro lado, não se pode esquecer a importância da demanda. Assim, estudos sobre a composição dos gastos dos consumidores e como estes gastos variam conforme as características familiares (educação, renda, número de filhos, etc.) pode vir a ser uma importante informação a ser usada como subsídio numa análise de políticas alternativas para uma maior absorção de mão-de-obra compatível com altas taxas de crescimento. É bom lembrar que demanda por trabalho é uma demanda derivada sendo, portanto, o conhecimento da demanda pelo produto final importante na análise de problemas relacionados com absorção de mão-de-obra.

Dos estudos já elaborados para o caso brasileiro, cumpre-nos ressaltar os de Bacha, Mata, Modenesi e Goodman, Sena e Albuquerque.[8] No primeiro trabalho, a maior preocupação dos autores é mostrar como a legislação trabalhista no Brasil encarece o fator trabalho, motivando via efeito preços relativos à escolha de técnicas mais intensivas em capital. Em seu trabalho, Bacha, Mata e Modenesi estimam uma elasticidade de demanda por trabalho em torno de 0,43. O que implica um efeito relativamente pequeno do preço do trabalho sobre sua quantidade demandada. O efeito da legislação trabalhista é calculado para diversos anos. Em janeiro de 1945, a legislação acrescia os salários em 7,9% enquanto que em janeiro de 1967, este acréscimo era da ordem de 45,5 caindo para 43,9 em julho de 1971.[9]

Goodman, Sena e Albuquerque utilizam-se de informações fornecidas nos projetos aprovados pela Sudene para concluírem pela possibilidade de se afetar a escolha da técnica via preços relativos. Assim, maciços incentivos fiscais concedidos ao capital explicam a utilização de técnicas mais intensivas neste fator, e o pequeno impacto destes projetos sobre a absorção de mão-de-obra no Nordeste brasileiro.

[8] Bacha, E. L.; Mata, M. da & Modenesi, R. L. *Encargos trabalhistas e absorção de mão-de-obra*. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1972. Goodman, D. E.; Sena, Julio F. F. & Albuquerque, Roberto C. de. Os incentivos financeiros à industrialização do Nordeste e a escolha de tecnologias. *Pesquisa e Planejamento*. I. dez. 1971, p. 329-65.

[9] Veja Bacha, E. L.; Mata, M. da & Modenesi, R. L. op. cit. p. 89.

Cada um dos trabalhos citados procura dar ênfase ao efeito dos preços relativos dos fatores sobre a demanda por trabalho. O primeiro analisa o efeito da alta dos salários pela existência das leis trabalhistas e o segundo o decréscimo no preço do capital pelos incentivos fiscais. Como procuramos chamar atenção, torna-se importante a elaboração de estudos mais completos sobre a força de trabalho e suas relações com a demanda final, com os preços relativos dos fatores e a tecnologia disponível.