ISSN 0034-7140
00001 >
9 770034 714013

FGV

ISSN 0034-7140
Rio de Janeiro • v. 69 • n. 1 • Jan-Mar 2015

FGV

v. 69 • n. 1 • Jan-Mar 2015

Revista Brasileira de Economia

# rbe

## Revista Brasileira de Economia

Understanding Bitcoins: Facts and Questions
*Bruno Saboia de Albuquerque, Marcelo de Castro Callado*

A Desigualdade Pode Afetar a Eficiência do Sistema Financeiro? Um Modelo de Equilíbrio em Dois Períodos com Fricções na Intermediação Financeira.
*Wenersamy Ramos de Alcântara, Daniela P. R. de Alcântara, José Maria F. J. da Silveira*

Ciclos Econômicos e Emissão de $CO_2$ no Brasil: Uma Análise Dinâmica para Políticas Ambientais Ótimas
*Ricardo Aguirre Leal, Regis Augusto Ely , Júlia Gallego Ziero Uhr, Daniel de Abreu Pereira Uhr*

Multiplicadores Fiscais e Investimento em Infraestrutura
*Guilherme V. Moura*

Private Transfer Choices under Uncertainty in Human Capital
*Rodrigo J. Raad, Gilvan R. Guedes*

Uma Análise da Transição dos Jovens Para o Primeiro Emprego no Brasil
*Mauricio Reis*

**Patrocinadores (Financiadores)**

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)
Ministério da Educação (MEC)
Programa de Apoio a Publicações Científicas do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT).

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CAPES
Ministério da Educação
Ministério da Ciência e Tecnologia
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

r b e

Revista Brasileira de Economia

**FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS**

Instituição de caráter técnico-científico, educativo a filantrópico, criada em 20 de dezembro de 1944 como pessoa jurídica de direito privado, tem por finalidade atuar no âmbito das ciências sociais, particularmente econômica e administração, bem como contribuir para a proteção ambiental e o desenvolvimento sustentável.

**Presidente fundador:** Luiz Simões Lopes.
**Presidente:** Carlos Ivan Simonsen Leal.
**Vice-presidentes:** Francisco Oswaldo Neves Dornelles, Marcos Cintra Cavalcanti de Albuquerque e Sergio Franklin Quintella.

**CONSELHO DIRETOR**
**Presidente:** Carlos Ivan Simonsen Leal. **Vice-presidentes:** Francisco Oswaldo Neves Dornelles, Marcos Cintra Cavalcanti de Albuquerque e Sergio Franklin Quintella.
**Vogais:** Armando Klabin, Carlos Alberto Pires de Carvalho e Albuquerque, Cristiano Buarque Franco Neto, Ernane Galvêas, José Luiz Miranda, Lindolpho de Carvalho Dias, Marcílio Marques Moreira e Roberto Paulo Cezar de Andrade.
**Suplentes:** Aldo Flores, Antonio Monteiro de Castro Filho, Ary Oswaldo Mattos Filho, Eduardo Baptista Vianna, Gilberto Duarte Prado, Jacob Palis Júnior, José Ermírio de Moraes Neto, Marcelo José Basílio de Souza Marinho e Mauricio Matos Peixoto.

**CONSELHO CURADOR**
**Presidente:** Carlos Alberto Lenz César Protásio. **Vice-presidente:** João Alfredo Dias Lins (Klabin Irmãos & Cia).
**Vogais:** Alexandre Koch Torres de Assis, Andrea Martini (Souza Cruz S.A.), Angélica Moreira da Silva (Federação Brasileira de Bancos), Antonio Alberto Gouveia Vieira, Carlos Moacyr Gomes de Almeida, Eduardo M. Krieger, Estado do Rio Grande do Sul, Heitor Chagas de Oliveira, Jaques Wagner (Estado da Bahia), Joaquim Levy, Luiz Chor (Chozil Engenharia Ltda), Leonardo André Paixão (IRB–Brasil Resseguros S.A.), Marcelo Serfaty, Marcio João de Andrade Fortes, Orlando dos Santos Marques (Publicis Brasil Comunicação Ltda), Pedro Henrique Mariani Bittencourt (Banco BBM S.A), Raul Calfat (Votorantim Participações S.A.), Ronaldo Vilela (Sindicato das Empresas de Seguros Privados, de Previdência Complementar e de Capitalização nos Estados do Rio de Janeiro e do Espírito Santo) e Sandoval Carneiro Junior.
**Suplentes:** Cesar Camacho, Clóvis Torres (VALE S.A.), José Carlos Schmidt Murta Ribeiro, Luiz Ildefonso Simões Lopes (Brookfield Brasil Ltda), Luiz Roberto Nascimento Silva, Manoel Fernando Thompson Motta Filho, Nilson Teixeira (Banco de Investimentos Crédit Suisse S.A.), Olavo Monteiro de Carvalho (Monteiro Aranha Participações S.A), Patrick de Larragoiti Lucas (Sul América Companhia Nacional de Seguros), Rui Barreto (Café Solúvel Brasília S.A.), Sergio Lins Andrade (Andrade Gutierrez S.A.) e Victório Carlos De Marchi.

**Sede:** Praia de Botafogo, 190
Rio de Janeiro, RJ, Brasil · CEP 22250-900 · Tel. 21 3799-6000
Caixa Postal 62591 · CEP 22252-970

# Normas para Publicação

r b e

**Escopo / missão**

1) Artigos: trabalhos, de conteúdo analítico, que apresentem contribuições originais, tanto de cunho teórico como de avaliação empírica, no campo geral da economia;

2) Resenha bibliográfica: análise crítica de livros, editados no Brasil e no exterior, que digam respeito à economia.

**Processo de avaliação**

1) Todos os trabalhos submetidos à apreciação da RBE devem ser inéditos (nacional ou internacionalmente), não estando sob consideração para publicação em qualquer outro veículo de divulgação. Os trabalhos publicados em anais podem ser enviados depois de transformados em artigos;

2) Todos os trabalhos submetidos à publicação na RBE são examinados pelo editor e, ocasionalmente, por editores associados que auxiliam na escolha de alguns pareceristas e em decisões editoriais. O editor poderá rejeitar artigos que não estejam próximos da fronteira teórica e/ou empírica, sem a necessidade de apresentar pareceres, de modo a agilizar a submissão do artigo em outras revistas;

3) Em caso de aprovação, o trabalho é editorado e submetido para revisão do autor principal. No pedido de revisão será claramente informado o prazo para envio da revisão. Caso o autor não encaminhe a revisão no prazo estipulado, a publicação do trabalho poderá ser adiada.

**Forma de apresentação dos originais**

Os artigos submetidos à RBE devem obedecer às seguintes regras de apresentação dos originais:

1) O formato dos arquivos deverá ser, preferencialmente, LaTeX (classe *article*), mas artigos encaminhados em RTF ou Microsoft Word também serão aceitos, desde que observado o item 5;

2) Os artigos deverão ser acompanhados de resumos em português e em inglês, com no máximo 100 palavras com indicação de palavras-chave e códigos de classificação JEL;

3) Na primeira página devem constar as seguintes informações sobre cada autor: nome, instituições a que está vinculado e endereço para correspondência;

4) As referências bibliográficas dos artigos devem ser elaboradas de acordo com as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT – NBR-6023) e apresentadas no final do texto. Quando na utilização do LaTeX, deverá ser utilizado o programa BibTeX;

5) As figuras e gráficos do artigo deverão constar em arquivos separados, nos formatos PDF, PS ou EPS. Os arquivos deverão estar claramente identificados e numerados, e sua localização no corpo do texto claramente identificada;

6) Os trabalhos deverão ser submetidos através do sistema de submissão *online* `http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/`.

FGV

ISSN 0034-7140
Rio de Janeiro • v. 69 • n. 1 • Jan-Mar 2015

# r b e

## *Revista Brasileira de Economia*

**Sumário**


| | |
|---|---|
| 3 | Understanding Bitcoins: Facts and Questions<br>*Bruno Saboia de Albuquerque, Marcelo de Castro Callado* |
| 17 | A Desigualdade Pode Afetar a Eficiência do Sistema Financeiro? Um Modelo de Equilíbrio em Dois Períodos com Fricções na Intermediação Financeira.<br>*Wenersamy Ramos de Alcântara, Daniela P. R. de Alcântara, José Maria F. J. da Silveira* |
| 53 | Ciclos Econômicos e Emissão de $CO_2$ no Brasil: Uma Análise Dinâmica para Políticas Ambientais Ótimas<br>*Ricardo Aguirre Leal, Regis Augusto Ely , Júlia Gallego Ziero Uhr, Daniel de Abreu Pereira Uhr* |
| 75 | Multiplicadores Fiscais e Investimento em Infraestrutura<br>*Guilherme V. Moura* |
| 105 | Private Transfer Choices under Uncertainty in Human Capital<br>*Rodrigo J. Raad, Gilvan R. Guedes* |
| 125 | Uma Análise da Transição dos Jovens Para o Primeiro Emprego no Brasil<br>*Mauricio Reis* |

A **Revista Brasileira de Economia** é indexada nas bases de dados JEL, EconLit e SciELO.

Os artigos assinados são de responsabilidade exclusiva dos autores. É permitida a reprodução total ou parcial dos artigos, desde que seja citada a fonte.

**Projeto gráfico:** Inah de Paula Comunicações
**Editoração Eletrônica:** Sálvio M. Soares / ConsulTEX
**Impressão:** Sermograf Gráfica e Editora Ltda.
**Tiragem:** 500 exemplares

## CONSELHO EDITORIAL

**Fundadores:** Eugênio Gudin e Arizio de Viana
**Editor:** Ricardo de Oliveira Cavalcanti (FGV/EPGE)
**Editores associados:** Alexandre B. Cunha (UFRJ), Arilton Teixeira (FUCAPE), Bernardo Guimaraes (EESP/FGV), Carlos Eugênio da Costa (FGV/EPGE), Cezar Santos (University of Mannheim), Felipe Schwartzman (Federal Reserve Bank of Richmond), Gabriel de Abreu Madeira (USP), José Fajardo (EBAPE/FGV), Juliano J. Assunção (PUC-Rio), Marcelo Cunha Medeiros (PUC-Rio), Paulo Klinger Monteiro (FGV/EPGE) e Vladimir Ponczek (EESP/FGV).

## EDITORA FGV

**Editora Executiva:** Marieta de Moraes Ferreira
**Assinaturas:** Paulo César Peres Appolinário

## ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

**Diretor Geral:** Rubens Penha Cysne
**Vice-Diretor:** Aloisio Araujo
**Vice-Diretor de Ensino:** Carlos Eugênio da Costa
**Vice-Diretor de Pesquisa:** Humberto Moreira
**Vice-Diretores de Graduação e Regulação Institucional:** Luis Henrique Bertolino Braido & André Arruda Villela

## CORRESPONDÊNCIA REDATORIAL

**Revista Brasileira de Economia**
Praia de Botafogo, 190 sala 1100
Rio de Janeiro, RJ – 22250-900
E-mail: rbe@fgv.br
Site: http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe

## CORRESPONDÊNCIA COMERCIAL

**Fundação Getulio Vargas / Editora**
Caixa Postal 62591
Rio de Janeiro, RJ – 22250-900
Tel.: 0800-21-7777
Fax: (21) 3799-5532
E-mail: assine@fgv.br

## LIVRARIAS

**Livraria J C Felipe**
Praia de Botafogo, 190
Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (21) 3799-5535

**Livraria Faria Lima**
Av. Nove de Julho, 2029
São Paulo, SP
Tel.: (11) 3281-7875

Revista Brasileira de Economia, ano 1 n. 1 set. 1947.

Rio de Janeiro, Fundação Getulio Vargas

v. 23 cm trimestral

Revista da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas

1. Economia Política - periódicos. I. Fundação Getulio Vargas, Rio de Janeiro. Escola de Pós-Graduação em Economia.

CDD 33(0.5)
CDU 330.5

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150001
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 3–16

# Understanding Bitcoins: Facts and Questions

Bruno Saboia de Albuquerque[*], Marcelo de Castro Callado[†]

**Contents:** **1. Introduction; 2. Digital Currencies; 3. Criptocurrencies; 4. Proof-of-Work; 5. Double-Spending; 6. Bitcoins; 7. Conclusion; A. Appendix.**

**Keywords:** **Bitcoins, Digital Currency, Criptocurrency.**

**JEL Code:** **O33, L86, E40.**

The objective of this work is to do a research challenge about the digital currency named Bitcoins, as well as exploit the general concept behind digital currencies and cryptocurrencies, and enumerate some of its current criticism and problems. Such currencies usage and public knowledge is increasing hastily on the last few months, and many questions arise with its popularity.

*O objetivo deste trabalho é promover um desafio de investigação sobre a moeda digital chamada Bitcoins, bem como explorar o conceito geral das moedas digitais e moedas criptográficas, e enumerar alguns dos seus problemas e críticas. O interesse público sobre este tipo de moeda, bem como seu uso, vêm crescendo de maneira acelerada, e diversas questões surgem com o aumento da sua popularidade.*

## 1. INTRODUCTION

The need for exchange is an ancient human characteristic. Since prehistoric times, trading of goods for another goods, services for goods or services for services was present in human endeavor. However, with the increase on the commerce and the exchange needs, the barter become less efficient.

It is known, because of Homer, that silver weights made the exchange easier on the Hellenic civilization, circa IX B.C. According to Passos and Nogami (2003), "the metals were the goods which attributes are closer than those expected for the monetary instruments". Nevertheless, even that system became obsolete after sometime—it was necessary to weight a lot of times to get the value of the ingots, creating difficulties to the official payments, to levy and to commerce itself. Under those circumstances, it was created a "precious metal disk, with a certain specific draw and weight".[1]

Since then, several evolutions has been incorporated to the currencies. The banknotes, for instance, were created, according to Kann (1963), on China, in a gradual process between the Tang dynasty (618–907) and Song dynasty (960–1279). Its creation was because it was a lot easier to create and transport banknotes than heavy cooper coins. If there was a large debt, a great amount of coins was necessary in order to execute the transaction. This difficulty lead to the creation of promissory notes,[2] which then lead to the creation of the state-issued banknotes.

Marco Polo was impressed on the banknote concept when he visited China. He wrote:

[*]Bacharelando em Ciências Econômicas, Universidade Federal do Ceará (UFC), Brazil. E-mail: brunosaboia@alu.ufc.br

[†]Professor Associado, Universidade Federal do Ceará (UFC), Brazil. E-mail: marcelocallado@ufc.br

[1]http://www.angelinicoins.com/#!artigos (our translation)

[2]http://wsulawreview.org/DWhaley.pdf

> The method of issue is very formal, as if the substance were pure gold or silver. On each sheet, which is to become a note, specially appointed officials write their name and affix their seal. When this work has been done in accordance with the rules, the chief impregnates his seal with pigment and affixes his vermilion mark at the top of the sheet. That makes the note authentic. This paper currency is circulated in every part of the Great Khan's dominions, nor dares any person, at the peril of his life, refuse to accept it in payment. (Boeykens, 2007)

The beginning of the state-issued banknotes bring some easiness to create inflation. According to Friedman (1970), "inflation is always and everywhere a monetary phenomenon". Therefore, the expansion of money in any form should, in a broad sense, generate a raise in the price level.[3] According to Rogoff and Reinhart (2010, p. 180) "there is no doubt that the invention of printed money has put inflation to a level of relevance without precedents."

When the metal coins were used as a exchange medium, there was a harder situation regarding the creation of currency. Spain suffered from a very high inflation rate, around 300% per annum according to Hamilton (1936) on the Age of Discovery, due to the fact that the crown used a good amount of the silver and gold extracted from the so-called "New World" to the process of coining. But in another locations, and even in Spain itself on a period prior to that, the price level was somewhat constant, and even fell a little bit, according to Adams (1985), due to the fact that the creation of money was never in a sudden and dramatic fashion, making the Iberian country an exception on the period.

The monopoly of bills and coins issuing made the governments able to use inflation as a mechanism to exert their policies and impose their agendas. According to Reinhart and Sbrancia (2011, p.2), the Bretton Woods system allowed a sharp decrease of the public debt/GDP ratio on the period between 1940 to 1970. Also, she points that a combination of a constant inflation dose, not in a very high rate or in a sudden and surprising way to the economic agents, allied to financial repression, is one of the most efficient ways of liquidating one government's debt, and was used by virtually every developed country after the World War II.[4] It is also interesting to note that this policy is only possible if the government has the monopoly of issuing money, and that the currency is a legal tender.[5]

On the gold standard system that, according to Lipsey (1979), begun because there was a broad acceptance of gold as a exchange medium, the governments had an obvious barrier to issue currency, the same mentioned before, and that states face at the medieval times: the extraction of the metal. The gold standard determines that the currency can be exchanged by an equivalent amount of gold, on a preset and fixed ratio. Therefore, the currency has a financial backing: gold. With that, the unrestricted issuing of currency could lead to a exchange of gold, draining the gold reserves of the government adopting those policies. This limits drastically the ability of a government to use inflation to liquidate its own debt, maybe one of the reasons that brought extinction to the gold standard.

Currently, most of the developed and under development countries print currencies without financial backing and in a centralized manner, meaning that only their respective central banks has the power to emit currency, which concentrates a great amount of power to make monetary policies to the government decision makers.

[3] There were a few cases, however, that monetary expansion did not bring out-of-control levels of inflation. The recent US case is an example of it. That generally occurs because there is a strong demand for that currency, even with the expansion. On a general sense, however, it seems that printing bills lead to inflation. Nevertheless, there are some who argue that the models are wrong and inflation is not a monetary phenomenon (see http://pragcap.com/inflation-does-not-appear-to-be-monetary-base-driven and http://www.bis.org/publ/bppdf/bispap77e.pdf).

[4] https://www.imf.org/external/np/seminars/eng/2011/res2/pdf/crbs.pdf, p.6, Box 1.

[5] http://www.merriam-webster.com/dictionary/legal%20tender

## 2. DIGITAL CURRENCIES

Digital currencies are a relatively modern concept in contrast to the evolutions previously discussed. There is a crucial difference between digital currencies and the currently circulating government issued currencies. First, it is necessary to make a distinction between *digital money* and *digital currency*.

Grignon (2009) asserts that "Digital money is simply the idea that, thanks to technology, money can now be a digital object, a unique serial number that can be directly exchanged anonymously and without accounting, just as one person would hand a dollar bill to another person. You had it. Now they have it. Very simple."

The digital money is already in widespread usage. For instance, when someone does a deposit on a bank account, the system identifies the owner and creates a credit according to the value of the deposit. This money can now be considered digital money, and can be exchanged by real money on an ATM machine, being eliminated on the process, or transfered to another person who can trade it for goods or services through a credit card, or withdraw in as banknotes as said previously.

This is different from the concept of digital currencies. A digital currency is like a real currency, but they are not issued by central banks nor necessarily financially backed in the national currency, as the digital money. Therefore, the issuing is decentralized, and is not decided by politicians, but by technical aspects, usually well-defined. For instance, the bitcoins uses an cryptographic algorithm to generate[6] the currency, which is made by the network users and not by a centralized government body.[7] According to (Melik, 2012), "there are people who like the idea of a currency which bypasses the men in grey suits who have controlled everything until now".

Despite those facts, there are many questions regarding the absence of regulation, and its implications. There are some fear that the digital currencies would make crimes as money laundering or drug dealing more easy.[8] To open a conventional bank account, one needs several documents, such as a valid ID and proof of residence, whereas to register to a digital currency it is only necessary a valid IP address.[9] However, there are several techniques to hide the real IP address, such as using proxies, which make the tracing of bad users more difficult. Regarding that, Melik (2012) says: "That leaves the system open to abuse".

There is also the possibility of electronic fraud affect the bitcoins user. For instance, there is an attack known as "phising",[10] which consist into trick the user to think that he is on a legit website, but actually malicious users are the owners of the website, which then stole data such as passwords. According to (Patil, 2013), "in May 2013, we found a phishing site that spoofed a popular digital currency company". Attacks such as this one make clear that users need training and education in order to not be fooled, and turn the digital currencies world into a fraud paradise.

Recently, Thailand has become the first country to officially ban bitcoins activities, making them illegal in its territory.[11] According to (Trotman, 2013), "the ruling means it is illegal to buy and sell bitcoins, buy or sell any goods or services in exchange for bitcoins, send any bitcoins to anyone outside of Thailand, or receive bitcoins from anyone outside the country".

## 3. CRIPTOCURRENCIES

Criptocurrencies are a subset of digital currencies. They are also on the set of alternative currencies because they are different from the traditional fiat money, currently in use in most of the countries.

[6] The bitcoin community usually refers to the process of creating new coins as "mining".

[7] https://www.weusecoins.com/en/mining-guide

[8] http://www.bbc.co.uk/news/business-19785935

[9] http://www.ietf.org/rfc/rfc791.txt

[10] http://www.microsoft.com/security/online-privacy/phishing-symptoms.aspx

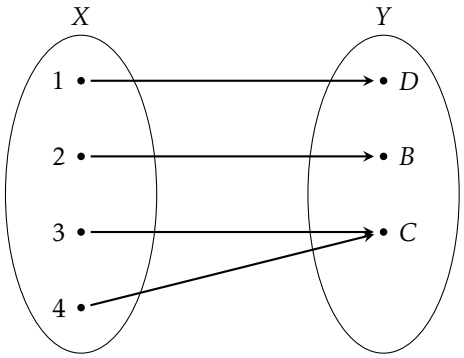
[11] http://www.telegraph.co.uk/finance/currency/10210022/Bitcoins-banned-in-Thailand.html

The term criptocurrency was coined by Wei Dai, in 1998,[12] in an article published on an internet group known as cypherpunks.[13] In a broad sense, the big difference between criptocurrencies and the regular digital currencies is the fact that the creation is decentralized an controlled by a cryptographic mechanism known as *hash function*.

A hash function is, basically, a mathematical function that maps data from variable size to fixed size. On this sense, it is a surjective function, since that the domain will eventually be "depleted", so the mapping will connect a previously connected element on the counter-domain. Formally speaking, let $f: X \to Y$, then $f$ is surjective if

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y. \tag{1}$$

**Figure 1.** Surjection visually demonstrated. Note that element $C$ on the counter-domain is mapped to two elements on the domain, 3 and 4. Since hash functions maps an infinite set into a finite one, surjection will happen.




A cryptographic hash function is similar to a regular hash function, but it should have some elements that make it useful in the cryptography context. One of them is the fact that whatever changes are made on the original data, even a very slight one, generates a very different output. The result yielded by a cryptographic hash function is known as digest. Acording to (Friedl, 2005), "a 'hash' (also called a 'digest', and informally a 'checksum') is a kind of 'signature' for a stream of data that represents the contents. The closest real-life analog we can think is 'a tamper-evident seal on a software package': if you open the box (change the file), it's detected".

Indeed, one of differences between hash functions and other cryptographic functions is the fact that, due to the surjective nature of the hash, it is not possible to determine the generating message from the generated message. On ordinary cryptography, the goal is to scramble one message, and then unscramble it on some other point. In other words, the generating function should be bijective in order to make it work.[14] The bijective functions therefore have an inverse function.[15]

The hash algorithms make it impossible to know the original message from the digest, but they render another kind of attack possible, namely "hash collision".[16] This is due to a mathematical idea called

[12] http://bitcoin.org/en/faq#what-is-bitcoin

[13] http://www.weidai.com/bmoney.txt

[14] For instance, both asymmetric and symmetric encryption techniques supposes that one encrypted message can be decrypted later. See http://support.microsoft.com/kb/246071/en-us.

[15] http://www.mathsisfun.com/sets/function-inverse.html

[16] http://permabit.wordpress.com/2008/07/18/what-do-hash-collisions-really-mean/

the "pigeonhole principle", or "Dirichlet box principle".[17] Despite this being outside of this article's scope, it is important to know the cryptographic principles in order to understand criptocurrencies.

## 4. PROOF-OF-WORK

According to Nakamoto (2011), the criptocurrencies should use the idea of using hash algorithms to create the so-called "proof-of-work", which means a manner to confirm that there was some kind of computational work involved to create a given quantity of money. On bitcoins, this validation is not made on a centralized way, but instead peer-to-peer (P2P) technology. Therefore, if some change are made to the bitcoin generation protocol, the community should follow it broadly, otherwise it is not considered valid. This concept is analog to what happens on the file sharing network known as "bittorrent": if someones conects to it with a different protocol version, it would not be able to transfer files, unless that there exists more people using that same protocol. Ultimately, what this means is that the rules behind the generation of bitcoins is community-driven.

The proof-of-work is where the generation of bitcoins lies. According to Dai (1998), "anyone can create money by broadcasting the solution to a previously unsolved computational problem. The only conditions are that it must be easy to determine how much computing effort it took to solve the problem and the solution must otherwise have no value, either practical or intellectual".

Proof-of-work is a key concept to bitcoins and cryptographic currencies in a broad sense, since it prevents undiscriminated issuing of the currency, which would turn it into an impractical idea.

## 5. DOUBLE-SPENDING

Only the proof-of-work is not enough to enforce the correct transaction flow on crytpocurrencies. On the conventional ones, this flow occurs in a trivial way. Let $A$ and $B$ be two imaginary persons. Whenever a payment is made, person $A$ gives the money to person $B$ and should receive the expected goods or services for that amount. It is now impossible to person $A$ to spend the same banknote with a distinct operation, since the physical bill is not in possession of him anymore.

However, the conventional bills can be counterfeited. With physical bills, the solution by the issuing body is to make counterfeiting hard, since they have the printing monopoly. Obviously, digital coins have the same issue. Generally, it is used a centralized model, where a central authority validates the transaction, or grants the right to another institution to do it. This occurs, for instance, with banks. They have the authorization of some monetary institution, like the central bank, to make those transactions, which are accepted by the system, in an operation known as clearing.[18]

The double-spending is the analog concept to counterfeiting on physical money, but for digital currencies. For criptocurrencies, it is necessary to verify, whenever you receive an unit of money, if that same unity, represented by a hash, was used by the same person on a different transaction.[19] Namely, even if someone knows a valid hash, is necessary to verify the real owner of the hash.

Cryptocurrencies can solve this problem with two approaches: centralized or decentralized. Each currency implements its own solution to the problem. According to Nakamoto (2011), bitcoins uses a decentralized methodology. Each transaction is recorded, and it is propagated by the P2P network. This avoids that some specific node has significant importance on the process of exchanging bitcoins.

[17] http://www.math.ucsd.edu/ jverstra/dirichletbox.pdf

[18] https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/glossaryrelatedtopaymentclearingandsettlementsystemsen.pdf

[19] This of course does not imply that one user cannot use the same hash twice. If he spends the money, and then receive the same money in the future, he can receive it. What he cannot do is to spend the same hash twice at the same time.

## 6. BITCOINS

### 6.1. Overview

Bitcoin is a criptocurrency.[20] It is the first real implementation of the initial idea from Wei Dai, that he firstly called B-Money. One of the key concepts to bitcoins is the decentralization. As mentioned before, this is possible by using the P2P protocol, that creates an autonomous transaction and proof-of-work verification network. It is also the most widespread used currently.[21]

Next the previously enumerated concepts will be analyzed, but in a specific fashion in relation to its implementation on the bitcoin protocol, and also another aspects related to the currency.

### 6.2. Double-spending

On bitcoins, the double-spending is avoided by verifying the public ledger, which is a bookkeeping of the transactions made with bitcoins since its creation. This inquiry is also decentralized using the P2P network. Therefore, all the transactions with a given bitcoin can be traced back to the moment of its creation.[22]

Obviously, this implies on the problem of defrauding the block chain[23] itself. Some malicious agent can modify the block chain in its own benefit. Again, the solution to this problem is act decentralized, which is a central idea on the concept of bitcoins. According to King, Williams, and Yanofsky (2013), "the first thing that bitcoin does to secure the ledger is decentralize it. There is no huge spreadsheet being stored on a server somewhere. There is no master document at all".

Actually, the ledger is split in two parts. Each block contains the activity of transactions from until 10 minutes ago. King et al. (2013) says that "the ledger is broken up into blocks: discrete transaction logs that contain 10 minutes worth of bitcoin activity apiece. Every block includes a reference to the block that came before it, and you can follow the links backward from the most recent block to the very first block, when bitcoin creator Satoshi Nakamoto conjured the first bitcoins into existence".

Also, it is necessary to digitally sign the transactions, which means that there must be a hash algorithm validating the transaction, and then it is added to the block and distributed on the P2P network, and therefore the other miners[24] will know the existence and attest or not the validity of the transaction. If there is an attempt of inserting an invalid transaction on the block, it will be refused by the other network nodes. Hence, most of the nodes must adhere to a new protocol in order to be accepted as a valid change.[25] That shows how important is the concept of decentralizing on bitcoins concept.

### 6.3. Proof-of-work

The proof-of-work on bitcoins is given by creating a digest produced by an algorithm created by the NSA known as SHA-256C.[26] This is algorithm receive a string (objects that represent sequences of characters) with an arbitrary size, and returns a string with 64 characters. For instance, the string "`Bitcoins`" generates the following digest:[27]

```
aa0921d24d095df038a0c0a32eb0d644f1882e3a0a3d8814175c4e1cebbf84fb
```

[20] http://bitcoin.org/en/faq#what-is-bitcoin

[21] http://www.forbes.com/sites/reuvencohen/2013/11/27/the-top-30-crypto-currency-market-capitalizations-in-one-place/

[22] http://qz.com/154877/by-reading-this-page-you-are-mining-bitcoins/

[23] The public ledger containing all transactions. See https://blockchain.info/wallet/bitcoin-faq.

[24] Computer program that is designed to execute the algorithm to generate bitcoins.

[25] This concept is analogous to what happens on the popular file transfer network, bittorrent.

[26] http://tools.ietf.org/search/rfc4634
http://csrc.nist.gov/groups/STM/cavp/documents/shs/sha256-384-512.pdf

[27] http://www.cplusplus.com/reference/string/string/

While the string "cryptocurrencies" generates the following digest:

```
471a97f90b5df17b2f4a79d40f5d5d73fd6c46df96b34d2334c68aea90a8494b
```

The digests generated by this algorithm are on the hexadecimal format.[28]

On the bitcoins protocol, there is a rule that is necessary in order to generate a valid hash: it must possess a certain amount of leading zeros. The actual amount of zeros determines the difficulty level: the bigger the number of leading zeros needed, the harder is to find a valid result. This difficult is automatically adjusted by the network itself, according to the mining rate.[29] Therefore, none of the previous hashes are actual bitcoins: the first one starts with "aa0" and the second one starts with "471". If the difficulty is low, then a low number of leading zeros is needed to compose a valid bitcoin. For instance, the difficult can be to find only one leading zero, then any string on the format "0..." is valid, whereas if the protocol only authorizes two zeros, then a valid hash should follow the pattern "00...". Since the string size is fixed on 64 characters, each additional leading zero diminish the total number of possibilities, therefore making the mining process more difficult.

This is the general concept, but in practice it works slightly different. The input string is the previous transaction block, to which is added a random number with the intention of changing the resulting hash. This number is called *nonce*.[30] The idea behind the nonce is to generate a completely different hash. As we seen before, any minor change on the input string should result on a very different hash. For instance, let "Hello World!0" be our input string. Applying the SHA-256 algorithm to this string, the following hash will be yielded:

```
1312af178c253f84028d480a6adc1e25e81caa44c749ec81976192e2ec934c64
```

If there is a minor change on the end of the string, replacing the "0" for a "1", the new string will be "Hello World!1". This new string will result in the following hash:

```
e9afc424b79e4f6ab42d99c81156d3a17228d6e1eef4139be78e948a9332a7d8
```

None of those hashes is valid as bitcoins, because they do not start with zeros.

Let $x$ be the ending number. If we keep incrementing $x$ by one, we will eventually find a valid bitcoin. Suppose that the difficult is set to three leading zeros. Then we are looking for a hash such as

$$H = \text{SHA256}(\text{"Hello World!"} + x) \mid H = \text{"000..."}$$

Starting with $x = 1$, the following hashes will be yielded:[31]

```
Hello, World!1    ⇒   1312af...
Hello, World!2    ⇒   e9afc4...
Hello, World!3    ⇒   ae3734...
      ⋮           ⋮       ⋮
Hello, World!4248 ⇒   6e110d...
Hello, World!4249 ⇒   c00419...
Hello, World!4250 ⇒   0000c3...
```

[28] http://mathworld.wolfram.com/Hexadecimal.html

[29] This rate can be defined as how much bitcoins will be mined on a given period of time.

[30] https://en.bitcoin.it/wiki/Proof_of_work

[31] The results were truncated to the first 6 characters. The complete hashes, with 64 characters, can be calculated at http://www.xorbin.com/tools/sha256-hash-calculator.

So, the nonce 4250 outputs a valid bitcoin. An interesting fact about this is that the previous nonce, 4249, generates what one can perceive as an "almost" valid bitcoin, because its leading pattern is "c00". This does not means that this number is actually "closer" to a valid bitcoin than any other non-valid nonce. Each additional attempt of mining a valid bitcoin does not leaves one "closer" to get a valid hash. This is analog to rolling a 6 faced dice $n-1$ times without getting a 3, and expect to have a greater chance of rolling a 3 in the $n$th throw. This is a fallacy, known as "Gambler's Fallacy".[32]

This is a very simplified explanation of how the proof-of-work is operated on bitcoins. In reality, the protocol is more complex than that, and the blocks have a predefined format, which is part of bitcoins protocol.[33]

### 6.4. Privacy

On the bitcoins protocol, there is the possibility of encrypting the transactions, making more difficult or practically impossible to determine the source or the destination of the transaction. This is done throughout the concept of private and public keys. Despite this fact, this is not an intrinsic characteristic of the protocol, and is up to the parties involved in the transaction to determine whether it will be encrypted, since all transactions are publicly available on the chain block, as mentioned before.

Regular banks protect this kind of information using their own software. On the bitcoins protocol, this is up to the users. Despite that, there is a strong correlation between bitcoins and anonymity. According to Reid and Harrigan (2011), "anonymity is not a prominent design goal of Bitcoin. However, Bitcoin is often referred to as being anonymous. We have performed a passive analysis of anonymity in the Bitcoin system using publicly available data and tools from network analysis. The results show that the actions of many users are far from anonymous".

Obviously, anonymity concerns the governments, because it makes difficult to trace criminal action such as drug dealing, and make easy to avoid taxes. The Silk Road website allowed users to buy drugs in some sort of auction.[34] A lot of criticism was made to bitcoins because it diminishes the risk and facilitates access to the so-called black markets.[35]

### 6.5. Regulation

Despite the fact of association with bitcoins and its illegal usage, the regulation upon it is relatively weak. Recently, the Singapore government became the first one to give instructions on how bitcoins will be taxed, which was a pioneering act, since most of the governments are not clear regarding this issue.[36]

As mentioned before, Thailand was the first country to ban bitcoins activities, but other countries seems permissive in regarding to the use of the currency. In Brazil, for instance, some stores accept bitcoins.[37] Those questions are not completely clear, but the discussion caused by bitcoins will probably bring the governmental attention to the matter.

[32] http://www.nizkor.org/features/fallacies/gamblers-fallacy.html

[33] https://en.bitcoin.it/wiki/FAQ#How_does_the_proof-of-work_system_help_secure_Bitcoin.3F

[34] http://www.theatlantic.com/technology/archive/2011/06/libertarian-dream-a-site-where-you-buy-drugs-with-digital-dollars/239776/

[35] http://www.forbes.com/forbes/2011/0509/technology-psilocybin-bitcoins-gavin-andresen-crypto-currency.html

[36] http://venturebeat.com/2014/01/10/singapore-clarifies-tax-on-bitcoin-exchanges-and-sales/

[37] http://lojabitcoin.blogspot.com.br/

### 6.6. Supply cap

Since the maximum number of hashes that are valid as bitcoins will diminish with the ongoing mining, there will be a moment that all mined out, and therefore creation of new coins will be impossible. This event will occur in some date circa 2140, and then it will be 21 millions of bitcoins in the economy.[38]

As the proof-of-work is the only effective way of generating bitcoins, and since there is a maximum amount of bitcoins, an inflationary outbreak seems unlikely. Unlikely the conventional fiat money, which makes possible for the government to take arbitrary decisions that create inflation, the bitcoins are generated according to a mathematical model that allows precise predictions regarding the amount of the supply on a given period time.

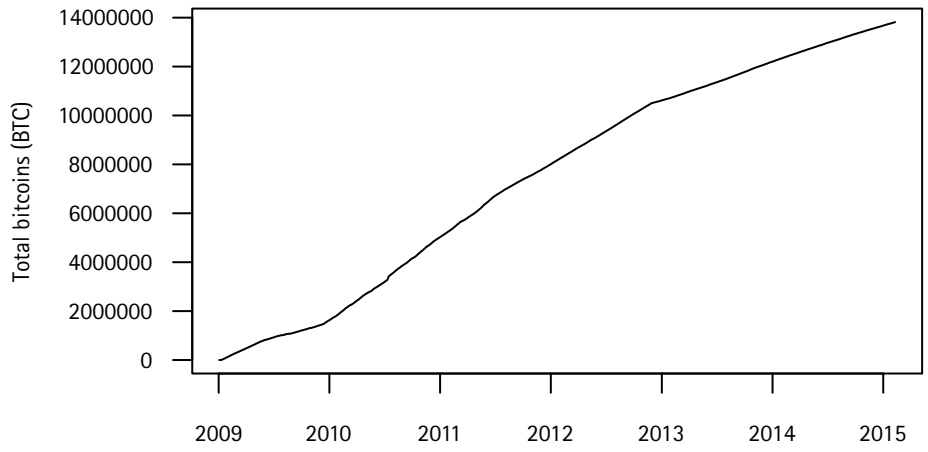
### 6.7. Deflationary spiral

Deflationary spiral is a situation "where falling prices, defaults, bankruptcies, and falling wages reinforce each other in a continuous cycle".[39] Hypothetically, this could lead to the complete failure of an entire economic system.[40]

Since bitcoins have a limited amount, there were concerns that a deflationary spiral would be inevitable, because the holders of the money would hold it, since the deflation means that the money will have a greater value in a future time. However, according to Roberts (2011, as cited in Simonite (2011)), "(deflation) is considered very destructive in today's economies, mostly because when it occurs, it is unexpected (but) in a Bitcoin world, everyone would anticipate that, and they know what they got paid would buy more then than it would now".

What can be expected on currencies with well-defined supply limits differs slightly from what happens with traditional fiat money. According to Simonite (2011), "the consequence will likely be slow and steady deflation, as the growth in circulating bitcoins declines and their value rises".

**Figure 2.** Bitcoins growth rate is almost linear: total bitcoins in circulation. (Source data: blockchain.info)

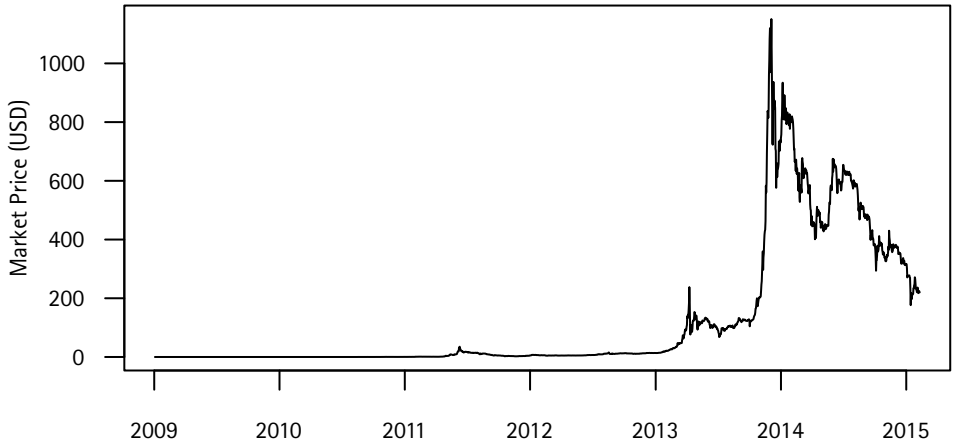



[38] https://en.bitcoin.it/wiki/Bitcoin

[39] http://snbchf.com/economic-theory/deflationary-spiral/

[40] http://web.mit.edu/krugman/www/spiral.html

**Figure 3.** Bitcoins had a strong appreciation against the US dollar: Market Price (USD). (Source data: blockchain.info)




### 6.8. Criticism

Some experts were harsh on criticizing bitcoins. Nevertheless, there is a lot of misunderstanding involving the bitcoins concepts. The president of the north-american company PayPal, David Marcus, said that bitcoins is not a currency.[41] However, even amongst those who do consider bitcoins as a currency, there is some criticism.

One of the points is that the bitcoins generates a huge waste of computational resources. The estimated processing power of the bitcoins network is 130 petaflops.[42] The computational power of the FoldingHome project, which simulates the folding of proteins for medical research, is around 12 petaflops.[43] In Iceland, there is a giant data center which only goal is to mine bitcoins.[44] Therefore, the central argument lies in the assumption that such power could be used with other intentions. Indeed, some criptocurrencies do use part of the processing power for other ends. For instance, Gridcoins transfer part of the miner's processors to scientific calculations,[45] through the BOINC network.[46]

Another source of criticism regards the transaction costs with bitcoins. According to the critics, there is lack of knowledge regarding the mechanics of that costs, which leads many uses to believe that transactions are free. Actually, according to Levine (2014), "as of today miners took home about 3.5 percent of the value of transactions that they processed. Which is more than credit card companies".

As mentioned before, there is also those who says that bitcoins enhance the black market and outlaw activities such as money laundry, and also that the criptocurrency is more useful to criminal then to ordinary people. Furthermore, they say that bitcoins create a kind of "criminal paradise".[47] Also, they say that bitcoins is not immune to stealing. Recently, a website which intent was to sell drugs had

[41] http://venturebeat.com/2013/12/10/paypal-president-on-bitcoin-i-dont-think-it-is-a-currency/

[42] A petaflop is a measure of processing power, and is defined as one thousand trillion operations with floating points per second. See http://petaflop.info/.

[43] https://folding.stanford.edu/home/past-the-10-petaflop-scale/

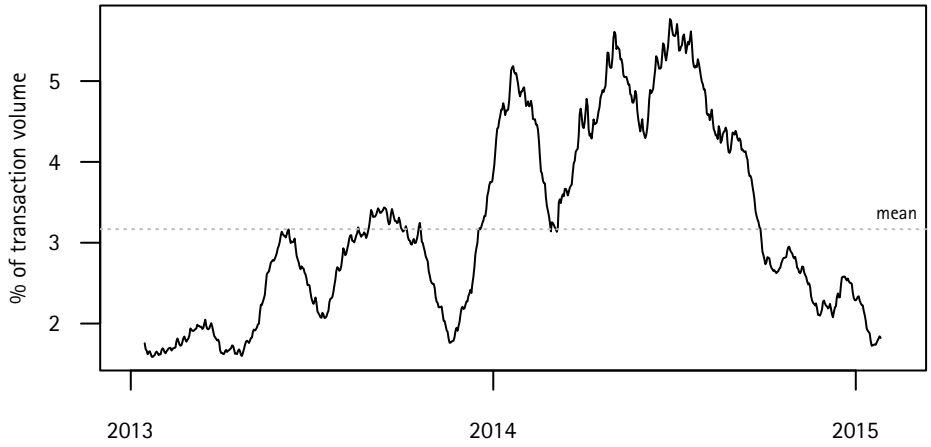
[44] http://dealbook.nytimes.com/2013/12/21/into-the-bitcoin-mines/?_r=0

[45] http://www.gridcoin.us
http://bitcoinmagazine.com/13187/putting-the-blockchain-to-work-for-science-gridcoin

[46] http://boinc.berkeley.edu

[47] http://www.businessinsider.com/bitcoin-libertarian-paradise-would-be-hell-on-earth-2013-12

**Figure 4.** Transaction costs in bitcoins as a percentage of transaction volume—30-day moving average. (Source data: blockchain.info)




more than 100 million US dollar worth of bitcoins stolen.[48] There was also an incident in China where 5 million US dollars worth of bitcoins vanished from a platform known as GBL (Global Bond Limited). The creators of the platform allegedly did it deliberately, effectively stealing their client's money.[49] Those are not isolated incidents, but one of the main causes of problems regarding security is the lack of proper actions by the user themselves. Similarly to other online operations, is necessary to handle bitcoins transaction with proper care.

In March 2014, Autumn Radtke, First Meta's CEO, allegedly committed suicide in her private domicile in Singapore. According to the English news website, *Daily Mail*, "The death of Radtke is the latest piece of bad news to hit the crisis-ridden bitcoin currency following the collapse of the Japanese-based Mt Gox exchange last week after $400m went missing and the closure of the Flexcoin bank yesterday in Canada after computer hackers robbed $600,000".[50]

Criptocurrencies in general were also criticized on money laundering grounds. According to Marian (2013), "as demonstrated by recent events, virtual currencies present regulators with significant challenges. On May 23, 2013, the U.S. federal government brought an indictment against the operators of Liberty Reserve, a popular virtual currency, charging the operators with money laundering and operating an unlicensed money-transmitting business". On the specific case of bitcoins, the question of whether it facilitates or not the evasion of taxes is open, but some even call the criptocurrency a "tax haven[51] or "the ultimate offshore bank account".[52]

According to those critics, bitcoins, unlike the traditional tax havens, are harder to uncover because they lack the necessity of having a bank, therefore they are anonymous and harder for a government to track.[53] In light of those facts, Marian (2013) says that he believes that "tax-evaders—under the threat of the new regime—may soon abandon traditional tax-haven jurisdictions in favor of cryptocurrencies".

[48] http://www.businessinsider.com/220-million-sheep-marketplace-bitcoin-theft-chase-2013-12

[49] http://rt.com/business/banshee-bitcoin-vanish-china-601/

[50] http://www.dailymail.co.uk/news/article-2573863/Bitcoin-exchange-CEO-dead-home-suspected-suicide-age-28.html#ixzz3C50UTYu6

[51] http://www.politico.com/story/2013/08/bitcoin-tax-haven-95420.html

[52] https://economicsandliberty.wordpress.com/2011/08/23/bitcoin-the-ultimate-offshore-bank-account/

[53] http://www.dailydot.com/business/bitcoin-offshore-tax-haven/

Nevertheless, this is not currently a problem for policymakers, but should become one in the future. As Marian (2013) exposes it, "given the small volume of the current Bitcoin market, it is hard to imagine that the tax evasion associated with it is of any real significance. Most commentators, however, expect the markets of Bitcoin and other cryptocurrencies to grow over the next few years". Since the professor's assumption that "cryptocurrencies offer, at least theoretically, a near-perfect alternative to tax-evaders who can no longer find a safe haven in tax-haven jurisdictions" (Marian, 2013), governments must prepare for the challenge of adapting their tax collection plan in a world in which criptocurrencies are a commonplace.

## 7. CONCLUSION

The concept of cryptocurrencies, despite being new, is a subject that has an increasing attention. There are many open questions regarding those currencies. The purpose of the present work is to mitigate, at least superficially, most of the common questions about this new format of money.

Despite not being the only cryptocurrency, bitcoins has been the most successful one in terms of generating public attention. Maybe one of the reasons for that is because it was the first one to be used in a considerable scale. Some stores already accept it, and even large companies, such as Dell, are beginning to accept bitcoins,[54] which clearly makes the cryptocurrency a predecessor. Many other currencies where created after bitcoins. Some of them suffer from the same problems, and others have advantages that bitcoins do not possess. It is hard to foresee which of those will succeed, but we can consider the bitcoin a relatively success in terms of its usage and the news volume that it generates.

It was also possible to determine that bitcoins will have a minor deflationary characteristic. Deflation is a subject that raise concerns upon many economists, since it had devastating consequences to the Japan's economy on the 1990 decade, for example. According to Ito and Mishkin (2004, p. 2), it was a lost decade for the Asian country. Nevertheless, as discussed, bitcoin's deflation should be small and predictable, and therefore it does not seems to be a structural problem within the currency.

We also observed a lot of criticism to the widespread usage of bitcoins. There is almost a dichotomy between those who thinks that bitcoins will solve a lot of current problems in the economic system created by fiat money, and those who thinks that cryptocurrencies like bitcoins have a highly destructive potential to society itself.

## REFERENCES

Adams, C. (1985, Oct.). What happend to all the gold Spain got from the New World? *The Chicago Reader*. Retrieved from http://www.straightdope.com/columns/read/611/what-happened-to-all-the-gold-spain-got-from-the-new-world

Boeykens, C. (2007, Sept.). Paper money, a Chinese invention? *Museum of the National Bank of Belgium*. Retrieved from http://www.nbbmuseum.be/2007/09/chinese-invention.htm

Dai, W. (1998). b-money: A scheme for a group of untraceable digital pseudonyms to pay each other with money and to enforce contracts amongst themselves without outside help. *weidai.com*. Retrieved from http://www.weidai.com/bmoney.txt

Friedl, S. (2005, May). *An illustrated guide to cryptographic hashes.* unixwiz.net: Steve Friedl UNIXWIZ.NET. Retrieved from http://www.unixwiz.net/techtips/iguide-crypto-hashes.html

Friedman, M. (1970). *The counter-revolution in monetary theory*. Transatlantic Arts.

Grignon, P. (2009, June 17). *Digital coin in brief.* Retrieved from https://archive.org/details/Digital_Coin_in_Brief_07-17-09

Hamilton, E. J. (1936, Dec.). Money, prices and wages in Valencia, Aragon and Navarre, 1351–1500. *Journal of the American Statistical Association*, *31*, 800–802.

[54] http://www.dell.com/learn/us/en/uscorp1/campaigns/bitcoin-marketing

Ito, T., & Mishkin, F. S. (2004, Oct.). *Two decades of Japanese monetary policy and the deflation problem* (NBER Working Paper 10878). Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research. Retrieved from http://www.nber.org/papers/w10878.pdf

Kann, E. (1963). *kann's history of Chinese paper money (ancient)* (Vol. I). International Banknote Society.

King, R. S., Williams, S., & Yanofsky, D. (2013, Dec. 17). *By reading this article, you're mining bitcoins.* Retrieved from http://qz.com/154877/by-reading-this-page-you-are-mining-bitcoins

Levine, M. (2014, Jan. 2). bitcoin is an expensive way to pay for stuff. *BloombergView*. Retrieved from http://www.bloombergview.com/articles/2014-01-02/bitcoin-is-an-expensive-way-to-pay-for-stuff

Lipsey, R. G. (1979). *An introduction to positive economics* (5th ed.). Weidenfeld & Nicolson.

Marian, O. (2013, Oct. 1). Are cryptocurrencies super tax havens? *112 Michigan Law Review First Impressions*, *38*. Retrieved from http://ssrn.com/abstract=2305863

Melik, J. (2012, Oct. 2). Digital currency: Brave new world or criminal haven? *BBC: Business Daily*. Retrieved from http://www.bbc.co.uk/news/business-19785935

Nakamoto, S. (2011, Sept.). *Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system* (Tech. Rep.). www.bitcoin.org. Retrieved from http://bitcoin.org/bitcoin.pdf

Passos, C. R. M., & Nogami, O. (2003). *Princípios de economia*. Thomson.

Patil, A. (2013, June 25). Phishers claim to ensure security for digital currency users. *Symantec: Security Response Blog*. Retrieved from http://www.symantec.com/connect/blogs/phishers-claim-ensure-security-digital-currency-users

Reid, F., & Harrigan, M. (2011, Sept. 30). *bitcoin is not anonymous.* Fergal Reid's blog. Retrieved from http://anonymity-in-bitcoin.blogspot.com.br/2011/07/bitcoin-is-not-anonymous.html

Reinhart, C. M., & Sbrancia, M. B. (2011). *The liquidation of government debt* (NBER Working Paper No. 16893). Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research. Retrieved from http://www.nber.org/papers/w16893

Roberts, R. (2011, Apr. 4). *Andresen on bitcoin and virtual currency* [interview (podcast)]. Retrieved from http://www.econtalk.org/archives/2011/04/andresen_on_bit.html

Rogoff, K. S., & Reinhart, C. M. (2010). *Oito séculos de delírios financeiros* [This time is different: Eight centuries of financial folly]. Rio de Janeiro: Campus Editora.

Simonite, T. (2011, May 25). What bitcoin is, and why it matters. *MIT Technology Review*. Retrieved from http://www.technologyreview.com/news/424091/what-bitcoin-is-and-why-it-matters

Trotman, A. (2013, July 29). Bitcoins banned in Thailand. *The Telegraph*. Retrieved from http://www.telegraph.co.uk/finance/currency/10210022/Bitcoins-banned-in-Thailand.html

## A. APPENDIX

### A.1. Terminology

Since this paper deals with a relatively new concept, the naming of the involved terms is not completely accepted, established or well-defined. There were a significant effort to use the current naming from the community, but without a strict formal concert about the terms.

Some literatures bring the term virtual coins on the same meaning that the present paper uses for digital coins (or even digital currencies), on the terms of a non-physical variation of fiat money. Actually, for the community, the concept of virtual coins is associated with online gaming, like World of Warcraft, and therefore have completely distinct characteristics from those mentioned.

### A.2. Sources

Most of the content regarding bitcoins are available on the internet. There are few academic research on the subject. Besides, since bitcoins brings a lot of new concepts to currencies, the subjects discussed on this paper suffer from constant update and change. This may lead to probable discrepancy between what is said here and what the sources actually said.

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150002
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 17–51

# A Desigualdade Pode Afetar a Eficiência do Sistema Financeiro? Um Modelo de Equilíbrio em Dois Períodos com Fricções na Intermediação Financeira.

Wenersamy Ramos de Alcântara[*], Daniela P. R. de Alcântara[†], José Maria F. J. da Silveira[‡]

**Sumário:** **1. Introdução; 2. Definição do modelo; 3. Carteira ótima de investimento para um dado nível de recursos excedentes; 4. Solução do programa de otimização; 5. Similação Numérica do Equilíbrio; 6. Análise dos resultados; A. Apêndice: Caracterização do parâmetro de desigualdade $\gamma$.**

**Palavras-chave:** **Sistema Financeiro, Eficiência, Desigualdade, Fricções, Crescimento Endógeno.**

**Códigos JEL:** **D31, O16.**

Este trabalho apresenta um modelo de equilíbrio que mostra um canal através do qual a desigualdade na distribuição de riqueza pode afetar o desenvolvimento do sistema financeiro. Na presença de fricções, nominalmente: um limite à proporção de dívida nos projetos financiados pelos bancos e um tamanho mínimo dos projetos disponíveis na economia, mostramos que a desigualdade pode afetar o volume intermediado pelo sistema financeiro e consequentemente, considerando ganhos de escala, sua eficiência. Simulações com diversas parametrizações revelam uma relação não linear e não monotônica entre desigualdade e eficiência do sistema financeiro, medida pelo *spread* entre captação e concessão de empréstimos.

*This study presents an equilibrium model that shows a channel through which wealth inequality may affect the financial system development. In the presence frictions, namely, a limit to the proportion of debt in projects financed by banks and a minimum size of projects available in the economy, we show that inequality may negatively affect the volume of resources intermediated by the financial system and, hence, its efficiency, given the assumed gains of scale. Simulations under several parameterizations reveal a non-linear, non-monotonic relation between inequality and financial system efficiency, as measured by the spread between borrowing and lending.*

[*]Professor das Faculdades Alfa, Faculdade Projeção e Analista do Banco Central do Brasil. SBS Quadra 3 Bloco B, Edifício Sede 14° Andar, Brasília, DF. CEP 70074-900. E-mail: wenersamy.alcantara@alfa.br

[†]Analista do Banco Central do Brasil. E-mail: pires.daniela@gmail.com

[‡]Professor do Departamento de Economia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). E-mail: jmsilv@eco.unicamp.br

## 1. INTRODUÇÃO

A relação entre desigualdade e o desenvolvimento do sistema financeiro foi avaliada em trabalhos como os de Aghion e Bolton (1997) e Beck, Demirguc-Kunt e Levine (2005), indicando que imperfeições do mercado financeiro, tais como custos de transação e de informação, afetam especialmente os indivíduos mais pobres por não possuírem acesso a garantias reais. Estas restrições de crédito podem impedir o acesso de indivíduos mais pobres a projetos de alto retorno, dada a dificuldade de obter financiamento pelo mercado financeiro, um dos tópicos abordado pelas Nações Unidas sobre políticas contra a desigualdade (United Nations, 2013). Um sistema financeiro menos acessível e menos eficiente, por sua vez, tem impactos negativos no desenvolvimento e crescimento econômico e também na distribuição de renda, como em Li, Squire e Zou (1998). Para os autores, os resultados encontrados se devem ao aumento do acesso ao crédito aos mais pobres, o que lhes permite fazer investimentos produtivos. Este trabalho investiga um canal para a influência no sentido inverso, ou seja, a desigualdade como obstáculo ao desenvolvimento do sistema financeiro. É possível, portanto, que exista endogeneidade na relação entre o desenvolvimento do sistema financeiro e a distribuição de renda.

O pressuposto do modelo é a existência de ganhos de escala na atividade bancária. Considera-se que o banco incorre em custos fixos para manter sua capacidade de análise de crédito e esta capacidade já é suficiente para atender qualquer número de clientes, não havendo necessidade de novos investimentos no horizonte de decisões analisado. Dessa maneira, o custo marginal da unidade monetária emprestada, seja a clientes antigos ou novos clientes, é apenas o seu custo de captação: a remuneração dos depósitos. Como resultado, a eficiência do sistema aumenta com o aumento das receitas advindas do volume de empréstimos multiplicado pelo *spread* entre captação e empréstimo. As restrições de investimento mínimo e de crédito, contudo, impedem que uma parte da com população com menos recursos tome crédito para investir em projetos, limitando a capacidade do sistema financeiro de converter poupança em investimento e, consequentemente, limitando o crescimento da economia. O menor volume de recursos que circula no sistema financeiro reduz sua eficiência tanto mais quanto mais desigual for a sociedade, resultando em maiores spreads e menor produção da economia como um todo. Assim, o canal através do qual a distribuição de renda afeta a eficiência do sistema financeiro é a escala, dada pelo volume de recursos transferidos entre poupadores e investidores. Como os bancos apresentam ganhos de escala, quanto maior o volume transacionado, menor pode ser a diferença entre a taxa cobrada pelos empréstimos e a taxa oferecida para depósito, ou seja, o spread, que será usado como medida da ineficiência do sistema financeiro.

Dos resultados do modelo, observou-se que este efeito compete com outro: quanto menor a desigualdade e a restrição ao investimento mínimo, menor a necessidade de empréstimos e de um sistema financeiro para reduzir os custos de coordenação, já que os agentes possuem dotação suficiente para investir no projeto por conta própria, se assim o decidirem. Quanto menor a desigualdade, mais importante esse efeito, e para desigualdades muito baixas ele domina o efeito dos ganhos de escala, levando a uma menor eficiência do sistema financeiro em termos de menores volumes e maiores spreads. O resultado final é que, dadas as restrições ao investimento e à concessão de crédito, há uma distribuição de renda intermediária para a qual a eficiência do sistema financeiro é máxima e o crescimento da economia através do investimento em ativos reais é o maior possível.

Em resumo, este trabalho busca investigar a relação entre a eficiência do sistema financeiro e a desigualdade através de um modelo de equilíbrio em dois períodos, com agentes avessos ao risco e que tomam decisões entre consumo e investimento na presença de um sistema financeiro simplificado que aufere lucro pela diferença entre as taxas de captação de recursos e de empréstimos. Ao especificar diferenças nas dotações iniciais de riqueza dos indivíduos na presença de fricções (restrição ao crédito e ao investimento mínimo), esta abordagem permite mostrar que a desigualdade também afeta a própria eficiência do sistema financeiro.

## 2. DEFINIÇÃO DO MODELO

Inicialmente serão definidos os agentes econômicos, sua distribuição de riqueza e o parâmetro do modelo que está associado à desigualdade. Também serão descritos os projetos disponíveis na economia, sujeitos a restrições de investimento mínimo e, finalmente, será descrito o setor bancário, cujo lucro depende do volume transacionado e do spread. Nesta economia simplificada, há apenas dois preços: a taxa cobrada pelos bancos para empréstimos e a taxa que os bancos pagam pelos depósitos. Esses preços e a distribuição de riqueza afetam a decisão de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que, por sua vez, afetam o volume que equilibra poupança e investimento, bem como o lucro dos bancos.

Nessa economia simplificada, há apenas dois preços: a taxa cobrada pelos bancos para empréstimos e a taxa que os bancos pagam pelos depósitos. Esses preços e a distribuição de riqueza, dadas as fricções modeladas, afetam a decisão de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que, por sua vez, afeta o volume que equilibra poupança e investimento e o lucro dos bancos de modo que as taxas de empréstimo e captação e a decisão poupança e investimento são definidos conjuntamente. O problema será encontrar a combinação de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que maximiza a sua utilidade, sujeita às restrições de crédito e de nível mínimo de investimento, e escolher as taxas de captação e empréstimo que garantam que a poupança seja igual ao investimento e que o lucro dos bancos seja máximo.

### 2.1. Dotação inicial

Considere, portanto, uma população contínua de agentes econômicos indexados por $i \in [0,1]$ que devem decidir como consumir completamente sua riqueza ou dotação inicial $d_{0,i}$ ao longo de dois períodos: $t = 0$ e $t = 1$. Assume-se que tais agentes sejam avessos ao risco e possuam preferências intertemporais que admitam representação por uma função utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern. Particularmente, usaremos a função:[1]

$$U_i = \log c_{0,i} + \rho_i \log c_{1,i}\,, \tag{1}$$

em que $c_{0,i}$ e $c_{1,i}$ representam, respectivamente, o consumo em $t = 0$ e $t = 1$ do indivíduo $i$, e $\rho_i$ corresponde a uma taxa de desconto da utilidade do consumo futuro, o que influencia a preferência relativa na decisão entre consumir no presente ou consumir no futuro. Tradicionalmente assume-se que os agentes econômicos sejam impacientes e que, portanto, $0 \leq \rho_i \leq 1$. É possível assumir, sem perda de generalidade, que a distribuição de riqueza seja uma função monotônica não decrescente de $i$, de modo que $a > b \Rightarrow d_{0,a} \geq d_{0,b}$. Adicionalmente, para evitar formalismos desnecessários, considere que $d_{0,i}$ seja contínua e sempre positiva. Nestas condições, a riqueza total inicial da população de agentes será dada por:

$$D_0 = \int_0^1 d_{0,i}\,\mathrm{d}i\,, \tag{2}$$

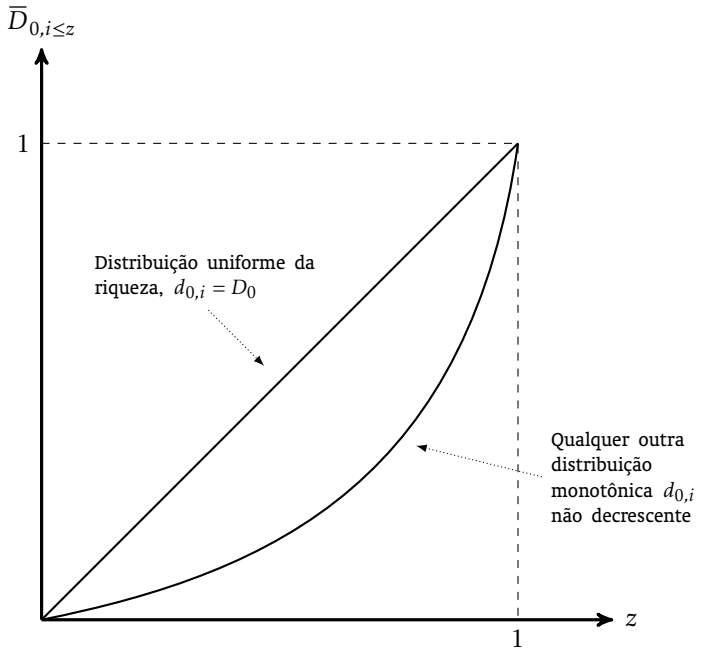
de modo que a riqueza inicial de um quantil $z$ da população como proporção da riqueza total pode ser dada por:

$$\overline{D}_{0,i\leq z} = \int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0}\,\mathrm{d}i\,, \tag{3}$$

e é possível representar a distribuição de riqueza graficamente como na Figura 1. Como $\overline{D}_{0,i\leq z} \leq z$, a

[1] Essa função utilidade apresenta aversão ao risco relativa constante (CRRA) e igual a 1, tem razoável aderência empírica e resulta em decisões de investimentos sem efeito riqueza.

**Figura 1.** Representação da distribuição da riqueza.




diferença entre a área abaixo da reta e a área abaixo de $\overline{D}_{0,i\leq z}$ pode ser utilizada como uma medida de desigualdade. Tal medida é usualmente conhecida como índice de Gini, que neste caso será dado por

$$\text{Gini} = 1 - 2\int_0^1 \overline{D}_{0,i\leq z}\,\mathrm{d}z = 1 - 2\int_0^1\int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0}\,\mathrm{d}i\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Assumiremos que a distribuição de riqueza seja exponencial, de modo que a riqueza inicial será dada por

$$d_{0,i} = Ae^{\gamma i}, \tag{5}$$

em que $A$ é um fator de escala e $\gamma$ está relacionado com a desigualdade na distribuição de riqueza, já que quando $\gamma$ é muito pequeno $d_{0,i} = Ae^{\gamma i}$ aproxima-se da distribuição uniforme e quando $\gamma$ cresce a diferença entre o mais pobre e o mais rico aumenta exponencialmente.

A riqueza total da população no período $t = 0$ será, portanto,

$$D_0 = \int_0^1 d_{0,i}\,\mathrm{d}i = \int_0^1 Ae^{\gamma i}\,\mathrm{d}i = \frac{A}{\gamma}e^{\gamma i}\Big|_0^1 = A\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}; \tag{6}$$

e a riqueza inicial de um quantil $z$ da população como proporção da riqueza total será dada por

$$\overline{D}_{0,i\leq z} = \int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0}\,\mathrm{d}i = \frac{1}{D_0}\int_0^z Ae^{\gamma i}\,\mathrm{d}i = \frac{A}{D_0\gamma}e^{\gamma i}\Big|_0^z = \frac{A}{D_0}\frac{e^{\gamma z}-1}{\gamma} = \frac{e^{\gamma z}-1}{e^{\gamma}-1}. \tag{7}$$

O índice de Gini será então

$$\begin{aligned} &\text{Gini} = 1 - 2\int_0^1 \overline{D}_{0,i\leq z}\,\mathrm{d}z = 1 - 2\int_0^1 \frac{e^{\gamma z}-1}{e^{\gamma}-1}\,\mathrm{d}z \\ \Longrightarrow\quad &\text{Gini} = 1 - 2\frac{(e^{\gamma}-1)-\gamma}{e^{\gamma}-1} \end{aligned} \tag{8}$$

para todo $\gamma > 0$. No Apêndice A demonstramos que o índice de Gini é uma função estritamente crescente de $\gamma$, de modo que quanto maior $\gamma$, maior a desigualdade, como mostrado na Figura 2.

Os agentes econômicos têm a opção de usar parte de sua riqueza não consumida em $t = 0$ para investir em um projeto disponível na economia. A riqueza gerada em $t = 1$ pelo projeto depende da riqueza investida pelo agente $i$, $k_i$, e do sucesso do projeto. O projeto será modelado como um experimento de Bernoulli, possuindo uma probabilidade $\pi$ se ser bem sucedido, caso em que gera a riqueza $k_i(1 + r^S)$, e uma probabilidade $1 - \pi$ de fracasso, situação em que gera uma riqueza $k_i(1 + r^F)$, sendo que $r^S > 0$ é o retorno em caso de sucesso e $r^F \in (-1, r^S)$ é o retorno ocorrendo fracasso. Ao estipularmos que $r^F > -1$, estamos assumindo que a responsabilidade sobre os investimentos é limitada ao capital investido.[2] A variável aleatória correspondente ao retorno do projeto será denotada por $\tilde{r}$.

Note que o retorno esperado e a variância do retorno são dados, respectivamente, por

$$E\left[\tilde{r}_j\right] = \pi r^S + (1 - \pi) r^F \tag{9}$$

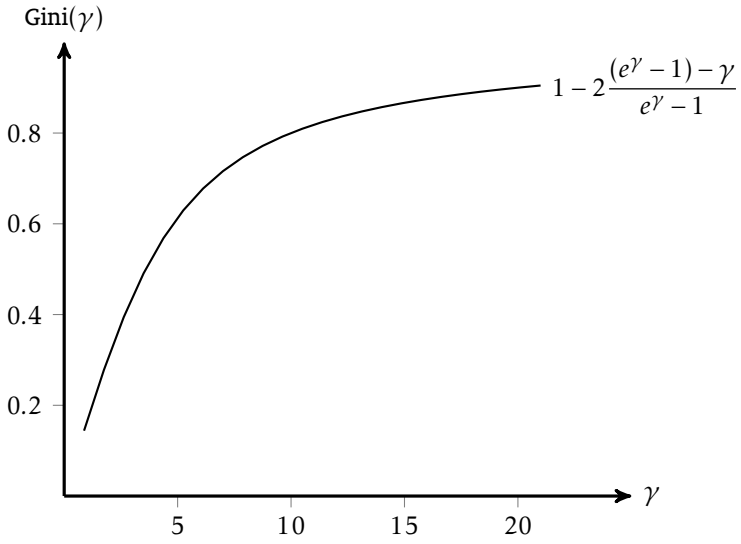
e

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{r}) &= \pi\left(r^S - E[r]\right)^2 + (1 - \pi)\left(r^F - E\left[\tilde{r}\right]\right)^2 \\ &= \pi\left(r^S\right)^2 + (1 - \pi)\left(r^F\right)^2 - E^2\left[\tilde{r}\right] \qquad (10) \\ &= \pi(1 - \pi)\left(r^S - r^F\right)^2. \qquad (11) \end{aligned}$$

Note ainda que o produto $\left(\pi r^S + (1 - \pi) r^F\right)\left((1 - \pi) r^S + \pi r^F\right)$ está relacionado com a variância

$$\left(\pi r^S + (1 - \pi) r^F\right)\left((1 - \pi) r^S + \pi r^F\right) = \sigma^2(\tilde{r}) + r^S r^F. \tag{12}$$

**Figura 2.** Índice de Gini em função de $\gamma$.




[2] De fato, a responsabilidade limitada é equivalente a $r^F \geq -1$, ou seja, a responsabilidade do acionista limita-se a 100% dos bens investidos em ativos da empresa (retorno limitado inferiormente em $-1$ ou 100% de perda), não atingindo sua riqueza pessoal (perda de mais de 100%). A exclusão da igualdade, resultando em $r^F > -1$, simplificará alguns resultados sem qualquer prejuízo para as conclusões do modelo.

Adicionalmente, assume-se que seja necessário um capital mínimo para que se possa fazer o investimento, denotado por $K$, embora não haja limitação quanto ao total de recursos investidos por todos os agentes ou por um deles, individualmente, sendo necessário, portanto, que $k_i \geq K$.

### 2.2. Intermediação financeira

Para todos os efeitos, o sistema financeiro será modelado como um único banco, de modo que questões relacionadas à concorrência não serão analisadas. Assume-se que o banco tenha um custo fixo de monitoração em $t = 0$ denotado por $C_{SF}$, independente do volume de recursos transacionados, levando a ganhos de escala.[3]

Considera-se que o custo marginal do banco seja exclusivamente o custo de captação dos depósitos. Como todos os empréstimos devem ser pagos um período adiante e não há possibilidade de saques antes disso, não há depósitos compulsórios e a questão da gestão da liquidez e das corridas bancárias não serão analisadas. Cada agente pode depositar, em $t = 0$, um montante $p_i$ no sistema financeiro, correspondente a uma poupança de parte dos seus recursos excedentes ao consumo, pelo que receberá em $t = 1$ o montante $p_i(1+r_p)$, $r_p > 0$. Um agente também tem a possibilidade de tomar um empréstimo em $t = 0$ no valor ib junto aos bancos, pelo qual terá que pagar $b_i(1 + r_b)$ em $t = 1$, de modo que:

$$r_b > r_p. \tag{13}$$

O trabalho de Aghion e Howitt (1998) sugere uma limitação no crédito proporcional à riqueza inicial para incluir imperfeições de mercado no modelo. No modelo aqui apresentado, como toda a riqueza está disponível no primeiro período e parte dela será usada para consumo e não para investimento, é razoável assumir que os bancos só aceitarão fornecer crédito sobre uma fração do investimento, caso contrário não haverá recursos para pagar o empréstimo. O crédito dependerá, portanto, das garantias e do risco do projeto, e não da riqueza do investidor. Agentes com menor riqueza inicial, contudo, continuarão privados de crédito porque a fração do investimento inicial que precisa ser financiada é muito grande. Assim, o montante máximo que será emprestado a um agente será:

$$b_{i,\max} = \alpha k_i, \tag{14}$$

indicando que o sistema financeiro aceita financiar uma fração $0 < \alpha < 1$ de cada projeto. Um valor conservador para $\alpha$ é

$$\alpha = \frac{(1 + r^F)}{(1 + r_b)}. \tag{15}$$

Essa definição garante que mesmo em caso de falha no projeto restariam garantias suficientes para pagar integralmente a dívida: o banco aceitará financiar o valor terminal do projeto no pior caso, ou seja, no caso de falha, descontado a valor presente pelo custo do empréstimo. Note que o pressuposto de responsabilidade limitada garante que $(1 + r^F)/(1 + r_b) > 0$. Adicionalmente, como será mostrado em detalhes adiante, para que coexistam depósitos e investimentos na economia é necessário ter $r_b > r^F$. Tal relação, por sua vez, garante que $(1 + r^F)/(1 + r_b) < 1$, logo, a utilização de (15) garante que $0 < \alpha < 1$.

A primeira condição de equilíbrio de mercado no presente modelo é que os montantes depositados e emprestados sejam os mesmos:

$$\int_0^1 b_i \, \mathrm{d}i = \int_0^1 p_i \, \mathrm{d}i. \tag{16}$$

[3] Este pressuposto assume que o banco presta um serviço de monitoração delegada (Diamond, 1984), um conceito que pode ser usado para explicar por que bancos atraem depósitos apesar de serem sujeitos a corridas bancárias (Diamond & Dybvig, 1983). É interessante ressaltar, contudo, que enquanto nos modelos de Diamond e Dybvig os agentes são homogêneos, o presente modelo requer heterogeneidade. Isto ocorre porque se deseja mostrar exatamente como a distribuição de riqueza impacta o equilíbrio na presença de fricções na intermediação financeira. Assim, as fricções do sistema financeiro no presente modelo apenas afetam o equilíbrio se houver heterogeneidade, caso contrário, o único equilíbrio possível é o de autarquia, conforme será mostrado ao final da discussão da seção 2.3.

Quando há uma única taxa para emprestar e tomar emprestado, a condição (16) é suficiente para garantir o equilíbrio. No presente caso, contudo, podem existir diversos pares de valores para $r_p$ e $r_b$ que garantem que a quantidade ofertada de recursos seja igual à quantidade demandada, sendo necessária uma segunda condição.

A riqueza produzida pelo sistema financeiro será dada pelo spread entre o retorno dos empréstimos e o custo dos depósitos multiplicado pelo montante total transacionado. Esta riqueza corresponde a um retorno $r_{SF}$ sobre $C_{SF}$, que os bancos tentarão maximizar:

$$\begin{aligned} r_{SF} &= \frac{1}{C_{SF}}\left(r_b \int_0^1 b_i \,\mathrm{d}i - r_p \int_0^1 p_i \,\mathrm{d}i\right) - 1 \\ &= \frac{1}{C_{SF}}\left(r_b - r_p\right)\int_0^1 b_i \,\mathrm{d}i - 1 \\ &= \frac{1}{C_{SF}}\left(r_b - r_p\right)\int_0^1 p_i \,\mathrm{d}i - 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Os bancos escolherão o par de taxas $r_p$ e $r_b$ que satisfaz (16) e resulta no maior valor para $r_{SF}$. A segunda condição de equilíbrio é, portanto, que (17) seja máximo.

### 2.3. Condição de maximização

O consumo de cada agente em $t = 0$ e em $t = 1$ será dado por

$$\begin{aligned} c_{0,i} &= d_{0,i} - k_i - p_i + b_i; \\ c_{1,i} &= (1+\tilde{r})\,k_i + \left(1 + r_p\right)p_i - (1 + b_b)\,b_i, \end{aligned} \tag{18}$$

em que $k_i$, $p_i$ e $b_i$ serão escolhidos de modo a maximizar a utilidade esperada do agente, resultando no programa de otimização dado por

$$\begin{aligned} \max_{b_i,p_i,k_i} \mathrm{E}[U_i] &= \ln c_{0,i} + \rho_i \,\mathrm{E}\lfloor \ln c_{1,i} \rfloor \\ \text{s.a.} \quad &\text{i)} \;\; 0 \le b_i \le \alpha k_i \\ &\text{ii)} \;\; p_i \ge 0 \\ &\text{iii)} \;\; k_i = 0 \quad \text{ou} \quad k_i \ge K \\ &\text{iv)} \;\; 0 < c_{0,i} < d_{0,i}. \end{aligned} \tag{19}$$

Pela condição (iv) assume-se que os extremos $c_{0,i} = 0$ e $c_{0,i} = d_{0,i}$ não ocorrem, em primeiro lugar, por não fazerem parte do domínio da função utilidade esperada (já que teríamos consumo zero no primeiro ou no segundo período). Em segundo lugar, o fato da utilidade esperada tender a $-\infty$ em qualquer um dos casos tem um significado econômico: o indivíduo tem necessidades mínimas em ambos os períodos e ter consumo nulo em qualquer um deles é inaceitável.

Cumpre observar que um agente maximizador de utilidade nunca escolherá $p_i > 0$ e $b_i > 0$ simultaneamente, já que o custo do empréstimo é maior que o rendimento do depósito. Também nunca ocorrerá o caso em que $k_i = p_i = 0$, pois implicaria em $b_i = 0$ (já que não há investimento em projeto) e, consequentemente, $c_{1,i} = 0$, cuja possibilidade já foi excluída pela condição (iv) em (19). Dessa maneira, poderão ocorrer apenas os seguintes casos:

**Caso A:** $b_i = 0$ e $k_i \ge K$ (o agente investe a riqueza excedente ao consumo em uma carteira de depósito e investimento em um projeto);

**Caso B:** $b_i = 0$ e $k_i = 0$ (o agente simplesmente faz depósito da riqueza excedente ao consumo no período inicial);

**Caso C:** $p_i = 0$ e $k_i \geq K$ (o agente usa sua riqueza e possivelmente um empréstimo para investir em um projeto).

Dadas as observações acima, é possível reespecificar (19) de forma mais conveniente. De início, definiremos os recursos excedentes ao consumo no primeiro período como

$$s_i = d_{0,i} - c_{0,i}. \tag{20}$$

Também é possível definir a proporção de $s_i$ investida no projeto:

$$\omega_i^k = \frac{k_i}{s_i}, \tag{21}$$

e a proporção de $s_i$ investida em poupança ou tomada de empréstimo:

$$\omega_i^{p,b} = \frac{p_i - b_i}{s_i}, \tag{22}$$

de modo que

$$\omega_i^k + \omega_i^{p,b} = 1. \tag{23}$$

Como não ocorre $p_i > 0$ e $b_i > 0$ simultaneamente, tem-se $\omega_i^{p,b} = p_i/s_i$ caso o agente decida fazer o depósito e $\omega_i^{p,b} = -b_i/s_i$ caso o agente decida tomar um empréstimo. Usando (23), para cada valor de $\omega_i^k$ existe um único valor de $\omega_i^{p,b}$ possível dado por

$$\omega_i^{p,b} = 1 - \omega_i^k, \tag{24}$$

de modo que, por simplicidade, será usado apenas $\omega_i = \omega_i^k$ no resto do texto.

Por (24), o consumo no segundo período pode ser reescrito como

$$c_{1,i} = s_i\Big((1+\tilde{r})\,\omega_i + (1 + r(\omega_i))(1-\omega_i)\Big), \tag{25}$$

em que

$$r(\omega_i) = \begin{cases} r_p, & \text{se } \omega_i \leq 1, \\ r_b & \text{se } \omega_i > 1. \end{cases} \tag{26}$$

Finalmente, definindo

$$f(\omega_i, s_i) = \mathrm{E}\Big[\ln c_{1,i}\Big] = \mathrm{E}\Big[\ln\Big\{s_i\Big((1+\tilde{r})\,\omega_i + (1 + r(\omega_i))(1-\omega_i)\Big)\Big\}\Big] \tag{27}$$

e usando as definições de (21) a (26), o programa de otimização em (19) pode ser reespecificado como

$$\begin{aligned} \max_{\omega_i, s_i} & \Big\{\ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i)\Big\} \\ \text{s.a.} \quad & \text{i)} \;\; s_i\left(\omega_i^k - 1\right) \leq \alpha k_i = \alpha \omega_i^k s_i \implies \omega_i^k \leq \frac{1}{1-\alpha} \\ & \text{ii)} \;\; \omega_i^k = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_i^k \geq \frac{K}{s_i} \\ & \text{iii)} \;\; 0 < s_i < d_{0,i}. \end{aligned} \tag{28}$$

Adicionalmente, as relações (22) e (24) resultam em $(1-\omega_i)s_i = p_i - b_i$, o que permite reescrever a condição de equilíbrio de mercado em (16) como

$$\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right)s_i^* \,\mathrm{d}i = 0, \tag{29}$$

em que $\omega_i^*$ e $s_i^*$ são as soluções da otimização (28) para cada a agente econômico $i$. Da mesma maneira, é possível reescrever o retorno para os bancos em (17) como

$$r_{\text{SF}} = \frac{-\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right)s_i^* r\left(\omega_i^*\right)\mathrm{d}i}{C_{\text{SF}}} - 1 = \frac{-\int_0^1 \left(\omega_i^*-1\right)s_i^* r\left(\omega_i^*\right)\mathrm{d}i}{C_{\text{SF}}} - 1. \tag{30}$$

Desta forma, a economia estará em equilíbrio e as taxas de captação e empréstimo bem definidas quando: (i) a utilidade dos agentes, sujeita às restrições de investimento e tomada de empréstimo, for máxima, conforme (28); (ii) a poupança for igual ao investimento, conforme (29); e (iii) o retorno para os bancos em (30) for máximo.

Ao decidir o consumo no período inicial, o agente automaticamente decide o valor $s_i$ dos recursos excedentes. Na próxima seção será analisada a alocação destes recursos, que corresponde à decisão de quanto poupar e de quanto investir no projeto. Tal decisão é sujeita às restrições de riqueza, investimento mínimo e valor máximo do empréstimo que pode ser obtido através dos bancos, considerados o retorno do depósito, o custo do empréstimo e o risco e retorno do investimento no projeto disponível na economia.

## 3. CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTO PARA UM DADO NÍVEL DE RECURSOS EXCEDENTES

Antes de resolvermos a otimização (28), será útil analisarmos o comportamento do valor ótimo de $\omega_i$, que define a alocação de recursos excedentes entre projeto, poupança e empréstimo, para um dado valor $s_i = x_0$, de modo que seja possível pesquisar algumas condições de regularidade bem como particularidades do problema como definido neste modelo. Essa alocação ótima será representada por $\omega_i^*|_{s_i=x_0}$ e, como a utilidade do primeiro período só depende de $s_i$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\omega_i^*|_{s_i=x_0} &= \underset{\omega_i\in\{0\}\cup\left[\frac{K}{s_i},\frac{1}{1-\alpha}\right]}{\arg\max}\ \mathrm{E}\left[\ln\left\{s_i\left(\omega_i(1+\tilde{r})+(1-\omega_i)\left(1+r(\omega_i)\right)\right)\right\}\right] \\
&= \underset{\omega_i\in\{0\}\cup\left[\frac{K}{s_i},\frac{1}{1-\alpha}\right]}{\arg\max}\ \mathrm{E}\left[\ln s_i + \ln\left(\omega_i(1+\tilde{r})+(1-\omega_i)\left(1+r(\omega_i)\right)\right)\right] \\
&= \underset{\omega_i\in\{0\}\cup\left[\frac{K}{s_i},\frac{1}{1-\alpha}\right]}{\arg\max}\ \mathrm{E}\left[\ln\left(\omega_i(1+\tilde{r})+(1-\omega_i)\left(1+r(\omega_i)\right)\right)\right] \\
&= \underset{\omega_i\in\{0\}\cup\left[\frac{K}{s_i},\frac{1}{1-\alpha}\right]}{\arg\max}\ \Big\{\pi\ln\left(\omega_i(1+r^{\text{S}})+(1-\omega_i)\left(1+r(\omega_i)\right)\right) \\
&\qquad\qquad + (1-\pi)\ln\left(\omega_i(1+r^{\text{F}})+(1-\omega_i)\left(1+r(\omega_i)\right)\right)\Big\} \\
&= \underset{\omega_i\in\{0\}\cup\left[\frac{K}{s_i},\frac{1}{1-\alpha}\right]}{\arg\max}\ \Big\{\pi\ln\left(\omega_i(r^{\text{S}}-r(\omega_i))+(1+r(\omega_i))\right) \\
&\qquad\qquad + (1-\pi)\ln\left(\omega_i(r^{\text{F}}-r(\omega_i))+(1+r(\omega_i))\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{31}$$

Se $K/s_i > 1/(1-\alpha)$ então $\omega_i^*|_{s_i=x_0} = 0$, de modo que nenhum agente com $K/d_{0,i} > 1/(1-\alpha) \Rightarrow d_{0,i} < (1-\alpha)K$ poderá investir no projeto.

Neste ponto, cabe estabelecer algumas condições de regularidade para os retornos dos projetos. Como $r^S > r^F$, há três intervalos abertos em que $r(\omega_i)$ pode estar. Estes intervalos são considerados abertos para evitar a igualdade e simplificar a manipulação algébrica quando termos em $r^S - r(\omega_i)$ ou $r(\omega_i) - r^F$ estiverem no denominador. Se $r_p$ estiver à direita de $r^S$ ou à esquerda de $r^F$, há dominância estocástica de primeira ordem do depósito ou do investimento no projeto, respectivamente, e a utilidade esperada no segundo período será claramente máxima quando $\omega_i = 0$, se $r_p > r^S > r^F$, ou $\omega_i = 1$, se $r^S > r^F > r_p$, de modo que um dos dois, depósito ou investimento, nunca seria feito: se a taxa de equilíbrio $r_p$ for muito alta, nenhum projeto na economia será feito, mas se for muito baixa, nenhum depósito será feito e não existirá intermediação financeira.

Em relação a $r_b$, dado que $r^S > r^F > r_b \implies r^S > r^F > r_p$, ao excluirmos a possibilidade de que $r^S > r^F > r_p$ também estamos admitindo que não ocorre $r^S > r^F > r_b$. Adicionalmente, $r_b > r^S > r^F$ também não pode ocorrer, pois isso implicaria na inviabilidade do financiamento dos projetos com dívida, já que a contração de dívida para investimento em projetos significaria simplesmente a redução de riqueza no segundo período. Como estamos admitindo que toda a dotação está disponível no primeiro período, neste caso também não haveria necessidade da intermediação financeira. Assim, a própria existência do sistema financeiro e a coexistência de depósitos e investimentos em projetos na economia, estes últimos possivelmente financiados com dívida, pressupõem que a remuneração dos depósitos e o custo das dívidas sejam tais que

$$r^S > r(\omega_i) > r^F, \tag{32}$$

para qualquer valor de $\omega_i$.

A análise mais importante que pode ser tirada de (31), contudo, é que, a menos das restrições, a alocação ótima independe de $s_i$, e este fato, essencial para a solução final do problema, pode ser estabelecido como

$$\omega_i^0|_{s_i=x_0} = \omega_i^0, \tag{33}$$

ou seja, a alocação ótima irrestrita no segundo período para $s_i = x_0$, representada por $\omega_i^0|_{s_i=x_0}$, é igual à alocação ótima irrestrita no segundo período qualquer que seja o valor de $s_i$, representada por $\omega_i^0$.

Para achar tal alocação, independente de restrições, inicialmente é necessário estudar o comportamento da expressão $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ que se deseja maximizar em (31). $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ é definida e contínua entre

$$\omega_i(r^S - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) = 0 \implies \omega_i = -\frac{1 + r(\omega_i)}{r^S - r(\omega_i)} \tag{34}$$

e

$$\omega_i(r^F - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) = 0 \implies \omega_i = \frac{1 + r(\omega_i)}{r(\omega_i) - r^F}. \tag{35}$$

De $r^S > r(\omega_i)$ resulta que (34) é sempre menor que zero e, portanto, $r(\omega_i) = r_p$. Por outro lado, de $r(\omega_i) > r^F > -1$ resulta que (35) é sempre maior que 1, de modo que neste caso, $r(\omega_i) = r_b$. Como resultado, o domínio de $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ em função de $\omega_i$ é

$$\mathrm{Dom}\left(\mathrm{E}\left[\ln\frac{c_{1,i}}{s_i}\right]\right) = \left\{ \omega_i \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1 + r_p}{r^S - r_p} < \omega_i < \frac{1 + r_b}{r_b - r^F} \right\}. \tag{36}$$

É interessante notar que, dada a condição de regularidade 32, a restrição (ii) do programa de otimização (28) torna irrelevante o lado esquerdo de (36). Já o lado direito da condição de regularidade (36)

pode tornar irrelevante a restrição (i) em (28) caso ocorra

$$\frac{1}{1-\alpha} > \frac{1+r_b}{r_b - r^{\mathrm{F}}} \implies r_b - r^{\mathrm{F}} > 1 + r_b - \alpha - \alpha r_b$$
$$\alpha\,(1+r_b) > 1 + r^{\mathrm{F}}$$
$$\alpha > \frac{1+r^{\mathrm{F}}}{1+r_b},$$

ou seja, se a restrição ao crédito for pouco rigorosa, ela torna-se irrelevante frente ao risco de perdas com o projeto. Dessa maneira, assumiremos que

$$\alpha \leq \frac{1+r^{\mathrm{F}}}{1+r_b}, \tag{37}$$

de modo que (32) em conjunto com a restrição (i) em (28), assumindo que vale (37), garantem que (36) seja obedecida. É importante ressaltar que a igualdade em (37) corresponde à utilização de (15) para a restrição de crédito, que já é conservadora. Agora se demonstra outra propriedade desejável de tal relação: sua utilização garante que $\omega_i$ obedeça (36).

Para se encontrar o máximo de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ em (36), faz-se necessário analisar suas derivadas onde estas estão definidas. A primeira derivada parcial em relação a $\omega_i$ é:

$$\frac{\partial\,\mathrm{E}\left[\ln\dfrac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial\omega_i} = \pi\frac{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i\right)}{\omega_i\left(r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i\right)\right)} + (1-\pi)\frac{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i\right)}{\omega_i\left(r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i\right)\right)}, \tag{38}$$

que não é definida em $\omega_i = 1$, já que $r\left(\omega_i\right)$ não é diferenciável nesse ponto. Embora $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ não seja diferenciável em $\omega_i = 1$, é possível encontrar os limites laterais da derivada:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_i \to 1^-} \frac{\partial\,\mathrm{E}\left[\ln\dfrac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial\omega_i} &= \pi\frac{r^{\mathrm{S}} - r_p}{1\times\left(r^{\mathrm{S}} - r_p\right) + \left(1 + r_p\right)} + (1-\pi)\frac{r^{\mathrm{F}} - r_p}{1\times\left(r^{\mathrm{F}} - r_p\right) + \left(1 + r_p\right)} \\
&= \frac{\pi\left(r^{\mathrm{S}} - r_p\right)}{1 + r^{\mathrm{S}}} + \frac{(1-\pi)\left(r^{\mathrm{F}} - r_p\right)}{1 + r^{\mathrm{F}}} \\
&= \frac{\pi\left(r^{\mathrm{S}} - r_p\right)(1 + r^{\mathrm{F}}) + (1-\pi)\left(r^{\mathrm{F}} - r_p\right)(1 + r^{\mathrm{S}})}{(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})} \\
&= \frac{\mathrm{E}\left[\tilde{r}\right] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}} - r_p\left(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right)}{(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})} \\
&= \frac{\left(\mathrm{E}\left[\tilde{r}\right] - r_p\right)\left(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right) - \sigma^2\left(\tilde{r}\right)}{(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})},
\end{aligned} \tag{39}$$

em que o último passo vem de (12). De modo análogo, obtém-se

$$\lim_{\omega_i \to 1^-} \frac{\partial\,\mathrm{E}\left[\ln\dfrac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial\omega_i} = \frac{\left(\mathrm{E}\left[\tilde{r}\right] - r_p\right)\left(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right) - \sigma^2\left(\tilde{r}\right)}{(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})} \tag{40}$$

Como $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ é contínua em $\omega_i = 1$ (ou seja, os seus limites laterais são iguais ao seu valor em $\omega_i = 1$), $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ possui um canto em $\omega_i = 1$ após o qual a derivada varia bruscamente.

Além disso, de $r^{\mathrm{F}} > -1$ resulta que $1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}} > (1-\pi)(1+r^{\mathrm{S}}) > 0$,[4] e como $r_b > r_p$, a variação brusca após o canto em $\omega_i = 1$ é negativa e a derivada diminui de valor.

A segunda derivada parcial em relação a $\omega_i$ é

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}\left[\ln \frac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial \omega_i^2} = -\pi \left( \frac{r^{\mathrm{S}} - r(\omega_i)}{\omega_i (r^{\mathrm{S}} - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i))} \right)^2 - (1-\pi) \left( \frac{r^{\mathrm{F}} - r(\omega_i)}{\omega_i (r^{\mathrm{S}} - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i))} \right)^2, \quad (41)$$

que também não está definida em $\omega_i = 1$.

Como $r^{\mathrm{S}} > r(\omega_i) > r^{\mathrm{F}}$, (41) é obviamente negativa em todos os pontos em que é contínua e a primeira derivada é estritamente decrescente nos intervalos em que também é contínua, além de variar negativamente ao passar pelo seu ponto de descontinuidade em $\omega_i = 1$. Se (39) e (40) tiverem sinais opostos, ou se um deles tiver valor nulo, então $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ cresce (a taxas decrescentes) até $\omega_i = 1$ e decresce a partir daí, de modo que $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ terá um máximo global em $\omega_i = 1$.

Alternativamente, se (39) e (40) forem diferentes de zero e possuírem o mesmo sinal, $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ terá um máximo global quando (38) for igual a zero. Esse máximo global ocorrerá para $\omega_i = \omega_i^0$, tal que:

$$\begin{aligned}
&\pi \frac{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)}{\omega_i^0 (1 + r^{\mathrm{S}}) + \left(1 - \omega_i^0\right)\left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)} + (1-\pi) \frac{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)}{\omega_i^0 (1 + r^{\mathrm{F}}) + \left(1 - \omega_i^0\right)\left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \pi \frac{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)}{\omega_i^0 \left(r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)} = (\pi - 1) \frac{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)}{\omega_i^0 \left(r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)} \\
& \pi \frac{\omega_i^0 \left(r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)}{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)} = (\pi - 1) \frac{\omega_i^0 \left(r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)\right) + \left(1 + r\left(\omega_i^0\right)\right)}{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)} \\
& \pi \left( \omega_i^0 + \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)} \right) = (\pi - 1) \left( \omega_i^0 + \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)} \right) \\
& \omega_i^0 = -\pi \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{F}} - r\left(\omega_i^0\right)} + (\pi - 1) \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)} \\
& \omega_i^0 = \pi \left( \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r\left(\omega_i^0\right) - r^{\mathrm{F}}} \right) + (1 - \pi) \left( - \frac{1 + r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}} - r\left(\omega_i^0\right)} \right),
\end{aligned} \quad (42)$$

que é uma média ponderada pelas probabilidades $\pi$ e $1 - \pi$ dos pontos de descontinuidade (34) e (35), de modo que $\omega_i^0$ seguramente pertence ao domínio de $\mathrm{E}[\ln(c_{1,i}/s_i)]$ se assumirmos que $0 < \pi < 1$, pois se $\pi = 0$ ou $\pi = 1$ teríamos o mesmo problema de dominância estocástica de primeira ordem que foi evitado ao assumirmos que $r^{\mathrm{S}}$ e $r^{\mathrm{F}}$ são tais que $r^{\mathrm{S}} > r(\omega_i) > r^{\mathrm{F}}$.

Nestas condições e dado $\omega_i \neq 1$, existe uma vizinhança ao redor de $\omega_i^0$ em que (38) é contínua, mudando de sinal nesta vizinhança: é positiva à esquerda de $\omega_i^0$ e negativa à direita, já que (38) é estritamente decrescente. Se (39) e (40) forem ambos negativos, então $\omega_i = 1$ ocorre à direita de $\omega_i^0$ e, portanto, $\omega_i^0 < 1$. Se (39) e (40) forem ambos positivos, então $\omega_i = 1$ ocorre à esquerda de $\omega_i^0$ e, portanto, $\omega_i^0 > 1$.

Adicionalmente, como $\omega_i < 0$ não pode ser solução para o problema (31), se $\omega_i^0 \leq 0$, então a utilidade esperada para $\omega_i \geq 0$ estará num trecho decrescente (derivada negativa), e o máximo, considerando-se

[4] $r^{\mathrm{F}} > -1 \implies \pi r^{\mathrm{F}} > -\pi \implies 1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}} > (1-\pi) + (1-\pi) r^{\mathrm{S}} \implies 1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}} > (1-\pi)\left(1 + r^{\mathrm{S}}\right) > 0.$

a restrição $\omega_i \geq 0$, ocorrerá para $\omega_i^* = 0$, ou seja, ninguém, independentemente da riqueza inicial, terá interesse em investir no projeto, logo, qualquer projeto viável na economia deverá ser tal que $\omega_i^0 > 0$:

$$\begin{aligned}
\omega_i^0 > 0 \implies \pi \frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r\left(\omega_i^0\right)-r^{\mathrm{F}}} + (1-\pi)\left(-\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}}-r\left(\omega_i^0\right)}\right) > 0 & \\
\pi \frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r\left(\omega_i^0\right)-r^{\mathrm{F}}} > (1-\pi)\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}}-r\left(\omega_i^0\right)} & \\
\pi \frac{1}{r\left(\omega_i^0\right)-r^{\mathrm{F}}} > (1-\pi)\frac{1}{r^{\mathrm{S}}-r\left(\omega_i^0\right)} & \quad \text{pois } 1+r\left(\omega_i^0\right) > 0 \\
\pi\left(r^{\mathrm{S}}-r\left(\omega_i^0\right)\right) > (1-\pi)\left(r\left(\omega_i^0\right)-r^{\mathrm{F}}\right) & \quad \text{pois } r^{\mathrm{S}} > r\left(\omega_i^0\right) > r^{\mathrm{F}} \\
\pi r^{\mathrm{S}} - \pi r\left(\omega_i^0\right) > (1-\pi) r\left(\omega_i^0\right) - (1-\pi) r^{\mathrm{F}} & \\
\pi r^{\mathrm{S}} + (1-\pi) r^{\mathrm{F}} > (1-\pi) r\left(\omega_i^0\right) + \pi r\left(\omega_i^0\right) & \\
\mathrm{E}[\tilde{r}] > r\left(\omega_i^0\right), &
\end{aligned} \tag{43}$$

ou seja, um projeto só será viável se seu retorno esperado for maior que o retorno certo do depósito ou que o custo do empréstimo usado para financiá-lo. Este resultado era esperado já que a utilidade logarítmica é côncava e, portanto, apresenta aversão ao risco.

Em resumo, há três possibilidades para o comportamento de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ dependendo dos valores de $\pi$, $r^{\mathrm{S}}$ e $r^{\mathrm{F}}$, que definem o risco e retorno do projeto, e das taxas de equilíbrio da economia, $r_p$ e $r_b$. A primeira possibilidade é que (39) e (40) possuam sinais opostos ou uma delas possua valor nulo, caso em que o máximo global de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ ocorre para $\omega_i = 1$. Um exemplo deste caso é apresentado na Figura 3.

A segunda possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas negativas, implicando em $r\left(\omega_i^0\right) < 1$, como mostrado na Figura 4.

Finalmente, a terceira possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas positivas, resultando em $\omega_i^0 > 1$ (Figura 5).

Como (39) é sempre maior que (40), as derivadas laterais serão positivas quando (40) for positivo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}} - r_b\left(1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right)}{\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)} = \frac{\left(\mathrm{E}[\tilde{r}] - r_b\right)\left(1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right) - \sigma^2(\tilde{r})}{\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)} > 0 \\
&\implies r_p < r_b < \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} = \mathrm{E}[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}},
\end{aligned} \tag{44}$$

negativas quando (39) for negativo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}} - r_p\left(1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right)}{\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)} = \frac{\left(\mathrm{E}[\tilde{r}] - r_p\right)\left(1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right) - \sigma^2(\tilde{r})}{\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)} < 0 \\
&\implies r_b > r_p > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} = \mathrm{E}[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}},
\end{aligned} \tag{45}$$

e haverá máximo global em $\omega_i = 1$ nos casos intermediários:

$$r_b \geq \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} = \mathrm{E}[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} \geq r_p. \tag{46}$$

**Figura 3.** Máximo global de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ em $\omega_i = 1$ quando as derivadas laterais possuem sinais distintos. Neste exemplo $\pi = 59\,\%$, $r^{\mathrm{S}} = 25\,\%$, $r^{\mathrm{F}} = -5\,\%$, $r_p = 10\,\%$ e $r_b = 12\,\%$.

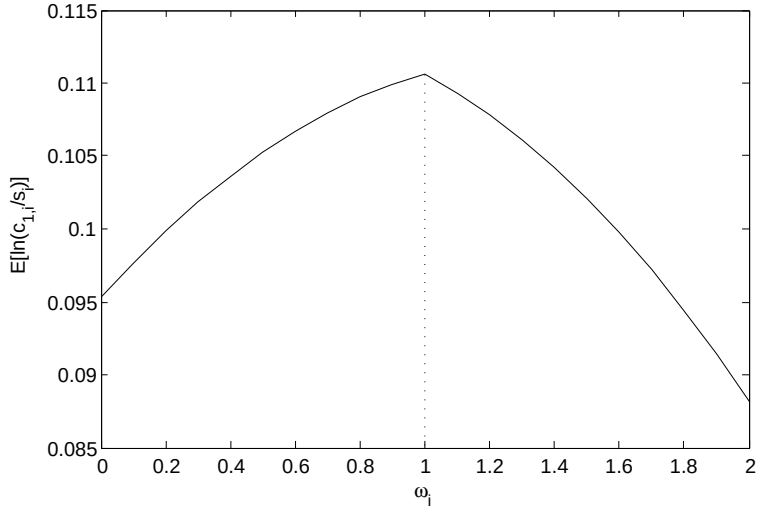
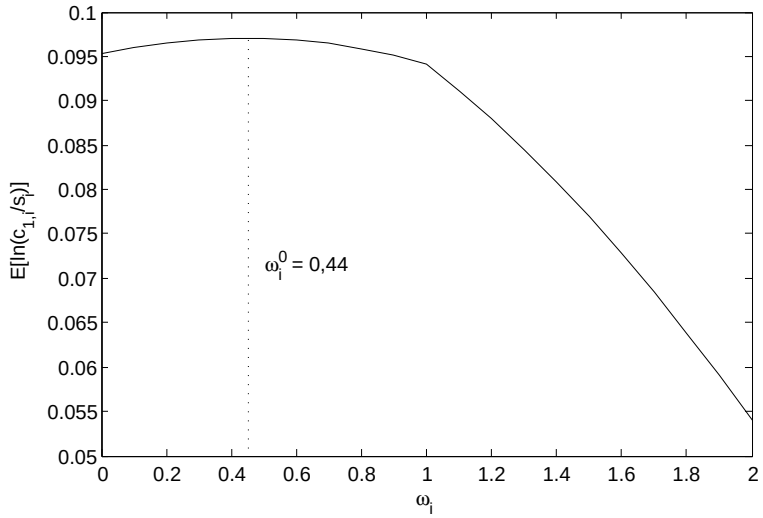


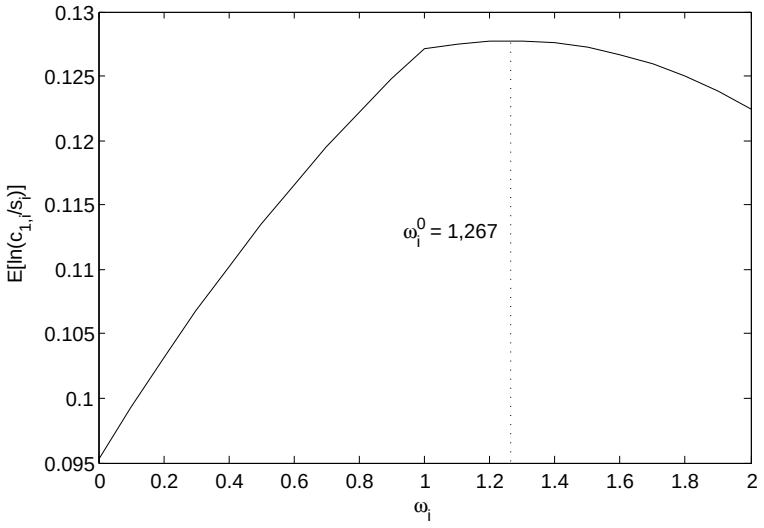

**Figura 4.** Máximo global de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ em $\omega_i = 0{,}44 < 1$ quando as derivadas laterais são negativas. Neste exemplo $\pi = 53\,\%$, $r^{\mathrm{S}} = 25\,\%$, $r^{\mathrm{F}} = -5\,\%$, $r_p = 10\,\%$ e $r_b = 12\,\%$.




Ou seja, lembrando que $\mathrm{E}\left[\tilde{r}\right] > r_b > r_p$ é uma condição de regularidade, o resultado final dependerá do risco do projeto. Dado um nível de retorno $\mathrm{E}\left[\tilde{r}\right]$, tanto $\sigma^2\left(\tilde{r}\right)$ quanto $\frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}$ crescem à medida que $r^{\mathrm{S}}$ aumenta ou $r^{\mathrm{F}}$ diminui.[5]

[5]Fixando o retorno esperado em $\bar{r}$, então $\pi = \frac{\left(\bar{r}-r^{\mathrm{F}}\right)}{\left(r^{\mathrm{S}}-r^{\mathrm{F}}\right)}$ e $(1-\pi) = \frac{\left(r^{\mathrm{S}}-\bar{r}\right)}{\left(r^{\mathrm{S}}-r^{\mathrm{F}}\right)}$, resultando em $\sigma^2\left(\tilde{r}\right) = \left(r^{\mathrm{S}}-\bar{r}\right)\left(\tilde{r}-r^{\mathrm{F}}\right)$ e $\frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} = \frac{\left(r^{\mathrm{S}}-\bar{r}\right)\left(\bar{r}-r^{\mathrm{F}}\right)}{1-\bar{r}+r^{\mathrm{S}}+r^{\mathrm{F}}}$. Usando $r^{\mathrm{S}} > \bar{r} > r^{\mathrm{F}}$ e mais a condição de responsabilidade limitada do projeto, as derivadas parciais tanto de $\sigma^2\left(\tilde{r}\right)$ como de $\frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}$ em relação a $r^{\mathrm{S}}$ e $r^{\mathrm{F}}$ possuem o mesmo sinal.

**Figura 5.** Máximo global de $\mathrm{E}\left[\ln\left(c_{1,i}/s_i\right)\right]$ em $\omega_i = 1{,}267 > 1$ quando as derivadas laterais são positivas. Neste exemplo $\pi = 65\,\%$, $r^{\mathrm{S}} = 25\,\%$, $r^{\mathrm{F}} = -5\,\%$, $r_p = 10\,\%$ e $r_b = 12\,\%$.




Se o projeto envolver pouco risco, vale a condição (44) e haverá estímulo para usar financiamento no projeto ($\omega_i^0 > 1$). Se o projeto envolver risco moderado, ocorre a situação em (46) e todo o recurso excedente será investido no projeto, mas sem alavancagem ($\omega_i = 1$). Finalmente, se o risco do projeto for muito alto, uma parte dos recursos excedentes ao consumo no primeiro período será poupada ($0 < \omega_i^0 < 1$). Mesmo que exista a possibilidade de financiamento, riscos desestimulam a utilização de empréstimos. As consequências desta conclusão e sua relação com a riqueza inicial do indivíduo constam da próxima seção.

Assim, algebricamente:

- Máximo global em $0 < \omega_i^0 < 1$: projeto com alto risco e vale a condição (45);
- Máximo global em $\omega_i^0 > 1$: projeto com baixo risco e vale a condição (44);
- Máximo global em $\omega_i = 1$: projeto com risco moderado e vale a condição (46).

Trata-se de um resultado importante porque mostra que a alocação ótima do excedente ao consumo independe da riqueza do agente. Na ausência de fricções, a proporção do excedente ao consumo que seria investida só depende do perfil de risco e retorno do projeto, em relação ao custo do empréstimo e ao retorno dos depósitos. Se essa proporção é a mesma para cada agente da economia, também é a mesma para a economia como um todo, de modo que todos tenderiam a poupar ou todos tenderiam a tomar emprestado, e o volume de equilíbrio de poupança e investimento seria zero.

A única fonte de diferenciação possível para as preferências de alocação $\omega_i$ entre os agentes da população seria o parâmetro $\rho_i$, a preferência relativa entre consumir no presente e consumir no futuro,[6] que não poderia ser uniforme entre os agentes e teria que ser incluído na maximização efetuada em (31). Neste caso, a eficiência do sistema financeiro dependeria dos valores de $\rho_i$, e a distribuição de

[6] Se tivesse sido utilizada uma função utilidade CRRA com parâmetro de aversão ao risco (por exemplo, $U(c) = c^{1-\nu}/(1-\nu)$, em que $\nu$ é o nível de aversão ao risco) a variação deste parâmetro entre os agentes também poderia ser uma fonte de diferenciação entre as escolhas de alocação ótima do excedente ao consumo. Da mesma maneira, expectativas diversas quanto aos retornos do projeto também diferenciariam as escolhas de alocação ótima. De qualquer modo, estes fatores só adicionam complexidade sem melhorar a explicação dos efeitos que são objeto de análise do modelo.

riqueza seria irrelevante. Se considerarmos as fricções, nominalmente: a restrição ao investimento mínimo e à concessão de crédito, os agentes com menos recursos não podem alocar seus excedentes de maneira ótima. Assim, a existência de fricções torna a distribuição de renda relevante para a definição do volume de equilíbrio de poupança e investimento, e para a eficiência do sistema financeiro. Na seção seguinte serão quantificados os efeitos das fricções na definição da alocação do excedente ao consumo, prescindindo-se da diferenciação nos valores de $\rho_i$, que serão considerados uniformes entre os agentes econômicos.

## 4. SOLUÇÃO DO PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO

É interessante ganhar alguma intuição sobre a otimização antes de resolvê-la. Como exemplo, a Figura 6 mostra a superfície de utilidades esperadas para um agente $i1$ com dotação inicial $d_{0,i1} = 100$ e com $\rho_{i1} = 70\%$, em uma economia em que o projeto exige investimento inicial $K = 20$, a chance de sucesso é $\pi = 70\%$, com retorno em caso de sucesso de $r^{\mathrm{S}} = 50\%$ e retorno em caso de fracasso de $r^{\mathrm{F}} = -30\%$. Utilizou-se ainda $r_b = 24{,}7\%$ e $r_p = 8{,}7\%$. Nesta situação, como $24{,}7\% \geq \mathrm{E}[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} = 11{,}7\% \geq 8{,}7\%$, temos o caso em que $\omega_{i1} = 1$.

Se não houvesse restrições, o máximo de utilidade seria obtido para:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\ln\left(d_{0,i}-s_i\right)+\rho_i f\left(\omega_i,s_i\right)\right)}{\partial s_i} &= 0 \\ \frac{-1}{d_{0,i}-s_i^*}+\rho_i\frac{1}{s_i^*} &= 0 \\ s_i^* &= d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i} \end{aligned} \tag{47}$$

e

$$\omega_i^* = \omega_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } r_b \geq \mathrm{E}[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} \geq r_p \\ \pi\left(\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r\left(\omega_i^0\right)-r^{\mathrm{F}}}\right)+(1-\pi)\left(-\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r^{\mathrm{S}}-r\left(\omega_i^0\right)}\right), & \text{nos demais casos,} \end{cases} \tag{48}$$

conforme discutido na seção anterior.

As curvas de nível da superfície na Figura 6 são mostradas na Figura 7, destacando-se o ótimo irrestrito em $s_{i1} = 41{,}18$ e $\omega_{i1} = 1$.

Se forem incluídas as restrições, a solução deverá ser escolhida dentre os pontos da união entre o segmento de reta com $\omega_i = 0$ e a região delimitada à esquerda pela restrição de investimento mínimo e à direita pela proporção máxima de dívida, como mostrado na Figura 8.

Por (28), a restrição ao investimento mínimo corresponde à hipérbole $\omega_i = K/s_i$ e a restrição ao financiamento máximo corresponde à reta $\omega_i = \frac{1}{(1-\alpha)}$.

Para simplificar a análise, consideramos inicialmente apenas a restrição ao investimento mínimo, pois se trata da restrição mais complexa matematicamente e a restrição ao financiamento poderá ser incluída adiante sem muito esforço. Na medida em que $d_{0,i}$ vai diminuindo, o conjunto de soluções possíveis vai reduzindo-se, mas a restrição de capital mínimo não será limitante enquanto o ponto de máximo sem restrição estiver no conjunto de soluções possíveis. O máximo irrestrito sairá da região de soluções possíveis para valores de $d_{0,i}$ menores que aqueles que fazem com que a hipérbole $\omega_i = K/s_i$

**Figura 6.** Utilidade esperada para $r^{S} = 50\%$, $r^{F} = -30\%$, $p = 70\%$, $K = 20$, $\alpha = 40\%$, $\rho_{i1} = 70\%$, $d_{0,i1} = 100$, $r_b = 24{,}7\%$ e $r_p = 8{,}7\%$.

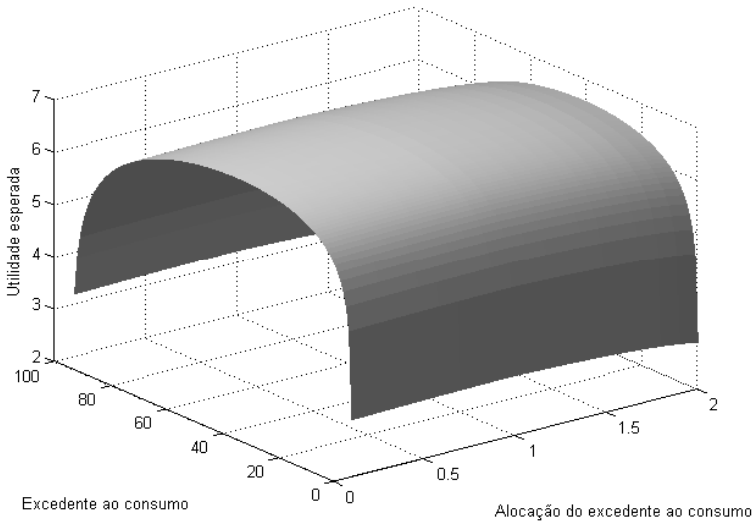
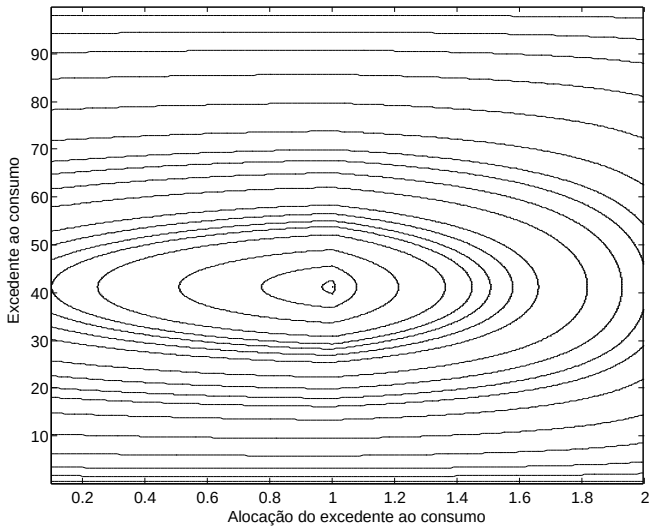



**Figura 7.** Curvas de indiferença correspondentes à utilidade esperada exibida na Figura 6.

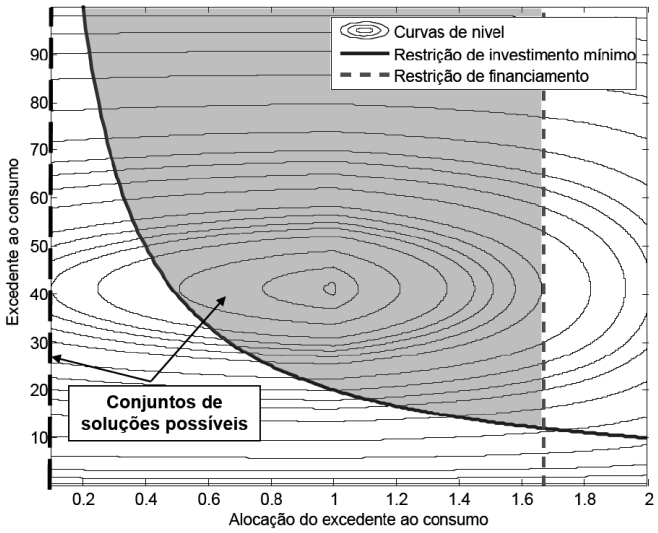



passe pelo ponto de máximo sem restrição. Logo, a restrição será limitante quando:

$$s_i^* \omega_i^* < K \implies d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i} \omega_i^0 < K$$

$$\implies d_{0,i} < \begin{cases} \dfrac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}, & \text{se } r_b \geq \mathrm{E}[\tilde{r}] - \dfrac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^{F}+(1-\pi)r^{S}} \geq r_p \\ \dfrac{K(1+\rho_i)}{\rho_i\left[\pi\left(\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r\left(\omega_i^0\right)-r^{F}}\right)+(1-\pi)\left(\frac{1+r\left(\omega_i^0\right)}{r^{S}-r\left(\omega_i^0\right)}\right)\right]}, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \tag{49}$$

**Figura 8.** Restrições quanto ao investimento mínimo e ao limite de financiamento.




No nosso exemplo isto ocorre quando, mantendo-se todos os demais parâmetros constantes, $d_{0,i} < 48{,}57$. A situação limítrofe, quando $d_{0,i} = 48{,}57$, está ilustrada na Figura 9.

Na medida em que $d_{0,i}$ sofre reduções posteriores, o máximo passa a ocorrer sobre a hipérbole $\omega_i = K/s_i$, no ponto em que esta tangencia uma das curvas de indiferença. O lagrangeano do problema com a restrição ao investimento mínimo, nestas condições, fica:

$$L(\omega_i, s_i, \lambda) = \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i) - \lambda(s_i\omega_i - K). \tag{50}$$

Para evitar o problema da descontinuidade de $r(\omega_i)$, consideraremos que seu valor é uma constante $r$. Após obtermos uma solução em função de $r$, este será substituído por aquele entre os possíveis valores $r_p$ ou $r_b$ que for compatível com o $\omega_i^*$ correspondente ($\omega_i^* < 1$ para $r_p$ e $\omega_i^* > 1$ para $r_b$). Se os dois resultados forem incompatíveis, é porque a solução ocorre no ponto de descontinuidade, em que $\omega_i = 1$ e $s_i = K$. Graficamente, uma possibilidade seria como aquela representada na Figura 10.

Intuitivamente, foi representada na Figura 10 apenas uma possibilidade para a solução de canto em que o máximo da utilidade, dado um valor fixo $s_i = K$, ocorre a esquerda de $\omega_i = 1$. É possível concluir isso porque, visualmente, a inclinação da curva de indiferença, destacada com linha contínua, tem inclinação negativa à esquerda de $\omega_i = 1$, o que quer dizer que os pontos numa vizinhança à esquerda de $\omega_i = 1$, dado $s_i = K$, são interiores à curva de indiferença, possuindo, portanto, utilidade maior que no ponto $\omega_i = 1$ e $s_i = K$. Isso corresponde ao caso em que vale a condição (45). Já no caso em que vale a condição (44), deslocamentos numa vizinhança à direita de $\omega_i = 1$ devem aumentar a utilidade, e, portanto, a inclinação da curva de indiferença deve ser positiva à direita de $\omega_i = 1$ para que os pontos correspondentes a uma vizinhança à direita de $\omega_i = 1$, dado $s_i = K$, estejam no interior da curva de indiferença. Como a derivada à esquerda de $\omega_i = 1$ também é positiva, pois tem que ser maior que a derivada à direita de $\omega_i = 1$ uma vez que a curva de indiferença é convexa, isso significa que não há como existir solução de canto no caso em que vale a condição (44). Esta situação é ilustrada na Figura 11.

Contudo, é possível estabelecer as condições para a solução de canto de maneira mais rigorosa. A derivada da restrição hiperbólica é dada por

$$\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}\omega_i}\Big|_{\omega_i s_i = K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_i}\left(\frac{K}{\omega_i}\right) = -\frac{K}{\omega_i^2}.$$

**Figura 9.** Situação limítrofe a partir da qual reduções em $d_{0,i}$ tornam a restrição ao investimento mínimo limitante em relação ao ótimo irrestrito.

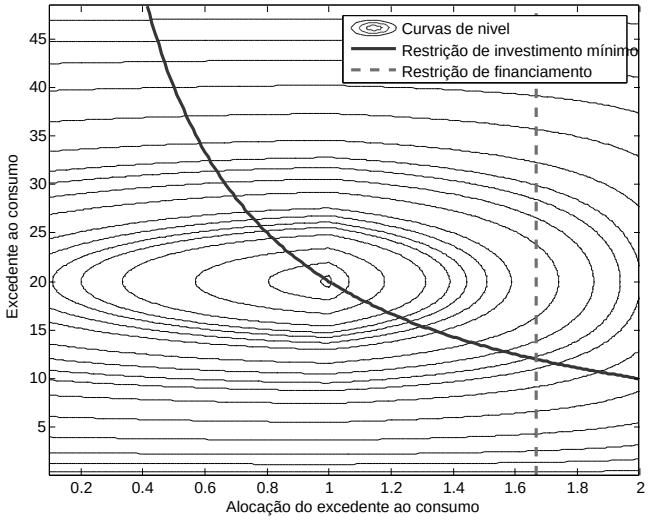
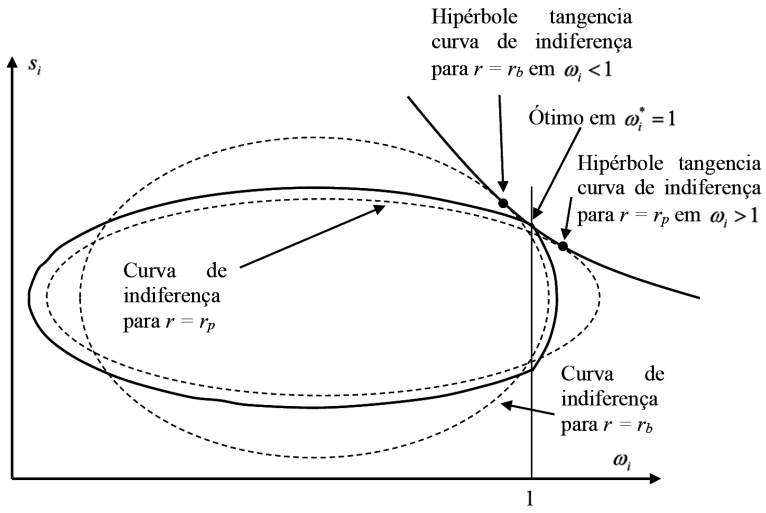



**Figura 10.** Exemplo de solução de canto em que $\omega_i^* = 1$ e $s_i^* = K$.

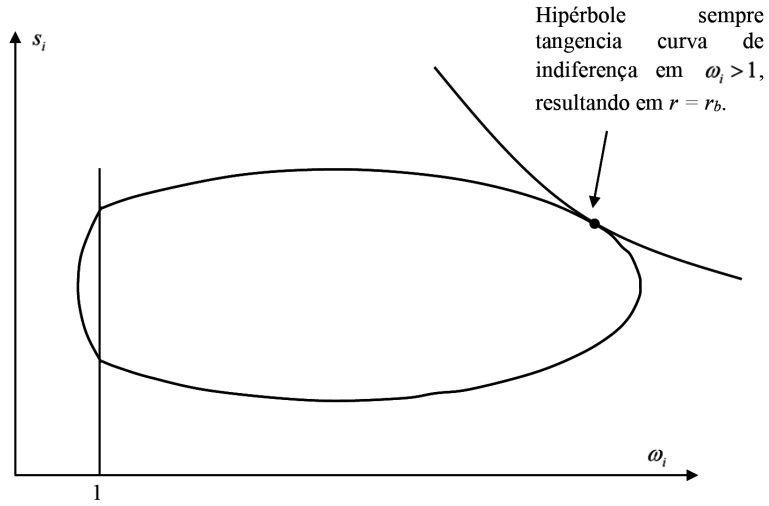



Como a solução de canto somente ocorrerá para $omi = 1$, a derivada da restrição hiperbólica neste ponto terá o valor $-K$.

Por outro lado, as curvas de nível da função utilidade, que correspondem às curvas de indiferença, são dadas por

$$\begin{aligned} & F(\omega_i, s_i) = \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i) \\ & \Longrightarrow \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i \left\{ \ln s_i + \mathrm{E}\left[ \ln\left( (1+\tilde{r})\omega_i + (1 + r(\omega_i))(1-\omega_i) \right) \right] \right\} = h, \end{aligned} \tag{51}$$

**Figura 11.** Quando vale a condição (44) não há possibilidade de solução de canto.




em que $h$ é um nível constante de utilidade esperada. Nos pontos de continuidade da função utilidade esperada, ou seja, no seu domínio e assumindo que $r(\omega_i) = r$, a derivada total de $F(\omega_i, s_i)$, $\mathrm{d}F(\omega_i, s_i) = (\partial F/\partial \omega_i)\,\mathrm{d}\omega_i + (\partial F/\partial s_i)\,\mathrm{d}s_i$, será

$$\mathrm{d}F(\omega_i, s_i) = \rho_i \,\mathrm{E}\left[\frac{\tilde{r} - r}{(1+\tilde{r})\,\omega_i + (1+r)(1-\omega_i)}\right]\mathrm{d}\omega_i + \left(-\frac{1}{d_{0,i} - s_i} + \rho_i \frac{1}{s_i}\right)\mathrm{d}s_i, \tag{52}$$

mas como a derivada total é zero ao longo de um curva de nível, resulta que a inclinação da reta tangente a uma curva de nível em um ponto $(\omega_i, s_i)$, será

$$\begin{aligned} &\rho_i \,\mathrm{E}\left(\frac{\tilde{r} - r}{(1+\tilde{r})\,\omega_i + (1+r)(1-\omega_i)}\right)\mathrm{d}\omega_i + \left(-\frac{1}{(d_{0,i} - s_i)} + \rho_i \frac{1}{s_i}\right)\mathrm{d}s_i = 0 \\ \Longrightarrow\ &\left.\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}\omega_i}\right|_{\mathrm{d}F=0} = \frac{-\rho_i \,\mathrm{E}\left[\dfrac{\tilde{r} - r}{(1+\tilde{r})\,\omega_i + (1+r)(1-\omega_i)}\right]}{\left(-\dfrac{1}{(d_{0,i} - s_i)} + \rho_i \dfrac{1}{s_i}\right)}. \end{aligned} \tag{53}$$

A solução de canto tem que ocorrer no cruzamento da hipérbole $\omega_i s_i = K$ com a reta vertical $\omega_i = 1$, resultando em

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}\omega_i}\right|_{\substack{\mathrm{d}F=0 \\ \omega_i=1, s_i=K}} &= \frac{\rho_i \,\mathrm{E}\left[\frac{\tilde{r}-r}{1+\tilde{r}}\right]}{-\frac{1}{d_{0,i}-K} + \frac{\rho_i}{K}} = \rho_i \frac{\pi \frac{r^{\mathrm{S}}-r}{1+r^{\mathrm{S}}} + (1-\pi)\frac{r^{\mathrm{F}}-r}{1+r^{\mathrm{F}}}}{\frac{1}{d_{0,i}-K} - \frac{\rho_i}{K}} \\ &= \frac{\rho_i K (d_{0,i} - K)}{K - \rho_i (d_{0,i} - K)}\left(\pi \frac{r^{\mathrm{S}} - r}{1 + r^{\mathrm{S}}} + (1-\pi)\frac{r^{\mathrm{F}} - r}{1 + r^{\mathrm{F}}}\right). \end{aligned} \tag{54}$$

Como as curvas de indiferença são fechadas e convexas, para que o ponto $(\omega_i, s_i) = (1, K)$ seja solução de canto é necessário e suficiente que a hipérbole apenas toque, mas não cruze, a curva de nível, caso contrário existiria uma curva de nível interior, e portanto com maior utilidade, em que estaria a solução. Assim, o limite à esquerda da derivada da curva de indiferença no ponto $(\omega_i, s_i) = (1, K)$ deve ser maior (menor em valor absolto) que a inclinação da hipérbole dada por $-K$, enquanto o limite à

direita da derivada da curva de indiferença no ponto $(\omega_i, s_i) = (1, K)$ deve ser menor (maior em valor absoluto) que $-K$, garantindo que o ponto $(\omega_i, s_i) = (1, K)$ seja o único em que a hipérbole toca a curva de indiferença. Usando (54), isto pode ser expresso como

$$\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) \iff \begin{cases} \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \left(\pi \frac{r^S - r_p}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r_p}{1 + r^F}\right) > -K \\ \text{e} \\ \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \left(\pi \frac{r^S - r_b}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r_b}{1 + r^F}\right) < -K. \end{cases} \tag{55}$$

Note que

$$\pi \frac{r^S - r}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r}{1 + r^F} = \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r\right),$$

então segue que

$$\begin{aligned} \left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) &\iff \begin{cases} \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r_p\right) > -1 \\ \text{e} \\ \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r_b\right) < -1 \end{cases} \\ &\iff 0 > -1 - \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r_p\right) \\ &\qquad > \frac{\rho_i K\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left(r_p - r_b\right) \\ &\iff 0 < \frac{1}{\frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)}} + \frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i d_{0,i} - K} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r_p\right) \\ &\qquad < \frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \left(r_b - r_p\right). \end{aligned}$$

O último passo foi possível porque $\frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} > 0$, dada a condição de responsabilidade limitada, $r^F > -1$. Finalmente, as condições em (55) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) \iff 0 &< \frac{(1 + r^S)(1 + r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} + \frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i d_{0,i} - K} \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi) r^S} - r_p\right) \\ &< \frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} \left(r_b - r_p\right). \end{aligned} \tag{56}$$

A condição (56) implica que $\frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} > 0$, já que $\left(r_b - r_p\right) > 0$ por definição, e, portanto,

$$\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) \implies \frac{\rho_i\left(d_{0,i} - K\right)}{K - \rho_i\left(d_{0,i} - K\right)} > 0 \implies \begin{cases} \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} > d_{0,i} > K \\ \text{ou} \\ \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} < d_{0,i} < K. \end{cases}$$

Como $\rho_i > 0$, a última desigualdade nunca será verdadeira, resultando:

$$\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) \implies \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} > d_{0,i} > K \tag{57}$$

Dada a condição (57), $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} \implies K - \rho_i (d_{0,i} - K) > 0$, o que nos permite reescrever (56) como:

$$\begin{aligned}
\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = (1, K) \iff 0 < {} & \frac{(K - \rho_i (d_{0,i} - K))(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} + \rho_i (d_{0,i} - K) \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} \\
& < \rho_i (d_{0,i} - K)\left(r_b - r_p\right) \\
\iff 0 < {} & \frac{K(1+\rho_i)(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}}) - \rho_i K (\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}})}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} + \rho_i K r_p \\
& + \frac{\rho_i d_{0,i} (\mathrm{E}[\tilde{r}] r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}) - \rho_i d_{0,i} (1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} - \rho_i d_{0,i} r_p < \rho_i (d_{0,i} - K)\left(r_b - r_p\right) \\
\iff 0 < {} & \frac{K(1+\rho_i)(1 + r^{\mathrm{S}} + r^{\mathrm{F}} + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}) - \rho_i K (\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}})}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} \\
& + \rho_i K r_p - \rho_i d_{0,i}\left(1 + r_p\right) < \rho_i (d_{0,i} - K)\left(r_b - r_p\right) \qquad (58) \\
\iff 0 < {} & \frac{K(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}} + \rho_i K\left(1 + r_p\right) - \rho_i d_{0,i}\left(1 + r_p\right) < \rho_i (d_{0,i} - K)\left(r_b - r_p\right) \\
\iff {} & d_{0,i}\left(1 + r_p\right) < \frac{K(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{\rho_i (1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})} + K\left(1 + r_p\right) < d_{0,i}(1 + r_b) - K\left(r_b - r_p\right) \\
\iff {} & \begin{cases} \frac{K\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)}{\rho_i (1+r_b)(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi) r^{\mathrm{S}})} + K < d_{0,i} \\ \text{e} \\ d_{0,i} < \frac{K\left(1+r^{\mathrm{S}}\right)\left(1+r^{\mathrm{F}}\right)}{\rho_i \left(1+r_p\right)(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi) r^{\mathrm{S}})} + K. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ocorre que de $d_{0,i} < K(1 + \rho_i)/\rho_i$ e (58) vem:

$$\frac{K(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{\rho_i (1 + r_b)(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})} + K < d_{0,i}$$

e

$$\begin{aligned}
d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} & \implies K < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} - \frac{K(1 + r^{\mathrm{S}})(1 + r^{\mathrm{F}})}{\rho_i (1 + r_b)(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})} \\
& \implies r_b > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}}}{1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}},
\end{aligned}$$

indicando[7] que as condições em (58) nunca serão satisfeitas quando o projeto for de baixo risco, já que para esse caso ocorrer é necessário que $r_p < r_b < (\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}})/(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})$. Logo, nunca ocorrerá solução de canto quando $\omega_i^0 > 1$, que é a mesma conclusão a que já havíamos chegado anteriormente de forma mais intuitiva. Já para projetos de risco moderado, em que $\omega_i^0 = 1$, só não haverá a possibilidade de solução de canto se $r_b = (\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}})/(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})$, e ficam valendo as condições necessárias e suficientes para a existência de solução de canto expressas em (58), que também são válidas para projetos de risco alto, com $0 < \omega_i^0 < 1$ e $r_b > r_p > (\mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}})/(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}})$.

Note que até agora temos assumido que as condições em (58) são válidas apenas se $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$. Contudo, como estamos tratando de uma situação em que a restrição investimento mínimo é limitante, vale a condição (49), $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0}$, que quando $\omega_i^0 = 1$ equivale a $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$.

[7] No último passo utilizou-se o fato de que $\left(1 + r^{\mathrm{S}}\right)\left(1 + r^{\mathrm{F}}\right) = \mathrm{E}[\tilde{r}] + r^{\mathrm{S}} r^{\mathrm{F}} + \left(1 + \pi r^{\mathrm{F}} + (1-\pi) r^{\mathrm{S}}\right)$.

Já quando $0 < \omega_i^0 < 1$, $\frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0}$, e a condição (49) pode ser satisfeita com $\frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0} > d_{0,i} \geq \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$, mas neste caso não haveria solução de canto. No entanto, a condição $d_{0,i} < K(1+\rho_i)/\rho_i$ será redundante para $0 < \omega_i^0 < 1$ se

$$\begin{aligned}
&\frac{K(1+r^{\mathrm{S}})(1+r^{\mathrm{F}})}{\rho_i\left(1+r_p\right)(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}})}+K \leq \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} \\
\Longrightarrow \quad &\frac{(1+r^{\mathrm{S}})(1+r^{\mathrm{F}})}{\left(1+r_p\right)(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}})}+1 \leq (1+\rho_i) \\
\Longrightarrow \quad &\frac{(1+r^{\mathrm{S}})(1+r^{\mathrm{F}})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} \leq \rho_i\left(1+r_p\right) \\
\Longrightarrow \quad &\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}+(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}})}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} \leq \rho_i\left(1+r_p\right) \\
\Longrightarrow \quad &\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}+1\right)-1 \leq r_p.
\end{aligned}$$

Como $0 < \rho_i < 1$, tem-se também que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}+1\right) > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}+1 \\
\Longrightarrow &\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}+1\right)-1 > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}},
\end{aligned}$$

resultando, portanto, que para a condição $d_{0,i} < K(1+\rho_i)/\rho_i$ ser redundante no caso em que $0 < \omega_i^0 < 1$ é necessário que

$$\begin{aligned}
&r_p \geq \left(\frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}\right)-1 > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}} \\
\Longrightarrow\ &r_p > \frac{\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}}}{1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}}}
\end{aligned}$$

Como para $0 < \omega_i^0 < 1$ vale a relação $r_b > r_p > (\mathrm{E}[\tilde{r}]+r^{\mathrm{S}}r^{\mathrm{F}})/(1+\pi r^{\mathrm{F}}+(1-\pi)r^{\mathrm{S}})$, a condição acima é sempre satisfeita. Resulta que apenas as restrições em (58) já representam de forma completa as condições necessárias e suficientes para que exista solução de canto.

Nos casos em que não há solução de canto, é possível resolver a otimização através de uma otimização com restrição convencional. Lembrando que

$$\begin{aligned}
f(\omega_i, s_i) &= \mathrm{E}[\ln c_{1,i}] \\
&= \mathrm{E}\left[\ln\left(s_i\left((1+\tilde{r})\,\omega_i+(1+r(\omega_i))(1-\omega_i)\right)\right)\right] \\
&= \ln s_i + \mathrm{E}\left[\ln\left((1+\tilde{r})\,\omega_i+(1+r(\omega_i))(1-\omega_i)\right)\right] \\
&= \ln s_i + \pi\ln\left((1+r^{\mathrm{S}})\,\omega_i+(1+r(\omega_i))(1-\omega_i)\right) \\
&\qquad + (1-\pi)\ln\left((1+r^{\mathrm{F}})\,\omega_i+(1+r(\omega_i))(1-\omega_i)\right),
\end{aligned}$$

as condições de primeira ordem ficam:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial s_i} &= -\frac{1}{d_{0,i}-s_i}+\frac{\rho_i}{s_i}-\omega_i\lambda=0\\
\frac{\partial L}{\partial \omega_i} &= -s_i\lambda+\rho_i\left(\frac{(1-\pi)(r^{\mathrm{F}}-r)}{(1+r)(1-\omega_i)+(1+r^{\mathrm{F}})\omega_i}+\frac{\pi(r^{\mathrm{S}}-r)}{(1+r)(1-\omega_i)+(1+r^{\mathrm{S}})\omega_i}\right)=0\cdot\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= K-s_i\omega_i=0
\end{aligned} \tag{59}$$

A solução do sistema (59) leva a duas equações polinomiais do segundo grau, uma em $\omega_i$ e outra em $s_i$, resultando em dois valores para $\omega_i$ e dois outros para $s_i$:

$$\begin{aligned}
s_i^{\text{Soluções}} =& \frac{1}{2(1+r)^2(1+\rho)}\\
&\times\left\{d_{0,i}(1+r)^2\rho+K(1+r)\left[2r-r^{\mathrm{S}}-r^{\mathrm{F}}+\left(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}}\right)\rho\right]\right.\\
&\quad\pm\left[\left((1+r)^2\left(-4K(1+\rho)\left(K(r-r^{\mathrm{F}})(r-r^{\mathrm{S}})\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\left.\left.+d_{0,i}(1+r)(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}})\rho\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left(d_{0,i}(1+r)\rho-K\left(r^{\mathrm{F}}+r^{\mathrm{S}}+(\pi(r^{\mathrm{F}}-r^{\mathrm{S}})+r^{\mathrm{S}})\rho-r(2+\rho)\right)\right)^2\right)\right]^{1/2}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{60}$$

e

$$\begin{aligned}
\omega_i^{\text{Soluções}} =& \frac{1}{2K(r-r^{\mathrm{F}})(r-r^{\mathrm{S}})+2d_{0,i}(1+r)(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}})}\\
&\times\left\{d_{0,i}(1+r)^2\rho+K(1+r)\left[2r-r^{\mathrm{S}}-r^{\mathrm{F}}+\left(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}}\right)\rho\right]\right.\\
&\quad\mp\left[\left((1+r)^2\left(-4K(1+\rho)\left(K(r-r^{\mathrm{F}})(r-r^{\mathrm{S}})\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\left.\left.+d_{0,i}(1+r)(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}})\rho\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left(d_{0,i}(1+r)\rho-K\left(r^{\mathrm{F}}+r^{\mathrm{S}}+(\pi(r^{\mathrm{F}}-r^{\mathrm{S}})+r^{\mathrm{S}})\rho-r(2+\rho)\right)\right)^2\right)\right]^{1/2}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{61}$$

Isto ocorre porque não foi incluída a restrição ao crédito e, consequentemente, não ficou garantido que os valores obtidos para $\omega_i$ estivessem no domínio estabelecido em (36).

Para simplificar a notação, faça:

$$\begin{aligned}
A &= d_{0,i}(1+r)^2\rho+K(1+r)\left[2r-r^{\mathrm{S}}-r^{\mathrm{F}}+\left(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}}\right)\rho\right]\\
B &= K(r-r^{\mathrm{F}})(r-r^{\mathrm{S}})+d_{0,i}(1+r)(r-\pi r^{\mathrm{F}}+(-1+\pi)r^{\mathrm{S}})\rho\\
C &= (1+r)^2\left(-4K(1+\rho)C+\left(d_{0,i}(1+r)\rho-K\left(r^{\mathrm{F}}+r^{\mathrm{S}}+(\pi(r^{\mathrm{F}}-r^{\mathrm{S}})+r^{\mathrm{S}})\rho-r(2+\rho)\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} s_i^{\text{Soluções}} = \dfrac{A \pm \sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)} \\ \omega_i^{\text{Soluções}} = \dfrac{A \mp \sqrt{B}}{2C} \end{cases} . \tag{62}$$

Se há equilíbrio, apenas o menor valor de $\omega_i$, e consequentemente o maior valor de $s_i = K/\omega_i$, estará no domínio de $f(\omega_i, s_i)$. A princípio, a solução será, portanto, a seguinte combinação de valores em (62):

$$s_i^{s+} = \frac{A + \sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)}; \tag{63}$$

e

$$\omega_i^{s-} = \frac{A - \sqrt{B}}{2C}. \tag{64}$$

Há um caso, contudo, em que (63) e (64) não representam as soluções finais quando o investimento mínimo é limitante. Se as restrições forem muito fortes, seja a restrição ao crédito, seja a restrição hiperbólica ao investimento mínimo, o que significa que $d_{0,i}$ é muito pequeno em relação a $K$, então a utilidade máxima obtida com as restrições será cada vez menor, até que se torne menor que a maior utilidade sem investimento em projeto, com $\omega_i = 0$, que ocorre, por (47), quando $s_i = d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}$. Esta utilidade mínima, abaixo da qual o ótimo passa a ser o ponto $\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = \left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)$, será $F\left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)$, que por (51) fica:

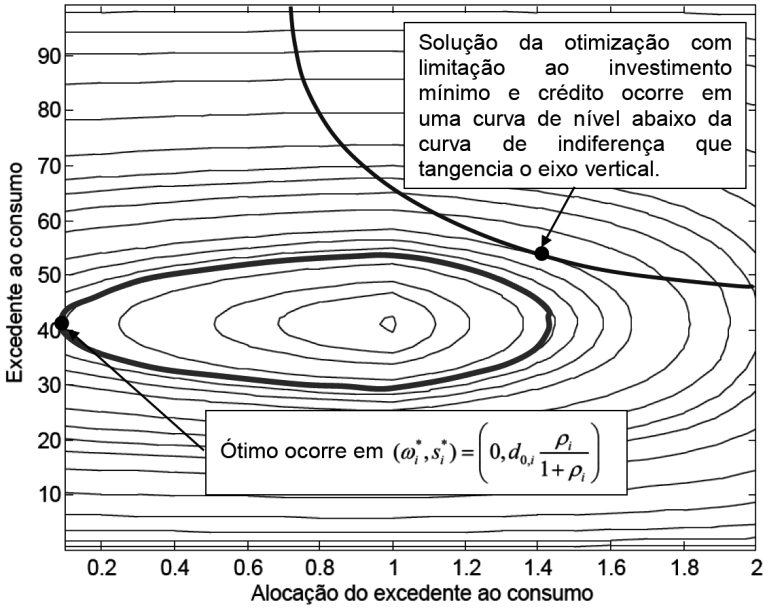
$$\begin{aligned} F\left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) &= \ln\left(d_{0,i} - d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \rho_i\left[\ln\left(d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \ln\left(1+r_p\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{d_{0,i}(1+\rho_i) - d_{0,i}\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \rho_i \ln\left(\frac{d_{0,i}\rho_i\left(1+r_p\right)}{1+\rho_i}\right) \\ &= \ln\left(\frac{d_{0,i}}{1+\rho_i}\right) + \rho_i \ln\left(\frac{d_{0,i}\rho_i(1+\rho_i)}{1+\rho_i}\right) \\ &= \ln d_{0,i} - \ln(1+\rho_i) + \rho_i\left[\ln d_{0,i} + \ln\rho_i\left(1+r_p\right) - \ln(1+\rho_i)\right] \\ &= (1+\rho_i)\ln d_{0,i} - (1+\rho_i)\ln(1+\rho_i) + \rho_i \ln\rho_i(1+\rho_i). \end{aligned} \tag{65}$$

A solução final é:

$$\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = \begin{cases} \left(0, d_{0,i}\dfrac{\rho_i}{1+\rho_i}\right), & \text{se } F\left(\omega_i^{s-}, s_i^{s+}\right) < (1+\rho_i)\ln d_{0,i} \\ & \quad -(1+\rho_i)\ln(1+\rho_i) + \rho_i\ln\rho_i(1+\rho_i) \\ \left(\dfrac{A-\sqrt{B}}{2C}, \dfrac{A+\sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{66}$$

Esta situação é ilustrada na Figura 12 que mostra como, dependendo do nível de desigualdade e da severidade da restrição ao investimento mínimo, os agentes mais pobres podem simplesmente não ter qualquer acesso a investimentos que poderiam melhorar seu bem estar. É possível inferir que a redução no volume investido tenha impactos não apenas na eficiência do sistema financeiro como também no crescimento econômico, chegando-se a um resultado semelhante ao de Aghion e Howitt (1998), contudo, o modelo aqui proposto trás uma variação não discutida pelos autores: elevados graus de desigualdade e de equidade impactariam negativamente a eficiência.

**Figura 12.** Exemplo de situação em que as restrições impõem um limite tão severo à proporção de investimento que se torna mais preferível não fazer investimento algum em projeto.




Resta, por fim, introduzir a restrição de crédito, que pode piorar ainda mais a situação dos agentes mais pobres. Se o investimento mínimo não é limitante, o ótimo será simplesmente:

$$\left(\min\left(\omega_0, \frac{1}{1-\alpha}\right), d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right). \tag{67}$$

Já para o caso em que o investimento mínimo é limitante, basta usar a interseção da hipérbole da restrição ao investimento mínimo com a reta $\omega_i = 1/(1-\alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i s_i &= K \\ \omega_i &= \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}\right\} \implies s_i = K(1-\alpha). \tag{68}$$

A consideração sobre a utilidade dessa solução ser menor que a utilidade em $\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = \left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)$ também é válida na situação com investimento mínimo e restrição ao crédito limitantes, e a solução final fica:

$$\left(\omega_i^*, s_i^*\right) = \begin{cases} \left(0, d_{0,i}\dfrac{\rho_i}{1+\rho_i}\right), & \text{se } F\left(\omega_i^{s-}, s_i^{s+}\right) < (1+\rho_i)\ln d_{0,i} \\ & \qquad -(1+\rho_i)\ln(1+\rho_i) + \rho_i \ln \rho_i \left(1+r_p\right) \\ \left(\dfrac{1}{1-\alpha}, K(1-\alpha)\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{69}$$

## 5. SIMILAÇÃO NUMÉRICA DO EQUILÍBRIO

Dada a complexidade da solução do modelo descrito, suas implicações foram analisadas através do cálculo numérico do equilíbrio para o conjunto de parâmetros descritos na Tabela 1. A escolha dos pro-

**Tabela 1.** Parâmetros usados nas simulações numéricas.

| Parâmetro | Valores simulados |
|---|---|
| Projeto disponível na economia | Projeto 1: $r^S = 22\%$, $r^F = -19\%$ e $\pi = 61\%$<br>Projeto 2: $r^S = 48\%$, $r^F = -28\%$ e $\pi = 62\%$<br>Projeto 3: $r^S = 65\%$, $r^F = -5\%$ e $\pi = 35\%$ |
| Restrição ao investimento mínimo como proporção da riqueza total no período inicial ($K/D_0$) | $\frac{2}{10.000}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{100}$ e $\frac{1}{10}$ |
| Taxa de desconto da utilidade do consumo futuro ($\rho$) | 0,25; 0,50 e 0,75 |
| Desigualdade ($\gamma$) | 1, 2, 3, 4 e 5 |

jetos foi orientada por valores típicos de retorno esperado e desvio padrão de bolsas de países desenvolvidos (Projeto 1) e emergentes (Projeto 2). O Projeto 3 tem retorno esperado e desvio padrão típicos de países emergentes, mas incorpora uma assimetria maior em direção a retornos positivos.

Em simulações prospectivas observou-se que nem sempre existe o equilíbrio. A combinação de nível de desigualdade e restrição ao investimento mínimo pode gerar situações em que simplesmente não há empréstimos nem depósitos. Por exemplo, se o investimento mínimo for muito alto, o projeto pode não ser acessível ou desejável nesta escala para a maioria da população. Se não houver investimento no projeto, não haverá tomada de crédito e os bancos ficam sem função (no modelo não há empréstimo entre agentes simplesmente para ajustar suas preferências intertemporais de consumo e poupança). Por outro lado, se a desigualdade for muito baixa e o investimento mínimo não impuser um limite muito alto, os agentes não precisam do sistema financeiro para investir. Novamente o banco fica sem função e não há equilíbrio. A escolha da restrição ao investimento mínimo buscou usar valores de modo que houvesse o maior número possível de situações em que existe o equilíbrio.

Os valores escolhidos para $\rho$ simplesmente buscam uma cobertura razoável para o intervalo entre 0 e 1. Como as simulações são computacionalmente muito custosas, decidiu-se utilizar apenas três valores em todas as combinações possíveis.

Analogamente, a escolha de $\gamma$ buscou uma cobertura razoável dos valores de índice de Gini encontrados em economias reais, conforme a equação (8). Até o valor 5, a relação entre o índice de Gini e $\gamma$ apresenta pouca não-linearidade, como mostrado na Tabela 2.

Para cada valor de $\gamma$ foi necessário usar um valor correspondente do parâmetro de escala $A$, conforme a relação (6), de modo que a riqueza total da economia não mudasse de uma simulação $n$ para

**Tabela 2.** Valores de $\gamma$ usados, índices de Gini correspondentes e economias reais cujos índices de Gini aproximam-se dos utilizados na simulação. *Fonte:* United Nations (2009).

| $\gamma$ | Índice de Gini Correspondente | Exemplo de países com índice de Gini próximo |
|---|---|---|
| 1 | 16,40% | Menor que Dinamarca |
| 2 | 31,30% | Canadá, Eslovênia, Paquistão |
| 3 | 43,81% | Nigéria, Hong Kong, Filipinas |
| 4 | 53,73% | Brasil, Equador, Paraguai |
| 5 | 61,36% | Botswana, Haiti |

outra simulação $m$, provocando distorções. Assim, definiu-se:

$$A_m \frac{e^{\gamma_m}-1}{\gamma_m} = A_n \frac{e^{\gamma_n}-1}{\gamma_n} \implies A_m = \frac{A_n \frac{e^{\gamma_n}-1}{\gamma_n}}{\frac{e^{\gamma_m}-1}{\gamma_m}}. \tag{70}$$

Como $A$ para $\gamma = 1$ foi arbitrariamente definido com o valor de 10, os demais valores foram: 5,39 para $\gamma = 2$; 2,70 para $\gamma = 3$; 1,28 para $\gamma = 4$ e 0,58 para $\gamma = 5.38$.

As distribuições de dotação inicial ficaram como mostradas na Figura 14, e as curvas de Lorentz correspondentes estão na Figura 13.

Na simulação foram calculadas matrizes de decisões ótimas contendo pares de escolhas $\left(\omega_i^*, s_i^*\right)$ para toda a população que foi discretizada em intervalos de valor 0,001. Como o ótimo depende dos valores de pr e br, as matrizes de decisão ótima foram calculadas para todas as combinações possíveis de taxas $r_p$ e $r_b$, selecionadas em intervalos de 0,1%, que atendessem as condições (13), (32) e (43). Dado o vetor de decisões ótimas, foram calculadas aproximações numéricas, para cada combinação de $r_p$ e $r_b$, dos valores:

a) $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* \, \mathrm{d}i$ — a diferença entre a quantidade demandada e a quantidade ofertada de recursos;

b) $\frac{1}{2}\int_0^1 \left|1-\omega_i^*\right| s_i^* \, \mathrm{d}i$ — a média dos valores absolutos das quantidades demandadas e ofertadas;

c) $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* r\left(\omega_i^*\right) \mathrm{d}i$ — medida relacionada com o lucro do banco.

Para cada valor de $r_p$, buscou-se o valor de $r_b$ para o qual $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* \, \mathrm{d}\, i = 0$ ou intervalo de valores de $r_b$ em que $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* \, \mathrm{d}\, i$ muda de sinal. Neste último caso, o valor de $r_b$ que faz $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* \, \mathrm{d}\, i = 0$

**Figura 13.** Curvas de Lorentz para os valores de $\gamma$ simulados.

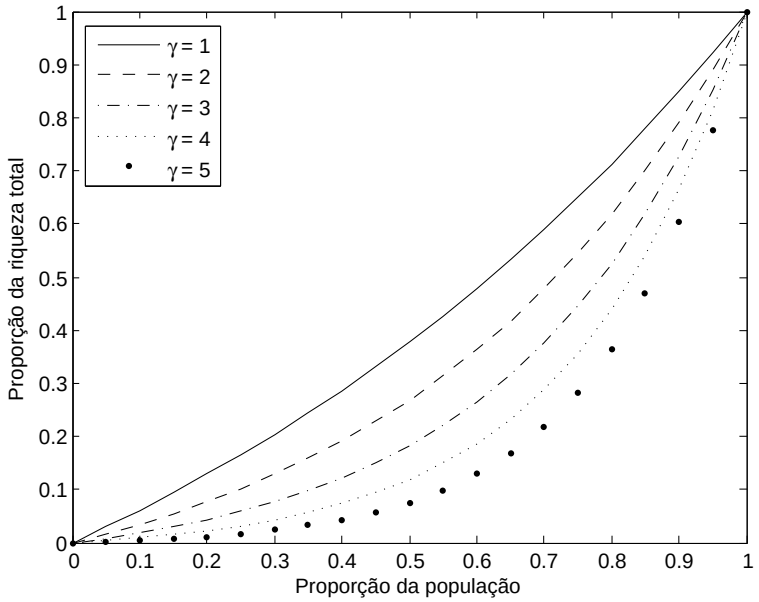
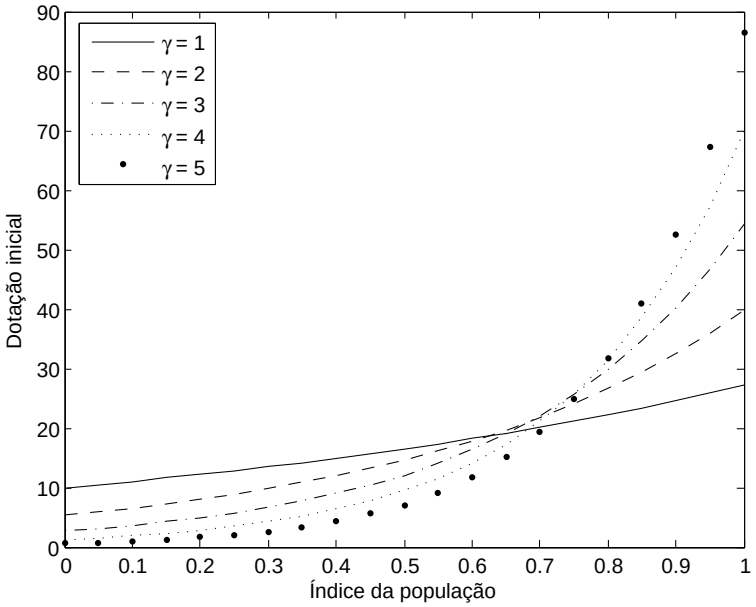


**Figura 14.** Distribuição da dotação inicial para os valores de $\gamma$ simulados.




foi interpolado linearmente. Assim, para este par de valores $r_p$ e $r_b$ há o equilíbrio entre oferta e demanda e $\frac{1}{2}\int_0^1 \left|1-\omega_i^*\right| s_i^* \,\mathrm{d}i$ corresponde ao volume de recursos que é transacionado no sistema financeiro, resultando num lucro proporcional a $\int_0^1 \left(1-\omega_i^*\right) s_i^* r\left(\omega_i^*\right) \mathrm{d}i$.

Dessa forma, foram gerados vários pares de valores $r_p$ e $r_b$ (sendo o valor de $r_b$ o resultado de uma interpolação) que correspondem ao equilíbrio entre oferta e demanda. O equilíbrio final é representado pelo par que além de equilibrar oferta e demanda resulta no maior lucro para o banco. Assim, no equilíbrio, as duas condições (29) e (31) são satisfeitas.

O algoritmo de cálculo da matriz de escolhas ótimas seguiu a seguinte estrutura:

1) Calcula $\omega_0$ de acordo com (48);
2) Calcula $\alpha$ de acordo com (15);
3) Testa se o investimento mínimo é limitante usando (49):

   A) Se não for, atribui o par $\left(\omega_i^*, s_i^*\right)$ conforme (67): $s_i^*$ vem de (47) e $\omega_i^*$ é o menor entre $\omega_0$ e a proporção máxima de concessão de crédito, $1/(1-\alpha)$;
   B) Se o investimento mínimo for limitante, o algoritmo testa se é o caso de uma solução de canto usando (58):
      a) Se for uma solução de canto, usa a solução provisória $\left(\omega_i^{*,\text{provisório}}, s_i^{*,\text{provisório}}\right) = (1, K)$;
      b) Se não for uma solução de canto, usa os valores em (63) e (64) como solução provisória;
      c) Testa se o crédito é limitante para as soluções provisórias com restrição ao investimento mínimo também limitante:
         I) Se for, muda a solução provisória para a interseção entre a hipérbole de restrição de investimento mínimo e a reta de restrição de crédito, conforme (68);
         II) Se não for, testa se a utilidade das soluções provisórias é maior ou menor que a utilidade em $\left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)$, dada por (65):

i) Se for maior, usa as soluções provisórias como finais;
ii) Se não for, usa $\left(0, d_{0,i}\frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)$ como solução final.

## 6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos com as simulações são apresentados nas Figuras 15 a 20. Cada figura mostra os valores de *spread* e volume transacionado via bancos para todas as combinações de projeto, restrição de investimento mínimo como proporção da riqueza total ($K/D_0$), $\rho$ e $\gamma$ apresentados na Tabela 1. Na análise dos resultados é possível observar dois efeitos mais importantes em atuação: (a) a possibilidade dos agentes econômicos investirem no projeto sem a utilização do sistema financeiro; (b) a diminuição do acesso dos agentes econômicos a empréstimos. Ambos os efeitos resultam em menores volumes transacionados, impedindo os bancos de aproveitar economias de escala em sua operação, o que por sua vez leva à cobrança de maiores spreads. A importância relativa destes efeitos, contudo, é influenciada de maneira diferente pelos parâmetros. Enquanto o primeiro efeito é favorecido por menor desigualdade e por investimento mínimo menos restritivo, o segundo efeito é potencializado por maior desigualdade e maiores restrições.

Nas Figuras 15 a 18 é possível observar o caso em que o investimento mínimo é menor, o que favorece o efeito (a). Nos menores níveis de desigualdade o volume é menor e os spreads maiores, ou seja, o sistema financeiro é menos eficiente, e aumentos marginais na desigualdade só melhoram a eficiência. À medida que a desigualdade torna-se bem maior, contudo, o efeito (b) começa a dominar e a eficiência do sistema financeiro novamente reduz-se. Nestas condições há um nível "ótimo" de desigualdade que maximiza a eficiência do sistema financeiro. Note que em algumas situações extremas (liquidez muito baixa ou muito alta, restrições muito brandas ou muito severas) pode simplesmente não existir equilíbrio e nada ser transacionado via sistema financeiro (volume igual a zero).

É curioso notar como quando o investimento tem maior assimetria para retornos positivos (Projeto 3), considerando esse nível de restrição ao investimento mínimo ($K/D_0 = 1/1.000$), a impaciência no consumo dos agentes torna-se relevante na definição dos spreads. Mesmo com a queda no volume, nas situações em que os investidores dão mais peso ao consumo futuro ($\rho = 0{,}5$ e principalmente $\rho = 0{,}75$) os bancos conseguem cobrar spreads maiores porque os agentes estão dispostos a pagar mais pela oportunidade de investir e participar dos retornos do projeto. Apenas quando os agentes são mais impacientes ($\rho = 0{,}25$) é que a há uma relação inversa entre spreads e volume.

Nas Figuras 19 e 20, a maior restrição no investimento mínimo potencializa o efeito (b) e ameniza o efeito (a): em situações de maior desigualdade a restrição ao investimento mínimo dificulta ainda mais o acesso aos agentes mais pobres, e quando a desigualdade é menor, a restrição ao investimento mínimo impede que mais agentes realizem o projeto sem acessar o sistema financeiro. Resulta que aumentos marginais na desigualdade reduzem o volume transacionado no sistema financeiro já a partir das situações menos desiguais.

A maior contribuição deste modelo é demonstrar a viabilidade teórica de canais através dos quais a eficiência do sistema financeiro seja afetada pela desigualdade. Novas pesquisas podem tanto estudar e verificar empiricamente o funcionamento de tais canais como elaborar o modelo aqui proposto de modo que possa ser calibrado para estudar economias reais. Com um modelo mais realista, é possível tentar estimar empiricamente os parâmetros do modelo e o peso da desigualdade e da pobreza nas ineficiências do sistema financeiro.

**Figura 15.** Projeto 1, $K/D_0 = 2/10.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,044785 | 0,000000 | 0,058000 | 1 | 0,227816 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,035725 | 0,049876 | 0,000000 | 2 | 0,310289 | 0,152771 | 0,000000 |
| 3 | 0,018696 | 0,029255 | 0,037786 | 3 | 0,305214 | 0,239458 | 0,196470 |
| 4 | 0,016965 | 0,017751 | 0,017995 | 4 | 0,293261 | 0,256767 | 0,229672 |
| 5 | 0,024555 | 0,028011 | 0,031240 | 5 | 0,278830 | 0,271049 | 0,267218 |

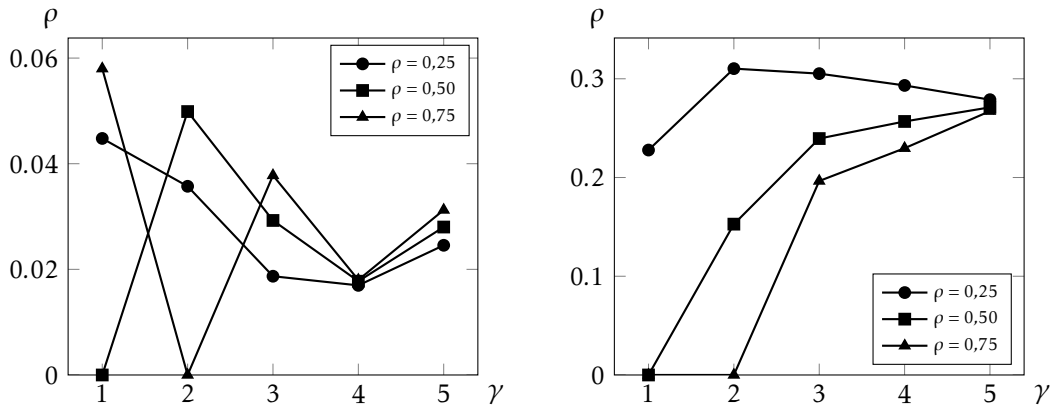



**Figura 16.** Projeto 2, $K/D_0 = 2/10.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,143897 | 0,189000 | 0,189000 | 1 | 0,166267 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,114255 | 0,168115 | 0,098366 | 2 | 0,279256 | 0,122527 | 0,081305 |
| 3 | 0,062021 | 0,091116 | 0,115766 | 3 | 0,289798 | 0,224075 | 0,181662 |
| 4 | 0,052968 | 0,054805 | 0,055886 | 4 | 0,277934 | 0,244615 | 0,222266 |
| 5 | 0,188233 | 0,188293 | 0,188331 | 5 | 0,329759 | 0,309518 | 0,296860 |

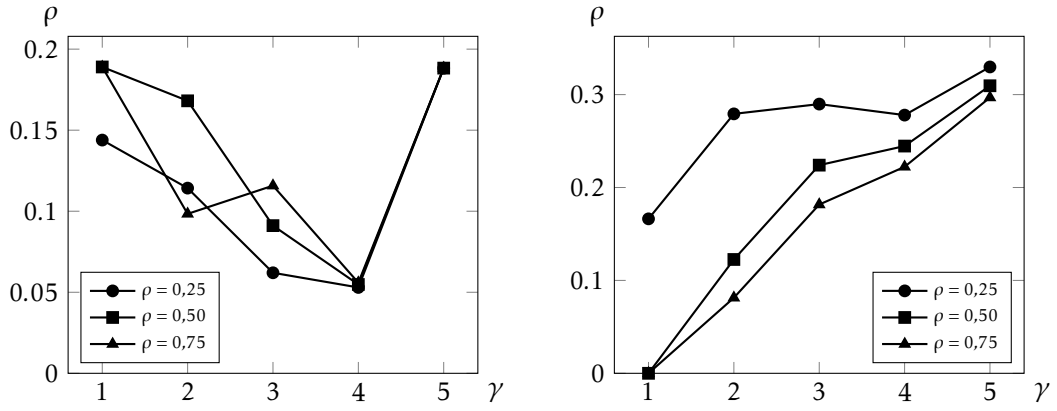


**Figura 17.** Projeto 3, $K/D_0 = 2/10.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,087712 | 0,193000 | 0,193000 | 1 | 0,206757 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,144920 | 0,098018 | 0,075666 | 2 | 0,286778 | 0,142931 | 0,077360 |
| 3 | 0,190727 | 0,159379 | 0,140213 | 3 | 0,283410 | 0,224489 | 0,185840 |
| 4 | 0,174912 | 0,183949 | 0,191637 | 4 | 0,256665 | 0,233484 | 0,217627 |
| 5 | 0,165478 | 0,168705 | 0,171025 | 5 | 0,223620 | 0,216135 | 0,210969 |

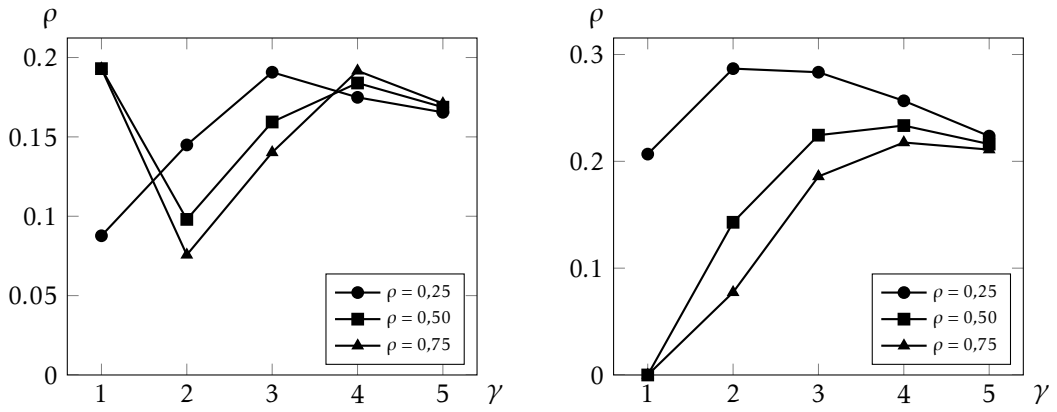



**Figura 18.** Projeto 1, $K/D_0 = 1/1.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,000000 | 0,026324 | 0,064653 | 1 | 0,000000 | 3,101576 | 3,233333 |
| 2 | 0,000000 | 0,010148 | 0,015551 | 2 | 0,000000 | 2,462914 | 2,425629 |
| 3 | 0,017097 | 0,038560 | 0,041024 | 3 | 2,160271 | 2,488032 | 2,437784 |
| 4 | 0,056500 | 0,056532 | 0,056546 | 4 | 2,305112 | 2,245911 | 2,197369 |
| 5 | 0,056705 | 0,056709 | 0,056713 | 5 | 1,885264 | 1,864882 | 1,845707 |

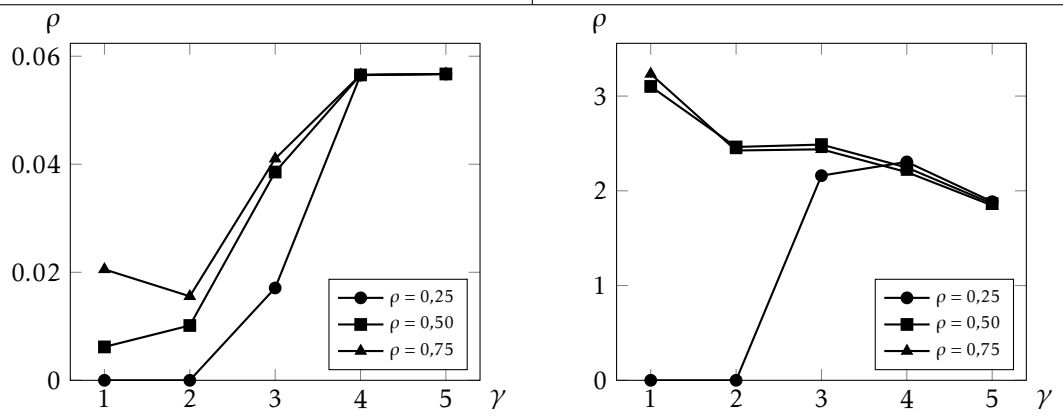


**Figura 19.** Projeto 2, $K/D_0 = 1/1.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,000000 | 0,026324 | 0,064653 | 1 | 0,000000 | 3,001314 | 3,103623 |
| 2 | 0,000000 | 0,035668 | 0,050864 | 2 | 0,000000 | 2,386206 | 2,364412 |
| 3 | 0,188212 | 0,188343 | 0,188376 | 3 | 2,742271 | 2,608069 | 2,506811 |
| 4 | 0,188581 | 0,188600 | 0,188610 | 4 | 2,171954 | 2,115444 | 2,075711 |
| 5 | 0,188773 | 0,188714 | 0,188716 | 5 | 1,798728 | 1,767357 | 1,755658 |

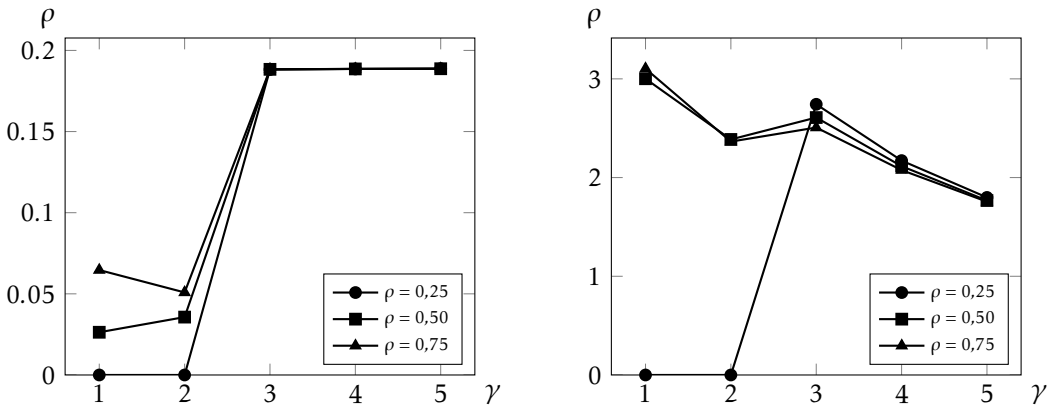
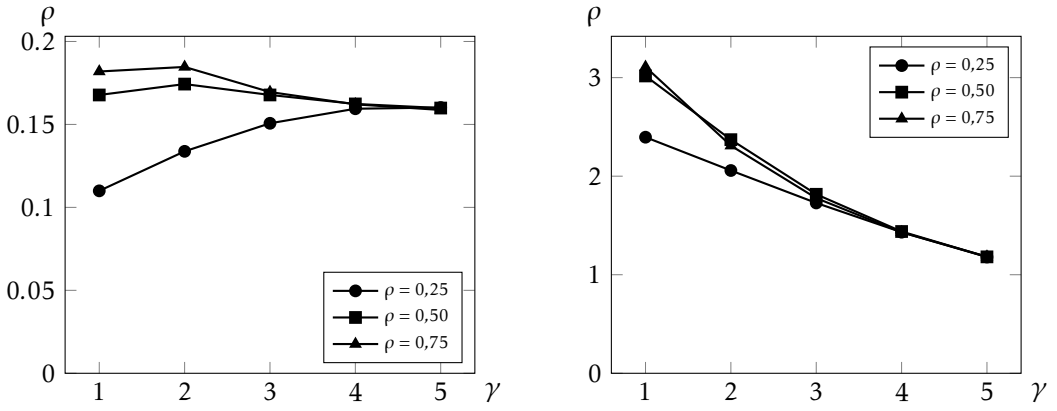



**Figura 20.** Projeto 3, $K/D_0 = 1/1.000$

| **Spread** | | | | **Volume × 1.000** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ | $\gamma$ | $\rho = 0{,}25$ | $\rho = 0{,}50$ | $\rho = 0{,}75$ |
| 1 | 0,109963 | 0,167752 | 0,181904 | 1 | 2,395488 | 3,016930 | 3,108458 |
| 2 | 0,133778 | 0,174316 | 0,184648 | 2 | 2,057582 | 2,370570 | 2,309765 |
| 3 | 0,150679 | 0,167766 | 0,169529 | 3 | 1,728334 | 1,816222 | 1,777431 |
| 4 | 0,159451 | 0,162353 | 0,162096 | 4 | 1,431682 | 1,438617 | 1,430382 |
| 5 | 0,160183 | 0,159869 | 0,158715 | 5 | 1,179541 | 1,181305 | 1,183166 |



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Aghion, P., & Bolton, P. (1997). A theory of trickle-down growth and development. *The Review of Economic Studies*, *67*(219), 151–172.

Aghion, P., & Howitt, P. W. (1998). *Endogenous growth theory*. Cambridge, MA: MIT Press.

Beck, T., Demirguc-Kunt, A. & Levine, R. (2005). SMEs, growth, and poverty: Cross-country evidence. *Journal of Economic Growth*, *10*(3), 199–229. doi: 10.1007/s10887-005-3533-5

Diamond, D. W. (1984). Financial intermediation and delegated monitoring. *Review of Economic Studies*, 393–414. doi: 10.2307/2297430

Diamond, D. W., & Dybvig, P. H. (1983, Jun.). Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy*, *91*(3), 401–419.

Li, H., Squire, L. & Zou, H.-f. (1998). Explaining international and intertemporal variations in income inequality. *The Economic Journal*, *108*(Issue 446), 26-43. doi: 10.1111/1468-0297.00271

United Nations. (2009). *Human Development Report 2009*. New York: United Nations Development Programme (UNDP). Disponível em: http://hdr.undp.org/sites/default/files/reports/269/hdr_2009_en_complete.pdf

United Nations. (2013). *Inequality matters: Report of the world social situation 2013*. New York: United Nations | Department of Economic and Social Affairs. Disponível em: http://www.un.org/esa/socdev/documents/reports/InequalityMatters.pdf


## A. APÊNDICE: CARACTERIZAÇÃO DO PARÂMETRO DE DESIGUALDADE $\gamma$

A partir da Figura 1, intuitivamente, haverá igualdade se a riqueza de um quantil $z$ da população corresponder exatamente a $z \times 100\,\%$ da riqueza total, o que é representado pela reta. Para qualquer distribuição não uniforme da riqueza, $z \times 100\,\%$ da população mais pobre sempre terá uma proporção menor que $z \times 100\,\%$ da riqueza, já que o excedente estará com a população mais rica. Matematicamente, da continuidade de $d_{0,i}$, $\overline{D}_{0,i\leq z}$ é contínua e diferenciável em $z$, de modo que $\frac{\mathrm{d}\overline{D}_{0,i\leq z}}{\mathrm{d}z} = \frac{d_{0,z}}{D_0}$, ou seja, a derivada de $\overline{D}_{0,i\leq z}$ também é monotônica não decrescente. Se a riqueza for distribuída uniformemente, $d_{0,i} = D_0 \implies \frac{\mathrm{d}\overline{D}_{0,i\leq z}}{\mathrm{d}z} = 1, \forall z \in [0,1]$, e obtém-se a reta da Figura 1. Numa distribuição de riqueza desigual, para $z$ suficientemente próximo de $0$, $d_{0,z} < D_0$ e $\frac{\mathrm{d}\overline{D}_{0,i\leq z}}{\mathrm{d}z} < 1$, e, portanto, $\overline{D}_{0,i\leq z}$ estará abaixo da reta e assim permanecerá até que $z = \overline{D}_{0,i\leq z} = 1$, caso contrário $\overline{D}_{0,i\leq z}$ cruzaria a reta num ponto $z < 1$ em que $\frac{\mathrm{d}\overline{D}_{0,i\leq z}}{\mathrm{d}z} > 1$ e como $\frac{\mathrm{d}\overline{D}_{0,i\leq z}}{\mathrm{d}z}$ é monotônica não decrescente, $\overline{D}_{0,i\leq z}$ nunca retornaria a cruzar a reta e $\overline{D}_{0,i\leq z}$ seria diferente de $1$, o que é uma contradição.

O índice de Gini será então:

$$
\begin{aligned}
\text{Gini} &= 1 - 2\int_0^1 \overline{D}_{0,i\leq z}\,\mathrm{d}z = 1 - 2\int_0^1 \frac{e^{\gamma z}-1}{e^{\gamma}-1}\,\mathrm{d}z \\
&= 1 - \frac{2}{e^{\gamma}-1}\left(\frac{e^{\gamma z}}{\gamma}\Big|_0^1 - 1\right) = 1 - \frac{2}{e^{\gamma}-1}\left(\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} - 1\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{e^{\gamma}-1}\right) \\
&= 1 - 2\frac{(e^{\gamma}-1)-\gamma}{\gamma\,(e^{\gamma}-1)}
\end{aligned}
$$

para todo $\gamma > 0$.

Da expansão em série da função exponencial, se $\gamma > 0$ então $e^{\gamma/2} > 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}$ e também $e^{-\gamma/2} < \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1}$.

Juntando ambos os resultados obtém-se:

$$e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}} > 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}} = \gamma \frac{16 + 12\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3}{16 + 8\gamma + 4\gamma^2} > \gamma.$$

De $e^{\gamma/2} - e^{-\gamma/2}$ vem:

$$e^{\gamma} - 2 + e^{-\gamma} > \gamma^2 \implies \frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma}) > \frac{\gamma^2}{2} + 1 \implies \cosh(\gamma) - 1 > \frac{\gamma^2}{2} \implies \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{1 - \cosh(\gamma)} > 0.$$

Como $\frac{\mathrm{dGini}}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{1-\cosh(\gamma)} > 0$ para todo $\gamma > 0$, o índice de Gini é uma função estritamente crescente de $\gamma$, de modo que quanto maior $\gamma$, maior a desigualdade.

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150003
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 53–73

# Ciclos Econômicos e Emissão de $CO_2$ no Brasil: Uma Análise Dinâmica para Políticas Ambientais Ótimas

Ricardo Aguirre Leal[*], Regis Augusto Ely [†], Júlia Gallego Ziero Uhr[‡], Daniel de Abreu Pereira Uhr[§]

**Sumário:** **1. Introdução; 2. Revisão da Literatura; 3. Metodologia; 4. Resultados; 5. Considerações Finais.**

**Palavras-chave:** **Políticas Ambientais, Emissão de Carbono, Ciclos Reais de Negócios, Brasil.**

**Códigos JEL:** **Q52, E32.**

Este artigo estuda como as políticas ambientais devem responder de forma ótima aos ciclos econômicos no Brasil. Para isso utilizamos um modelo de ciclos reais de negócios (RBC) com externalidades de poluição. Os resultados indicam que o custo de mitigação de emissões de carbono é mais baixo que o da poluição no Brasil, justificando a adoção de políticas restritivas. Além disso, diante de choques de produtividade, o comportamento ótimo é uma política de mitigação pró-cíclica, onde o imposto e o teto de emissões devem aumentar em períodos de expansão da economia e diminuir em períodos de crise. Também definimos uma regra de decisão para a dinâmica da política de mitigação.

*This paper studies how environmental policies should respond optimally to economic cycles in Brazil. We use a real business cycle (RBC) model with pollution externalities to address this question. The results indicate that the cost of mitigation of carbon emissions is lower than the cost of pollution in Brazil, what supports the adoption of restrictive policies. Also, facing productivity shocks, mitigation should be pro-cyclical, where emission taxes and quotas rise in moments of expansion and fall in periods of crisis. We also define a decision rule to the optimal path of mitigation.*

## 1. INTRODUÇÃO

O Brasil é signatário de diversos acordos multilaterais no esforço global de redução dos gases de efeito estufa (GEE), mesmo não tendo metas obrigatórias de mitigação de dióxido de carbono ($CO_2$). Porém, as políticas ambientais adotadas até o momento não incluem o controle formal das emissões,

[*]Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: raguirreleal@yahoo.com.br

[†]Departamento de Economia, Universidade Federal de Pelotas (UFPel). E-mail: regis.ely@ufpel.edu.br

[‡]Departamento de Economia, Universidade Federal de Pelotas (UFPel). E-mail: julia.uhr@ufpel.edu.br

[§]Departamento de Economia, Universidade Federal de Pelotas (UFPel). E-mail: daniel.uhr@ufpel.edu.br

tais como impostos ou comércio de quotas. A preocupação com os efeitos das mudanças climáticas tem levado alguns setores do governo a discutir a adoção de mecanismos tributários para uma economia de baixo carbono, sinalizando uma mudança de atitude. Assim, analisar como tais políticas ambientais devem responder de forma ótima aos ciclos econômicos no Brasil é essencial para auxiliar a adoção e formulação dessas políticas.

Questões ambientais como as emissões antropogênicas de GEE estão associadas a flutuações econômicas e choques de produtividade (Baumol & Oates, 1988). Recentemente, alguns estudos passaram a empregar modelos estocásticos dinâmicos de equilíbrio geral através da estrutura básica do modelo de Ciclos Reais de Negócios (RBC), adicionando a poluição como uma externalidade em seus modelos (Fischer & Heutel, 2013). Entretanto, nenhum trabalho empregando tal metodologia foi feito para o Brasil. Assim, o objetivo deste artigo é estudar políticas ambientais formais de controle de emissão de $CO_2$ que respondam de forma dinâmica aos ciclos econômicos no Brasil. Mais especificamente, avaliamos:

(i) se as reduções das externalidades geradas pelas emissões de $CO_2$ compensam o custo desta mitigação;

(ii) como as políticas de imposto e quota de emissões devem responder a choques de produtividade na economia; e

(iii) qual a regra de decisão ótima que deve ser adotada para as políticas de mitigação.

Para isso utilizamos um modelo RBC com externalidades de poluição proposto por Heutel (2012), calibrado com dados da economia brasileira durante o período de 1980 a 2010.

Os principais resultados apontam para três fatos. Primeiro, podemos concluir que é vantajoso adotar políticas restritivas de emissões, isto é, o custo da mitigação é inferior ao impacto da poluição sobre a produção econômica, de modo que, no equilíbrio, há uma taxa de imposto positiva que impõe um nível de mitigação maior que zero. Em segundo lugar, o comportamento ótimo do governo implica em uma política de mitigação pró-cíclica. Durante os ciclos de expansão, o nível ótimo de emissões deve crescer, mas não na mesma magnitude que cresceria sem uma política dinâmica de impostos ou quotas. Por esse motivo, tanto o imposto quanto o teto de emissões devem aumentar em períodos de expansão da economia e diminuir em períodos de crise. Por fim, um choque positivo de produtividade no modelo utilizado, por um lado aumenta o custo de mitigação, e por outro lado aumenta a demanda por mitigação. A trajetória ótima de mitigação é obtida através do aumento do imposto sobre as emissões até o ponto em que o custo de mitigação acaba anulando o aumento da demanda por mitigação. Assim, o imposto deve aumentar até o ponto em que a produtividade marginal do capital começa a cair em relação ao seu nível de estado estacionário. A partir desse momento, o comportamento ótimo do governo é o de reduzir o imposto para continuar equilibrando os custos de mitigação e emissão.

O artigo é o primeiro a estudar a adoção de políticas ambientais dinâmicas para o Brasil através de um modelo de RBC com externalidade de poluição. Os resultados podem subsidiar as discussões sobre políticas de mitigação de externalidades no Brasil, além de contribuir com a literatura de crescimento econômico. Na seção 2 discutimos alguns resultados da literatura para o Brasil e outros países. Na seção 3 descrevemos o modelo utilizado. Os resultados são apresentados na seção 4, onde calibramos os parâmetros econômicos e ambientais, e realizamos a simulação e a análise de sensibilidade. Por fim, na seção 5 fazemos as considerações finais.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

De acordo com o Painel Internacional sobre Mudanças Climáticas (IPCC), o avanço de emissões antropogênicas de gases do efeito estufa (GEE) é a causa dominante do aquecimento global.[1] Em resposta a esta questão os governos em todo o mundo vêm considerando medidas para reduzir o avanço de tais

[1] Ver, por exemplo, Hegerl et al. (2007) e Kaufmann e Stern (1997).

emissões.[2] Entretanto, há grandes impasses envolvendo as soluções possíveis, pois políticas de mitigação ancoradas no mercado, tais como impostos ou comércio de quotas, geram importantes repercussões econômicas. Estas políticas ambientais têm sido amplamente estudadas para identificar seus impactos econômicos em diversos países. Por outro lado, a integração da política ambiental com as flutuações econômicas geralmente não está presente nos países que adotam tais mecanismos. Conforme destacado por Baumol e Oates (1988), Tucker (1995) e Fischer e Springborn (2011), questões ambientais tais como a poluição por GEE estão correlacionadas a flutuações econômicas e choques de produtividade.

O Brasil, apesar de não ter metas obrigatórias de redução de dióxido de carbono ($CO_2$), assumiu o compromisso voluntário de reduzir suas emissões até o ano de 2020, sendo signatário de diversos acordos multilaterais para o esforço global de mitigação dos GEE. Ao contrário de outros países, cuja queima de combustíveis fósseis é a principal fonte de GEE, as emissões brasileiras são originadas, principalmente, em mudanças no uso da terra e florestas, com as queimadas e o desmatamento liderando este processo (Brasil, 2009 ; Ministério da Ciência e Tecnologia, 2010 ; da Silva & Gurgel, 2012). As políticas adotadas não incluem restrições de emissões, mas ações alternativas ligadas à ampliação e eficiência da oferta de fontes renováveis de energia, pequenas hidroelétricas e biocombustíveis (Brasil, 2010).

Entretanto, La Rovere, Dubeux, Pereira Jr e Wills (2013) destaca que após o ano de 2020, e se as metas de mitigação forem satisfeitas, o Brasil estará em uma situação mais parecida com a dos países industrializados, demandando a adoção de políticas tradicionais de controle sobre a queima de combustíveis fósseis. Neste sentido, é importante destacar que já surgem as primeiras discussões em âmbito federal a respeito de políticas de mitigação de GEE. A Comissão Mista Permanente sobre Mudanças Climáticas do Senado Federal (CMMC) reuniu-se recentemente para debater os mecanismos financeiros e tributários para uma economia de baixo carbono.[3] Dessa forma, o estudo para o Brasil de como tais políticas ambientais devem responder de forma ótima aos ciclos econômicos torna-se evidente.

Vasta literatura internacional sobre aquecimento global e políticas climáticas emprega a estrutura de Equilíbrio Geral Computável (CGE) para estudar choques nos custos de mitigação e nas emissões.[4] Atualmente, diversos trabalhos internacionais também investigam o efeito de choques tecnológicos, integrando os ciclos econômicos às questões do aquecimento global. Geralmente, estudam-se políticas ambientais estáticas, as quais incorporam as flutuações a fim de averiguar como estas respondem aos choques. Já outros autores, mesmo utilizando modelos dinâmicos, não analisam choques de produtividade. Strand (1995) desenvolve um modelo de política ambiental ótima, com ciclos econômicos gerados através de mudanças estocásticas nos preços dos produtos. Bouman, Gautier e Hofkes (2000) desenvolvem um modelo para encontrar o momento ideal para investir em redução de emissões nos ciclos econômicos originados de choques de preferências. Hoel e Karp (2002) comparam os efeitos de impostos e quotas de emissões quando tanto o regulador como o poluidor têm informação assimétrica sobre os custos de abatimento, sugerindo que os impostos são mais eficazes para o controle de GEE. Pizer (2002) utiliza um modelo de CGE estocástico para avaliar diferentes políticas ambientais e encontra que uma política híbrida é mais eficiente que controles de preço ou quantidade separadamente. Kelly (2005) compara uma política de impostos com uma política de quotas em um cenário de equilíbrio geral estático configurado com choques de produtividade no total dos fatores. Newell e Pizer (2003) concluem que, para o problema dos GEE e mudança climática, instrumentos baseados no preço (impostos) são superiores a políticas de quantidade, gerando um benefício líquido esperado maior. Para Fell, MacKenzie e Pizer (2012), a regulação baseada em políticas de quantidade, quando associada à atividade bancária, permite

[2] Sobre formas de controle de GEE, ver Herzog, Baumert e Pershing (2006).

[3] Agência Senado, http://www12.senado.gov.br/noticias/materias/2013/08/13/representante-da-fazenda-diz-taxas-sobre-emissao-de-carbono-dependem-de-mais-estudos.

[4] Da Silva e Gurgel (2012) destacam os trabalhos recentes de Viguier, Babiker e Reilly (2003), sobre os impactos do Protocolo de Quioto na economia européia, Paltsev, Reilly, Jacoby e Tay (2004), na economia japonesa, Babiker, Reilly e Jacoby (2000), em países em desenvolvimento, Bernard, Paltsev, Reilly, Vielle e Viguier (2003), sobre o papel da Rússia no Protocolo de Quioto, e Nordhaus (2007) sobre a redução do aquecimento global através de abordagens alternativas.

que as firmas mudem suas obrigações ao longo do tempo, respondendo a períodos de alta ou baixa nos custos marginais.

No Brasil, a maioria dos trabalhos, utilizando Modelos de Avaliação Integrada (IAM), investiga os impactos da redução de GEE sobre o setor econômico e/ou o meio ambiente a partir de alternativas de políticas (choques nos custos de mitigação ou de emissão). No entanto, não encontramos trabalhos aplicados ao Brasil que calculem o efeito conjunto da mitigação e poluição. Encontrar a medida mais vantajosa considerando apenas um destes aspectos pode resultar em uma política sub-ótima.

Rocha (2003), com um modelo de equilíbrio parcial, estimou o potencial do mercado de carbono do Protocolo de Kyoto e a participação do Brasil neste mercado, considerando diversos cenários. Lopes (2003) utilizou um modelo CGE para analisar os impactos de políticas de mitigação. Identificou que para a redução de emissões de $CO_2$ é necessária a redução do nível de atividade econômica. Tourinho, da Mota e Alves (2003), com modelo semelhante, simularam choques de impostos no carbono e encontraram um aumento nos preços dos setores mais intensivos em emissões, queda na produção agregada e na renda. Hilgemberg (2004) quantificou as emissões de $CO_2$ geradas no setor energético e, empregando um CGE multi-regional, investigou os impactos econômicos de políticas de quantidade e de impostos sobre as emissões. Ferreira Filho e Rocha (2007), em modelo análogo, também identificaram os efeitos de medidas de redução de emissões. Feijó e Júnior (2009) utilizaram um modelo CGE multi-país para investigar os possíveis impactos econômicos e ambientais da adoção de políticas de mitigações de $CO_2$ previstas no Protocolo de Kyoto. De Gouvello (2010) estimou custos de abatimento a partir de diferentes medidas de mitigação, no entanto sem abordar impostos ou tetos de emissões. Da Silva e Gurgel (2012) empregam um modelo dinâmico multi-país, incorporando políticas de uso da terra e de redução de emissões de diversos poluentes, simulando também o mercado internacional de crédito de carbono. Faria e Haddad (2013) utilizam um modelo CGE também com especificações do uso da terra, condicionando-o a choques climáticos. Obtiveram resultados que indicam a diminuição do PIB, com intensidade dependente do cenário climático e do horizonte de tempo considerado.

Recentemente, alguns estudos passaram a empregar modelos DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*) através da estrutura básica dos Ciclos Econômicos Reais (RBC), adicionando a poluição nos seus modelos. São eles: Angelopoulos, Economides e Philippopoulos (2010), Fischer e Springborn (2011) e Heutel (2012). A poluição é modelada de forma diferente nos três trabalhos. Em Fischer e Springborn (2011), a poluição é diretamente proporcional à quantidade empregada de um insumo intermediário (energia, por exemplo); em Heutel (2012), as emissões são um subproduto da produção, de modo que o produto agregado está diretamente correlacionado com as emissões totais; em Angelopoulos et al. (2010), as emissões também são um subproduto da produção, mas a mudança na tecnologia de abatimento da poluição é estocástica, não dinâmica (Fischer & Heutel, 2013). Dos três artigos, apenas Heutel (2012) se preocupa em encontrar a política dinâmica ótima, além de incluir os danos da poluição na análise de bem-estar.

Angelopoulos et al. (2010) utiliza a estrutura RBC, com duas importantes modificações, para comparar o desempenho de três políticas ambientais: impostos, teto de emissões e um conjunto de políticas denominado "*Kyoto-like rules*", especificando regras para a velocidade de redução das emissões entre dois períodos. Os autores consideram dois tipos de choques exógenos: choques de produtividade e choques na razão entre emissões e produto, o qual reflete uma "incerteza ambiental". Além disso, na modelagem dos autores o abatimento da poluição só pode ser feito pelo governo, de modo que as receitas obtidas com os impostos ou com o leilão de permissões são utilizadas para este fim. Os autores encontram que a política de teto de emissões é sempre a pior em todas as simulações realizadas (Fischer & Heutel, 2013).

Fischer e Springborn (2011) utilizam um modelo RBC onde seu elemento estocástico não deriva de choques de custos de redução de emissões, mas de choques de produtividade do total de fatores. Os autores comparam o desempenho de diferentes políticas estáticas (impostos sobre emissões, teto de emissão e metas de intensidade), mas ainda sem buscarem a política dinâmica ótima. Eles encontram que, para os EUA, a meta de intensidade é a política de menor custo esperado (decorrente da mitigação e do menor impacto na volatilidade das variáveis econômicas); um resultado que condiciona as emissões

a variarem numa proporção fixa do produto. A vantagem das metas de intensidade sobre as demais políticas advém de sua habilidade de adaptação às flutuações econômicas (Fischer & Heutel, 2013).

Heutel (2012), também através de um modelo RBC, incluindo uma externalidade advinda do estoque acumulado de poluição, com o elemento estocástico derivado de choques de produtividade, analisa políticas de impostos e teto de emissões. O objetivo do autor é encontrar o comportamento ótimo dinâmico destas políticas, sujeitas aos choques de produtividade, comparando desempenho de políticas dinâmicas e estáticas. Em suas conclusões encontrou que para os EUA as duas políticas devem ser pró-cíclicas: a taxa de imposto e o teto das emissões aumentam nos ciclos de expansão e diminuem nas recessões. Um aumento na taxa de imposto significa o *fortalecimento* da política ambiental, ao passo que uma elevação no teto das emissões implica no *enfraquecimento* da política, isto é, mais emissões são permitidas. Ambos resultados são consistentes, uma vez que a política ótima permite que as emissões aumentem (diminuam) durante os ciclos de expansão (recessão), mas não tanto quanto se não houvesse nenhuma política ambiental (Fischer & Heutel, 2013). O autor também discute qualitativamente as duas políticas, sugerindo que em termos de *policy* pode ser mais fácil aumentar o teto das emissões do que a taxa de imposto durante uma expansão econômica.

## 3. METODOLOGIA

O modelo utilizado baseia-se em Heutel (2012) e consiste na simulação e avaliação de choques persistentes de produtividade em uma economia estilizada do tipo RBC, que inclui uma externalidade por poluição. Os modelos são estruturados em um contexto de equilíbrio geral dinâmico e estocástico (DSGE), contendo políticas de mitigação de emissões de $CO_2$ por queima de combustível fóssil. A partir das simulações encontramos o comportamento da política dinâmica que melhor responde aos choques tecnológicos.

No modelo, as decisões são descentralizadas entre firmas competitivas, indivíduos maximizadores de utilidade, e um governo benevolente. Os agentes possuem perfeita simetria de informação e otimizam suas escolhas em resposta à política governamental de teto ou de impostos de emissões, com o objetivo de maximizar a utilidade total do consumidor, por sua vez sujeita aos efeitos negativos do estoque de poluição. Utilizamos um agente representativo para os consumidores, tornando suas condições econômicas e suas preferências homogêneas. Para as decisões do setor produtivo, utilizamos uma firma representativa (relegando distinções entre setores produtivos), com o comportamento competitivo de concorrência perfeita. Na função de produção, consideramos somente o capital como fator produtivo, visto que o objetivo do artigo não é focar nas flutuações do mercado de trabalho.

Analisamos duas medidas de controle de $CO_2$: restrição de quantidade e impostos sobre emissões. Apesar da estrutura das restrições serem diferentes, Heutel (2012) demonstra que as condições de primeira ordem dos dois modelos são equivalentes no caso em que há perfeita simetria de informação.

Supondo que o governo impõe uma taxa de imposto, $\tau_t$, sobre as emissões, $e_t$, das firmas. O consumidor representativo escolhe a cada período o nível apropriado de consumo, $c_t$, e investimento, $i_t$. Sua função utilidade, do tipo CRRA, depende apenas do consumo,

$$U(c_t) = \frac{C_t^{1-\phi}}{1-\phi},$$

onde $\phi$ é o coeficiente de aversão ao risco. O consumidor é o proprietário do fator de produção capital, $k_t$, e o aluga para a firma representativa à taxa de juros de mercado, $r_t$. Também recebe renda pelo lucro da firma, $\pi_t$, por ser o proprietário do capital. Supomos que o governo retorna todo o imposto arrecadado das firmas para o consumidor. Então, a renda total do consumidor é $r_t k_{t-1} + \tau_t e_t + \pi_t$, onde $k_{t-1}$ é o capital alugado à firma no período anterior. Como a lei de movimento do capital segue a dinâmica usual dos modelos RBC, $k_t = (1-\delta)k_{t-1} + i_t$, onde $\delta$ é a taxa de depreciação do capital, então a restrição

orçamentária do consumidor é dada por:

$$c_t \leq r_t k_{t-1} + \tau_t e_t + \pi_t - k_t + (1-\delta)\, k_{t-1}. \tag{1}$$

O problema de maximização do consumidor é

$$\max_{c_t, i_t} \sum \beta^t U(c_t),$$

sujeito a (1), onde $\beta$ é o fator de desconto intertemporal. As condições de primeira ordem deste problema nos dão a equação de Euler que descreve a atitude ótima de consumo intertemporal do consumidor:

$$U'(c_t) = \beta\, \mathrm{E}_t\, U'(c_{t+1}) \cdot [r_{t+1} + (1-\delta)], \tag{2}$$

que nos dá a condição de que a taxa marginal de substituição de consumo intertemporal deve ser equivalente à taxa de juros sobre o capital descontada a depreciação.

O estoque de poluição existente no ambiente, $x_t$, diminui a uma taxa linear e possui persistência igual a $\eta$. Sua dinâmica é dada por

$$x_t = \eta x_{t-1} + e_t + e_t^{\mathrm{row}}, \tag{3}$$

onde $e_t^{\mathrm{row}} = e_t/\Psi$ é a emissão corrente de $CO_2$ no resto do mundo, com $\Psi$ igual à proporção das emissões domésticas em relação ao total das emissões antropogênicas mundiais — proporção assumida como constante, de forma que as emissões internacionais $e_t^{\mathrm{row}}$ não são afetadas por choques de produtividade domésticos. Já as emissões domésticas são função do total da produção e do nível de mitigação:

$$e_t = (1-\mu_t) h(y_t), \tag{4}$$

onde $\mu_t \in [0,1]$ é a fração das emissões reduzidas pela política ambiental no período $t$, e $h(y_t) = y_t^{1-\gamma}$ é a função isoelástica que relaciona as emissões com o produto, onde $(1-\gamma) = \xi_{e,y}$ é a elasticidade das emissões em relação ao produto.

A firma representativa possui uma tecnologia de produção dada por $a_t f(k_{t-1})$, sendo uma função do estoque de produtividade corrente, $a_t$, e do estoque de capital acumulado até o último período, $k_{t-1}$. Definimos $f(k) = k^{\alpha}$, onde $\alpha$ é participação do capital no produto. O choque de produtividade evolui de acordo com um processo de Markov, $\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \epsilon_t$, onde $\rho$ é o parâmetro de persistência do choque e $\epsilon$ é um ruído branco normalmente distribuído.

A poluição ambiental $x_t$ diminui o bem-estar social, e a medida que a renda da economia aumenta, mais recursos são gastos em tecnologia de abatimento, $z_t = y_t g(\mu_t)$, onde $g'(\mu_t) > 0$. Neste modelo o efeito negativo da poluição não é incluído diretamente na função utilidade, mas na função de produção, que afeta indiretamente a utilidade por meio do consumo. Como discutido por Nordhaus (2007), ao contrário de poluentes convencionais que afetam diretamente a saúde, é esperado que o dióxido de carbono afete as possibilidades de produção da economia. Assim, o produto é afetado negativamente pelo estoque de poluição corrente, $x_t$, e o total do produto é dado por

$$y_t = (1 - d(x_t)) a_t f(k_{t-1}), \tag{5}$$

onde $d(x_t) \in [0,1]$ e $d'(x_t) > 0$, representando a função perda do produto potencial devido à poluição. Esta função perda é definida como uma função quadrática, $d(x_t) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$.

Os custos de abatimento $z_t$ são incorridos pela firma, correspondentes a uma externalidade negativa, que surge devido a firma não considerar o impacto de suas emissões no estoque de poluição $x(x_{t-1}, e_t)$. Normalizando o preço do produto e do abatimento em 1, o termo $g(\mu) = \theta_1 \mu_t^{\theta_2}$ representa a proporção do produto gasto com reduções, que é cada vez maior à medida que a mitigação aumenta. Temos $g''(\mu_t) > 0$, $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 1$.

Assim, a função que descreve o lucro da firma é dada por:

$$\pi_t = y_t - \tau_t e_t - r_t k_{t-1} - z_t. \tag{6}$$

A firma maximiza seu lucro escolhendo o nível apropriado de capital e abatimento, definindo o produto marginal do capital igual à taxa de juros do capital,

$$r_t = y_t \frac{f'(k_{t-1})}{f(k_{t-1})}\Big(1 - \tau_t(1-\mu_t)h'(y_t) - g(\mu_t)\Big) \tag{7}$$

e, também, o produto marginal do abatimento igual ao seu preço (normalizado em 1),

$$\tau_t h(y_t) = y_t g'(\mu_t). \tag{8}$$

Então o governo benevolente escolhe a taxa ótima de imposto, $\tau_t$, maximizando a utilidade total esperada descontada do consumidor, dada as restrições do comportamento maximizador de lucro da firma e as restrições do comportamento maximizador de renda do consumidor. O governo considera os efeitos de $\tau_t$ sobre o bem-estar social, dado as escolhas da firma e do consumidor. Assim, o problema do governo é:

$$\max_{c_t,k_t,y_t,\tau_t} \sum \beta^t U(c_t) \quad \text{sujeito à}$$

$$\begin{aligned}
U'(c_t) &= \beta\, \mathrm{E}_t\, U'(c_{t+1}) \cdot [r_{t+1} + (1-\delta)] \\
r_t &= y_t \frac{f'(k_{t-1})}{f(k_{t-1})}[1 - \tau_t(1-\mu_t)h'(y_t) - g(\mu_t)] \\
\tau_t h(y_t) &= y_t g'(\mu_t) \\
c_t &= r_t k_{t-1} + \tau_t e_t + \pi_t - k_t + (1-\delta)k_{t-1} \\
\pi_t &= y_t - \tau_t e_t - r_t k_{t-1} - z_t \\
e_t &= (1-\mu_t)h(y_t) \\
x_t &= \eta x_{t-1} + e_t + e_t^{\text{row}} \\
z_t &= y_t g(\mu_t) \\
y_t &= (1 - d(x_t))a_t f(k_{t-1}).
\end{aligned}$$

O nível de mitigação no período dependerá somente de $\tau_t$ e $y_t$, enquanto que $e_t$ e $z_t$ dependerão somente de $y_t$ e $\mu_t$. Assim teremos $\mu_t = \mu(\tau_t, y_t)$, $e_t = e(\tau_t, y_t)$, $z_t = z(\tau_t, y_t)$, e $r_t = r(\tau_t, y_t, k_{t-1})$. Logo, o problema do governo benevolente será escolher, para cada período, os níveis de $\tau_t$, $y_t$, $k_t$ e $x_t$ que maximizem $c_t$. A solução deste problema é obtida por aproximação linear das equações, via log-linearização, e com a utilização o algoritmo de Anderson e Moore (1985) (AMA).

Supondo que a política ambiental do governo é a imposição de restrição de quantidade de emissões, a estrutura do modelo difere em algumas equações. Fazendo $q_t$ igual ao nível de $CO_2$ que a firma pode emitir, então o seu lucro será dado por

$$\pi_t = y_t - r_t k_{t-1} - z_t, \tag{6'}$$

pois não há o pagamento de impostos. E como há apenas uma firma representativa, esta política equivale ao esquema *cap-and-trade* ordinário; contudo, a firma não paga pela permissão de emissão (a firma é única). O problema de otimização restringida da firma é a maximização de $\pi_t$, sujeita a $(1-\mu_t)h(y_t) = q_t$ e $z_t = y_t g(\mu_t)$, onde $q_t$ é o teto de emissão imposto pelo governo. O comportamento maximizador da firma define o produto marginal do capital igual à taxa de juros do capital, que neste caso será um pouco diferente do problema com imposto,

$$r_t = y_t \frac{f'(k_{t-1})}{f(k_{t-1})}\left[1 - g(\mu_t) - (1-\mu_t)h'(y_t)y_t g'(\mu_t)/h(y_t)\right]. \tag{7'}$$

O nível de emissão ótimo é igual ao máximo permitido pela política ambiental,

$$q_t = (1 - \mu_t)h(y_t). \tag{9}$$

Considerando perfeita simetria de informação, o problema do governo benevolente com política ambiental de restrição de emissões tem as mesmas equações de primeira ordem do problema com imposto sobre as emissões, conforme demonstrado por Heutel (2012). Assim, qualquer solução para a política de quantidades é também a solução para a política de impostos.

## 4. RESULTADOS

Para solucionarmos o modelo realizamos a calibração dos parâmetros de interesse. A estimação dos parâmetros não é realizada devido à presença de externalidade no modelo, sendo que neste caso a alocação ótima pode não coincidir com os resultados do equilíbrio competitivo.

Na seção 4.1 estimamos a elasticidade das emissões em relação ao produto para o Brasil, comparando os resultados com dados de outros países desenvolvidos e emergentes. Nas subseções 4.2 e 4.3 descrevemos a estratégia para obtenção dos parâmetros econômicos e ambientais, respectivamente. Os parâmetros são calculados com base na periodicidade trimestral com exceção da elasticidade das emissões em relação ao produto, em que utilizamos dados anuais devido à restrição dos dados.

Após a calibragem e solução do modelo, realizamos uma série de simulações na **??**, onde observamos as funções de impulso resposta e o impacto de diversos choques nas variáveis de interesse. Por fim, na Análise de sensibilidade fazemos a análise de sensibilidade dos parâmetros.

### 4.1. Elasticidade das emissões em relação ao produto

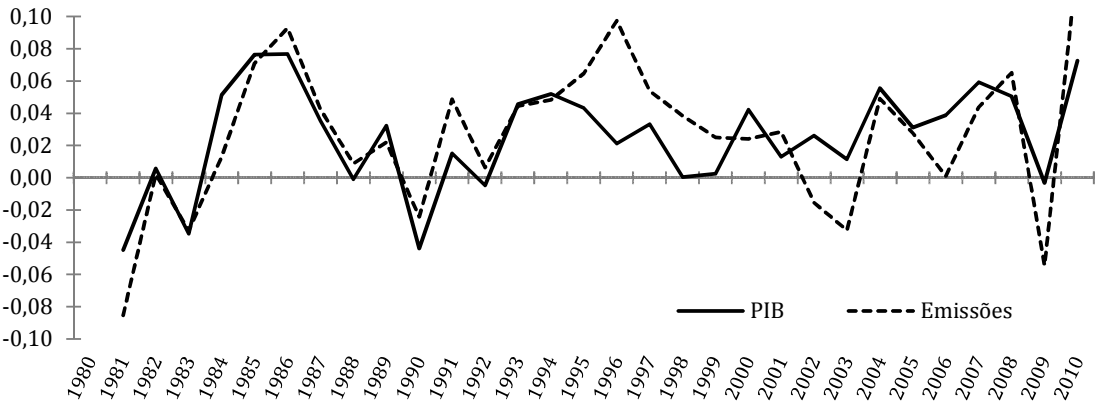
Para investigarmos a relação entre ciclos econômicos e emissões de $CO_2$, utilizamos a série de emissões de dióxido de carbono referente à queima de combustível fóssil (sólido, líquido e gasoso) no Brasil, disponibilizada pelo Carbon Dioxide Information Analysis Center (CDIAC) do Departamento de Energia dos EUA (DOE). Para a série do produto real utilizamos o produto interno bruto corrente em reais, deflacionado pelo deflator implícito, e obtido através do sistema de séries temporais do Banco Central do Brasil. Ambas as séries estão em periodicidade anual.

Na Figura 1 observamos a primeira diferença do logaritmo do PIB e das emissões entre os anos de 1980 a 2010. Ambas as séries aumentaram em cerca de 75% nos 30 anos analisados. A evolução das emissões acompanha o nível de produção, com correlação de 0,758. Há diferenças mais significativas somente em meados da década de 1990 e no início da década de 2000. No período de 1980 até 1994 a correlação é igual a 0,89, enquanto que de 1994 a 2000 a correlação cai para 0,611.

Ambas as séries do PIB e das emissões são estacionárias em primeira diferença, conforme teste de Dickey-Fuller aumentado. Obtemos a elasticidade das emissões em relação ao produto, $\xi_{e,y}$, através de uma regressão linear. Utilizando a primeira diferença para tornar as séries estacionárias, obtemos a elasticidade de 1,07. Também utilizamos três outros métodos para estacionarizar as séries: média móvel, polinômio e filtro Hodrick-Prescott (HP). Os resultados das regressões são exibidos na Tabela 1.

A vantagem do método da diferença é a eliminação da tendência estocástica ao invés da tendência determinística. O filtro HP, semelhante a uma média móvel, estima a tendência suavizando a série ao eliminar as variações de alta frequência, com o parâmetro $\lambda$ indicando qual a frequência destas variações. Porém este parâmetro é calibrado com o objetivo de calcular os ciclos econômicos na diferença da série original e suavizada (especialmente nos modelos RBC). A suavização da série das emissões, com o mesmo valor de $\lambda$ usado para os ciclos, pode não ser a correta. Por estes motivos, e considerando que as diferenças nas estimativas dos diferentes métodos não são significativas, utilizaremos o parâmetro estimado através da primeira diferença das séries, onde $\xi_{e,y} = 1{,}07$, o que nos dá $\gamma = -0{,}07$.

**Figura 1.** Variação das emissões de $CO_2$ e do produto real.




Os resultados indicam que o Brasil tem elasticidade perto de um, de modo que em um ciclo de expansão as emissões aumentam em uma proporção quase idêntica ao da produção. Este valor é particularmente diferente de outros países, que em sua maioria têm emissões inelásticas ao produto ($\xi_{e,y} < 1$). A Tabela 2 apresenta as elasticidade do Brasil e de outros países selecionados.

Ao comparar a elasticidade do Brasil com a de outros países, tanto desenvolvidos como em desenvolvimento, observamos que o custo ambiental durante a expansão é maior no Brasil, assim como o custo marginal de redução das emissões, caso mantenhamos iguais as demais características entre os países. Intuitivamente, diminuir o nível de emissões quando elas já são proporcionalmente baixas é mais caro do que diminuir quando elas são intensivas (elasticidade alta). Note que, no modelo utilizado, $e_t = (1-\mu_t)h(y_t) = (1-\mu_t)y_t^{\xi}$. Mantendo o nível do produto constante, $\bar{y}$, tomamos a primeira derivada de $e_t$ em relação a $\mu_t$, obtendo $e_\mu = -\bar{y}^{\xi}$. A derivada negativa indica que o aumento do nível de mitigação causa diminuição das emissões. Quanto maior a elasticidade $\xi_{e,y}$, maior a diminuição das emissões diante de uma variação positiva do nível de mitigação. Equivalentemente, quanto maior $\xi_{e,y}$, menor o nível de $\mu_t$ necessário para atingir um dado nível de $e_t$, implicando um menor custo de abatimento, $z_t = \bar{y}g(\mu_t)$, onde $g'(\mu_t) > 0$. Assim, dado $\bar{y}$, quando $\xi_{e,y}$ aumenta, $z_t$ diminui.

Os custos de mitigação de GEE são relativamente pequenos no Brasil, conforme da Silva e Gurgel (2012). Principalmente devido ao baixo custo de redução de emissões provenientes do uso da terra, na qual o Brasil é intensivo. O custo marginal de redução de $CO_2$ relativo à energia também é baixo, entretanto o *quantum* de emissões por queima de combustível fóssil é relativamente pequeno no Brasil, representando 1,25% do total destas emissões mundiais, enquanto que o EUA, por exemplo, é responsável por 25% desse total (dados do CDIAC relativos a 2010). A diferença das elasticidades (maior no Brasil) está na intensidade das emissões para cada unidade de produto.

**Tabela 1.** Elasticidade das emissões em relação ao produto

| | 1ª Diferença | Média móvel | Polinômio | Filtro HP |
|---|---|---|---|---|
| Elasticidade $\xi_{e,y}$ | $1{,}070^*$ | $0{,}994^*$ | $1{,}055^*$ | $1{,}047^*$ |
| Erro padrão | 0,136 | 0,121 | 0,091 | 0,108 |

*Notas:* Regressão por MQO com erros padrões robustos. A média móvel refere-se a 3 períodos. O polinômio é de ordem 3; e o parâmetro $\lambda$ do filtro HP é igual a $100$. $^*p$-valor $\leq 0{,}01$.

**Tabela 2.** Elasticidade das emissões em relação ao produto — Países selecionados.

| | 1ª Diferença | Média Móvel | Filtro HP |
|---|---|---|---|
| Brasil | 1,070 | 0,994 | 1,047 |
| | (0,136)* | (0,121)* | (0,108)* |
| Turquia | 0,960 | 1,027 | 0,839 |
| | (0,101)* | (0,101)* | (0,087)* |
| Chile | 0,910 | 0,938 | 1,200 |
| | (0,220)* | (0,223)* | (0,199)* |
| Índia | 0,863 | 0,912 | 0,580 |
| | (0,087)* | (0,085)* | (0,255)** |
| África do Sul | 0,628 | 0,644 | 0,538 |
| | (0,245)** | (0,173)* | (0,223)** |
| China | 0,616 | 0,618 | 0,857 |
| | (0,097)* | (0,094)* | (0,326)** |
| Austrália | 0,553 | 0,546 | 0,460 |
| | (0,144)* | (0,131)* | (0,237)*** |
| Estados Unidos | 0,441 | 0,412 | 0,908 |
| | (0,083)* | (0,067)* | (0,126)* |
| Canadá | 0,351 | 0,394 | 0,521 |
| | (0,160)** | (0,153)** | (0,236)** |

*Notas:* Regressão por MQO com erros padrões robustos. A média móvel refere-se a 3 períodos e o parâmetro $\lambda$ do filtro HP é igual a 100. * $p$-valor $\leq 0,01$; ** $p$-valor $\leq 0,05$; *** $p$-valor $\leq 0,10$.

### 4.2. Parâmetros econômicos

Para a calibragem dos parâmetros econômicos do nosso modelo seguimos os valores utilizados na literatura recente para o Brasil, principalmente os de Souza-Sobrinho (2011) e Kanczuk (2004).

O parâmetro $\alpha$ da função de produção $f(k) = k^{\alpha}$, que representa a participação do fator de produção capital é igual a 0,40. A taxa de depreciação do estoque de capital $\delta$ é igual a 0,025 e o choque de produtividade tem a persistência de $\rho = 0,95$ e desvio padrão $\sigma_{\varepsilon} = 0,0095$, este último obtido em Kanczuk (2004). Quanto aos parâmetros para o consumidor representativo, o coeficiente de aversão ao risco $\phi$ é igual a 2, e a taxa de desconto intertemporal $\beta$ é igual a 0,98.

### 4.3. Parâmetros ambientais

Os parâmetros ambientais foram obtidos por meio de diversas fontes. A persistência $\eta$ do estoque de $CO_2$, parâmetro químico que depende da meia-vida do gás na atmosfera, foi calculada com base no estudo de Reilly (1992), que estimou a meia-vida de 83 anos. Calculando a persistência em termos trimestrais para os 83 anos, obtemos $\eta = 0,9979$. A proporção das emissões domésticas em relação ao total das emissões de dióxido de carbono (antropogênicas) no globo foi obtida com base nos dados do CDIAC, referente às emissões no ano de 2010, tomando a razão entre as emissões doméstica e a soma de todas as emissões. O valor obtido foi $\Phi = 0,0125$, ou seja, a emissão mundial foi igual a 80 vezes a emissão do Brasil naquele ano. Assumimos que este valor se mantém constante durante o período analisado.

A externalidade negativa sofrida pela firma devido aos custos de abatimento $z_t$ equivale a função $g(\mu) = \theta_1 \mu_t^{\theta_2}$ multiplicada pelo produto. Os parâmetros dessa função são definidos em Nordhaus (2010), no modelo RICE-2010. O parâmetro $\theta_1$ varia no tempo e é específico para cada país ou região, enquanto que o parâmetro $\theta_2$ é uma constante. Utilizamos o valor de 2,80 para $\theta_2$, e 0,0418 para $\theta_1$. O último valor é referente à América Latina para o ano de 2015.

A função perda do produto potencial $d(x_t)$ é uma função quadrática com parâmetros calibrados em Nordhaus (2010). Para obter a proporção do dano, o autor considera um complexo ciclo do carbono, incluindo as temperaturas dos oceanos e superfície, elevação do nível do mar e concentração de dióxido de carbono na atmosfera e oceanos. No modelo, as funções perda foram calibradas e calculadas individualmente para cada país ou grupo de países, incluindo-as na dinâmica global, sendo o Brasil inserido no grupo da América Latina. Utilizando a calibração para este grupo e empregando-a como *proxy* para o Brasil, simulamos os danos ao produto relacionando-os às concentrações de $CO_2$ na atmosfera que vão de 787 GtC (gigatons de carbono), o nível de 2005, a cerca de 2.000 GtC. A Tabela 3 contém os valores calibrados para os coeficientes $d_i$ da função quadrática, assim como os valores de todos os demais parâmetros utilizados no modelo.

**Tabela 3.** Valores calibrados dos parâmetros do modelo

| Variável | Símbolo | Valor |
|---|---|---|
| Taxa de desconto intertemporal | $\beta$ | 0,98 |
| Coeficiente de aversão ao risco | $\phi$ | 2 |
| Participação do capital na função de produção | $\alpha$ | 0,4 |
| Taxa de depreciação do capital | $\delta$ | 0,025 |
| Persistência do choque de produtividade | $\rho$ | 0,95 |
| Desvio padrão do choque IID de produtividade | $\sigma_\varepsilon$ | 0,0095 |
| Elasticidade das emissões em relação ao produto | $\xi_{e,y}$ | 1,07 |
| Persistência da poluição na atmosfera | $\eta$ | 0,9979 |
| Proporção das emissões domésticas | $\Phi$ | 0,0125 |
| Coeficiente da função de custo de mitigação | $\theta_1$ | 0,0418 |
| Expoente da função de custo de mitigação | $\theta_2$ | 2,8 |
| Intercepto da função dano da poluição | $d_0$ | $-2{,}97 \times 10^{-3}$ |
| Coeficiente 1 da função dano da poluição | $d_1$ | $-2{,}16 \times 10^{-6}$ |
| Coeficiente 2 da função dano da poluição | $d_2$ | $9{,}26 \times 10^{-9}$ |

### 4.4. Simulações

Solucionamos o modelo atribuindo aos parâmetros os valores constantes na Tabela 3 e realizamos simulações de choques de produtividade para observarmos o comportamento das variáveis econômicas e ambientais. Os valores do estado estacionário do modelo estão descritos na Tabela 4.

Observamos que no estado estacionário o impacto da poluição sobre a produção é maior que o custo de mitigação, pois há uma taxa de imposto positiva que impõe um nível de mitigação maior que zero. Assim, através do cálculo simultâneo dos custos de mitigação e de poluição, podemos concluir que para o Brasil é vantajoso adotar políticas restritivas de emissões.

Para investigar a dinâmica das variáveis diante de choques tecnológicos, inicialmente produzimos um choque positivo de 1% no estoque de produtividade $a_t$ (que equivale a $1{,}052 \times \sigma_\varepsilon$) e captamos

**Tabela 4.** Valores do estado estacionário

| Variável | | Valor | Variável | | Valor |
|---|---|---|---|---|---|
| Produto | $y_{ss}$ | 4,1537 | Emissões: | $e_{ss}$ | 4,2562 |
| Consumo | $c_{ss}$ | 3,2398 | Nível mitigação | $\mu_{ss}$ | 0,0725 |
| Investimento | $i_{ss}$ | 0,9138 | Gasto c/ abatim. | $z_{ss}$ | 0,00011 |
| Taxa juros | $r_{ss}$ | 0,0454 | Taxa imposto | $\tau_{ss}$ | 0,00094 |
| Capital | $c_{ss}$ | 36,5509 | Estq. poluição | $x_{ss}$ | 8.107,10 |

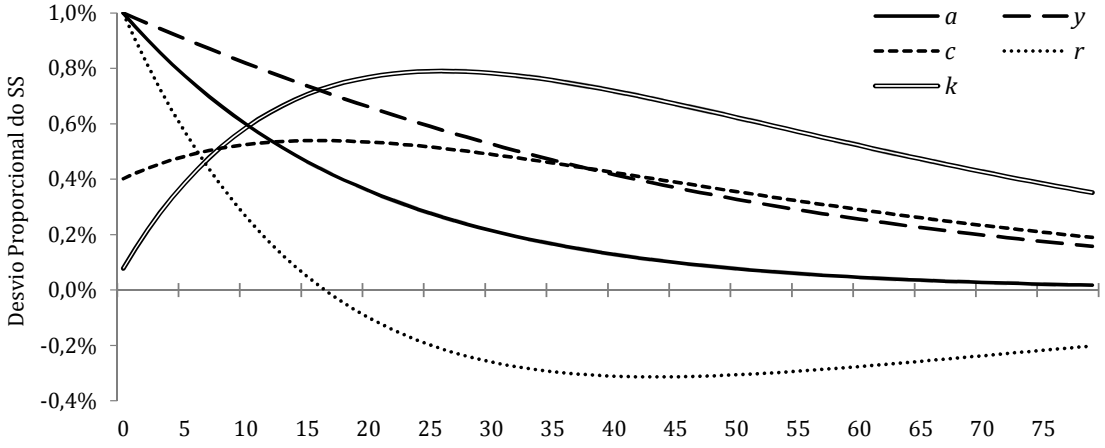
por meio de funções impulso-resposta o desvio proporcional das demais variáveis em relação aos seus valores de estado estacionário em um horizonte de 80 períodos (trimestres). Na Figura 2 observamos o impacto deste choque nas variáveis econômicas do modelo.

Dada uma variação de 1% em $a_t$, a produtividade decai a uma taxa $\rho = 0{,}95$. Observamos comportamento semelhante do produto, $y_t$, e do produto marginal do capital, $r_t$. A diminuição do produto acompanha o declínio da produtividade, mas é mais lento do que esta em razão do crescimento do estoque de capital $k_t$, que tem rápida expansão inicial devido ao aumento do investimento. Já o produto marginal do capital tem um decréscimo mais acelerado. O choque de produtividade faz com que a acumulação de capital na economia aumente a taxas crescentes até o 20º semestre, enquanto que o consumo cresce até o ponto em que o aumento do capital é menor do que o aumento do produto (17º trimestre).

A Figura 3 imprime as trajetórias das variáveis ambientais e de política. Com o aumento da produtividade e da produção, ocorre um incremento nas emissões de $CO_2$, $e_t$. O comportamento das emissões é pró-cíclico e acompanha a expansão inicial do produto e o seu posterior declínio. Para o caso de uma política de teto de emissões, na trajetória ótima, o nível de emissão $e_t$ é igual ao teto $q_t$ definido pelo governo.

A curva de estoque de poluição, $x_t$, que depende das emissões, apresenta uma magnitude menor, mas mais persistente. Após os 80 períodos, o nível de emissão já caiu para cerca de 20% de seu aumento inicial, no entanto o estoque de poluição só atingirá seu máximo no 101º trimestre, retornando para a metade do seu valor máximo somente no 442º período ou 85º ano — dois anos além do estimado para a meia-vida do poluente. O fato desta taxa de decaimento ser muito baixa, com $\eta = 0{,}9979$, faz com que as emissões de um dado trimestre tenham um impacto muito pequeno no estoque de poluição do

**Figura 2.** Respostas ao impulso de $+1\%$ em $a_{t=1}$ — Variáveis econômicas.



mesmo período, mas uma persistência que perdurará por várias décadas. Os danos destes estoques de poluição futuros são contabilizados na utilidade total descontada do consumidor, a fim de se obter a trajetória ótima das variáveis de controle.

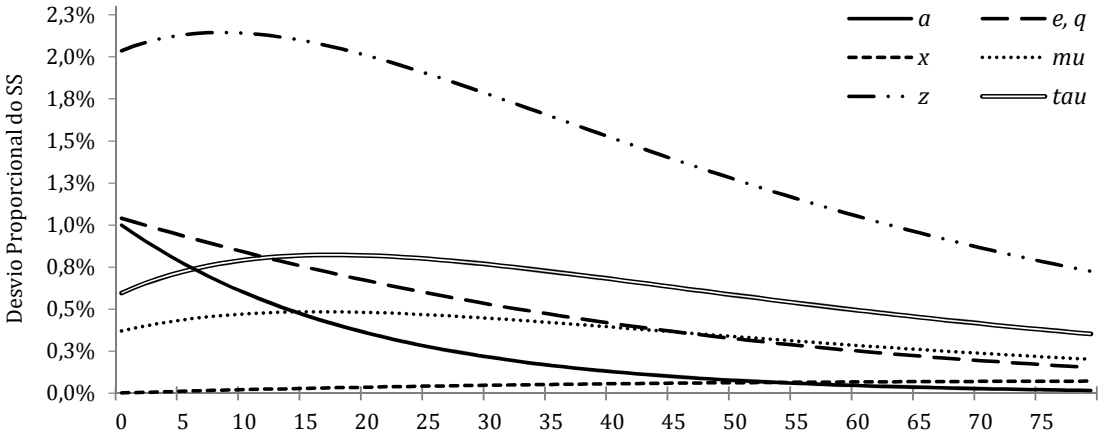
Do aumento da produção e da renda decorre um acréscimo na demanda por ambiente limpo, visto que este é um bem normal, fazendo com que um maior nível de mitigação, $\mu_t$, seja demandado (efeito renda). Por outro lado, o aumento da produtividade marginal do capital induz maiores investimentos, que representam um custo de oportunidade para os gastos com redução de emissões, fazendo com que os agentes demandem menos mitigação (efeito preço). Para o caso do Brasil, um choque de produtividade gera um aumento no nível ótimo de mitigação, $\mu_t$, conforme a Figura 3. Assim, no ciclo de expansão da economia, o efeito renda da demanda por mitigação é mais intenso do que o efeito preço. O comportamento maximizador dos agentes resulta em um aumento das mitigações em períodos de expansão. Dessa forma, o comportamento ótimo seria uma política de mitigação pró-cíclica, onde o imposto e o teto de emissões devem aumentar em períodos de expansão da economia e diminuir em períodos de crise.

O choque de produtividade afeta o custo de mitigação, fazendo com o custo marginal de mitigação seja mais alto durante as expansões. Porém, o estoque de capital responde positivamente ao choque de produtividade, sendo que um nível mais alto de capital aumenta as emissões. Assim, sem o aumento do imposto durante os ciclos de expansão, as emissões iriam crescer mais do que o ótimo. Isso não significa que as emissões não devam aumentar durante o período de expansão, mas sim que este aumento não deve ser tão grande quanto seria no caso de um política com taxa de imposto constante. Por esse motivo, a política de quota de emissões deve ser flexibilizada durante as expansões, ou seja, o teto de emissões deve ser aumentado. Esse fato faz com que a política de quotas seja politicamente menos custosa, pois o aumento de impostos durante o período de expansão tende a ser aceito com mais dificuldade pelos indivíduos do que uma flexibilização no teto de emissões.

Para obter a trajetória ótima de mitigação, o imposto sobre as emissões deve aumentar até o ponto em que o aumento da produtividade marginal do capital (indutora do efeito preço) seja revertido para uma variação negativa em relação ao seu nível de estado estacionário. Este ponto se dá no 17º trimestre após o choque de produtividade, conforme Figura 2. Neste momento, o comportamento ótimo do governo é reduzir o imposto para continuar equilibrando os custos de mitigação e emissão.

Como esperado, com o aumento do nível de mitigação, a parcela do produto destinada ao pagamento de reduções, $z_t$, também aumenta. Um choque tecnológico de 1% em relação ao estado estacionário provoca o imediato ajuste de 2% no custo de redução de emissão de $CO_2$. Este valor é relativamente

**Figura 3.** Respostas ao impulso de $+1\%$ em $a_{t=1}$ — Variáveis ambientais e de política.



alto em relação a outras economias devido a elevada elasticidade das emissões em relação ao produto no Brasil — para os Estados Unidos, Heutel (2012) encontra o valor de cerca de 1,4.

Na Figura 4 simulamos um conjunto de choques aleatórios de produtividade distribuídos em 100 trimestres. Observamos que a trajetória das emissões é semelhante à do produto, com intensidade de variações quase idênticas. Isto se dá devido a elasticidade das emissões em relação ao produto no Brasil ser próxima da unidade.

A trajetória do capital segue as variações da tecnologia, mas como é uma variável de estoque, tem um comportamento diferente do produto e das emissões, apresentando uma trajetória mais suave. Nesta simulação, apesar das diversas variações negativas do produto e das emissões em relação aos valores do estado estacionário, o nível de capital manteve-se acima deste valor na maior parte do período, devido principalmente à grande expansão inicial (trimestres 7 a 28) e o consequente acúmulo de capital. O coeficiente de variação do capital foi de 0,99, enquanto o da produtividade, $a_t$, foi de 5,56 (com desvio-padrão de 0,0186), notavelmente maior que o do capital.

Quanto às variáveis de política, a taxa de imposto, $\tau_t$, acompanha de perto o nível das emissões, mas em uma trajetória mais suave que esta, com coeficiente de variação igual a 1,27. Isto ocorre porque a variação inicial das emissões é maior que a variação inicial do imposto, porém, posteriormente, os desvios no imposto são maiores que nas emissões. Nas trajetórias de equilíbrio, a variância do imposto é também menor do que a do produto.

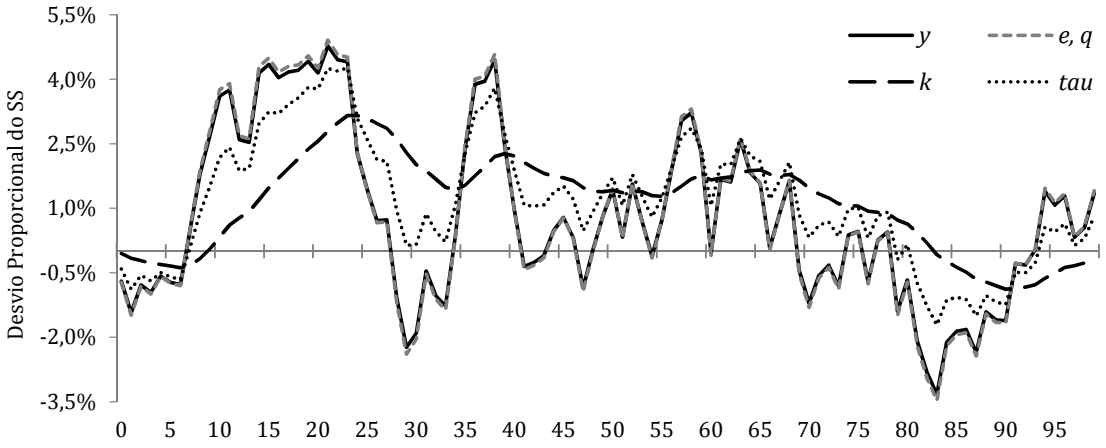
Quando considerada uma política de quotas, a trajetória do teto fixado pelo governo equivale à política de emissões. Entretanto, conforme destacado anteriormente, em um ciclo de expansão, enquanto a taxa de imposto precisa ser elevada, potencialmente causando insatisfação no setor produtivo, na política de quotas o aumento do teto de emissões pode gerar menor grau de insatisfação relativa. Esta pode ser uma possível vantagem à política de quotas.

### 4.5. Análise de sensibilidade

Nesta seção realizamos a análise de sensibilidade, que nos dá uma medida de como os resultados mudariam caso os parâmetros do modelo fossem calibrados com diferentes valores. Também simulamos valores correspondentes aos calibrados para outros países, a fim de comparar e situar o Brasil no contexto internacional.

Na Figura 5 observamos a sensibilidade do estoque de poluição e da parcela de poluição mitigada em relação ao parâmetro da elasticidade das emissões. Quanto mais baixa a elasticidade, menor o estoque de poluição. A linha contínua representa a trajetória de $x_t$ calibrada para o Brasil, dado um choque de

**Figura 4.** Simulação de choques aleatórios em $a_t$.



produtividade de 1%. Calculando para o valor do estado estacionário, com esse choque de 1%, o estoque de poluição tem um pequeno aumento de 8.107 GtC para 8.113 GtC ao final do 25º ano. Se o Brasil poluísse com uma intensidade igual à da China, com elasticidade próxima a 0,6, então o estoque de poluição passaria para 8.111 GtC, uma mudança pequena considerando a grande diferença na elasticidade.

Também notamos que a parcela de poluição mitigada é bastante sensível ao valor da elasticidade. Ao calibrarmos este valor para 0,2 vemos que a resposta ótima ao choque de produtividade é uma diminuição do nível de mitigação. É o caso em que os custos marginais de mitigação são maiores que os custos marginais da poluição. Nesse cenário as mitigações seriam contra-cíclicas — ainda haveria redução de emissões, mas o nível de mitigação diminuiria diante de uma expansão econômica, pois o efeito preço seria maior que o efeito renda. Valores baixos da elasticidade são mais comuns em países desenvolvidos, conforme a Tabela 2.

Analisando a Figura 6 vemos que a taxa de imposto, $\tau$, é pouco sensível às alterações na elasticidade. O governo altera a taxa frente às expectativas de variação do estoque de poluição para maximizar a utilidade do consumidor. Porém, a elasticidade do imposto em relação à esta expectativa é pequena — curtas variações na taxa de imposto já alteram suficientemente o nível de mitigação, pois $\mu_t$ é bastante sensível à $\tau_t$.

Quanto aos custos de abatimento, $z_t$, sua sensibilidade em relação à elasticidade é semelhante a do nível de mitigação. Porém, seu comportamento será sempre pró-cíclico, pois o ambiente limpo é um bem normal e o gasto com redução de emissões sempre aumentará diante da expansão da renda. Mas podemos observar na Figura 6 que quanto menor a intensidade da poluição, menor será a externalidade imposta à firma nos ciclos de expansão. Em termos de formulação de política, isso demonstra o benefício da evolução da tecnologia da queima de combustível fóssil, que pode fazer com que obtenhamos essa baixa intensidade de poluição.

A análise de sensibilidade referente aos parâmetros da tecnologia de mitigação, na Figura 7, nos indica que o modelo é pouco sensível à alterações no parâmetro $\theta_1$, no entanto, o modelo é bastante sensível a alterações no parâmetro $\theta_2$, que é o expoente do nível de mitigação $\mu_t$ na função $g(\mu)$. Essa diferença de sensibilidade se deve ao fato de que $\theta_2$ define a convexidade da função $g(\mu)$, e quando esta tende para 1, a sensibilidade do modelo tende para o infinito. Porém, no caso base, assim como em Nordhaus (2010), este parâmetro é constante e igual a 2,8.

Em relação aos parâmetros da preferência do consumidor, analisamos a sensibilidade do modelo à alterações em $\phi$, o coeficiente de aversão ao risco do consumidor. Na Figura 8, observamos que diante do choque positivo de produtividade, quanto maior a aversão ao risco, mais suave a distribuição do consumo no tempo. Se a aversão é baixa, o consumo é relativamente maior no curto prazo e menor no

**Figura 5.** Respostas ao impulso de 1% em $a_{t=1}$ — sensibilidade de $x$ e $\mu$ relativa a $\xi_{e,y}$;

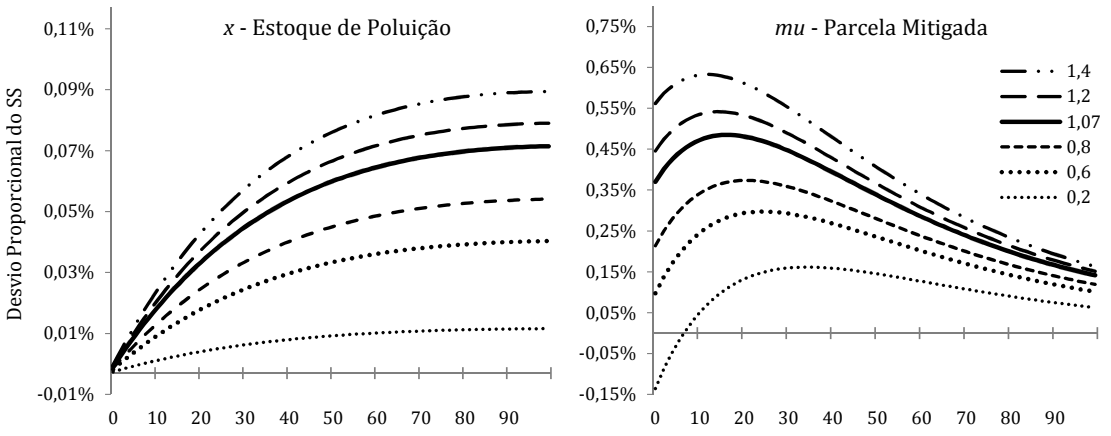


**Figura 6.** Respostas ao impulso de 1% em $a_{t=1}$ — sensibilidade de $\tau$ e $z$ relativa a $\xi_{e,y}$.

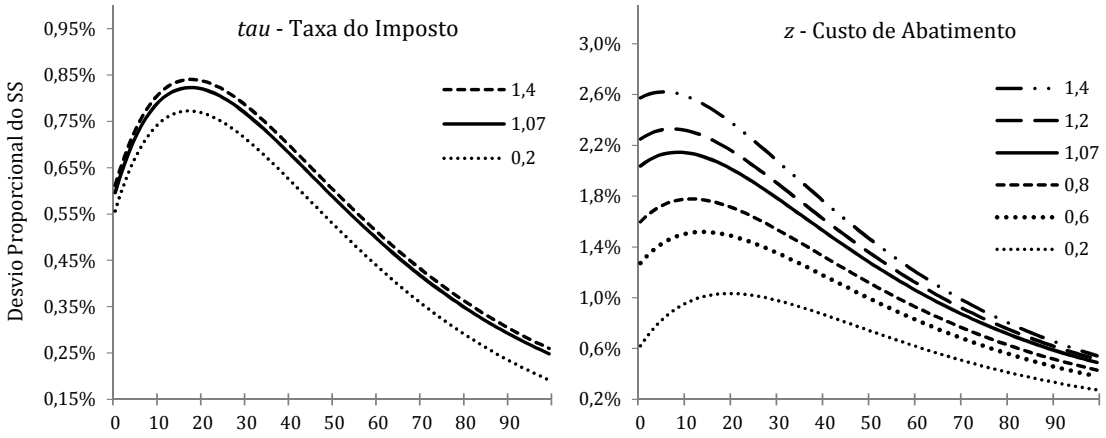
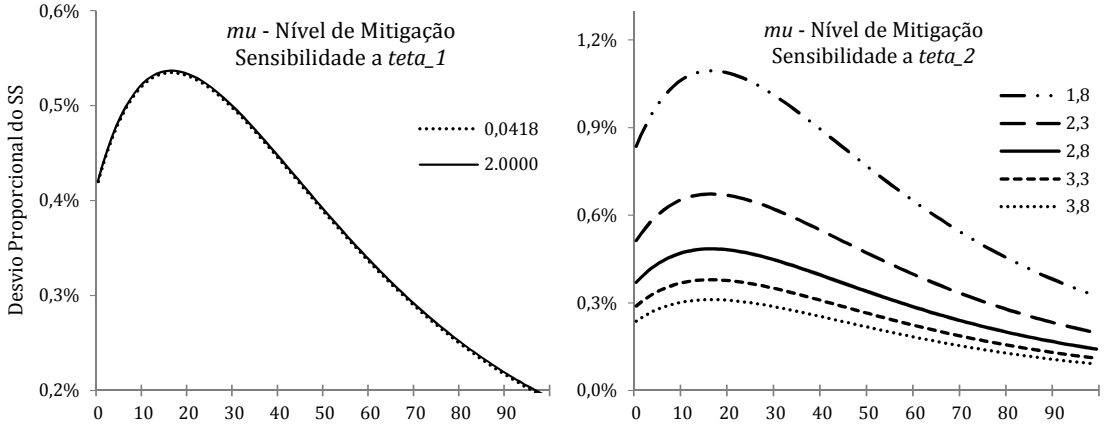



**Figura 7.** Respostas ao impulso de 1% em $a_{t=1}$ — sensibilidade de $\mu$ relativa a $\theta_1$ e $\theta_2$.

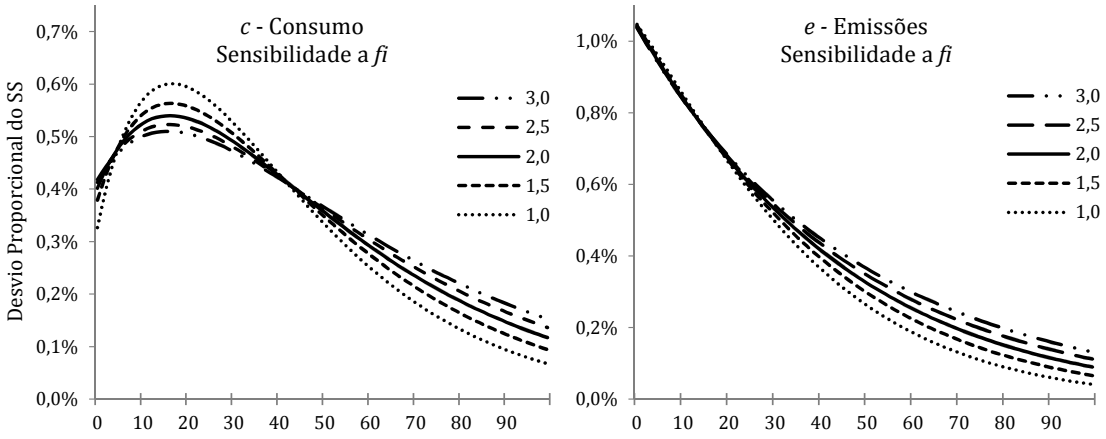



médio prazo. Isso implica em menor poupança e investimento no curto prazo. Já o impacto da mudança do coeficiente de aversão ao risco nas emissões é pequeno, sendo que esta sofre variação significativa apenas no médio prazo, entretanto valores mais baixos de $\phi$ definem níveis de mitigação menos intensos em todos os períodos.

Quanto aos parâmetros de poluição, também simulamos calibrações diferentes para a função dano da poluição. Utilizamos cenários de danos incorridos em outros 5 países/regiões calculados por Nordhaus (2010). Estimamos os parâmetros da forma reduzida $d(x_t) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$. Os resultados dessas estimações estão na Tabela 5.

Na Figura 9, relacionamos os danos da poluição com as concentrações de $CO_2$ na atmosfera, que vão de 787 GtC a cerca de 2.000 GtC. Apesar da pequena diferença, os danos causados à América Latina são maiores que aos Estados Unidos e Rússia, entretanto, muito menos intensos que na Europa e na África. As diferenças ocorrem devido a fatores geográficos, ambientais e econômicos. Na Rússia, por exemplo, os danos causados pelo estoque de poluição são menores devido ao baixo impacto relativo da elevação da temperatura naquela região, o contrário do que ocorre na África. Na Europa, o principal impacto é causado pela elevação do nível do mar. Estes cálculos baseiam-se no modelo RICE-2010, empregado no trabalho de Nordhaus (2010).

**Figura 8.** Respostas ao impulso de 1% em $a_{t=1}$ — sensibilidade de $c$ e e relativa a $\phi$.




Analisando as respostas de $y_t$ e $\tau_t$ ao choque positivo de produtividade para diferentes configurações da função dano, observamos que os resultados pouco diferem em relação aos países/regiões. Ocorre variação significativa apenas na taxa de imposto, quando alteramos substancialmente o parâmetro que multiplica o estoque de poluição, $x_t$. Com a variação desse parâmetro, aumenta a parcela da produção perdida devido à poluição; os agentes reotimizam suas escolhas para todos os períodos e alteram os níveis de mitigação para evitar o aumento do dano e a perda de utilidade. Para aumentar as mitigações o governo intensifica os impostos; os custos de mitigação aumentam, mas os danos de poluição diminuem. No equilíbrio, produto, emissões, consumo e utilidade mantém-se praticamente idênticos, mas os impostos têm que aumentar bastante para neutralizar a diferença na função.

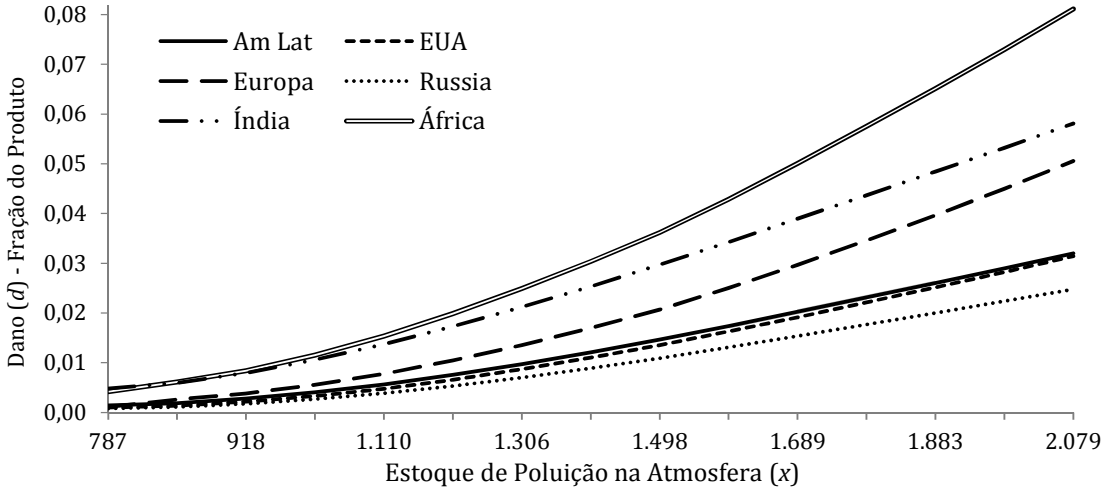
Por último, investigando o parâmetro químico $\eta$, que representa a persistência do $CO_2$ na atmosfera, simulamos alterações nesta taxa para identificarmos o impacto no modelo da característica peculiar deste poluente: seu baixo declínio. Se a persistência for igual a zero, então o poluente é volátil e, após um trimestre, já reagiu com outros componentes e não se encontra mais na atmosfera. Este caso, $\eta = 0$, corresponde, por exemplo, à meia-vida do dióxido de enxofre ($SO_2$) e dos óxidos de nitrogênio ($NO_x$), que são prejudiciais ao organismo humano, mas altamente voláteis. Porém, quanto menor a taxa de declínio (maior a persistência), mais dispersa no tempo será a poluição e mais distante será o seu pico de máximo. Com poluentes de baixa persistência na atmosfera, a poluição e seus danos à produção são mais intensos no curto prazo, implicando em maior nível de mitigação e custo de abatimento neste período — também maior será o imposto necessário para atingir este nível de mitigação.

**Tabela 5.** Coeficientes das funções de dano da poluição $d(x)$

| Países | $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ |
|---|---|---|---|
| América Latina | −2,97 E-3 | −2,16 E-6 | 9,26 E-9 |
| EUA | −1,03 E-3 | −6,25 E-6 | 1,06 E-8 |
| Europa | 2,35 E-3 | −1,60 E-5 | 1,90 E-8 |
| Rússia | −1,62 E-3 | −3,59 E-6 | 7,95 E-9 |
| Índia | −9,99 E-3 | 9,02 E-6 | 1,16 E-8 |
| África | −1,13 E-3 | −1,33 E-5 | 2,56 E-8 |

*Nota:* Regressões via MQO. A região da Europa exclui os países da Eurásia.

**Figura 9.** Estoque de poluição $(x)$ e danos ao produto $(d)$.




## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo discutimos a adoção de políticas ambientais dinâmicas no Brasil que respondam de forma ótima a choques de produtividade em uma economia estilizada do tipo RBC com externalidades de poluição. O calibragem deste modelo para o Brasil possibilitou avaliarmos simultaneamente o custo de mitigação e o impacto da emissão de $CO_2$ no produto, de modo a responder se o custo da adoção de políticas ambientais restritivas compensa os impactos da externalidade negativa gerada pela poluição. Também analisamos como deveria ser o comportamento de uma política dinâmica de mitigação de $CO_2$, definindo regras para o aumento ou diminuição do imposto ou teto de emissões, além da realização de diversas simulações e a análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo.

Os resultados nos indicam que o equilíbrio ótimo é uma taxa de imposto positiva que tenha um caráter dinâmico, aumentando em períodos de expansão econômica, e diminuindo em períodos de crise. Entretanto, o aumento da taxa de imposto em períodos de expansão não deve ser tão grande a ponto de reduzir o nível de emissões. É natural que se permita um nível de emissões maior após um choque positivo de produtividade. Isso faz com que, equivalentemente, a política de teto deva ser flexibilizada após este choque. Assim, ambas as políticas tem um caráter pró-cíclico.

Se por um lado um choque positivo de produtividade leva a uma maior demanda por ambiente limpo, por outro lado, este choque aumenta a remuneração do capital, que é o custo de oportunidade de se investir em políticas de mitigação. Para o caso do Brasil, vimos que o primeiro efeito domina o segundo, de modo que devemos aumentar a taxa de imposto após o choque. Porém, no momento em que a taxa de remuneração do capital começar a variar negativamente, isso implica que a produtividade marginal do capital está caindo, de modo que a imposição da alíquota de imposto começa a penalizar a produção além do ponto ótimo, e então o imposto deve começar a cair. Esta é a regra ótima para a definição da política dinâmica.

O artigo traz os primeiros resultados sobre a adoção de políticas ambientais dinâmicas no Brasil através de um modelo de ciclo reais de negócios. Esta contribuição é importante para dar suporte as formulações de políticas públicas e as discussões da comissão mista sobre mudanças climáticas do Senado Federal. A consideração do impacto das políticas ambientais adotadas nos ciclos econômicos é essencial para a análise de custo-benefício destas políticas.

No modelo adotado não há diferença quantitativa entre as políticas de imposto e de quotas devido a presença de informação simétrica, conforme demonstrado por Heutel (2012). Na prática, há uma van-

tagem qualitativa para a política de quotas, pois durante ciclos de expansão, é politicamente menos custoso flexibilizar tetos de emissão do que aumentar os impostos sobre emissão. A avaliação de qual política poderia trazer um nível maior de bem-estar necessita a utilização de um modelo com informação assimétrica, que é um importante tópico para pesquisa futuras.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, G., & Moore, G. (1985). A linear algebraic procedure for solving linear perfect foresight models. *Economics Letters*, *17*(3), 247–252. doi: 10.1016/0165-1765(85)90211-3

Angelopoulos, K., Economides, G. & Philippopoulos, A. (2010). *What is the best environmental policy? Taxes, permits and rules under economic and environmental uncertainty* (Working Paper Nº 2980). CESifo. Disponível em: http://ssrn.com/abstract=1571058

Babiker, M., Reilly, J. M. & Jacoby, H. D. (2000, July). The Kyoto Protocol and developing countries. *Energy Policy*, *28*(8), 525–536. doi: 10.1016/S0301-4215(00)00033-1

Baumol, W. J., & Oates, W. E. (1988). *The theory of environmental policy*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bernard, A., Paltsev, S., Reilly, J. M., Vielle, M. & Viguier, L. (2003). *Russia's role in the Kyoto Protocol* (Relatório técnico Nº 98). Cambridge, MA: MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change.

Bouman, M., Gautier, P. A. & Hofkes, M. W. (2000). Do firms time their pollution abatement investments optimally? *De Economist*, *148*(1), 71–86. doi: 10.1023/A:1003972811231

Brasil. (2009). *Lei nº 12.187, de 29 de dezembro de 2009.* Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2009/lei/l12187.htm (Institui a Política Nacional sobre Mudança do Clima–PNMC e dá outras providências. DOU de 30.12.2009, Edição extra.)

Brasil. (2010). *Decreto nº 7.390, de 9 de dezembro de 2010.* Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7390.htm (Regulamenta os arts. 6º, 11 e 12 da Lei nº 12.187, de 29 de dezembro de 2009, que institui a Política Nacional sobre Mudança do Clima–PNMC, e dá outras providências. DOU de 10.12.2010.)

Brasil. Ministério da Ciência e Tecnologia. Coordenação-Geral de Mudanças Globais de Clima. (2010). *Segunda Comunicação Nacional do Brasil à Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Mudança do Clima.* Brasília, DF: Ministério da Ciência e Tecnologia. Disponível em: http://www.mct.gov.br/upd_blob/0215/215070.pdf

Faria, W. R., & Haddad, E. A. (2013). *Modelagem do uso da terra e mensuração dos efeitos de mudanças climáticas no Brasil* (Texto para discussão Nº 02-2013). São Paulo: Universidade de São Paulo/NEREUS.

Feijó, F. T., & Júnior, S. P. (2009). O protocolo de Quioto e o bem-estar econômico no Brasil: Uma análise utilizando equilíbrio geral computável. *Análise Econômica*, *27*, 127–154.

Fell, H., MacKenzie, I. A. & Pizer, W. A. (2012). Prices versus quantities versus bankable quantities. *Resource and Energy Economics*, *34*(4), 607–623. doi: 10.1016/j.reseneeco.2012.05.004

Ferreira Filho, J. B. d. S., & Rocha, M. T. (2007). *Avaliação econômica de políticas públicas visando redução das emissões de gases de efeito estufa no Brasil.* Disponível em: http://www.sober.org.br/palestra/6/750.pdf

Fischer, C., & Heutel, G. (2013). Environmental macroeconomics: Environmental policy, business cycles, and directed technical change. *Annual Review of Resource Economics*, *5*, 197–210. doi: 10.1146/annurev-resource-091912-151819

Fischer, C., & Springborn, M. (2011). Emissions targets and the real business cycle: Intensity targets versus caps or taxes. *Journal of Environmental Economics and Management*, *62*, 352–366.

de Gouvello, C. (lead author) (2010). *Brazil Low Carbon Country Case Study*. Washington, DC: The World Bank/IBRD. http://siteresources.worldbank.org/BRAZILEXTN/Resources/Brazil_LowcarbonStudy.pdf

Hegerl, G. C., Zwiers, F. W., Braconnot, P., Gillett, N., Luo, Y., Orsini, J. M., … Stott, P. (2007). Understanding and attributing climate change. In S. Solomon et al. (Eds.), *Climate change 2007: The physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.* Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA: Cambridge University Press. Disponível em: https://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/wg1/ar4-wg1-chapter9.pdf

Herzog, T., Baumert, K. A. & Pershing, J. (2006, Nov.). *Target: Intensity—An analysis of greenhouse gas intensity targets* (Relatório técnico). Washington, DC: World Resources Institute.

Heutel, G. (2012). How should environmental policy respond to business cycles? Optimal policy under persistent productivity shocks. *Review of Economic Dynamics*, *15*(2), 244–264.

Hilgemberg, E. M. (2004). *Quantificação e efeitos econômicos do controle de emissões de $CO_2$ decorrentes do uso de gás natural, álcool e derivados de petróleo no Brasil: Um modelo interregional de insumo-produto* (Tese de doutorado, Universidade de São Paulo–USP/Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"–ESALQ, Piracicaba, SP). Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/11/11132/tde-01102007-111239/publico/EmersonHilgemberg.pdf

Hoel, M., & Karp, L. (2002). Taxes versus quotas for a stock pollutant. *Resource and Energy Economics*, *24*, 367–384.

Kanczuk, F. (2004). Real interest rates and Brazilian business cycles. *Review of Economic Dynamics*, *7*(2), 436–455. doi: 10.1016/j.red.2003.09.001

Kaufmann, R. K., & Stern, D. I. (1997, July). Evidence for human influence on climate from hemispheric temperature relations. *Nature*, *388*, 39–44.

Kelly, D. L. (2005). Price and quantity regulation in general equilibrium. *Journal of Economic Theory*, *125*(1), 36–60. doi: 10.1016/j.jet.2004.07.006

La Rovere, E. L., Dubeux, C. B., Pereira Jr, A. O. & Wills, W. (2013). Brazil beyond 2020: From deforestation to the energy challenge. *Climate Policy*, *13*(Special Issue: Supplement 1), 70–86. doi: 10.1080/14693062.2012.702018

Lopes, R. L. (2003). *Efeitos de uma restrição na emissão de $CO_2$ na economia brasileira* (Tese de doutorado não-publicada). Universidade de São Paulo–USP/Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"–ESALQ, Piracicaba, SP.

Newell, R. G., & Pizer, W. A. (2003). Regulating stock externalities under uncertainty. *Journal of Environmental Economics and Management*, *45*(2,Supplement), 416–432. doi: 10.1016/S0095-0696(02)00016-5

Nordhaus, W. D. (2007). A review of the *Stern review on the economics of climate change*. *Journal of Economic Literature*, *45*(3), 686–702. doi: 10.1257/jel.45.3.686

Nordhaus, W. D. (2010). Economic aspects of global warming in a post-Copenhagen environment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(26), 11721–11726. doi: 10.1073/pnas.1005985107

Paltsev, S., Reilly, J. M., Jacoby, H. D. & Tay, K. H. (2004, July). *The cost of Kyoto Protocol targets: The case of Japan* (Relatório técnico Nº 112). Cambridge, MA: MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change.

Pizer, W. A. (2002). Combining price and quantity controls to mitigate global climate change. *Journal of Public Economics*, *85*(2), 409–434. doi: 10.1016/S0047-2727(01)00118-9

Reilly, J. M. (1992). Climate-change damage and the trace-gas-index issue. In J. M. Reilly & M. Anderson (Eds.), *Economic issues in global climate change: Agriculture, forestry, and natural resources.* Boulder: Westview Press.

Rocha, M. T. (2003). *Aquecimento global e o mercado de carbono: Uma aplicação do modelo CERT* (Tese de doutorado, Universidade de São Paulo–USP/Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"–ESALQ, Piracicaba, SP). Disponível em: http://www.cepea.esalq.usp.br/pdf/tese_marcelo.pdf

da Silva, J. G. S., & Gurgel, A. C. (2012). Impactos econômicos de cenários de políticas climáticas para o Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *42*(1), 93–135.

Souza-Sobrinho, N. F. (2011). The role of interest rates in the Brazilian business cycles. *Revista Brasileira de Economia*, *65*(3), 315–336. doi: 10.1590/S0034-71402011000300006

Strand, J. (1995). Business fluctuations, worker moral hazard and optimal environmental policy. In H. D. Dixon & N. Rankin (Eds.), *The new macroeconomics* (pp. 214–234). Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511559648.012

Tourinho, O. A. F., da Mota, R. S. & Alves, Y. L. B. (2003, agosto). *Uma aplicação ambiental de um modelo de equilíbrio geral* (Texto para Discussão Nº 976). Rio de Janeiro: Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada–IPEA.

Tucker, M. (1995). Carbon dioxide emissions and global GDP. *Ecological Economics*, *15*, 215–223.

Viguier, L. L., Babiker, M. H. & Reilly, J. M. (2003). The costs of the Kyoto Protocol in the European Union. *Energy Policy*, *31*(5), 393–483. doi: 10.1016/S0301-4215(02)00075-7

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150004
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 75–104

# Multiplicadores Fiscais e Investimento em Infraestrutura

Guilherme V. Moura*

**Sumário:** **1. Introdução; 2. Multiplicadores Fiscais; 3. Modelo DSGE para o Brasil; 4. Estimação; 5. Resultados; 6. Conclusão; A. Apêndice.**

**Palavras-chave:** **Multiplicador Fiscal, Infraestrutura, DSGE, Estimação Bayesiana.**

**Códigos JEL:** **E62, E63, C11.**

Este trabalho utiliza um modelo DSGE para calcular multiplicadores a valor presente para gastos do governo com consumo e investimento. Os resultados mostram que o efeito inicial do aumento do consumo público sobre o PIB é positivo, porém, o efeito de longo prazo é menor do que um em todos os cenários analisados. Por outro lado, gastos com investimento acarretam não só um impacto inicial positivo, mas também um efeito de longo prazo superior a um mesmo para valores da elasticidade produto do capital público muito baixos, apontando para as vantagens de uma política fiscal baseada em gastos com investimento.

*This article develops a dynamic and stochastic general equilibrium model to analyze the different effects of government expenditures based on consumption and on investment for the Brazilian economy. The model includes public capital as a production factor and analyzes the impact of public investment on the marginal productivity of private inputs and on GDP. The analysis is based on present value multipliers, allowing the consideration of the dynamic effects of fiscal policy. The results show the advantages of a fiscal policy based on investment in comparison to a fiscal policy based on consumption expenditures.*

## 1. INTRODUÇÃO

A atual crise internacional reacendeu o interesse a respeito dos efeitos econômicos de políticas fiscais, fazendo com que a atenção de economistas e formuladores de política retornasse para questões fiscais antes ofuscadas pelo debate monetário. Pergunta fundamental neste interesse renovado é a efetividade dos gastos públicos como ferramenta de estímulo econômico. Esta efetividade é avaliada com frequência em termos do multiplicador dos gastos do governo, ou seja, do efeito no produto agregado de gastos públicos. Entretanto, diferentemente do que ocorre com a política monetária, os efeitos e impactos de

*Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Departamento de Economia. Campus Universitário Trindade, Florianopolis, SC, Brasil. CEP 88049-970. E-mail: guilherme.moura@ufsc.br. O autor agradece ao IPEA pelo auxílio financeiro oferecido através da bolsa PNPD nº 33/2013 e ao CNPq pelo auxílio oferecido através dos processos nº 475230/2012-4, nº 40893/2013-2 e nº 308346/2013-0.

políticas fiscais na economia não são bem compreendidos e ainda geram inúmeras divergências. Estimativas do multiplicador dos gastos do governo podem variar de aproximadamente 0 até valores bem superiores a 1 dependendo da amostra utilizada e de hipóteses de identificação do modelo estimado.

Com o intuito de entender, analisar e comparar os efeitos de políticas fiscais baseadas em consumo e em investimento na economia brasileira, um modelo dinâmico e estocástico de equilíbrio geral (DSGE) foi desenvolvido. O modelo incorpora o estoque de capital público como um fator de produção, permitindo analisar os impactos de investimentos públicos sobre a produtividade marginal dos insumos privados e sobre o PIB, diferenciando os efeitos de gastos com consumo dos efeitos de gastos com investimento. Como o modelo é dinâmico, choques de gastos terão efeito no período corrente, mas também em períodos futuros devido aos mecanismos de propagação do modelo e, para calcular o efeito total da política fiscal, o valor presente dos multiplicadores é calculado. O multiplicador a valor presente do efeito do consumo público sobre o PIB mostra que, apesar do impacto inicial positivo, o efeito de longo prazo deste é menor do que um em todos os cenários analisados, sendo que em algumas parametrizações, este efeito pode ser negativo. O efeito negativo de longo prazo se dá pela necessidade de ajuste orçamentário após o aumento de gastos gerado pelo choque fiscal, o que implica em reduções futuras de consumo e de investimento público. Com isso, a queda no estoque de capital público acaba por reduzir a capacidade produtiva da economia. Por outro lado, gastos com investimento possuem não só um impacto inicial positivo, mas também um efeito de longo prazo superior a um mesmo para valores da elasticidade produto do estoque de capital público igual a 0,02. Um maior estoque de capital público gera ganhos de produtividade privados, ampliando os investimentos e a capacidade produtiva da economia, apontando para as vantagens de uma política fiscal baseada em investimento em infraestrutura em detrimento a gastos em consumo.

Ademais, o efeito da interação entre política monetária e política fiscal é analisado e a importância do termo de suavização na regra de Taylor é analisada. Mais especificamente, um banco central mais avesso a mudanças bruscas na taxa de juros acaba gerando, inicialmente, maiores multiplicadores fiscais com sua política monetária mais acomodativa. Porém, no longo prazo, o valor presente das variações futuras no PIB será comprometido negativamente, pois uma recessão maior deverá ser induzida para trazer a inflação para a meta novamente. Já o banqueiro central que opta por ajustes mais bruscos na taxa de juros após choques inflacionários tende a diminuir o efeito inicial da política fiscal, entretanto, neste caso, o valor presente das variações futuras do PIB é superior, pois a inflação não se afasta fortemente da meta em nenhum momento, evitando oscilações fortes de preço e de produto.

O presente trabalho está dividido em seis sessões, incluindo esta introdução. Na seção 2 uma breve revisão da literatura sobre o cálculo de multiplicadores fiscais, bem como a definição do multiplicador a valor presente são apresentadas. A seção 3 explicita as equações do modelo DSGE desenvolvido, enquanto a seção 4 descreve sucintamente a metodologia de estimação. A seção 5 contém os resultados obtidos através de análises de funções impulso-resposta, bem como análises baseadas no multiplicador a valor presente para diferentes cenários. Algumas sugestões para pesquisas futuras são discutidas ao final desta seção. O trabalho termina com algumas conclusões na seção 6 Informações adicionais a respeito da metodologia e dos resultados da estimação são apresentadas no Apêndice A.

## 2. MULTIPLICADORES FISCAIS

Tradicionalmente, o termo multiplicador fiscal se refere à razão entre a variação da renda nacional e a variação nos gastos do governo. Um valor superior a um para esta razão indica que a política fiscal possui um efeito multiplicador, pois uma alteração de, por exemplo, R$ 1,00 nos gastos públicos acarreta um aumento maior do que R$ 1,00 na renda agregada. A lógica para este aumento mais do que proporcional na renda agregada tem origem na ideia de que o aumento dos gastos públicos incentivará o consumo privado que, por sua vez, causará aumento da renda e este aumento da renda impactará novamente o consumo positivamente, desencadeando então um círculo virtuoso. Entretanto, do ponto de vista empírico, estimativas para este efeito variam de valores próximos a 0 até valores bem superiores

a 1 dependendo do período e tamanho da amostra, países de análise e hipótese de identificação dos choques.

No caso da economia americana, Barro (2009) argumentou que o multiplicador fiscal em períodos de paz é essencialmente zero, enquanto Romer e Bernstein (2009) sugerem uma estimativa de 1,6. A literatura brasileira também não apresenta um consenso sobre os impactos de políticas fiscais sobre o produto. Reis et al. (1999) utilizaram um modelo macroeconométrico Keynesiano e encontraram relação positiva entre gastos do governo e produto. Peres e Ellery Jr (2009), baseando-se na metodologia de vetores autoregressivos (VAR) de Blanchard e Perotti (2002), também dão sustentação à visão Keynesiana tradicional. Por outro lado, Mendonça, Medrano e Sachsida (2009), utilizando a abordagem VAR com o procedimento de identificação de Mountford e Uhlig (2009), chegam à conclusão de que aumentos inesperados de gastos públicos conduzem, com 77% de probabilidade, a uma retração do produto real. Ainda um terceiro resultado foi encontrado por Cavalcanti e Silva (2010). Estes autores seguem Favero e Giavazzi (2007) e consideram explicitamente o papel da dívida pública na determinação da política fiscal, o que acaba por tornar o efeito multiplicador estatisticamente não significativo, dando sustentação à idéia de um efeito nulo no produto real após política fiscal expansionista.

Porém, enquanto na literatura internacional autores como Cogan, Cwik, Taylor e Wieland (2010), Uhlig (2010), Drautzburg e Uhlig (2011) e Woodford (2011), entre outros, analisaram estas questões de política fiscal através da abordagem DSGE, os estudos brasileiros tem se concentrados em modelos VAR ou até mesmo em modelos baseados em sistemas de equações simultâneas ainda sujeitos à crítica de Lucas (1976). A análise microfundamentada proporcionada por um modelo DSGE não só ataca a crítica de Lucas, mas apresenta também algumas vantagens em relação à análise VAR, justificando os esforços no desenvolvimento dessa ferramenta para a avaliação de políticas fiscais.

A possibilidade de se modelar conjuntamente o comportamento de outros agentes está entre as vantagens do uso de DSGEs para o cálculo de multiplicadores fiscais, pois este tipo de modelo permite analisar os efeitos de diferentes regras de comportamento na magnitude dos multiplicadores. Por exemplo, é possível avaliar o impacto de diferentes funções de reação do banco central no tamanho do multiplicador fiscal. Claramente, o resultado final de um choque positivo nos gastos públicos dependerá de como o banco central reagirá através da administração da taxa de juros nominal. Em modelos VAR, esta reação seguirá obrigatoriamente os padrões históricos de correlação entre gastos públicos e a taxa básica de juros embutida nas estimativas dos parâmetros do modelo VAR. Por sua vez, modelos DSGE possibilitam a análise de diferentes cenários de comportamento do banco central frente à expansão fiscal, permitindo analisar casos em que o banco central acomoda a política fiscal, bem como situações de forte reação via aumento de juros, entre outras situações hipotéticas, sem que estas tenham necessariamente ocorrido no passado.

A análise de comportamentos alternativos para a autoridade fiscal também pode ser interessante, pois estes influenciam o multiplicador através das várias formas de financiamento dos gastos e das regras de administração da dívida pública. Ademais, análises baseadas em diferentes cenários de comportamento das famílias, firmas e de outros agentes, bem como questões de bem estar e utilidade das famílias, podem ser bastante vantajosas. Todas estas análises podem ser consideradas em modelos DSGE, porém são inviáveis em modelos VAR.

Outra característica comum à maioria dos estudos a respeito do tamanho do multiplicador fiscal é a hipótese de que os gastos do governo estimulam somente a demanda do período corrente, não possuindo qualquer efeito sobre a oferta de bens e serviços via aumento na produtividade marginal dos insumos privados. Mais especificamente, estes estudos ignoram a possibilidade do investimento público expandir a capacidade produtiva da economia e consideram que gastos do governo afetam somente a demanda agregada.

Entretanto, o investimento público, além de estimular a demanda agregada no curto prazo, pode fomentar também o crescimento de longo prazo através de melhorias na infraestrutura nacional, aumentando a capacidade produtiva da economia. Ferreira e do Nascimento (2005) argumentam que a falta de investimentos em infraestrutura no passado recente afetou negativamente o crescimento econômico

brasileiro, gerando altos custos sociais e produtivos. Como evidenciado em Aschauer (1989), gastos em infraestrutura podem aumentar o retorno do capital, o que acaba por incentivar o investimento privado.

Apesar de existir a possibilidade de gastos com infraestrutura acarretarem benefícios não só de demanda mas também de oferta, a sua eficácia depende do efeito do investimento público na inflação e na expectativa futura dos agentes em relação à variação de preços. Considerando que um aumento do estoque de capital público aumenta a produtividade das firmas, um aumento do investimento governamental terá um efeito de redução e um efeito de aumento dos custos marginais futuros. A redução se dará devido ao aumento na produtividade marginal dos fatores privados, ou seja, é um efeito de oferta. Já o efeito de aumento dos custos marginais é oriundo do aumento da demanda agregada futura em resposta a um efeito riqueza sentido pelas famílias após o aumento da produtividade dos fatores privados. Portanto, o resultado final do investimento público na inflação e no produto dependerá da importância relativa de cada um destes efeitos em diferentes pontos do tempo.

Para comparar os efeitos dos diferentes cenários para a política fiscal, é importante calcular alguma medida descritiva para cada situação. Uma medida muito usada na literatura é o chamado multiplicador de impacto, definido como a razão entre a resposta do PIB sobre o choque inicial dado na variável fiscal (ver, por exemplo, Blanchard & Perotti, 2002). Entretanto, esta medida desconsidera o impacto de determinado cenário em toda a trajetória futura do produto. Para calcular tal efeito, será utilizado o multiplicador a valor presente proposto por Mountford e Uhlig (2009). Mais especificamente, o multiplicador a valor presente $k$ trimestres após o choque é definido pela seguinte fórmula:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}(1+r)^{-j}\Delta Y_j}{\sum_{j=0}^{k}(1+r)^{-j}\Delta G}, \tag{1}$$

onde $r$ é o juros real no estado estacionário, $Y$ é o produto e $G$ é o gasto do governo. Portanto, no período do choque $k = 0$, o multiplicador a valor presente nos dá o multiplicador de impacto. Porém, quando $k \to \infty$, este multiplicador traz a valor presente todos os efeitos futuros dos gastos do governo sobre o produto, permitindo analisar o efeito total líquido do choque fiscal.

## 3. MODELO DSGE PARA O BRASIL

O modelo aqui apresentado é baseado principalmente em de Castro, Gouvea, Minella, dos Santos e Souza-Sobrinho (2008, 2011), mas também em alguns modelos internacionais como os de Baxter e King (1993), Stähler e Thomas (2012), Christiano, Eichenbaum e Evans (2005), Smets e Wouters (2003), Smets e Wouters (2007), Medina e Soto (2007), Adolfson, Laséen, Lindé e Villani (2007), e Murchison e Rennison (2006). O objetivo é representar uma pequena economia aberta sujeita à rigidez nominal. Rigidez de preços é incorporada ao nível dos bens intermediários. Rigidez real também é incluída através do regime de competição monopolística, custos de utilização e de ajuste do capital, além de persistência nos hábitos de consumo.

Várias características do modelo são herdadas de de Castro et al. (2008, 2011) e tem o intuito de capturar especificidades da economia brasileira. Por exemplo, bens importados são usados como insumos, uma vez que bens de consumo representam não mais do que 15% das importações do país. A autoridade monetária trabalha com uma meta de inflação e a autoridade fiscal persegue uma meta de superávit primário, além de também buscar estabilizar a relação dívida/PIB. Adicionalmente, o risco-país é aumentado através de variações na preferência pelo risco de investidores internacionais, o que permite contabilizar as grandes variações no risco-país brasileiro nas últimas décadas.

### 3.1. Famílias

O modelo contém um *continuum* de famílias indexadas por $j \in (0,1)$, sendo que uma fração $(1-\omega_{\mathrm{h}})$ das famílias tem acesso ao mercado financeiro, enquanto uma fração $\omega_{\mathrm{h}}$ das famílias não tem acesso

a crédito, títulos e capital, consumindo apenas o salário de cada período e, portanto, não apresentando comportamento Ricardiano devido à impossibilidade de substituição intertemporal de consumo e também de lazer. Ambos tipos de famílias ofertam mão de obra em um mercado de trabalho competitivo e, portanto, não possuem poder de monopólio. Salários são considerados flexíveis.

As famílias com acesso ao mercado financeiro resolvem um problema de maximização da utilidade intertemporal usual. Seja $j \in (0, 1-\omega_{\mathrm{h}})$ o índice de umas das famílias irrestritas, então ela resolve o seguinte problema:

$$\max_{\substack{C_{j,t},\, N_{j,t} \\ B_{j,t+1},\, B^*_{j,t+1} \\ K_{j,t+1},\, U_{j,t},\, I_{j,t}}} \mathrm{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t Z_t^{\mathrm{c}} \left( \frac{\left( C_{j,t} - hC_{t-1}^{\mathrm{o}} \right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - Z_t^{\mathrm{n}} \frac{\phi}{1+\eta} \left( N_t^j \right)^{1+\eta} \right) \right], \tag{2}$$

sujeito à seguinte restrição orçamentária:

$$C_{j,t} + I_{j,t} + a(U_{j,t})K_j + \frac{B_{j,t+1}}{P_t R_t} + \frac{B^*_{j,t+1}}{P_t \Phi_t R^*_t} S_t \leq \frac{W_t N_{j,t}}{P_t} + \frac{r_t^{\mathrm{n,k}} U_{j,t} K_{j,t}}{P_t} + \frac{B_{j,t}}{P_t} + \frac{B^*_{j,t} S_t}{P_t} + \frac{\Upsilon_{j,t}}{P_t} - \frac{\tau_t^{\mathrm{n}}}{P_t}, \tag{3}$$

e à lei de movimento do estoque de capital:

$$K_{j,t+1} = (1-\delta)K_{j,t} + \left[ 1 - S\left( \frac{I_{j,t}}{Z_t^{\mathrm{I}} I_{j,t_1}} \right) \right] I_{j,t}, \tag{4}$$

onde $\beta$ é o fator de desconto intertemporal, $C_{j,t}$ é o consumo da família $j$, $C_j^{\mathrm{o}}$ é o nível médio de consumo das famílias irrestritas, $N_{j,t}$ é a quantidade de trabalho ofertada pela família $j$, $Z_t^{\mathrm{c}}$ é um choque que afeta a preferência por consumo, $Z_t^{\mathrm{n}}$ é um choque que afeta a preferência por trabalho, $K_{j,t}$ é o capital físico de propriedade da família $j$, $U_{j,t}$ é a taxa de utilização do capital, $I_{j,t}$ é o investimento, $P_t$ o nível de preços da economia, $B_{j,t+1}$ são títulos com maturidade de um período denominados em moeda local, $B^*_{j,t+1}$ são títulos internacionais denotados em moeda estrangeira, $S_t$ é a taxa de câmbio nominal (definida como o preço da moeda estrangeira em termos da moeda local), $r_t^{\mathrm{n,k}}$ é a taxa nominal de juros paga pelos serviços do capital, $R_t$ é a taxa de juros nominal domestica, $R^*_t$ é a taxa livre de risco que define o juros nominal internacional, $\Phi_t$ é o prêmio de risco do país local, $W_t$ é o salário nominal, $\Upsilon_{j,t}$ é o lucro nominal dos produtores de bens intermediários, $\tau_t^{\mathrm{n}}$ são impostos líquidos do tipo *lump-sum*, $\delta$ é a taxa de depreciação e $Z_t^{\mathrm{I}}$ é um choque afetando o custo de ajustamento do capital. Ajustar a taxa de utilização do capital implica em custos convexos e $a(U_{j,t})$ satisfaz $a' > 0$, $a'' > 0$, $a(\overline{U}) = 0$, onde $\overline{U}$ é a taxa de utilização de capital do estado estacionário; além disso, $\delta_a = a''/a'$. A lei de movimento do estoque de capital inclui custos de ajustamento dados pela função $S(\cdot)$, que satisfaz as seguintes propriedades em estado estacionário $\overline{S}(\cdot) = 0$, $\overline{S}' = 0$ e $\overline{S}'' \equiv \delta_S > 0$.

As famílias que não possuem acesso a crédito, mercado de capitais e ao capital físico maximizam a mesma função utilidade em (2), entretanto, elas escolhem apenas o nível de consumo e trabalho desejado. Seja agora $j \in (1-\omega_{\mathrm{h}}, 1)$ o índice de uma família restrita, então o problema que ela resolve é:

$$\max_{C_{j,t},\, N_{j,t}} \mathrm{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t Z_t^{\mathrm{c}} \left( \frac{\left( C_{j,t} - hC_{t-1}^{\mathrm{o}} \right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - Z_t^{\mathrm{n}} \frac{\phi}{1+\eta} \left( N_t^j \right)^{1+\eta} \right) \right], \tag{5}$$

sujeito à seguinte restrição orçamentária:

$$P_t C_{j,t} \leq W_t N_{j,t}. \tag{6}$$

Devido à existência de dois grupos de famílias, as equações para consumo e oferta de trabalho agregados são:

$$C_t = (1-\omega_{\mathrm{h}})C_t^{\mathrm{o}} + \omega_{\mathrm{h}} C_t^{\mathrm{r}}$$

e

$$N_t = (1-\omega_{\mathrm{h}})N_t^{\mathrm{o}} + \omega_{\mathrm{h}} N_t^{\mathrm{r}}.$$

### 3.2. Firmas

O modelo possui uma firma representativa que produz o bem de consumo final usando um *continuum* de bens intermediários, indexados por $i \in (0,1)$, usando uma função de produção CES. Este bem de consumo final pode ser visto como a cesta de consumo típica do índice geral de preços. O bem de consumo resultante é vendido em um mercado competitivo. Este bem é usado para consumo privado, consumo governamental, investimento e exportações. No caso das exportações, este bem será usado no exterior como insumo para a produção do bem importado.

A firma produtora do bem de consumo maximiza a seguinte função de lucro:

$$\max_{Y_t,\, Y_{i,t}} \left( P_t Y_t - \int_0^1 P_{i,t} Y_{i,t}\, \mathrm{d}_i \right), \tag{7}$$

sujeita à tecnologia descrita na função de produção:

$$Y_t \equiv \left( \int_0^1 (Y_{i,t})^{\frac{\xi-1}{\xi}} \mathrm{d}_i \right)^{\frac{\xi}{\xi-1}}, \tag{8}$$

onde $\xi > 1$ é a elasticidade-preço da demanda por cada bem intermediário. A solução para este problema determina a curva de demanda pelos $i$ bens intermediários:

$$Y_{i,t} = \left( \frac{P_{i,t}}{P_t} \right)^{-\xi} Y_t. \tag{9}$$

O nível agregado de preços, ou o preço do bem de consumo final, será então dado por:

$$P_t = \left( \int_0^1 P_{i,t}^{-\xi} \right)^{\frac{1}{1-\xi}}. \tag{10}$$

A produção de bens intermediários fica a cargo de uma infinidade de firmas operando em condições de concorrência monopolística. A substituição de concorrência perfeita por concorrência monopolística inclui uma fonte de rigidez real no modelo, o que faz com que, mesmo em pleno emprego, a economia ainda apresente ineficiências.

Inicialmente, estas firmas produzem um insumo doméstico para ser combinado posteriormente com o insumo importado. A produção do insumo doméstico utiliza não só trabalho e capital privado, mas também capital público como proposto por Aschauer (1989). Esta especificação para a função de produção também foi utilizada por Baxter e King (1993) em um modelo DSGE pequeno e posteriormente incluída em modelos de média escala por Stähler e Thomas (2012), entre outros. Trabalho e os dois tipos de capital são combinados usando uma função de produção Cobb-Douglas para produzir o insumo doméstico:

$$Y_{i,t}^{\mathrm{d}} = A_t K_{\mathrm{G},t}^{\alpha_{\mathrm{G}}} (K_{i,t}^{\mathrm{u}})^{\alpha} N_{i,t}^{1-\alpha}, \tag{11}$$

onde $A_t$ é um fator tecnológico comum a todas as firmas, $K^{\mathrm{u}}_{i,t} \equiv U_{i,t}K_{i,t}$ é o capital privado utilizado na produção, $K_{\mathrm{G},t}$ é o estoque de capital público do qual a firma se beneficia e $\alpha_{\mathrm{G}}$ é a elasticidade do insumo doméstico ao estoque de capital público. Aschauer (1989) argumenta que a provisão por parte do governo de insumos como saneamento básico, eletricidade, linhas de comunicação, vias de transporte, entre outros, pode gerar economia de escala na produção privada. Isso leva a uma especificação da função de produção onde os insumos privados geram retornos constantes à escala, porém a função apresenta retornos crescentes à escala quando todos os fatores de produção são considerados. Este seria o caso se $\alpha_{\mathrm{G}} > 0$ em (11). Neste situação, insumos privados continuam sendo pagos com seus respectivos produtos marginais e a produção é totalmente utilizada para o pagamento destes insumos.

O insumo doméstico $Y^{\mathrm{d}}_{i,t}$ é combinado com o insumo importado através de uma função de produção CES para gerar o bem intermediário:

$$Y_{i,t} = \left[ \epsilon^{\frac{1}{\rho}} \left( Y^{\mathrm{d}}_{i,t} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-\epsilon)^{\frac{1}{\rho}} \left( M_{i,t} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right]^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \tag{12}$$

onde $M_{i,t}$ é o bem importado.

Inicialmente, a firma monopolista escolhe $Y_{i,t}$, $N_{i,t}$, $M_{i,t}$ e $K^{\mathrm{u}}_{i,t}$, considerando o nível de preços como variável exógena. A minimização de custos da firma $i$ será:

$$\min_{M_{i,t},\, N_{i,t},\, K^{\mathrm{u}}_{i,t}} \left( \frac{P^{\mathrm{M}}_t}{P_t} M_{i,t} + \frac{W_t}{P_t} N_{i,t} + \frac{r^{\mathrm{n,k}}_t}{P_t} K^{\mathrm{u}}_{i,t} \right), \tag{13}$$

sujeita às restrições tecnológicas (11) e (12). $P^{\mathrm{M}}_t$ é o preço do bem importado na moeda local.

Em seguida, a firma monopolista escolhe o preço de seu bem intermediário, sendo que ela irá efetivamente alterá-lo para o preço desejado com uma probabilidade $1-\theta$. Seguindo Galí e Gertler (1999), dentre as firmas que irão alterar seus preços, uma fração $(1-\omega_{\mathrm{b}})$ irá fazê-lo baseado não só no histórico inflacionário, mas também em expectativas a respeito do futuro (*forward-looking*), enquanto a parcela $\omega_{\mathrm{b}}$ das firmas que ajustarão preços irá fazê-lo baseando-se apenas no histórico de preços (*backward-looking*).

O problema de escolha do preço para as firmas *forward-looking* pode ser descrito como:

$$\max_{P_{i,t}} \mathrm{E}_0 \sum_{j=0}^{\infty} (\theta\beta)^j \Lambda_{t,t+j} \left[ \left( \frac{P_{i,t}}{P_{t+j}} \right)^{1-\xi} Y_{t+j} - MC_{t+j} \left( \frac{P_{i,t}}{P_{t+j}} \right)^{-\xi} Y_{t+j} \right], \tag{14}$$

onde $MC_{t+j}$ é o custo marginal real.

Por outro lado, as firmas *backward-looking* definem seus preços de acordo com:

$$P^{\mathrm{b}}_t = \Pi_{t-1} P^{\mathrm{a}}_{t-1}, \tag{15}$$

onde $P^{\mathrm{b}}_t$ é o preço dos produtos vendidos por firmas *backward-looking*, $\Pi_t = P_t/P_{t-1}$ é a taxa de inflação, $P^{\mathrm{a}}_t$ é o preço médio das firmas que ajustaram seus preços, que é dado por um média ponderada entre os preços dos dois tipos de firmas:

$$P^{\mathrm{a}}_t = \left[ \omega_b \left( P^{\mathrm{b}}_t \right)^{1-\xi} + (1-\omega_b) \left( P^{\mathrm{f}}_t \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1-\xi}}. \tag{16}$$

O nível agregado de preços, portanto, evolui de acordo com uma média ponderada entre preços recém ajustados e o antigo nível de preços:

$$P_t = \left[ \theta \left( P_{t-1} \right)^{1-\xi} + (1-\theta) \left( P^{\mathrm{a}}_t \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1-\xi}}. \tag{17}$$

### 3.3. Setor externo

Uma parcela dos bens de consumo finais são exportados. Estes bens serão usados no exterior como insumos no setor produtivo. Diferentemente do que ocorre domesticamente, este bem final é visto como um bem diferenciado no mercado externo, onde opera-se sob concorrência monopolística. Seguindo Galí e Monacelli (2005), considera-se que existem um *continuum* de países $i \in (0,1)$, onde cada país produz um bem com algum tipo de diferenciação no mercado global.

A demanda externa por bens do país local é oriunda das firmas importadoras estrangeiras. A firma representativa do país $k$ enfrenta um problema de maximização análogo a (7), porém agora na moeda do país $k$:

$$\max_{M_t,\, M_{i,t}} \left( P^{\mathrm{M}}_{k,t} M^k_t - \int_0^1 P_{i,t} M^k_{i,t}\, \mathrm{d}_i \right), \tag{18}$$

sujeito a

$$M^k_t \equiv \left( \int_0^1 \left( M^k_{i,t} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \mathrm{d}_i \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \quad \varkappa > 1, \tag{19}$$

onde $M^k_t$ são as importações agregadas do país $k$, $M^k_{i,t}$ são as importações oriundas do país $i$, $P^{\mathrm{M}}_{k,t}$ é o preço agregado das importações em moeda do país $K$ e $P_{i,t}$ é o preço das importações oriundas do país $i$.

As condições de primeira ordem para este problema determinam a demanda por exportações do país local:

$$X_t = \left( \frac{P_t / S_t}{P^*_t} \right)^{-\varkappa} M^*_t, \tag{20}$$

onde $M^*_t$ são as importações mundiais totais ($M^*_t \equiv \int_0^1 M_{i,t}\, \mathrm{d}_i$) e $P^*_t$ é o preço das importações na moeda internacional. Como o interesse está no país local, $M^*_t$ e $P^*_t$ são tratados como processos exógenos. Portanto, as exportações do país local dependem do preço relativo destas, bem como das importações mundiais.

A firma importadora representativa resolve o mesmo problema da firma estrangeira. Esta firma compra bens diferenciados dos diversos países externos e os utiliza para gerar um bem importado homogêneo que é usado como insumo em (12). Como bens importados só são usados pelas firmas produtoras de bens intermediários, a demanda agregada por importações vem das escolhas de insumos das firmas monopolistas.

A lei de movimento para posição líquida em ativos estrangeiros será:

$$\frac{S_t B^*_{t+1}}{\Phi_t R^*_t} = S_t B^*_t + NX^{\mathrm{n}}_t, \tag{21}$$

onde $NX^{\mathrm{n}}_t \equiv P_t X_t - P^{\mathrm{M}}_t M_t$ são as exportações líquidas em termos nominais.

O prêmio de risco $\Phi_t$ é definido em função das reservas internacionais em (21), de choques específicos ao país local, $z^{\phi}_t$, e da disposição dos investidores internacionais em tomar risco, $z^{\phi^*}_t$:

$$\Phi_t = \psi \exp\left\{ \psi \left( \frac{S_t B^*_{t+1}}{P_t Y_t} - \frac{SB}{PY} \right) + \nu z^{\phi^*}_t + z^{\phi}_t \right\}, \tag{22}$$

onde $\frac{SB}{PY}$ é o valor de estado estacionário das reservas internacionais líquidas, enquanto $z^{\phi^*}_t$ e $z^{\phi}_t$ seguem processos AR(1).

### 3.4. Governo

#### 3.4.1. Autoridade monetária

O banco central segue um regime de meta de inflação e determina a taxa de juros nominal com base em uma regra de Taylor com a adição de um suavizador de taxa de juros. O banco central reage a desvios das expectativas de inflação em relação à meta e também a desvios do PIB em relação ao seu nível no estado estacionário (produto potencial) de acordo com a seguinte função de reação:

$$R_t = R_{t-1}^{\gamma_r}\left(E_t\left[\frac{\Pi_{t+h}}{\overline{\Pi}_{t+h}}\right]^{\gamma_\pi}\overline{\Pi}\,\overline{R}^{\text{real}}\left(\frac{Y_t^{\text{VA}}}{Y^{\text{VA}}}\right)^{\gamma_y}\right)^{1-\gamma_r} e^{z_t^r}, \tag{23}$$

onde $h \geq 0$ é o horizonte de expectativa usado na reação do banco central, $R_t$ é a taxa de juros nominal, $\overline{\Pi}_t$ é a meta de inflação, $\overline{R}^{\text{real}}$ é a taxa de juros real no estado estacionário e $z_t^r$ é um choque de política monetária.

O PIB é definido como:

$$P_t^{\text{VA}} Y_t^{\text{VA}} \equiv P_t Y_t - P_t^{\text{M}} M_t, \tag{24}$$

onde $P_t^{\text{VA}}$ é o deflator implícito do PIB.

#### 3.4.2. Autoridade fiscal

O instrumento de política da autoridade fiscal é o gasto governamental, que será dividido em gastos com consumo e gastos com investimentos, sendo que este último contribui para a formação de um estoque de capital público que beneficia as firmas. Entretanto, a autoridade fiscal persegue metas de superávit primário anunciadas com antecedência com o objetivo de estabilizar a relação dívida/PIB. Portanto, os gastos do governo, sejam eles para consumo ou para investimento, respondem à variações do superávit primário em relação à meta, bem como a variações da relação dívida/PIB. Portanto, o consumo do governo segue o seguinte processo estocástico:

$$\frac{P_t G_t^{\text{C}}}{P_t^{\text{VA}} Y_t^{\text{VA}}} = \gamma_g \frac{P_{t-1} G_{t-1}^{\text{C}}}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}} + (1-\gamma_g)\left[\gamma_s\left(\frac{S_{t-1}^g}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}} - \frac{\overline{S}_{t-1}^g}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}}\right) - \gamma_b\left(B_t^y - B^y\right) + \frac{PG}{P^{\text{VA}} Y^{\text{VA}}}\right] + z_t^{g^{\text{C}}}, \tag{25}$$

onde $S_t^g$ é o superávit primário, $\left(\overline{S}_{t-1}^g\right)/\left(P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}\right)$ é a meta de superávit primário como proporção do PIB, $B_t^y = B_t/\left(P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}\right)$ é a relação dívida/PIB e $z_t^{g^{\text{C}}}$ é um choque de consumo do governo. Os investimentos do governo seguem um processo estocástico similar:

$$\frac{P_t G_t^{\text{I}}}{P_t^{\text{VA}} Y_t^{\text{VA}}} = \gamma_g \frac{P_{t-1} G_{t-1}^{\text{I}}}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}} + (1-\gamma_g)\left[\gamma_s\left(\frac{S_{t-1}^g}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}} - \frac{\overline{S}_{t-1}^g}{P_{t-1}^{\text{VA}} Y_{t-1}^{\text{VA}}}\right) - \gamma_b\left(B_t^y - B^y\right) + \frac{PG}{P^{\text{VA}} Y^{\text{VA}}}\right] + z_t^{g^{\text{I}}}, \tag{26}$$

onde $z_t^{g^{\text{I}}}$ é um choque de investimento do governo.

Os gastos totais do governo, incluindo consumo e investimentos, são dados por $G_t = G_t^{\text{C}} + G_t^{\text{I}}$. Os gastos com investimentos do governo agregam ao estoque de capital público, bem como compensam a depreciação deste:

$$K_{\text{G},t+1} = (1-\delta_{\text{G}})K_{\text{G},t} + G_t^{\text{I}}. \tag{27}$$

O estoque de capital público $K_{\text{G},t}$ representa rodovias, portos, aeroportos, universidades, escolas e outros tipos de infraestrutura que contribuem para a produtividade das firmas produtoras de bens intermediários e seu efeito fica explícito na função de produção (11). É importante notar que, apesar de (11) apresentar retornos constantes à escala para os fatores de produção privados, esta é uma função de produção com retornos crescentes à escala, pois a infraestrutura pública permite ganhos adicionais de produtividade. O superávit primário é definido como

$$S_t^g \equiv \tau_t^n - P_t G_t, \tag{28}$$

onde $\tau_t^n$ são as receitas líquidas com impostos em termos nominais.

As receitas de impostos são uma função do PIB nominal, logo:

$$\tau_t^n = \tau^y P_t^{\text{VA}} Y_t^{\text{VA}}. \tag{29}$$

Todo o déficit do governo é financiado domesticamente, ou seja, o governo emite apenas títulos domésticos. A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$\frac{B_{t+1}}{R_t} + \tau_t^y = P_t G_t + B_t. \tag{30}$$

Obviamente, a economia deve satisfazer também a seguinte identidade:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t, \tag{31}$$

onde que $Y_t$ inclui também insumos importados usados na produção e difere da definição de PIB dada em (24).

## 4. ESTIMAÇÃO

A estimação do modelo proposto foi realizada através da abordagem Bayesiana. A literatura apresenta diversos procedimentos para a determinação do valor dos parâmetros de modelos DSGE, desde abordagens informais como a calibração (ver, por exemplo, Kydland & Prescott, 1982), que evoluíram para a estimação formal usando método generalizado dos momentos (ver, entre outros, Christiano et al., 2005), a estimações baseadas em funções de verossimilhança tanto com abordagem clássica (McGrattan, 1994), quanto com a Bayesiana (An & Schorfheide, 2007).

Entretanto, a estimação Bayesiana de modelos DSGE possui vantagens em relação aos métodos de estimação clássicos, pois permite incorporar informações adicionais disponíveis ao pesquisador à estimação dos parâmetros através de distribuições a priori para estes (ver An & Schorfheide, 2007, para uma discussão a respeito de outras vantagens desta abordagem). Estas informações a priori podem servir para reduzir a importância de determinadas regiões do espaço paramétrico que não condizem com observações do mundo real não contidas no vetor de séries de tempo utilizado na estimação. Além disso, informações a priori podem adicionar curvatura a dimensões praticamente planas da função de verossimilhança, influenciando o formato da distribuição a posteriori.

O modelo possui 73 parâmetros, dos quais 32 são calibrados, e 41 são estimados. A base de dados utilizada na estimação deste parâmetros contém dados trimestrais sobre o Produto Interno Bruto, a taxa de câmbio real (média trimestral), a taxa de juros Selic (média trimestral), a inflação medida pelo IPCA (variação trimestral), a razão superávit primário fiscal em relação ao PIB, a inflação trimestral dos EUA (usada como proxy para a inflação internacional) e a taxa de juros dos *FED funds* (usada como proxy para a taxa de juros internacional). A amostra tem início no terceiro trimestre de 1999 e se estende até o terceiro trimestre de 2013. A tendência de todas as séries é retirada utilizando-se o filtro proposto por Hodrick e Prescott (1997).

A estimação Bayesiana é realizada através do algoritmo Metropolis-Hastings, que permite gerar cadeias de Markov cuja distribuição estacionária corresponde à distribuição a posteriori de interesse (Chib & Greenberg, 1995). Como descrito por An e Schorfheide (2007), um caso especial do algoritmo Metropolis-Hastings muito usado na estimação de modelos DSGE é o algoritmo Metropolis-Hastings passeio aleatório, cuja implementação possui os seguintes passos:

*1)* Use uma rotina de otimização para encontrar a moda do produto entre a função de verossimilhança e a função de distribuição a priori. Denote esta moda por $\tilde{\theta}$.

*2)* Calcule o inverso da matriz Hessiana do produto de funções acima no ponto $\tilde{\theta}$ e denote-o por $\tilde{\Sigma}$.

*3)* Amostre $\theta^{(0)}$ de uma distribuição $\mathcal{N}\left(\tilde{\theta}, c^2\tilde{\Sigma}\right)$, onde $c^2$ permite alterar a escala de $\tilde{\Sigma}$.

*4)* Para $s = 1, \ldots, S$, amostre um vetor tentativo de parâmetros $\vartheta$ da distribuição proposta, $\mathcal{N}\left(\theta^{(s-1)}, c^2\tilde{\Sigma}\right)$. A realização $\vartheta$ será aceita como o novo vetor $\theta^{(s)}$ com uma probabilidade $\min\left\{1, r(\theta^{(s-1)}, \vartheta|Y)\right\}$ e rejeitado (ou seja, $\theta(s) = \theta^{(s-1)}$) caso contrário, onde

$$r\left(\theta^{(s-1)}, \vartheta|Y\right) = \frac{\mathcal{L}(\vartheta|Y)p(\vartheta)}{\mathcal{L}\left(\theta^{(s-1)}|Y\right)p\left(\theta^{(s-1)}\right)}. \tag{32}$$

*5)* A distribuição a posteriori dos parâmetros é então aproximada pela distribuição amostral $\{\theta^{(i)}\}_{i=B}^{S}$, onde B é o número de amostras iniciais descartadas antes da convergência da cadeia de Markov para a distribuição a posteriori.

Portanto, o algoritmo Metropolis-Hastings passeio aleatório constrói uma sequência de realizações da distribuição a posteriori sem a exigência do conhecimento desta distribuição em fórmula fechada. A partir desta amostra, pode-se aproximar os momentos da distribuição a posteriori através dos momentos empíricos. Na estimação realizada, a escala de $\tilde{\Sigma}$ foi parametrizada com $c = 0{,}4472$, garantindo uma taxa de aceitação em (32) de aproximadamente 25%, seguindo recomendação de Roberts, Gelman, Gilks et al. (1997). Foram amostradas da cadeia de Markov gerada pelo algoritmo Metropolis-Hastings 1.000.000 realizações dos parâmetros, sendo que 60% destas observações foram descartadas para garantir que a cadeia de Markov já tenha convergido para a distribuição a posteriori antes que as realizações desta comecem a ser utilizada para calcular os momentos empíricos da distribuição a posteriori. O Apêndice A apresenta alguns diagnósticos de convergência para o algoritmo utilizado.

A Tabela A-2, incluída no Apêndice, descreve os valores de cada parâmetro usados nas simulações do modelo. Os parâmetros cujos valores foram calibrados seguem referências na literatura nacional e internacional. A maior parte dos parâmetros calibrados são relações entre variáveis no estado estacionário. Este valores foram calibrados de acordo com a média das variáveis na amostra utilizada. Parâmetros como a taxa de depreciação, a elasticidade produto do capital privado do e a taxa de depreciação foram calibrados de acordo com de Castro et al. (2011). A Tabela A-2 descreve todos os parâmetros, suas distribuições a priori e a moda de suas distribuições a posteriori. O Apêndice A também apresenta gráficos das distribuições a priori e a posteriori, permitindo a análise de quais parâmetros são melhor identificado nos dados.

A principal especificidade do modelo aqui apresentado é a inclusão do estoque de capital público como fator relevante no aumento da produtividade, com isso, a calibragem da elasticidade produto do capital público, $\alpha_G$, é fundamental. No modelo base, esse parâmetro foi fixado em 0,02, porém, como argumentado por Ferreira e do Nascimento (2005) não há um consenso na literatura a respeito do valor deste parâmetro e estimativas variam de 0,4 em Ferreira e Malliagros (1998), até resultados estatisticamente não significativos. Bom e Ligthart (2013) realizam uma meta-análise para esta elasticidade baseada em 578 estimativas coletadas em 68 estudos diferentes contendo amostra de vários países da OCDE e encontram uma estimativa média de 0,08. Aschauer (1989) estima a elasticidade produto do estoque de capital público em 0,36 usando dados americanos. A escolha conservadora de $\alpha_G = 0{,}02$ tem o intuito de mostrar a importância do investimento público mesmo em um cenário onde $\alpha_G$ é pequeno; entretanto, uma análise de sensibilidade dos resultados a esta escolha será feita na seção 5.2.

## 5. RESULTADOS

Esta seção apresenta as análises obtidas através do modelo desenvolvido e estimado com dados brasileiros. Os valores dos parâmetros foram estimados de acordo com a discussão apresentada na seção 4, permitindo então a solução e a simulação do modelo apresentado. Baseado nestes parâmetros, funções

impulso-resposta para os diversos choques podem ser analisadas, permitindo separar os efeitos dinâmicos dos diferentes choques contidos no modelo. Além disso, análises a respeito do efeito dinâmico total dos gastos públicos são consideradas através de multiplicadores a valor presente.

### 5.1. Análise de funções impulso-resposta

A Figura 1 (páginas 87 e 88) apresenta funções impulso-resposta a choques no consumo do governo para todas as variáveis endógenas. É possível perceber, por exemplo, que o consumo das famílias otimizadoras cai em resposta a aumento do consumo do governo, evidenciando o efeito riqueza negativo típico de consumidores Ricardianos devido à expectativa de maiores gastos futuros com impostos. Entretanto, as famílias de baixa renda e que não possuem acesso ao mercado financeiro não podem transferir consumo e trabalho ao longo do tempo e acabam por consumir mais no período do choque de consumo devido ao aumento da renda corrente. O aumento do consumo do governo também afeta a posição externa do país, uma vez que as exportações líquidas se tornam negativas, gerando uma redução nas reservas internacionais. Essa redução acaba por gerar um aumento no risco-país e uma consequente fuga de capitais, desvalorizando então a moeda local no médio prazo. A desvalorização cambial incentiva então as exportações, gerando exportações líquidas positivas e, gradualmente, recompondo o estoque de reservas internacionais, o que traz o risco-país novamente para seu nível de estado estacionário.

Como a autoridade fiscal procura estabilizar a razão dívida/PIB, nos períodos subsequentes ao choque de gastos do governo haverá um aperto fiscal. Este efeito pode ser visto na função impulso-resposta para o superávit primário. O incentivo à demanda dado pelo aumento nos gastos do governo acaba por gerar um aumento da taxa de inflação, o que leva a autoridade monetária a responder com um aumento na taxa nominal de juros nominal. O aumento dos juros, juntamente com o aperto fiscal nos períodos seguintes levam a uma redução não só da inflação, mas também do PIB. Portanto, o impacto inicial do consumo do governo sobre o produto é positivo, porém, a dinâmica da economia e as respostas dos diversos agentes econômicos acaba por gerar um efeito negativo sobre o produto em períodos futuros. Uma maneira de contabilizar o saldo final destes efeitos dinâmicos distintos é a utilização do multiplicador a valor presente desenvolvido por Mountford e Uhlig (2009) e apresentado na seção 5.2.

A Figura 2 (páginas 89 e 90) apresenta as mesmas variáveis, porém agora após um choque no investimento público. Neste caso, o consumo das famílias otimizadoras cai no período corrente, mas aumenta nos períodos seguintes refletindo o aumento de produtividade da economia gerado pelo maior estoque de capital público disponível. O aumento de produtividade oriundo do maior estoque de capital público reduz o custo marginal e, portanto, as expectativas de inflação e a própria inflação corrente. É interessante notar que o efeito do aumento dos investimentos públicos sobre o nível de preços é diferente do efeito de um aumento no consumo do governo, uma vez que o aumento do estoque de capital público gera também efeitos de oferta que acabam por reduzir as pressões inflacionárias.

### 5.2. Multiplicador fiscal

Como é possível ver nas funções impulso resposta apresentada nas Figuras 1 e 2, os dois tipos de choques fiscais têm um efeito inicial positivo, entretanto, o choque passa a ter efeitos negativos no produto ao longo do tempo. Portanto, uma análise de multiplicador fiscal baseado em funções impulso resposta pode gerar conclusões enganosas. Por exemplo, é possível perceber na Figura 1 que o efeito positivo no produto dura menos do que quatro trimestre, enquanto que o efeito negativo do aumento de gastos dura mais de seis trimestres. Entretanto, a magnitude do efeito positivo parece ser maior do que a magnitude do efeito negativo e uma análise precisa do efeito total do choque fiscal deve comparar estes dois momentos. Seguindo Mountford e Uhlig (2009), Leeper, Walker e Yang (2010), Uhlig (2010) e Drautzburg e Uhlig (2011), usaremos o multiplicador a valor presente dos gastos do governo para analisar o impacto intertemporal de políticas fiscais no produto. O multiplicador a valor presente $k$ trimestres

**Figura 1.** Efeito de choque no consumo do governo.

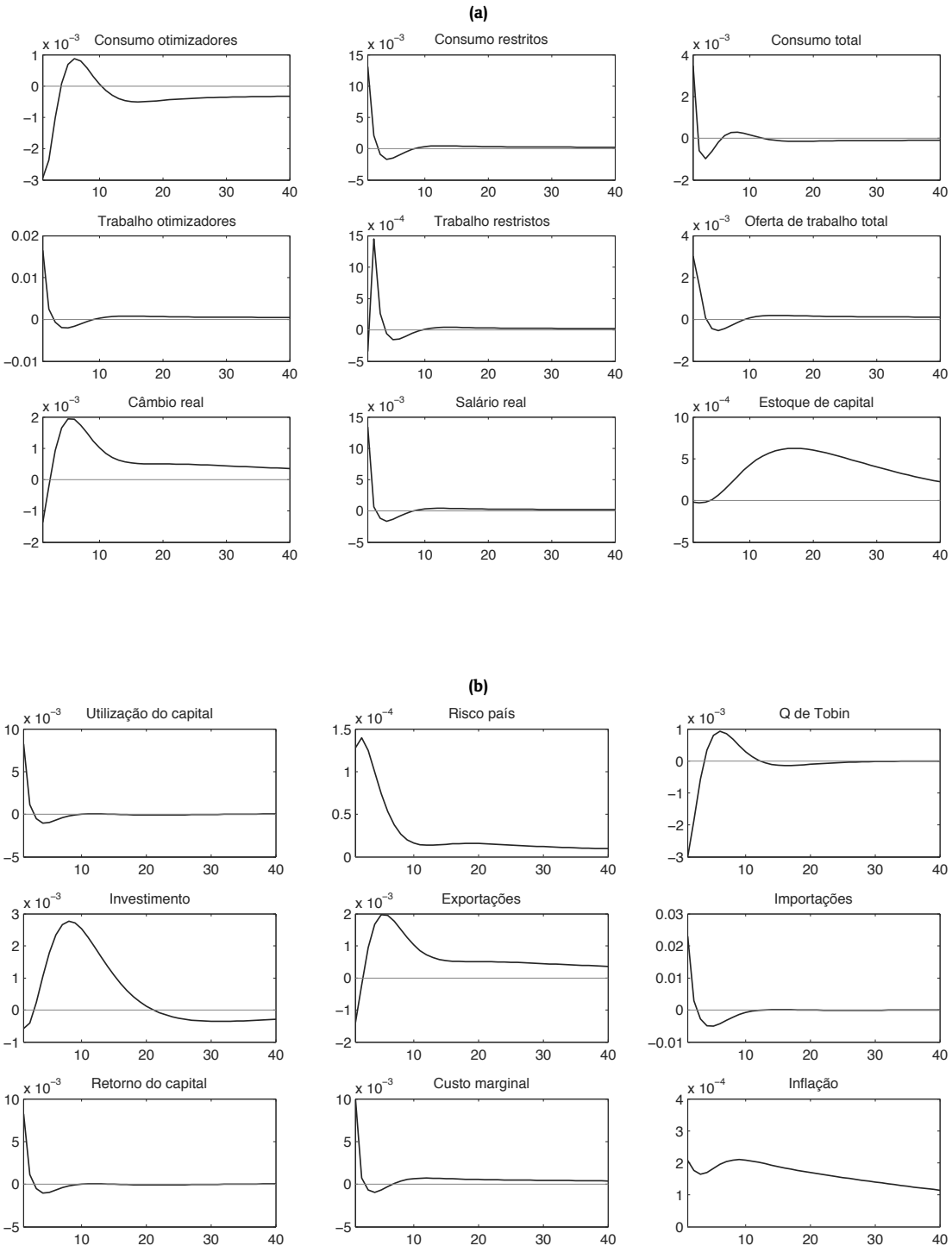


**Figura 1.** (continuação) Efeito de choque no consumo do governo.

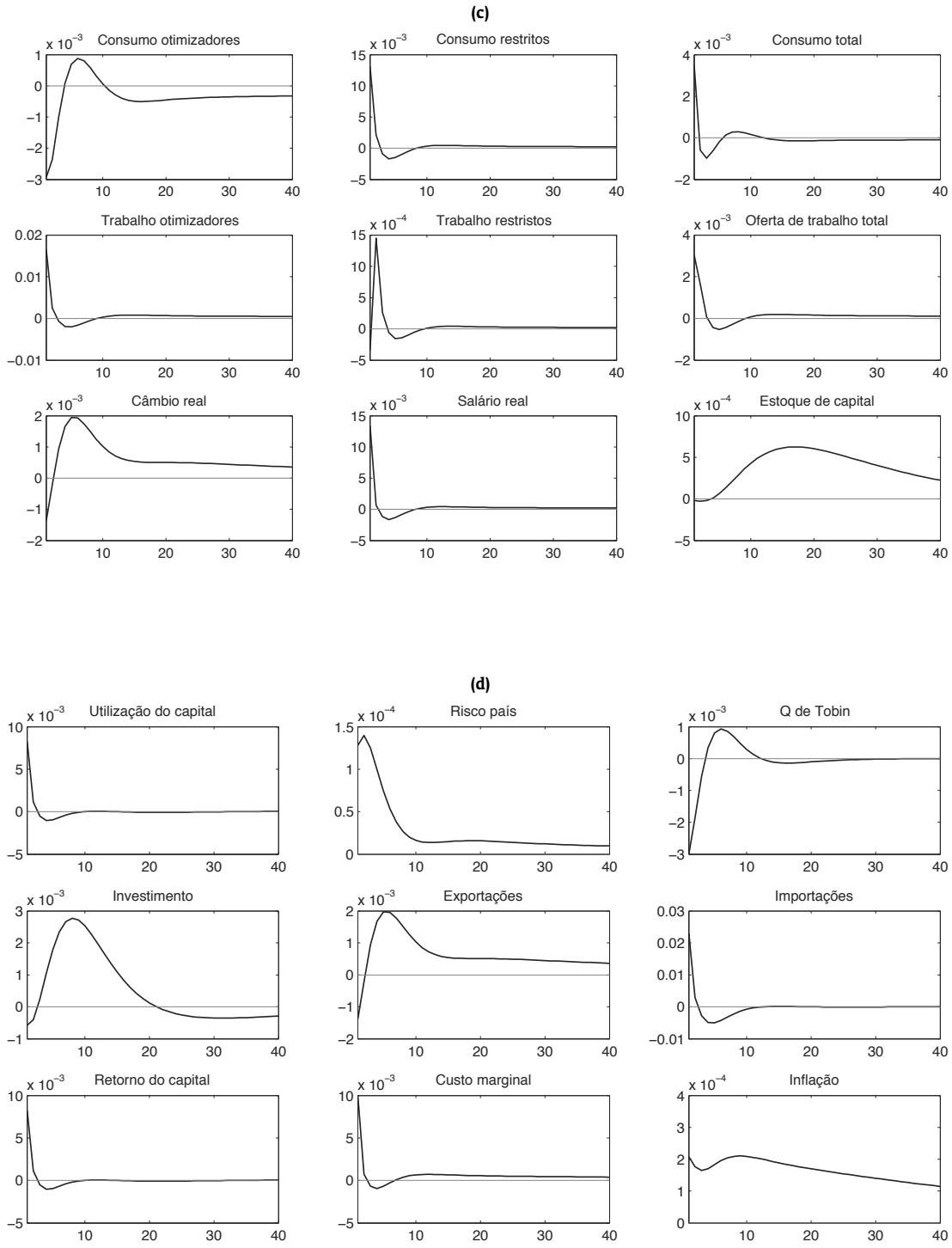


**Figura 2.** Efeito de choque no investimento do governo.

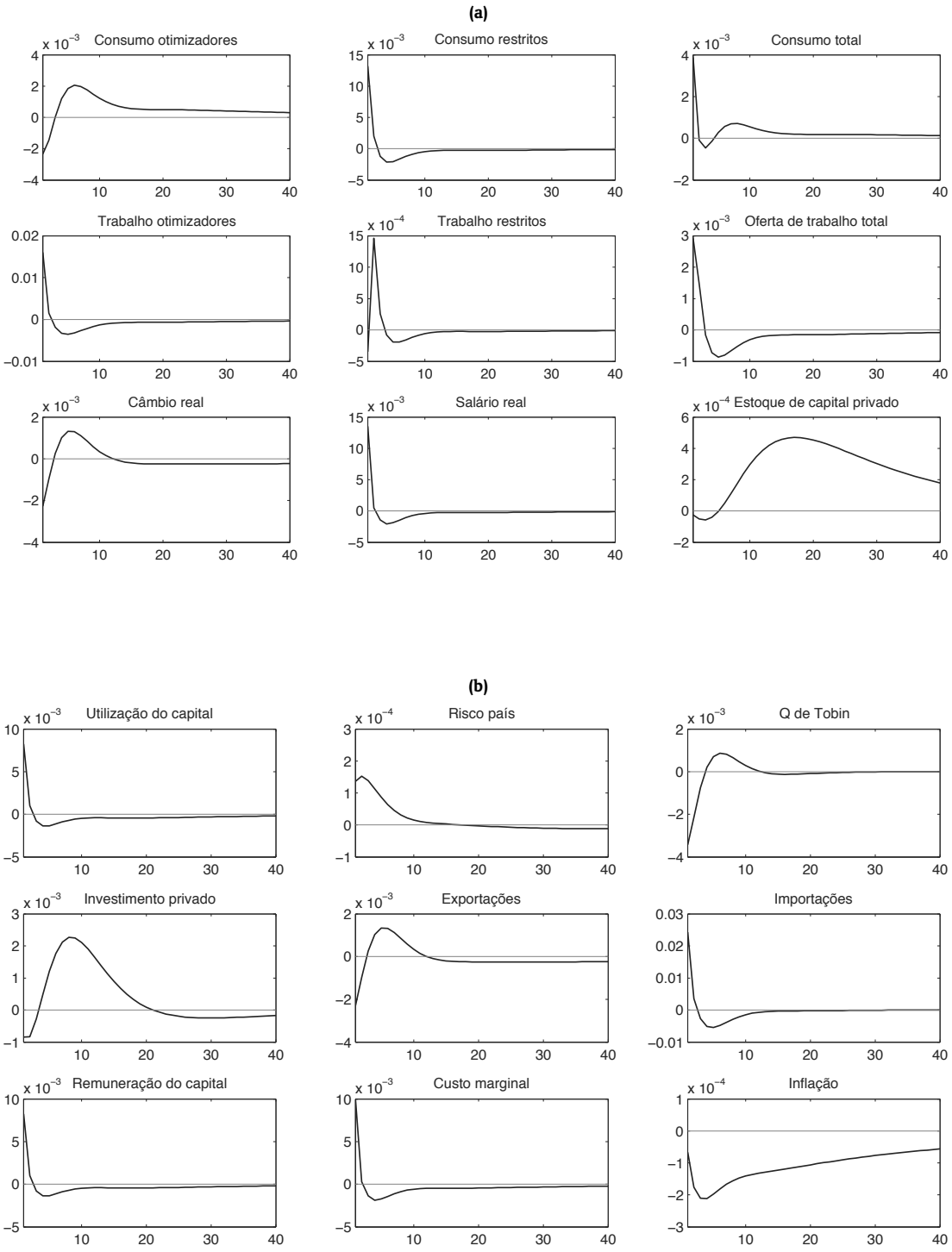
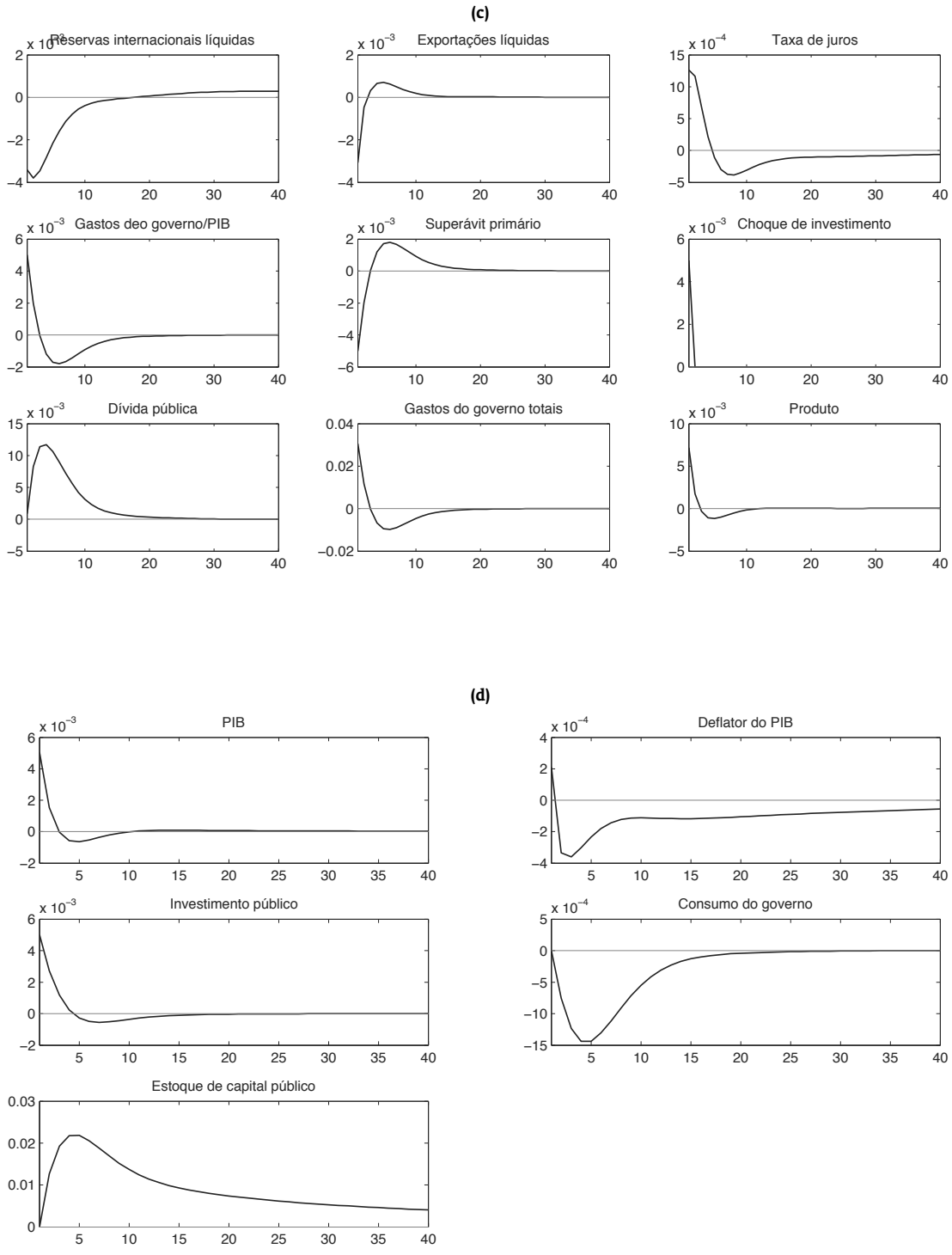


**Figura 2.** (continuação) Efeito de choque no investimento do governo.



após o choque é definido pela seguinte fórmula:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}(1+r)^{-j}\Delta Y_j^{\text{VA}}}{\sum_{j=0}^{k}(1+r)^{-j}\Delta G_j}, \tag{33}$$

onde $r$ é o juros real no estado estacionário. Portanto, no período do choque $k = 0$, o multiplicador a valor presente nos dá o efeito em Reais no produto de um aumento de um Real nos gastos públicos. Porém, quando $k \to \infty$, este multiplicador traz a valor presente todos os efeitos futuros dos gastos do governo sobre o produto, permitindo analisar o efeito total do choque fiscal.

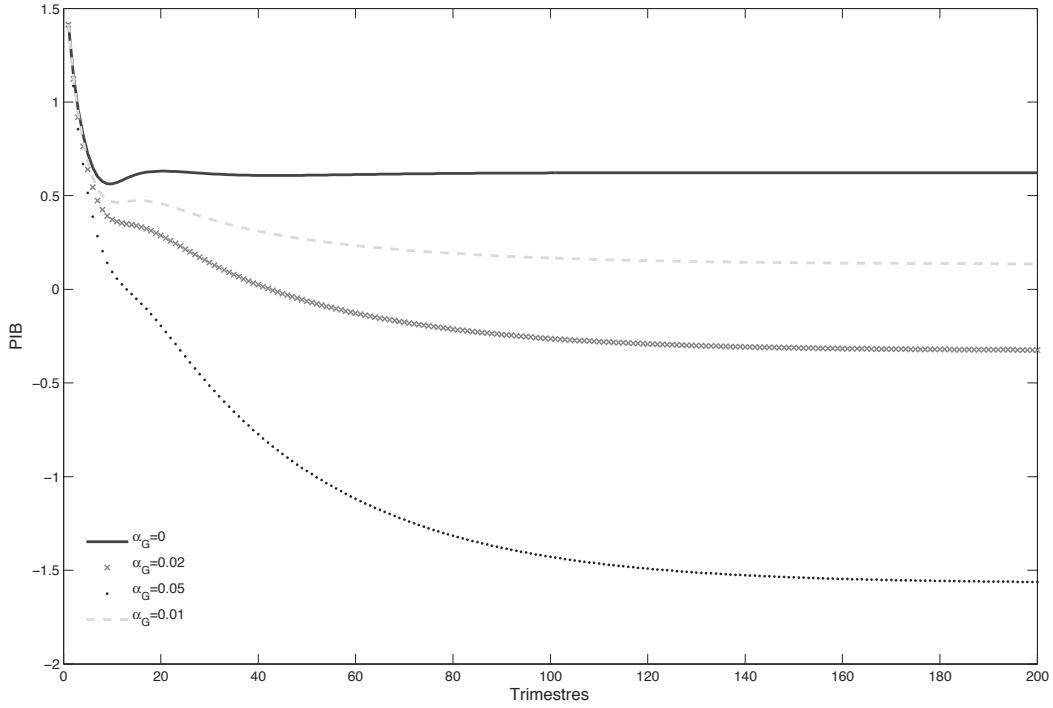
A Figura 2a apresenta o multiplicador a valor presente dos gastos com consumo do governo para diferentes valores da elasticidade produto do estoque de capital público, $\alpha_{\text{G}}$, permitindo uma análise de sensibilidade à calibragem utilizada para este parâmetro. No caso onde $\alpha_{\text{G}} = 0$, o estoque de capital público não gera ganhos de produtividade para as firmas e representa caso análogo a Uhlig (2010), Mountford e Uhlig (2009) e Woodford (2011), entre outros. Neste cenário, o impacto inicial do aumento em R$ 1,00 no consumo do governo gera uma aumento de aproximadamente R$ 1,48 no PIB. Entretanto, este efeito se reduz ao longo do tempo devido à necessidade da autoridade fiscal manter superávits primários e da autoridade monetária manter a inflação na sua meta, o que acaba por incentivar uma recessão no médio prazo. Portanto, após 10 anos do aumento inicial no consumo do governo, quando a economia se aproxima novamente de seu estado estacionário, percebe-se que cada R$ 1,00 gasto com consumo do governo gerou apenas R$ 0,62 de PIB em valor presente. Entretanto, é importante salientar que nem mesmo este resultado final baixo para o gasto do governo invalida seu uso para reagir a movimentos do ciclo econômico, pois, dependendo do momento do ciclo econômico, contra atacar recessões com aumento de gastos do governo ao custo de uma redução na expansão econômica futura pode gerar aumento de bem estar.

Os casos onde $\alpha_{\text{G}} \neq 0$ representam a situação onde o estoque de capital público contribui para a produtividade dos insumos privados e quanto maior for $\alpha_{\text{G}}$, maior será o aumento de produtividade gerado por incrementos no estoque de capital público. Note que, nestas situações, o efeito de longo prazo do aumento do consumo do governo se deteriora. Isso se dá em razão do choque aumentar apenas os gastos com consumo do governo, mas quando a autoridade fiscal reduz seus gastos para recompor a dívida pública aos níveis de equilíbrio, tanto gastos com consumo quanto gastos com investimento são cortados. A redução dos gastos com investimento público necessária para manter a estabilidade da razão dívida/PIB reduzirá o estoque de capital público e, consequentemente, a produtividade das firmas. Esta situação mostra a importância de se considerar os efeitos macroeconômicos da consolidação, uma vez que a redução de gastos com investimento tem impacto mais severo do que a redução de gastos com consumo. A literatura sobre efeitos da consolidação fiscal em modelos DSGE ainda é incipiente, mas os efeitos de curto e longo prazo da obtenção de superávits primários através de diferentes instrumentos de política fiscal são analisados em Coenen, Mohr e Straub (2008) e em Schwarzmüller e Wolters (2014).

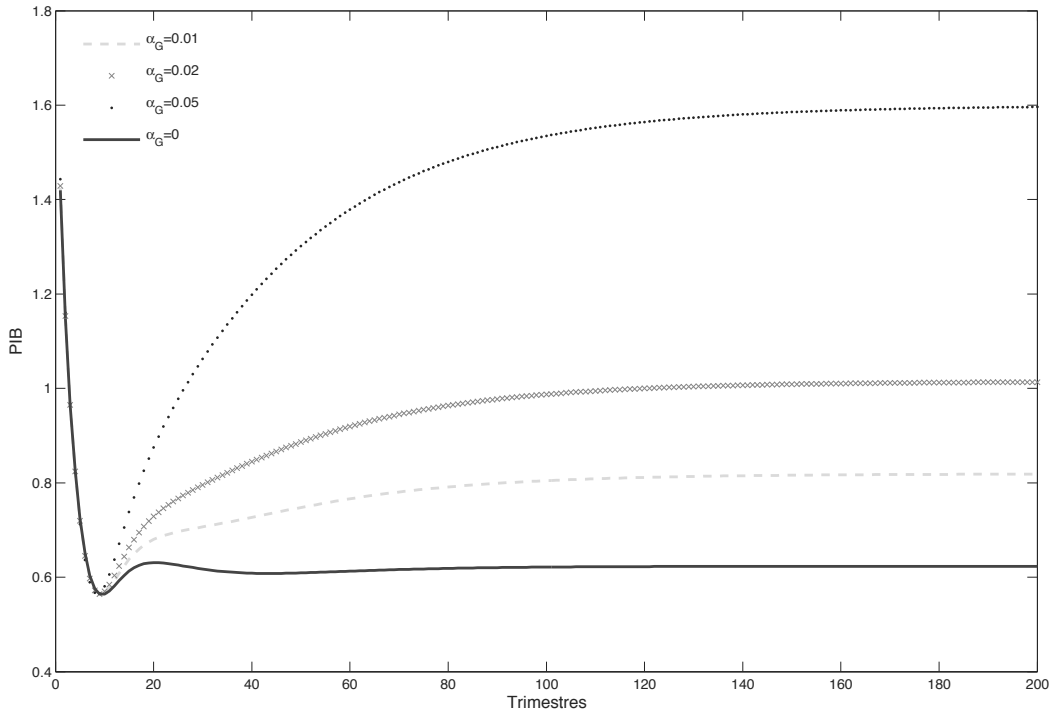
A Figura 2b mostra o multiplicador a valor presente dos investimentos do governo para diferentes valores de $\alpha_{\text{G}}$. No caso onde o estoque de capital público não tem efeito na produtividade dos fatores de produção privados, investimento e consumo do governo geram os mesmos efeitos no produto ao longo do tempo. Porém, a medida que a elasticidade produto do estoque de capital público aumenta, os efeitos de longo prazo do aumento de produtividade refletem no PIB, evidenciando os efeitos de oferta gerados por um maior estoque de capital público disponível às empresas e a consequente expansão da capacidade produtiva. Na parametrização base, $\alpha_{\text{G}} = 0{,}02$, é possível perceber que, no longo prazo, gastos com infraestrutura acabam se pagando, uma vez que o multiplicador fiscal de longo prazo supera 1 o que esta de acordo com as conclusões obtidas em Ferreira e do Nascimento (2005). Apesar disso, esta situação não evita a recessão no médio prazo causada pela necessidade de obtenção de superávits para controlar o estoque da dívida e de aumento dos juros para conter a inflação. Ferreira e do Nascimento (2005) argumenta justamente que a situação fiscal antes do choque pode impedir investimentos em infraestrutura mesmo no caso onde estes podem ser vistos como auto-financiáveis no longo prazo, uma

**Figura 3.** Multiplicador fiscal a valor presente para diferentes $\alpha_G$.

**(a)** Multiplicador do consumo do governo.




**(b)** Multiplicador do investimento do governo.



vez que as condições para a solvência do país podem ficar comprometidas no curto e médio prazo, antes que os efeitos de longo prazo de investimentos em infraestrutura sejam sentidos.

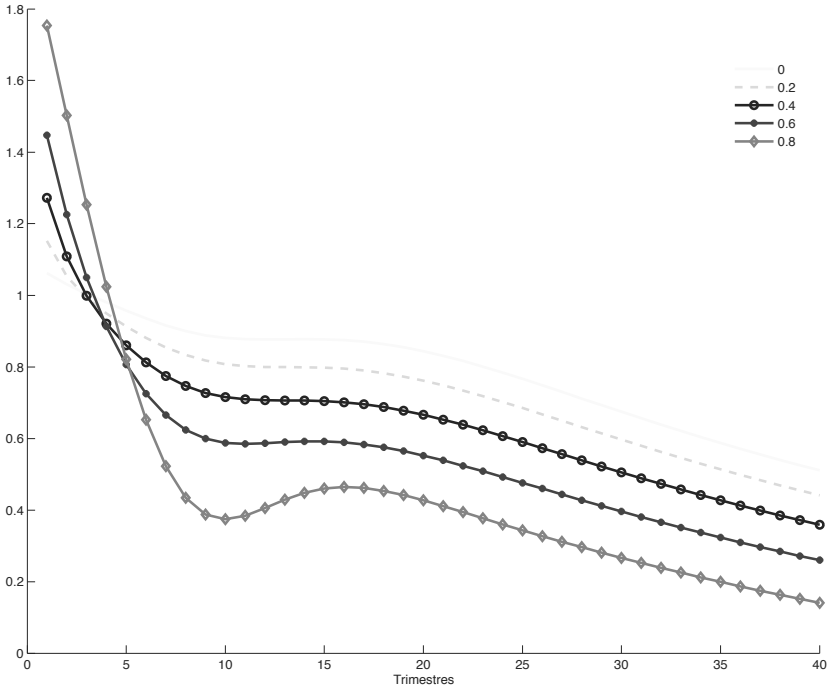
No caso onde $\alpha_{\mathrm{G}} = 0{,}05$, devido aos ganhos de produtividade associados a investimentos públicos, é possível que o efeito de longo prazo do aumento no estoque de capital público supere o efeito de curto prazo, mesmo levando-se em consideração a necessidade de acúmulo de superávits após o choque inicial para manter a razão dívida pública constante. Ou seja, os ganhos de longo prazo de um maior estoque de capital público podem ser suficientes para compensar totalmente os períodos de baixo crescimento gerados pelo aperto fiscal necessário para arcar com os gastos em investimentos. Apesar da parametrização base utilizar $\alpha_{\mathrm{G}} = 0{,}02$, é importante salientar que estudos brasileiros e internacionais como Bom e Ligthart (2013), Ferreira e Malliagros (1998) e Ferreira e do Nascimento (2005) mostram que uma elasticidade produto do estoque de capital público próxima de 0,05 não é implausível.

Uma das grandes vantagens de modelos DSGE em relação a modelos VAR é a possibilidade de se analisar situações hipotéticas não descritas no histórico dos dados. A interação entre política monetária e política fiscal é de fundamental importância na determinação dos efeitos de curto e longo prazo dos multiplicadores do consumo e investimento público. Mais especificamente, uma política monetária acomodativa tende a ampliar os efeitos de curto prazo dos multiplicadores ao custo de uma alta inflacionária. Portanto, é interessante analisar qual seria o efeito de um BACEN que, apesar de manter uma meta de inflação, evite movimentos bruscos na taxa de juros em relação a um BACEN que não suaviza as mudanças na taxa de juros. Para isso, pode-se analisar os multiplicadores fiscais utilizando diferentes graus de suavização da política monetária por parte do BACEN. A Figura 4 mostra multiplicadores do consumo e do investimento público para diferentes regras de política monetária. Mais especificamente, o parâmetro de suavização $\gamma_r$ assume valores entre 0 e 0,8, onde $\gamma_r = 0$ caracteriza a situação onde o BACEN não suaviza a política monetária e $\gamma_r = 0{,}8$ caracteriza a situação onde o BACEN faz mudanças graduais no instrumento de política monetária ao longo do tempo até atingir a taxa de juros desejada. É possível perceber que, no caso de política monetária brusca, o efeito de curto prazo de ambos multiplicadores fiscais é reduzido. Entretanto, o efeito de longo prazo destes multiplicadores é maior. Uma política monetária suave, por outro lado, permite um maior nível de inflação no curto prazo, não reagindo prontamente ao aumento de demanda gerado pelo choque de gastos. Entretanto, esta leniência com a inflação no curto prazo acaba por tornar mais difícil a tarefa de longo prazo de trazer a inflação de volta para a meta, exigindo uma recessão mais severa para recolocar a inflação no patamar desejado. O custo da recessão mais severa no futuro faz com que o efeito de longo prazo do multiplicador fiscal seja reduzido, afetando o resultado final do multiplicador fiscal tanto no caso de gastos com consumo, quanto no caso de gastos com investimentos.

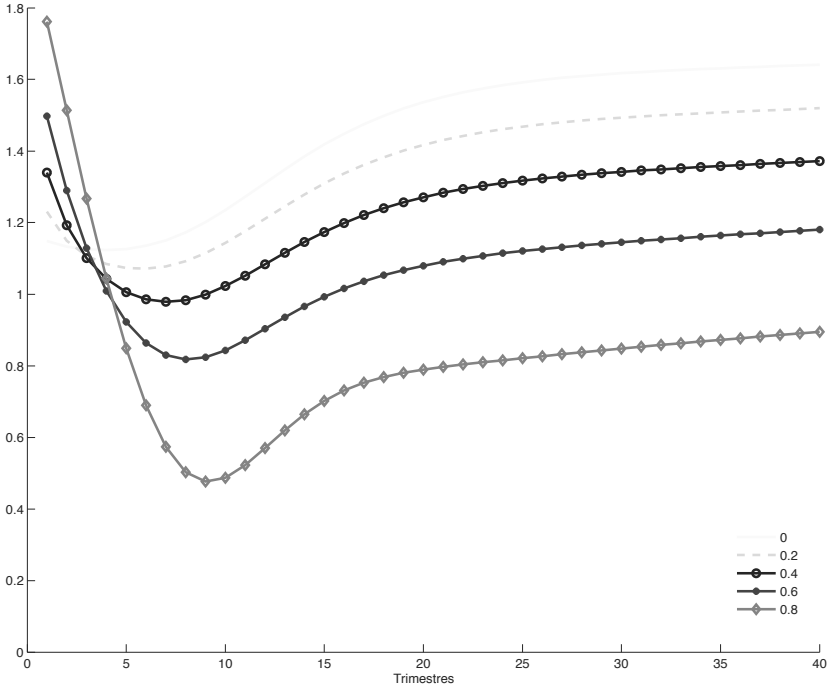
Outro exercício interessante é analisar os efeitos de políticas fiscais para situações onde exista uma maior proporção de agentes restritos ao mercado financeiro, o que impede a alocação intertemporal de recursos, evitando comportamento Ricardiano por parte dos consumidores. Se os consumidores aumentarem sua poupaça após aumento nos gastos do governo de forma a se prevenirem em relação a futuros aumentos na carga tributária, o efeito da política fiscal será drasticamente reduzido ou até mesmo eliminado. Entretanto, Campbell e Mankiw (1989) entre outros argumentam que essa hipótese de equivalência Ricardiana tem fraco suporte empírico e argumentam que os dados são melhor descritos por um modelo onde parte dos consumidores adotam comportamento Ricardiano, enquanto outra parte não realiza substituição intertemporal de recursos. A Figura 5 (página 96) mostra multiplicadores fiscais para diferentes proporções de consumidores restritos na população e deixa claro que o resultado de curto e também de longo prazo de gastos do governo são ampliados quando uma maior proporção da população age de forma não-Ricardiana. Além disso, o efeito de longo prazo no multiplicador com alta proporção de consumidores restritos é ampliado no caso de gastos com investimento público, uma vez que a recessão futura necessária para estabilizar o estoque de dívida, bem como a taxa de inflação, será mais branda devido aos efeitos de produtividade associados aos investimentos públicos, fazendo com que os consumidores não-Ricardianos não precisem reduzir muito seu consumo em momentos de baixo crescimento da renda. Portanto, a redução futura no consumo dos agentes restritos será mais branda do

**Figura 4.** Multiplicador fiscal para diferentes níveis de suavização da política monetária.

**(a)** Multiplicador do consumo do governo.




**(b)** Multiplicador do investimento do governo.



que no caso onde o choque fiscal for feito através de gastos com consumo, não gerando nenhum efeito de oferta adicional.

### 5.3. Possíveis extensões

A análise e os resultados aqui apresentados levantam alguns pontos que podem ser estudados com maior profundidade utilizando pequenas variações do modelo base. A análise dos multiplicadores fiscais deixou claro que aumento de gastos em um período terão que vir acompanhados de algum tipo de política fiscal contracionista no futuro de forma a manter a estabilidade da dívida pública e a solvência do país. Neste contexto, ficou evidente a desvantagem da redução do investimento público em relação à redução do consumo do governo como forma de gerar superávit primário. Apesar do foco deste trabalho ter sido em políticas fiscais expansionistas, uma análise de políticas fiscais contracionistas e das diferentes regras de política que permitiriam a obtenção do objetivo de estabilização da dívida pública e seus efeitos sobre inflação e produto também seria importante. Uma análise nessa direção desenvolvida para a economia americana, e com a intenção de entender as consequências do ajuste fiscal necessário após os gastos acarretados pelo *American Recovery and Reinvest Act*, é apresentada em Schwarzmüller e Wolters (2014).

Adicionalmente, políticas fiscais contracionista ou expansionista podem ser desenvolvidas também através do aumento da carga tributária utilizando-se diferentes fontes de impostos. Mais especificamente, seria interessante comparar o efeito de políticas fiscais baseadas em aumento de gastos, sejam eles em consumo ou em investimento, com reduções tributárias advindas de diferentes fontes. Para isso, é necessário incorporar uma estrutura de tributos distorcivos no modelo DSGE desenvolvido. Uhlig (2010) aborda esta questão em um modelo DSGE de pequena escala sem investimento público e conclui que a desoneração tributária tem um maior efeito de longo prazo no produto. A inclusão de uma estrutura tributária no modelo permitiria também analisar a possibilidade de consolidação fiscal após aumento de gastos via aumento de tributos e não somente através de cortes no orçamento do governo, aumentando as possibilidades da autoridade fiscal para atingir o objetivo de estabilização da dívida pública e a meta de superávit primário.

A existência de diversas maneiras de se executar a política fiscal leva à pergunta sobre qual a melhor maneira de implementar políticas fiscais. Para tentar responder tal pergunta, pode ser interessante investigar as bases para o desenvolvimento de uma regra de política fiscal nos moldes das regras de política monetária desenvolvidas, por exemplo, por Taylor (1993). Dado que o objetivo da autoridade fiscal é, além de estabilizar a dívida público, reduzir as oscilações do ciclo econômico, quais seriam os instrumentos de política fiscal mais eficientes para atingir tal objetivo? Estudos sobre política fiscal ótima em modelos DSGE podem ser encontrados pelo menos a partir de Chari, Christiano e Kehoe (1994), porém, não há consenso a respeito dos instrumentos ótimos de política fiscal, principalmente em modelos com rigidez nominal e rigidez real.

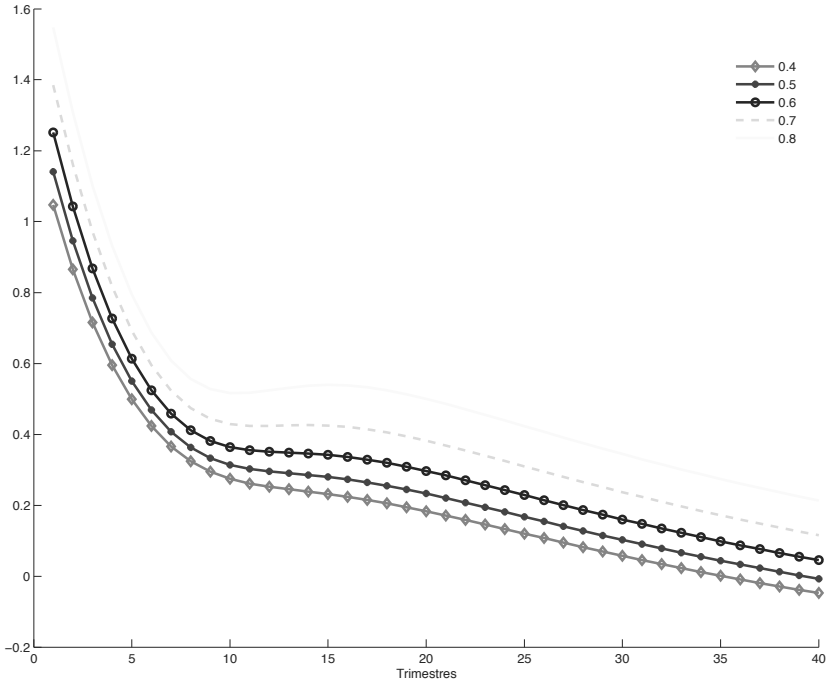
## 6. CONCLUSÃO

Um modelo dinâmico e estocástico de equilíbrio geral foi desenvolvido com o intuito de entender e analisar os efeitos de políticas fiscais na economia brasileira. O modelo incorpora especificidades da economia brasileira como por exemplo, famílias de baixa renda que enfrentam restrição de crédito, um banco central que persegue metas de inflação, autoridade fiscal com meta de superávit primário, produção dependente de insumos importados, investidores externos avessos ao risco, risco-país dependente das reservas internacionais líquidas, entre outras.

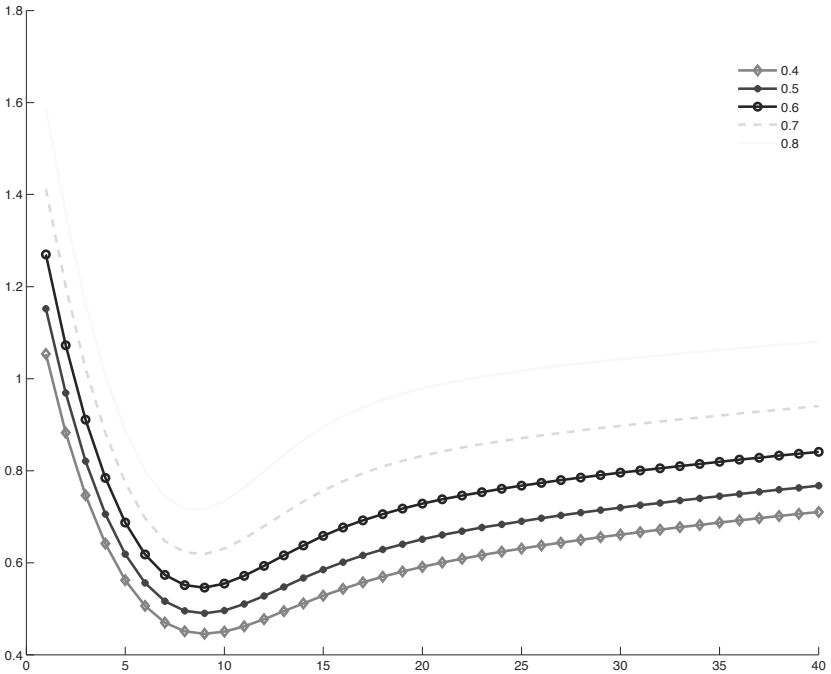
Ademais, o estoque de capital público é incluído como um fator de produção, permitindo analisar os impactos de investimentos públicos sobre a produtividade marginal dos insumos privados e sobre o PIB. Dessa forma, o modelo permite diferenciar os efeitos de gastos com consumo dos efeitos de gastos com investimento, possibilitando uma melhor avaliação das possibilidades da política fiscal. É possível

**Figura 5.** Multiplicador fiscal para diferentes porcentagens de consumidores restritos.

**(a)** Multiplicador do consumo do governo.




**(b)** Multiplicador do investimento do governo.



analisar não somente os diferentes efeitos de gastos com consumo e com investimento, mas também os efeitos de um ajuste fiscal através de consumo ou de investimento. Mais especificamente, cortes de gastos que afetem os investimentos públicos terão efeitos de longo prazo mais custosos para economia, indicando que cortes em gastos com consumo devem ser privilegiados em momentos de política fiscal contracionista.

Funções impulso resposta para choques de consumo e de investimento públicos são usadas para explicitarem as diferenças dinâmicas entre os dois tipos de gastos. É possível perceber que, apesar do efeito inicial positivo, em ambos os casos o choque de gastos acaba por gerar recessões e queda no produto no médio prazo, o que torna o efeito final dos gastos públicos ambíguo. Para tentar capturar o efeito total destes choques de política fiscal, os efeitos de médio e longo prazo são trazidos a valor presente utilizando o multiplicador a valor presente.

O multiplicador a valor presente do efeito do consumo públicos sobre o PIB mostra que, apesar do impacto inicial positivo, o efeito de longo prazo deste multiplicador é menor do que um em todos os cenários analisados, sendo que em algumas parametrizações obtidas este efeito pode ser negativo. O efeito negativo de longo prazo se dá pela necessidade de ajuste orçamentário após o aumento de gastos gerado pelo choque fiscal, o que implica em reduções futuras do consumo e do investimento público. Este último acaba por reduzir a capacidade produtiva da economia, afetando negativamente o efeito final do choque de consumo do governo. Por outro lado, gastos com investimento possuem não só um impacto inicial positivo, mas também um efeito de longo prazo superior a um para $\alpha_G \geq 0{,}02$. Um maior estoque de capital público gera ganhos de produtividade privados, ampliando os investimentos e a capacidade produtiva da economia apontando para as vantagens de uma política fiscal baseada em investimento em infraestrutura em detrimento de gastos em consumo.

Alem disso, o efeito da interação entre política monetária e política fiscal é analisado. Uma política monetária com respostas mais suaves na taxa de juros acaba por gera maiores multiplicadores fiscais no curto prazo, uma vez que a autoridade monetária não reage fortemente às pressões de demanda causadas pela política fiscal. Entretanto, o efeito de longo prazo neste cenário é reduzido, pois a recessão que se fará necessária no futuro para trazer a inflação novamente para a meta será mais severa. Por outro lado, uma política monetária com ajustes bruscos na taxa de juros após choques inflacionários acaba por diminuir o efeito de curto prazo dos multiplicadores fiscais. Porém, o efeito de longo prazo deste tipo de política gera resultados superiores, uma vez que o BACEN não permite que a inflação se distancie da meta, reduzindo as oscilações de preço e produto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J. & Villani, M. (2007). RAMSES: a new general equilibrium model for monetary policy analysis. *Sveriges Riksbank Economic Review*, *2*, 5–40.

An, S., & Schorfheide, F. (2007). Bayesian analysis of DSGE models. *Econometric reviews*, *26*(2–4), 113–172. doi: 10.1080/07474930701220071

Aschauer, D. A. (1989). Is public expenditure productive? *Journal of Monetary Economics*, *23*(2), 177–200.

Barro, R. (2009, Jan. 22). Government spending is no free lunch. *The Wall Street Journal*. Disponível em: http://www.wsj.com/articles/SB123258618204604599

Baxter, M., & King, R. G. (1993). Fiscal policy in general equilibrium. *American Economic Review*, *[15pt]83*(3), 315–334.

Blanchard, O., & Perotti, R. (2002). An empirical characterization of the dynamic effects of changes in government spending and taxes on output. *The Quarterly Journal of Economics*, *117*(4), 1329-1368. doi: 10.1162/0033553023209

Bom, P. R. D., & Ligthart, J. E. (2013). What have we learned from three decades of research on the productivity of public capital? *Journal of Economic Surveys*, *28*(5), 889–916. doi: 10.1111/joes.12037

Brooks, S. P., & Gelman, A. (1998). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, *7*(4), 434–455. doi: 10.1080/10618600.1998.10474787

Campbell, J. Y., & Mankiw, N. G. (1989). Consumption, income and interest rates: Reinterpreting the time series evidence. In O. J. Blanchard & S. Fischer (Eds.), *NBER macroeconomics annual 1989, volume 4* (pp. 185–246). MIT Press. Disponível em: http://www.nber.org/chapters/c10965

de Castro, M. R., Gouvea, S. N., Minella, A., dos Santos, R. C. & Souza-Sobrinho, N. F. (2008). SAMBA: Stochastic analytical model with a bayesian approach. In *Annals of the 2008 Latin American meeting of the Econometric Society.*

de Castro, M. R., Gouvea, S. N., Minella, A., dos Santos, R. C. & Souza-Sobrinho, N. F. (2011, April). *SAMBA: Stochastic analytical model with a bayesian approach* (Working Papers Series Nº 239). Banco Central do Brasil.

Cavalcanti, M. A. F. H., & Silva, N. L. C. (2010). Dívida pública, política fiscal e nível de atividade: uma abordagem VAR para o Brasil no período 1995-2008. *Economia Aplicada*, *14*(4), 391-418.

Chari, V. V., Christiano, L. J. & Kehoe, P. J. (1994). Optimal fiscal policy in a business cycle model. *Journal of Political Economy*, *102*(4), 617–652.

Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis–Hastings algorithm. *The American Statistician*, *49*(4), 327–335.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M. & Evans, C. L. (2005, Feb.). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy*, *113*(1), 1-45.

Coenen, G., Mohr, M. & Straub, R. (2008). Fiscal consolidation in the euro area: Long-run benefits and short-run costs. *Economic Modelling*, *25*(5), 912–932. doi: 10.1016/j.econmod.2007.11.011

Cogan, J. F., Cwik, T., Taylor, J. B. & Wieland, V. (2010, Mar.). New Keynesian versus old Keynesian government spending multipliers. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *34*(3), 281-295. doi: 10.1016/j.jedc.2010.01.010

Drautzburg, T., & Uhlig, H. (2011, June). *Fiscal stimulus and distortionary taxation* (NBER Working Paper Nº 17111). National Bureau of Economic Research. doi: 0.3386/w17111

Favero, C., & Giavazzi, F. (2007, Jan.). *Debt and the effects of fiscal policy* (NBER Working Paper Nº 12822). National Bureau of Economic Research, Inc. doi: 10.3386/w12822

Ferreira, P. C., & Malliagros, T. G. (1998). Impactos produtivos da infra-estrutura no Brasil—1950/95. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *28*(2), 315–338. Disponível em: http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/708

Ferreira, P. C., & do Nascimento, L. G. (2005). *Welfare and growth effects of alternative fiscal rules for infrastructure investment in Brazil* (EPGE – Ensaios Econômicos Nº 604). Fundação Getulio Vargas (EPGE-FGV). Disponível em: http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/422

Galí, J., & Gertler, M. (1999). Inflation dynamics: A structural econometric analysis. *Journal of Monetary Economics*, *44*(2), 195–222.

Galí, J., & Monacelli, T. (2005). Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. *The Review of Economic Studies*, *72*(3), 707–734. doi: 10.1111/j.1467-937X.2005.0034

Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997, Feb.). Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, *29*(1), 1–16. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2953682

Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1982, Nov.). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, *50*(6), 1345–70. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/1913386

Leeper, E. M., & Sims, C. A. (1994). Toward a modern macroeconomic model usable for policy analysis. In S. Fischer & J. Rotemberg (Eds.), *NBER macroeconomics annual 1994* (Vol. 9, pp. 81–140). MIT Press. doi: 10.3386/w4761

Leeper, E. M., Walker, T. B. & Yang, S.-C. S. (2010). Government investment and fiscal stimulus. *Journal of Monetary Economics*, *57*(8), 1000–1012. doi: doi:10.1016/j.jmoneco.2010.09.002

Lucas, R. E. (1976). Econometric policy evaluation: A critique. In *Carnegie–Rochester conference series on public policy* (Vol. 1, pp. 19–46). doi: 10.1016/S0167-2231(76)80003-6

McGrattan, E. R. (1994). The macroeconomic effects of distortionary taxation. *Journal of Monetary Economics*, *33*(3), 573–601. doi: 10.1016/0304-3932(94)90044-2

Medina, J. P., & Soto, C. (2007, Dec.). *The Chilean business cycles through the lens of a stochastic general equilibrium model* (Working Papers Nº 457). Central Bank of Chile. Disponível em: http://www.bcentral.cl/estudios/documentos-trabajo/pdf/dtbc457.pdf

Mendonça, M. J., Medrano, L. A. & Sachsida, A. (2009). *Avaliando os efeitos da política fiscal no Brasil: Resultados de um procedimento de identificação agnóstica.* (Texto para Discussão Nº 1377). Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). Disponível em: http://www.ipea.gov.br/agencia/images/stories/PDFs/TDs/td_1377.pdf

Mountford, A., & Uhlig, H. (2009). What are the effects of fiscal policy shocks? *Journal of Applied Econometrics*, *24*(6), 960–992. doi: 10.1002/jae.1079

Murchison, S., & Rennison, A. (2006). *ToTEM: the Bank of Canada's new Quarterly Projection Model* (Technical Report Nº 97). Ottawa, Ontario, Canada: Bank of Canada.

Peres, M. A. F., & Ellery Jr, R. G. (2009). Efeitos dinâmicos dos choques fiscais do governo central no PIB do Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *39*(2), 159–206. Disponível em: http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/1147

Reis, E. J., Cavalcanti, M. A. F. H., de Castro, A. S., Rossi Jr, J. L., de Araújo, E. R. & Hernandez, B. M. (1999). *Model for projections and simulations of the Brazilian economy* (Texto para Discussão Nº 619). Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA).

Roberts, G. O., Gelman, A., Gilks, W. R. et al. (1997). Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms. *The Annals of Applied Probability*, *7*(1), 110–120. doi: 10.1214/aoap/1034625254

Romer, C., & Bernstein, J. (2009). *The job impact of the American Recovery and Reinvestment Plan* (Relatório técnico). American Coucil of Economic Advisers.

Schwarzmüller, T., & Wolters, M. H. (2014). *The short- and long-run effects of fiscal consolidation in dynamic general equilibrium.* (Annals). 20th International Conference on Computing in Economics and Finance.

Smets, F., & Wouters, R. (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association*, *1*(5), 1123–1175. doi: 10.1162/154247603770383415

Smets, F., & Wouters, R. (2007). Shocks and frictions in US business cycles: A bayesian DSGE approach. *American Economic Review*, *97*(3), 586–606. doi: 10.1257/aer.97.3.586

Stähler, N., & Thomas, C. (2012). FiMod: A DSGE model for fiscal policy simulations. *Economic Modelling*, *29*(2), 239–261. doi: 10.1016/j.econmod.2011.10.001

Taylor, J. B. (1993). Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie–Rochester Conference Series on Public Policy*, *39*(1), 195–214. doi: 10.1016/0167-2231(93)90009-L

Uhlig, H. (2010). Some fiscal calculus. *American Economic Review*, *100*(2), 30–34. doi: 10.1257/aer.100.2.30

Woodford, M. (2011). Simple analytics of the government expenditure multiplier. *American Economic Journal: Macroeconomics*, *3*(1), 1–35. doi: 10.1257/mac.3.1.1

## A. APÊNDICE

### Detalhes da estimação Bayesiana

O primeiro passo da estimação Bayesiana através do algoritmo Metropolis-Hastings passeio aleatório é a determinação da distribuição proposta que irá iniciar a cadeia de Markov. Os momentos da distribuição proposta inicial do algoritmo Metropolis-Hastings passeio aleatório descrito na seção 4 foram selecionados de forma a aproximar a moda e a curvatura neste ponto do núcleo da distribuição a posteriori. Estas quantidades foram obtidas através da maximização númerica do núcleo da distribuição a posteriori, realizada com o auxílio de um algoritmo de quase-Newton do tipo BFGS desenvolvido para a estimação por máxima verossimilhança de modelos DSGE por Leeper e Sims (1994). A vantagem deste algoritmo é a habilidade de enfrentar variações bruscas e alguns tipos de descontinuidade na função objetivo.

Com a distribuição proposta inicial em mãos, é possível amostrar realizações do vetor de parâmetros e iterar o algoritmos MCMC Metropolis-Hastings passeio aleatório para gerar realizações da distribuição a posteriori mesmo que esta última não tenha fórmula fechada. Estas realiações podem então ser utilizadas para aproximar os momentos da distribuição a posteriori desconhecida. Entretanto, isto não acontece antes da convergência da cadeia de Markov para a distribuição estacionária desta, o que torna fundamental a conferência da convergência. Brooks e Gelman (1998) desenvolveram um método para conferir a convergência de cadeias de Markov baseado na geração de mais de uma sequência simultaneamente. Como todas as sequências devem convergir para a mesma distribuição (a distribuição a posteriori de interesse), as diferenças entre os momentos empíricos de mesma ordem das diferentes cadeias devem se aproximar de zero, uma vez que ambas convergem para o mesmo alvo. Além disso, a convergência implica que os momentos empíricos devem se estabilizar. Baseando-se nestas idéias, Brooks e Gelman (1998) propõem comparar momentos empíricos de uma das sequências com os momentos empíricos das outras sequências, pois após a convergência estes momentos devem ser iguais. Estas medidas podem ser calculadas utilizando-se todas as realizações de cada um dos parâmetros (critério univariado), ou utilizando o núcleo da distribuição a posteriori para agregar as realizações de todos os parâmetros em apenas um critério multivariado.

Para conferir a convergência da cadeia de Markov utilizada para amostrar da distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo DSGE acima, comparou-se os primeiros três momentos de duas cadeias de Markov iniciadas em pontos diferentes e utilizando diferente sequência de números aleatórios. A Figura A-1 apresenta a variação dos momentos das duas sequências utilizando o critério multivariado, ou seja, agregando a informação de convergência de todos os parâmetros e indica a convergência para a mesma distribuição alvo.

Entretanto, é possível que a cadeia de Markov tenha atingido convergência na dimensão de alguns parâmetros e não na dimensão de outros parâmetros. O critério univariado permite a análise de convergência de forma individual, evidenciando parâmetros para os quais a cadeia exibe maior persistência, dificultando a estimação. A Figura A-2 apresenta os critérios de convergência univariados, para o intervalo de média, o segundo momento e o terceiro momento das distribuições empíricas marginais dos parâmetros.

### Estimativas

O modelo possui 73 parâmetros, dos quais 32 são calibrados, e 41 são estimados. A Tabela A-2 apresenta os parâmetros do modelo, suas distribuições a priori e a moda da distribuição a posteriori. A Figura A-3 permite uma visualização destas distribuições. A Tabela A-1 mostra as relações de estado estacionário calibradas para permitir que o modelo gere séries com médias incondicionais iguais às dos dados utilizados na estimação.

**Figura A-1.** Diagnóstico Multivariado de Convergência

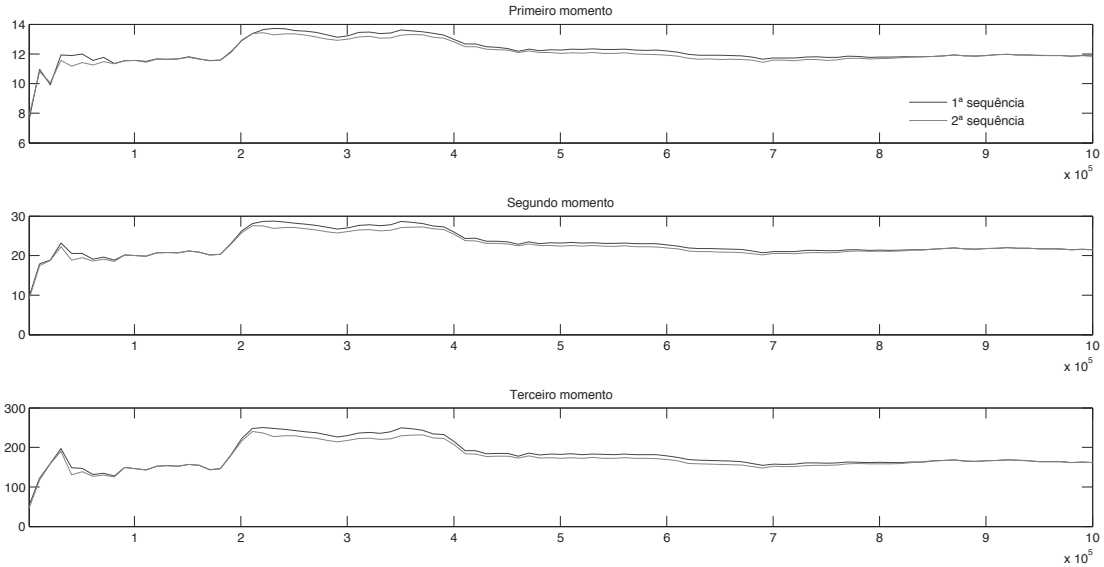



**Tabela A-1.** Relações de Estado Estacionário.

| Parâmetro | Distribuição a Priori | | | Moda a Posteriori | Descrição |
|---|---|---|---|---|---|
| | Nome | Média | D.P. | | |
| $s_c$ | – | 0,555 | 0,000 | 0,989 | Participação do consumo no produto |
| $s_i$ | – | 0,147 | 0,000 | 0,989 | Participação do investiento no produto |
| $s_g$ | – | 0,176 | 0,000 | 0,989 | Participação do governo no produto |
| $s_m$ | – | 0,109 | 0,000 | 0,989 | Participação das importações no produto |
| $s_x$ | – | 0,121 | 0,000 | 0,989 | Participação das exportações no produto |
| $s_{va}$ | – | 0,891 | 0,000 | 0,989 | Participação do PIB no produto total |
| $s_d$ | – | 0,891 | 0,000 | 0,989 | Participação de insumos domésticos no produto |
| $\overline{\omega}_c$ | – | 0,400 | 0,000 | 0,989 | Part. consumidores restritos no consumo total. |
| $\overline{\omega}_n$ | – | 0,800 | 0,000 | 0,989 | Part. consumidores restritos no trabalho. |
| $I/K$ | – | 0,030 | 0,000 | 0,989 | Razão investimento-capital |
| $\Phi^*$ | – | 1,016 | 0,000 | 0,989 | Prêmio de risco |
| $R^*$ | – | 1,009 | 0,000 | 0,989 | Taxa de juros internacional |
| $B^{y^*}$ | – | 0,033 | 0,000 | 0,989 | Reservas em proporção do PIB. |
| $R$ | – | 1,042 | 0,000 | 0,989 | Taxa de juros nominal |
| $B^y$ | – | 1,028 | 0,000 | 0,989 | Relação dívida PIB. |

**Tabela A-2.** Parâmetros.

| Parâmetro | Distribuição a Priori | | | Moda a | Descrição |
|---|---|---|---|---|---|
| | Nome | Média | D.P. | Posteriori | |
| $\beta$ | – | 0,989 | 0,000 | 0,989 | Fator de desconto intertemporal. |
| $\alpha$ | – | 0,448 | 0,000 | 0,448 | Participação capital privado do produto. |
| $\alpha_{\mathrm{G}}$ | – | 0,020 | 0,000 | 0,02 | Elasticidade capital público do produto. |
| $\sigma$ | Normal | 1,500 | 0,500 | 1.637 | Inverso da elast. de substituição intertemporal. |
| $\psi$ | Normal | 0,040 | 0,020 | 0.082 | Elast. reservas internacionais do prêmio de risco. |
| $\kappa$ | Beta | 1,000 | 0,250 | 1.764 | Elast. câmbio das exportações. |
| $h$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0.634 | Persistência do hábito. |
| $\omega_{\mathrm{b}}$ | Beta | 0,300 | 0,080 | 0.188 | Proporção de firmas *forward-looking*. |
| $\theta$ | Beta | 0,700 | 0,150 | 0.477 | Parâmetro de Calvo. |
| $\eta$ | Gama | 0,250 | 0,200 | 0.246 | Elasticidade Frisch da oferta de trabalho. |
| $\rho$ | Gama | 0,500 | 0,200 | 0.658 | Elast. substituição entre bens dom. e import.. |
| $\nu$ | Normal | 0,700 | 0,500 | 0.246 | Elast. aversão ao risco do prêmio de risco. |
| $\delta$ | – | 0,015 | 0,000 | 0,025 | Taxa de depreciação do capital privado. |
| $\delta_{\mathrm{G}}$ | – | 0,015 | 0,000 | 0,025 | Taxa de depreciação do capital público. |
| $\delta_a$ | – | 1,000 | 0,000 | 0,000 | Curvatura do ajustamento de capital. |
| $\delta_s$ | Gama | 2,500 | 1,500 | 3.051 | $2^{\underline{a}}$ derivada do custo de ajustamento do inv.. |
| $\omega_{\mathrm{h}}$ | – | 0,400 | 0,000 | 0,400 | Proporção de famílias com restrição ao crédito. |
| $\gamma_r$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0.604 | Suavização da taxa de juros na regra de Taylor. |
| $\gamma_\pi$ | Normal | 1,750 | 0,150 | 1.892 | Resposta à inflação na regra de Taylor. |
| $\gamma_y$ | Normal | 0,250 | 0,200 | 0.543 | Reposta ao hiato do produto na regra de Taylor. |
| $\gamma_g$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0.956 | Suavização dos gastos do governo na regra fiscal. |
| $\gamma_s$ | Normal | 0,500 | 0,250 | 0,449 | Resposta ao superávit primário na regra fiscal. |
| $\gamma_b$ | Beta | 0,250 | 0,100 | 0,130 | Resposta à dívida do governo na regra fiscal. |
| $\rho_a$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0,982 | Persistência do choque tecnológico. |
| $\rho_c$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0,610 | Persistência do choque do consumo. |
| $\rho_i$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0,044 | Persistência do choque do investimento. |
| $\rho_n$ | Beta | 0,500 | 0,250 | 0,268 | Persistência do choque oferta de trabalho. |
| $\rho_q$ | – | 0,000 | 0,000 | 0,000 | Persistência do choque da PDJ. |
| $\rho_r$ | – | 0,000 | 0,000 | 0,000 | Persistência do choque de política monetária. |
| $\rho_{g\mathrm{C}}$ | – | 0,000 | 0,000 | 0,000 | Persistência do choque de consumo do governo. |
| $\rho_{g\mathrm{I}}$ | – | 0,000 | 0,000 | 0,000 | Persistência do choque de investimento público. |
| $\rho_{\tilde{s}}$ | Beta | 0,900 | 0,080 | 0,931 | Persist. do choque da meta de superávit primário. |
| $\rho_\pi$ | Beta | 0,900 | 0,080 | 0,967 | Persistência do choque da meta de inflação. |
| $\rho_\phi$ | Beta | 0,400 | 0,200 | 0,344 | Persistência do choque do prêmio de risco-país. |
| $\rho_{\phi^*}$ | Beta | 0,850 | 0,100 | 0,777 | Persist. do choque de aversão ao risco. |
| $\rho_{m^*}$ | Beta | 0,250 | 0,150 | 0,187 | Persist. do choque de importações internacionais. |
| $\rho_{r^*}$ | Beta | 0,900 | 0,005 | 0,754 | Persist. do choque de juros internacional. |
| $\rho_{\pi^*}$ | Normal | 0 | 0,250 | $-0{,}016$ | Persist. do choque de inflação internacional. |
| $\sigma_{g\mathrm{C}}$ | Gama Invert. | 0,300 | $\infty$ | 0,062 | Desv. pad. do choque de consumo do governo. |
| $\sigma_{g\mathrm{I}}$ | Gama Invert. | 0,300 | $\infty$ | 0,062 | Desv. pad. do choque de investimento do governo. |
| $\sigma_{\overline{\pi}}$ | Gama Invert. | 0,050 | $\infty$ | 0,023 | Desv. pad. do choque na meta de inflação. |
| $\sigma_{\tilde{s}}$ | Gama Invert. | 0,050 | $\infty$ | 0,151 | Desv. pad. do choque na meta de superávit. |
| $\sigma_c$ | Gama Invert. | 1,200 | $\infty$ | 0,498 | Desv. pad. do choque de consumo privado. |
| $\sigma_I$ | Gama Invert. | 2,500 | $\infty$ | 0,941 | Desv. pad. do choque de investimento privado. |
| $\sigma_n$ | Gama Invert. | 0,500 | $\infty$ | 0,156 | Desv. pad. do choque de preferência por trabalho. |
| $\sigma_{\phi^*}$ | Gama Invert. | 0,250 | $\infty$ | 0,898 | Desv. pad. do choque de aversão ao risco ext.. |
| $\sigma_\phi$ | Gama Invert. | 0,500 | $\infty$ | 0,261 | Desv. pad. do choque no prêmio de risco. |
| $\sigma_a$ | Gama Invert. | 1,000 | $\infty$ | 0,192 | Desv. pad. do choque tecnológico. |
| $\sigma_r$ | Gama Invert. | 1,000 | $\infty$ | 0,219 | Desv. pad. do choque de política monetária. |
| $\sigma_{m^*}$ | Gama Invert. | 0,800 | $\infty$ | 0,247 | Desv. pad. do choque de importações mundiais. |
| $\sigma_{\pi^*}$ | Gama Invert. | 0,300 | $\infty$ | 0,562 | Desv. pad. do choque de inflação mundial. |
| $\sigma_{r^*}$ | Gama Invert. | 0,010 | $\infty$ | 1,181 | Desv. pad. do choque de juros internacionais. |

**Figura A-2.** Diagnóstico Univariado de Convergência.

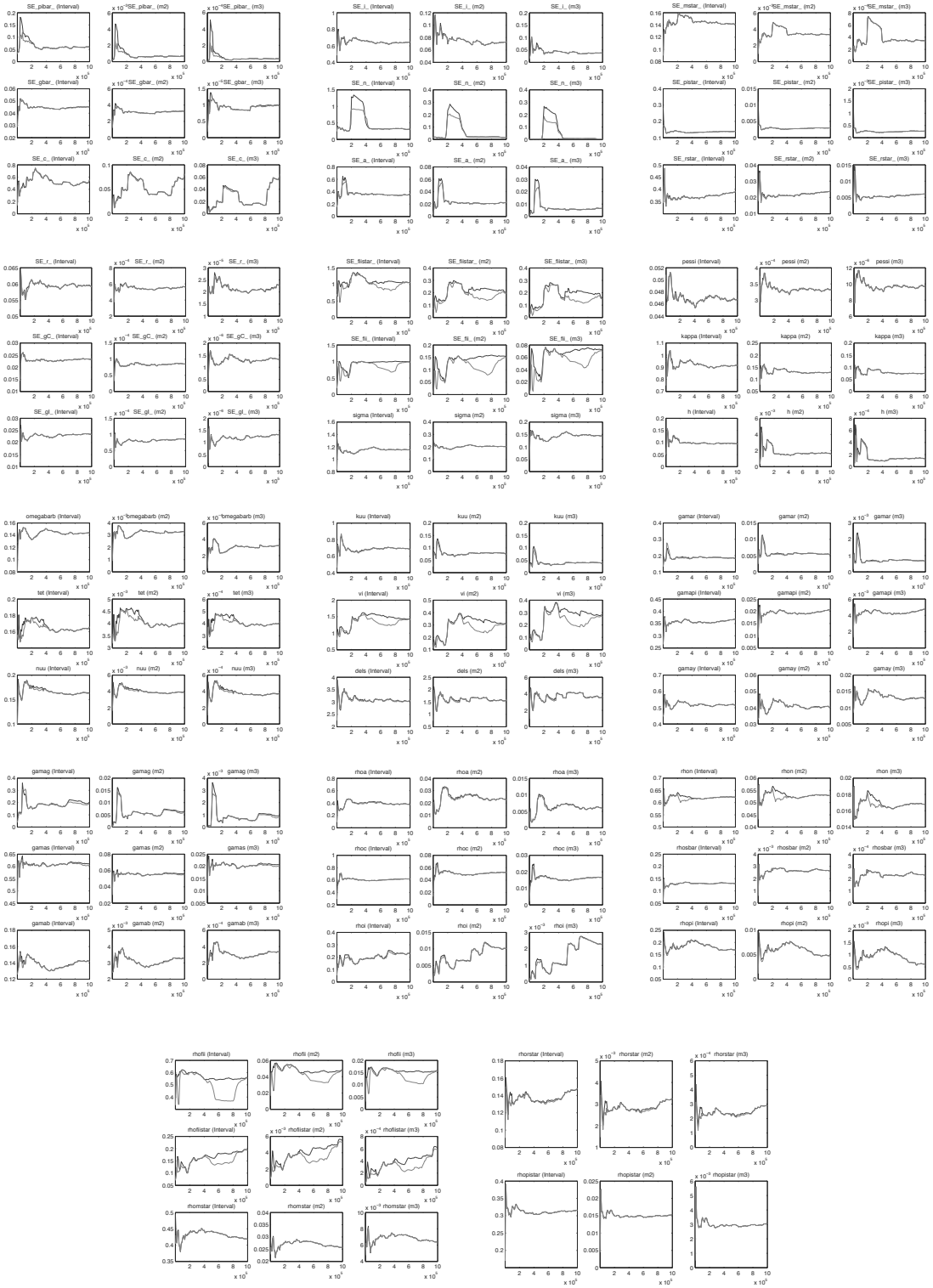
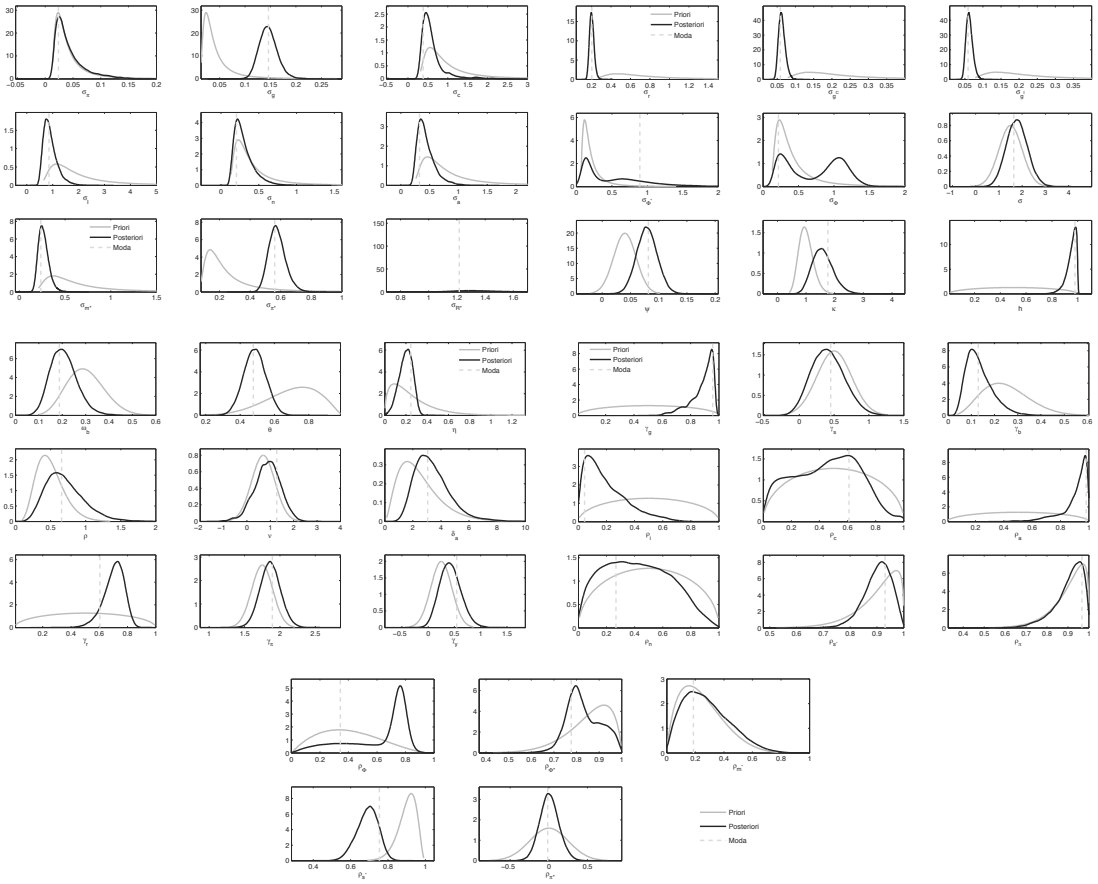


**Figura A-3.** Distribuições a Priori e a Posteriori.



r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150005
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 105–124

# Private Transfer Choices under Uncertainty in Human Capital*

Rodrigo J. Raad†, Gilvan R. Guedes‡

**Sumário:** **1. Introduction; 2. Motives for private transfer; 3. The model; 4. Empirical Analysis; 5. Results; 6. Conclusion; A. Appendix.**

**Palavras-chave:** **Land inheritance, Altruism, Exchange motive, Nash equilibrium, Brazilian Amazon.**

**Códigos JEL:** **C72, C01, D13, D64, R29.**

We develop a theoretical model for parental behavior regarding land inheritance, accounting for consumption and savings strategies. We identify two types of modeling: one with, and another without, strategic behavior. In the first model, we assume that children do not act strategically towards their parent. We find that the child with the highest return to human capital is more likely to receive a larger share of the land if the difference in offspring's returns is large. In the second model, we allow for each child to influence parent's optimal choice of bequest by providing services to the latter. We illustrate that the child's strategy for service provision is sufficient to assure that the one providing more assistance will receive a larger share of the bequest in a Nash equilibrium. We conclude by illustrating our theoretical model with some empirical analysis using longitudinal data for the rural Brazilian Amazon.

*Este trabalho apresenta um modelo teórico para o comportamento dos pais em relação à transferência de seu patrimônio rural para os filhos, levando em conta estratégias de consumo e investimento. Identificamos dois tipos de modelagem, incluindo ou não um comportamento estratégico na família. No primeiro modelo, assumimos que os filhos não se comportam estrategicamente em relação aos pais. Neste caso, mostramos que o filho com o maior retorno em capital humano é mais propenso a receber uma parcela maior da herança se a diferença nos retornos em capital humano entre os irmãos é grande. No segundo modelo, permitimos que cada filho influencie a escolha ótima de transferência de herança através do provimento de serviços aos pais. Ilustramos, através de uma simulação numérica, que é possível que o filho com maior comprometimento com relação à assistência aos pais receberá a maior parte da herança em um equilíbrio de Nash, mesmo que tenha um capital humano inferior. Concluímos, ilustrando o nosso modelo teórico através de uma análise empírica baseada em dados longitudinais coletados na Amazônia rural brasileira.*

*This research was supported by CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) and CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

†Department of Economics–Federal University of Minas Gerais. Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brazil. CEP 31270-901. E-mail: rjraad@gmail.com

‡Department of Demography–Federal University of Minas Gerais. Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brazil. CEP 31270-901. Tel. +55 31 3409 7165. FAX: +55 31 3409 7203. E-mail: grguedes@cedeplar.ufmg.br

## 1. INTRODUCTION

The study of income transfers within a family is of great interest to the literature on economic demography. Private transfers act as a way to improve the well-being of individuals, either by smoothing or increasing inequality among family members (Becker & Tomes, 1979; Tomes, 1981). Thus, both the *amount* and the *rule* of parental investment have intergenerational consequences on wealth accumulation (Keister, 2003). It can also influence the effectiveness of government redistribution depending on an agent's motives (Altonji, Hayashi, & Kotlikoff, 1997; Barro, 1974; Cox & Jakubson, 1995; Lee & Mason, 2010). Finally, because family members can enter into a contractual arrangement for mutual risk smoothing, private transfers may reduce aggregate market insurance and interest rates (VanWey, 2004).

In this paper, we focus on how parents transfer wealth to their children, mainly in the form of bequests. We assume that children have varying relative skills, yielding different returns to their investment in land-specific human capital. Parents then value this random return in their decision on how much to bequeath. We develop a theoretical model in which agents live for two periods in an environment where wealth transfers between two consecutive periods are available. In the first period, children save to invest in land-specific human capital[1] characterized by specific skills, such as training on how to grow perennials or how to raise cattle. In the second period, income from job specialization generates returns to the previous investment in land-specific human capital as in Baker and Micelli (2005).

Our theoretical model also contemplates the situation where children provide services to their parents. Uncertainty in the first period is a consequence of differences among children's relative abilities. To model this uncertainty, we use the concept of subjective probability as in Savage (1964), which consists of assigning a subjective probability distribution for the returns in the second period. These probability distributions can differ among children and are of common knowledge within the family. A risk-free asset with known return is available at the initial period, which allows parents to save wealth for the next period. For the sake of simplicity, we assume that all family members live for two periods and that parents transfer a part of the total wealth. Therefore, we assume that parents consume the remaining goods by their death, in contrast to Bernheim and Severinov (2003). Without loss of generality, we suppose that all bequeatable wealth is represented by *intended bequests*. Finally, we assume that children do not invest in the second period, with all surviving to be eligible as heirs.

In particular, we consider two different approaches. In the first approach, the parent makes transfers in the second period and no strategic behavior from the children arises. The lack of strategic behavior holds because children do not provide any good or service valued by the parent. As an important result, we provide conditions on the primitives of the model to show that the child with the highest subjective return to land-specific human capital receives the largest share of total bequest. In the second approach, each child may provide a good or service as a way to alter their parents' optimal choice for bequests. As in Baker and Micelli (2005), all family members are in a sequential move game in which each child strategically chooses to invest in land-specific human capital. Furthermore, the parent strategy consists in establishing a sharing rule for the bequest. In contrast to Baker and Micelli (2005), we consider that children's consumption[2] directly affects the parent's preference. In addition, the sharing rule for the bequeatable wealth is endogenously defined, contrary to Baker and Micelli (2005). We exhibit a numerical example showing that the lowest return child can supply additional levels of services to compensate for a parent's predisposition to transfer a higher share to the most productive child.

The literature on transfers usually contemplates two major types of motives: altruistic (Altonji et al., 1997; Becker, 1974; Becker & Tomes, 1979; McGarry, 1999; Stark & Zhang, 2002) and exchange (Bernheim, Shleifer, & Summers, 1985; Chang, 2007). The first approach focuses on how parents use transfers to smooth the consumption of needed family members. The second approach considers the transfer as a way to induce the behavior of beneficiaries who provide services of interest. Altonji et al. (1997) define

[1] Measured in units of the consumption good and represented by the opportunity cost of alternative paid activities.

[2] And not only children's land-specific production.

the economic perfect altruism whether an increase by one dollar in the income of parents actively making transfers to a child coupled with a one-dollar reduction in that child's income results in the parents' increasing their transfer to the child by one dollar. We use a parsimonious definition of altruism by considering that the parent is altruist when he seeks to smooth offsprings' wealth. The theoretical literature on private transfers is majorly in tandem with non-altruistic behavior (Altonji et al., 1997; Baker & Micelli, 2005; Bernheim et al., 1985), although some alternative arguments in favor of indirect altruism[3] exist (McGarry, 1999; Stark & Zhang, 2002). Empirical literature on transfer motives has provided mixed evidence on both altruistic and strategic behavior (VanWey, 2004). The non-consensual empirical support is mainly explained by data quality, sample size in highly demanding asymptotic estimation procedures, and the difference in how transfers are measured.

Baker and Micelli (2005) propose a model of land inheritance based on strategic behavior. Their model considers a production function including children's random relative skills and stocks of land-specific human capital. Differing from typical altruistic models of transfers, parents do not take into account the well-being of children. The model considers a simultaneous move game yielding results under a Nash equilibrium and does not include wealth transfers over consecutive periods. The authors find that children overinvest in land-specific human capital when compared to equal sharing.

## 2. MOTIVES FOR PRIVATE TRANSFER

The effects of private transfers on the well-being of individuals and their relations to public transfers are directly linked to the reasons for why individuals engage in passing on wealth to others within the family. In general, there are two major motives for familial transfers: altruism (Altonji et al., 1997; Becker, 1974; McGarry, 1999) and exchange motive (Bernheim et al., 1985; Cox, 1987). We describe briefly each one of these models and discuss their strengths and limitations.

The original altruism model (Becker, 1974) assumes that an unselfish individual's utility function is directly affected by his/her own consumption level and by the well-being of others cared about by this individual. The altruistic individual can adjust his/her behavior if close relatives suffer any change in their well-being. The model predicts that altruistic parents try to equalize utility levels across their offspring, making the largest transfer to the least well-off child. Moreover, if altruism is operative, it should lead to the Ricardian equivalence, crowding out the effect of public transfers (Barro, 1974).

Under the traditional altruistic models, an increase in a child's pre-transfer income reduces the parents' marginal utility of making a transfer to that child. Thus, we expect a negative relationship between the incidence of transfers and the recipient's pre-transfer income under the altruism hypothesis. However, Altonji et al. (1997) and McGarry (1999) argue that this relation depends on the kind of transfer. Inter vivos transfers should be negatively associated to a child's current income because low-income children are considered to be liquidity constrained. Bequests, on the other hand, hold weak (positive in families who make inter vivos transfers) or no (families making no inter vivos transfers) relationship with a child's current income. Stark and Zhang (2002) emphasize that the available empirical evidence is not in agreement with theoretical predictions. They present a model for parents who are equally altruistic towards their children. Their model, however, predicts that parents would actually make the largest transfers to the child whose current income or potential earnings is higher. The key point is that altruistic parents believe that their children are equally altruistic, and as family members are interlinked, indirect transfers between siblings would smooth out direct transfers from parents to children. An optimal choice would be to transfer more to the child with the largest earning potential, because this child would transfer part of the augmented wealth to the less talented sibling. This result holds only if the beneficiary child has a marginal propensity to save sufficiently higher than his/her siblings. The authors, however, do not take this fact into account in their theoretical model of transfers.

[3] For instance, Stark and Zhang (2002) assume that larger transfers to children with highest earning capability would be compensated by inter-siblings altruistic transfers.

The exchange motive (Bernheim et al., 1985; Cox, 1987) assumes that parents bequeath as re-payments for services provided by their children at some point. They do so by assigning an ex-ante sharing rule for bequests, directly caring about some actions taken by their children. This direct care establishes the motive for strategic as opposed to nonstrategic influence, as in Becker's rotten kid theorem (Becker, 1974). The model predicts, for instance, that the child who helped the parents more often (with household chores, companionship, or agricultural tasks) would receive the largest transfer or bequest. The transfers profile will be the result of a second best Nash equilibrium among credible beneficiaries in situations where there are at least two recipients. Bernheim, Shleifer, and Summers (1986) generalized this game problem for more than one period. Chang (2007) presents a similar approach using the Nash equilibrium to describe intrahousehold transfers when children provide services for parents. However, the author does not consider the case when children's return to human capital is uncertain. Moreover, the credible threat of parents in transferring unequal bequests is derived exclusively from altruism and not from differences in children's returns to human capital.

Baker and Micelli (2005) develop a theoretical model of land inheritance showing that the knowledge about parents' sharing rules for a bequest affects children's investment in land-specific human capital under some assumptions. The authors argue that in the absence of an uncertainty in future wealth and of a formal land market, fixed inheritance rules prevent wasteful competition among potential heirs for they maximize their investment in land-specific human capital. For example, if the parent decides to leave the largest amount of land to the eldest son (primogeniture), he can invest in agricultural training, thus boosting his productivity.

The existence of a formal land market undermines the fixed inheritance rule because the potential heir could sell the land if this would yield a greater return than its retention (Baker & Micelli, 2005). This behavior is also affected by ecological conditions. More productive land can induce agents to behave in a way as when a land market is absent; in this situation, land selling is not an optimal choice (Hrdy & Judge, 1993).

In our study area, there is evidence of a formal land market. VanWey, Guedes, and Dantona (2012) suggest a level of change in land ownership due to selling and buying practices, which can affect parent's preferences. Furthermore, land quality varies significantly across the region focused on in our analysis. Older farmers own land of better quality and closer to a main road, whereas new farmers are pushed to worse quality land. This implies differences in land accessibility and soil quality. Empirical evidence by Carneiro (2001) corroborates the importance of land quality on parents' behavior towards land division. According to the author, farmers in less productive areas practice an equal division of land, whereas those in more productive areas follow a fixed unequal division rule. In the next section, we present our theoretical model of land inheritance based on the framework of choice under uncertainty.

## 3. THE MODEL

We propose a theoretical model for bequests based on the notion of uncertainty as in Savage (Savage, 1964). We assume that parents assign subjective probabilities for the children's returns, anticipating an exogenous prior. We develop two different models. In the first (*unilateral transfers*), the child derives utility by his/her own consumption and the transfer received. In the second (*bilateral transfers*), a service is provided by the child to the parent; this service enters both the parent's and the child's objective function.

### 3.1. Unilateral transfers

Suppose that a parent has two children and lives for two periods. In the first period the parent chooses optimal consumption and investment. In the second period the parent makes a decision about the

amount of wealth to bequeath, consuming the remaining wealth by his/her death[4]. A subjective prior established by the parent characterizes the return to each child's land-specific human capital. These priors are of common knowledge. This is a sufficient condition to define the expected returns of an offspring's investment in land-specific human capital.[5] Consider $y = (y_p, y_j, y_k)$ and $a = (a_p, a_j, a_k)$ representing the income and optimal investment profile of parent $p$ and the two children, $j$ and $k$, respectively. All agents have the same strictly concave utility function $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, representing the benefit for each consumption level. This implies that agents are risk averse, in contrast to Chang (2007) which assumes that siblings are risk neutral. For the sake of simplicity, we assume that there is a single *numeraire* good, that is, the amount of consumption and savings are given in units of this good.

Write $t_i$ as the optimal bequest from the parent to the child $i = j, k$. The value function of child $i$'s problem is given by

$$v_i(t_i) = \max\left\{ u(c_i) + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left((1+r)a_i + t_i\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \,\middle|\, c_i + a_i \leq y_i \right\} \tag{1}$$

and the corresponding choices given by

$$(\hat{c}_i(t_i), \hat{a}_i(t_i)) = \arg\max\left\{ u(c_i) + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left((1+r)a_i + t_i\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \,\middle|\, c_i + a_i \leq y_i \right\}, \tag{2}$$

where $f_i$ is the density function inducing the subjective probability of returns and $\beta$ the intertemporal discount rate characterizing the agent's impatience. The parameter $\beta$ is also related to the marginal saving rate[6]. Lemma A.1 in the Appendix shows that $v_i$ is strictly concave for $i = j, k$.

Consider $\mu$ the parameter representing a parent's utility discount relative to the child's utility. A risk-free asset with returns $r_p$ is available for the parent. The problem of the parent $p$ is given by

$$v_p = \max\left\{ u(c_p) + \beta u\left((1+r_p)a_p - t_j - t_k\right) + \mu v_j(t_j) + \mu v_k(t_k) \right\}, \tag{3}$$

where the max is evaluated over all $(c_p, a_p, t_j, t_k) \in \mathbb{R}^4_+$ such that $c_p + a_p \leq y_p$ and $t_j + t_k \leq (1+r_p)a_p$. In (3), $t_j$ and $t_k$ represent the transfers for child $j$ and $k$, respectively.

This model predicts larger bequests to the child with the highest subjective expected return to land-specific human capital. This prediction contradicts the altruistic behavior. In order to show this, we provide certain conditions on the child's optimal investment strategies and on the densities $f_j, f_k$ such that the child with the highest return must receive the largest transfer.

To assure this result we establish two assumptions. Assumption 3.1 below assumes that the child with the lowest return always invests a strictly positive amount on land-specific human capital under the optimal choice.[7]

**Assumption 3.1.** Let $\hat{a}_j, \hat{a}_k$ be given by (2). There exits a constant $\bar{a}_k > 0$ such that $\hat{a}_k(t) \geq \bar{a}_k$ for all $t \in \mathbb{R}_+$.

[4] For the sake of simplicity we use a two-period instead of a three-period model. Ideally, parents should pass on the land after their death. In our model, however, they bequeath their goods in the second period. This assumption does not alter our predictions and numerical solutions.

[5] The model described in Altonji et al. (1997) contemplates uncertainty on income only, not on the children's return, as is assumed in our model. Our assumption allows us to isolate the direct effect of land-specific human capital's return on bequests. This was not done by any of the models revised in the literature.

[6] This concept is not considered in the theoretical literature on private transfers.

[7] Under this assumption, the more productive child also invest a positive amount because he/she has a higher return than his/her sibling.

Assumption 3.2 states that the expected value of the marginal benefit for the more productive child at his/her maximum second period consumption level is still higher than the less productive child's at his/her minimum second period consumption level. Thus, even when consumption is at its maximum for the more productive child he/she still has a propensity to save, rendering an expected marginal benefit higher than the one for his/her sibling.

**Assumption 3.2.** Consider $\bar{a}_k$ the constant given in Assumption 3.1 and write $y = \max\{y_j, y_k\}$. The subjective densities $f_j, f_k$ satisfy

$$\int_{\mathbb{R}_+} u'((1+r)y+t)\, f_j(r)\,\mathrm{d}r > \int_{\mathbb{R}_+} u'((1+r)\bar{a}_k+t)\, f_k(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

The following result exhibits certain conditions that favor a non-altruistic behavior. Intuitively, Assumption 3.2 assures that child $j$ has higher expected returns.

**Theorem 3.3.** *Suppose Assumptions 3.1 and 3.2. Then, the optimal transfers $t_j^*, t_k^*$ must satisfy $t_j^* > t_k^*$.*

*Proof:* See appendix. □

### 3.2. Bilateral transfers

Suppose now that the children provide services to the parent as in Bernheim et al. (1985) and Chang (2007). In this case, the environment of friction between family members can be described as a game. Children keep private information on some of their own characteristics due to two credible threats of the parent. One of those relates to the largest transfer that would be made to the most productive child; the other relates to the smoothing of wealth among siblings. We assume that the parent knows his/her children's indirect utility, but not their investment strategies in human capital. In this sequential game, the parent announces a transfer rule conditional on the level of services provided by each child. Thus, each child provides the assistance that maximizes his/her own benefit. This approach is, in essence, similar to that adopted by Faith (2001). Faith assumes that parents partition their inheritable wealth into inter-vivos gifts and bequests. Siblings may compete to engage in rent-seeking to move wealth from the "inter-vivos gifts pool" to the "bequest pool," or vice versa, depending on their relative shares in the two pools.

Consider $y = (y_p, y_j, y_k)$ and $a = (a_p, a_j, a_k)$ as the income and optimal investment profile of parent $p$ and the two children, $j$ and $k$, respectively. The amount of consumption and saving is given in units of the single good. Write $t_i$ as the bequest from the parent to the child $i = j,k$. This variable may depend on the amount of services provided by the child. The variable $s_i$ represents the amount of service supplied by the child $i$ to the parent measured as an opportunity cost. Children have the same concave utility function $u_i\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, with $u_i(c_i, s_i)$ representing the benefit of a consumption level $c_i$ and supplied services $s_i$. A representative parent has a concave utility function $u_p\colon \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$, with $u_p(c_p, s_j, s_k)$ yielding the benefit of a consumption level $c_p$ and a profile $(s_k, s_j)$ of services received from the children. We assume that services generate disutility for the children and utility for the parent, that is, $\partial_{s_i} u_i(c_i, s_i) < 0$ and $\partial_{s_i} u_p(c_p, s_j, s_k) > 0$ for $i = j,k$. As in the previous section, the utility defined only for consumption is given by a concave differentiable $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. We consider utility functions separable on consumption and services, that is, $u_i(c_i, s_i) = u(c_i) + \overline{u}_i(s_i)$ for $i = j,k$ and $u_p(c_p, s_j, s_k) = u(c_p) + \overline{u}_p(s_j, s_k)$, $\overline{u}_i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ for $i = j,k$ and $\overline{u}_p\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ satisfying the Inada conditions. A risk-free asset with return $r_p$ is available for the parent.

The value function of child $i$'s problem is then given by

$$v_i(t_i) = \max\left\{ u_i(c_i, s_i) + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left((1+r)a_i + s_i t_i\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \,\middle|\, c_i + a_i + s_i \le y_i \right\} \tag{5}$$

and the corresponding choices given by

$$(\hat{c}_i(t_i), \hat{a}_i(t_i), \hat{s}_i(t_i)) = \arg\max \left\{ u_i(c_i, s_i) + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left((1+r)a_i + s_i t_i\right) f_i(r)\, \mathrm{d}r \right\}, \tag{6}$$

where the max operator is chosen over all $(c_i, a_i, s_i)$ such that $c_i + a_i + s_i \leq y_i$.

Consider $\mu$ the parameter representing a parent's utility discount relative to the child's utility. Write

$$\tilde{u}_p(c_p, a_p, s_j, s_k, t_j, t_k) = u_p(c_p, s_j, s_k) + \beta u\left((1+r_p)a_p - s_j t_j - s_k t_k\right) + \mu v_j(t_j) + \mu v_k(t_k)$$

as the parents' utility function. The parent's problem is given by

$$v_p(s_j, s_k) = \max \left\{ \tilde{u}_p\left(c_p, a_p, s_j, s_k, t_j, t_k\right) \middle| \left(c_p, a_p, t_j, t_k\right) \in \mathbb{R}^4_+ \right\} \tag{7}$$

and such that $c_p + a_p \leq y_p$ and $s_j t_j + s_k t_k \leq (1+r_p)a_p$. The corresponding optimal choice,

$$\left(\hat{c}_p(s_j, s_k), \hat{a}_p(s_j, s_k), \hat{t}_j(s_j, s_k), \hat{t}_k(s_j, s_k)\right),$$

written as $\hat{x}_p(s_j, s_k)$ is given by

$$\hat{x}_p(s_j, s_k) = \arg\max \left\{ \tilde{u}_p\left(c_p, a_p, s_j, s_k, t_j, t_k\right) \middle| \left(c_p, a_p, t_j, t_k\right) \in \mathbb{R}^4_+ \right\}$$

such that $c_p + a_p \leq y_p$ and $s_j t_j + s_k t_k \leq (1+r_p)a_p$.

The next theorem characterizes the solution for this case. It will be given as a Nash Equilibrium. Its proof is similar to that found in Nash (1951).

**Theorem 3.4.** *There exists a profile of bilateral transfers $(t_j^*, t_k^*, s_j^*, s_k^*)$ such that:*

$$s_j^* = \hat{s}_j(t_j^*), \quad s_k^* = \hat{s}_k(t_k^*), \quad t_j^* = \hat{t}_j(s_j^*, s_k^*), \quad t_k^* = \hat{t}_k(s_j^*, s_k^*).$$

### 3.3. Examples

To illustrate our theoretical model of unequal transfers under uncertainty, we show three numerical examples. Examples 3.5 and 3.6 illustrate the model in section 3.1, while Example 3.7 elucidates the model in section 3.2. In the first example, children's returns are quite close implying that the parent transfers more to the child with the lowest return. In the second example, the difference in children's returns to land-specific human capital is very large. In this case, the numerical solution shows that the parent transfers a larger share to the more productive child, increasing the aggregate benefit of the family. We conclude that parents' altruistic behavior depends on the variability of capital returns among their offspring.

In the next example, we show that when the variability of the children's human capital returns is low, the parent behaves altruistically. Intuitively, when children have a low contrast in returns, the smoothing effect prevails since the additional benefit obtained with the consumption smoothing is greater than the gain obtained by the additional investment in the more productive child.

**Example 3.5.** Suppose that $\beta = 1/2$, $y_p = y_j = y_k := y$, and $\mu = 1/2$. The probability distributions of returns are induced by the densities $f^j \sim U[0, 0.6]$ and $f^k \sim U[0, 0.5]$. Under these distributions the expected values of returns are given by 0.3 and 0.25, respectively. In the case of identical preferences with the utility function given by $u(c) = y\frac{c}{2} - c^2$, the optimal choices and bequests, conditional to some specific income level $y$, are[8]

$$c_j(t_j) = 0.3495 t_j + 0.5094 y \qquad\qquad c_k(t_k) = 0.3488 t_k + 0.4942 y$$

[8] All of the following examples were calculated using the software *Mathematica*.

$$a_j(t_j) = -0.3495t_j + 0.4906y \qquad a_k(t_k) = -0.3488t_k + 0.5058y$$
$$t_j = 0.2364y \qquad t_k = 0.2385y$$

Observe that child $k$ has the lowest expected return on his/her investment and receives the largest bequest. In the next example, the variability on returns to human capital is larger enough so that the transfers do not favor altruistic parental behavior.

**Example 3.6.** Suppose that $\beta = 1/2$, $y_p = y_j = y_k := y$, and $\mu = 1/2$. The probability distributions of returns are induced by the densities $f^j \sim U[0,1]$ and $f^k \sim U[0,1/2]$. Under these distributions, the expected values of returns are given by 0.5 and 0.25, respectively. In the case of identical preferences with utility function given by $u(c) = y\frac{c}{2} - c^2$, the optimal choices and bequests, conditional to some specific income level $y$, are

$$c_j(t_j) = 0.3461t_j + 0.5673y \qquad c_k(t_k) = 0.3488t_k + 0.4941y$$
$$a_j(t_j) = -0.3461t_j + 0.4326y \qquad a_k(t_k) = -0.3488t_k + 0.5058y$$
$$t_j = 0.2415y \qquad t_k = 0.2356y$$

Observe that child $j$ has a greater expected return on his/her investment and receives the largest bequest. In the last example, children behave strategically by providing services to the parent.

**Example 3.7.** Suppose that $\beta = 1/2$, $y_p = y_j = y_k := 5$, and $\mu = 9/10$. The utility function of the children is identical and given by $u(c_i) = 20c_i - c_i^2$ and their utility for services is given by $\overline{u}_i(s_i) = -s_i$ for $i = j,k$. The utility function of the parent is given by $u(c_p) = 20c_p - c_p^2$ and his utility for services given by $\overline{u}(s_j,s_k) = s_j + s_k$. A risk-free asset with return $r_p = 9/10$ is available for the parent. The probability distributions of returns are induced by the densities $f^j \sim U[0,1]$ and $f^k \sim U[0,0.75]$. Under these distributions, the expected values of returns are given by $E[r_j] = 0.5$ and $E[r_k] = 0.325$, respectively. In this case, the optimal choices and bequests are

$$c_j(t_j) = 3.909 \qquad c_k(t_k) = 4.389 \qquad a_j(t_j) = 1.092 \qquad a_k(t_k) = 0.611$$
$$s_j = 1.474 \qquad s_k = 7.994 \qquad t_j = 0.122 \qquad t_k = 0.122$$

Observe that child $k$ has the lowest expected return on his/her land-specific human capital investment and receives the largest bequest since $t_j s_j < t_k s_k$.

Note that $t_j = t_k$ reinforces the result given in Chang (2007). Chang (2007) states that parents choose to split their bequests equally between their children, regardless of earnings differentials across the children. This behavior can be explained by the fact that rent seeking among children generates disutility for the parent. In this case, the loss is not compensated by the return provided by the most productive child since the less productive child has incentive to provide services to offset the potential reduction of his/her inheritance.

## 4. EMPIRICAL ANALYSIS

In this section, we employ novel longitudinal data in the rural Brazilian Amazon to explore the relationship between our theoretical model and patterns in land inheritance among smallholders. Because of the longitudinal aspect of our data, we are able to compare actual and intended behavioral patterns, validating the use of intended bequests in a model where agents live for only two periods.

The Brazilian civil law regarding inheritance posits that wealth must be divided equally after a parent's death in case the disposition option is not evoked in the will. At most 25% of the total wealth can be used for unequal sharing, which relaxes the legal restriction to equal division of wealth (Pereira,

2004). This is important because the intention to bequeath or the actual bequest are not fully enforced or determined by law. Furthermore, the study area from where the data was collected is a frontier area in the Brazilian Amazon. This location has less direct government and market intervention, which likely yields non-standard choices as induced by the general inheritance principle of the law.

Our approach differs from previous literature on private transfers as in Stiglitz (1969), Becker (1974), Bernheim et al. (1985), Altonji et al. (1997), McGarry (1999), Stark and Zhang (2002), and Baker and Micelli (2005) in the following aspects. First, we assume that uncertainty will be given on a latent variable representing the returns to land-specific human capital, such as agricultural skills; Altonji et al. (1997) and McGarry (1999) instead assume uncertainty on the future permanent income. Second, we suppose that unequal transfers[9] can be explained by many factors, including endogenous sharing rules for the bequeatable wealth, contrasting to the exogenous rules assumed by Altonji et al. (1997) and Baker and Micelli (2005). These sharing rules are given as the result of strategic interactions between parents and children, with the latter providing services to maximize their share in the bequeatable wealth. There are few empirical papers testing behavioral models of private transfers because of a lack of quality data (Bernheim et al., 1985; Cox & Rank, 1992; Schoeni, 1997). The few studies that have been performed are mostly concentrated in developed countries (Arrondel & Masson, 2006; VanWey & Nelson, 2007). Despite its important role on consumption smoothing in developing countries where a social welfare system is not fully developed, little is known about patterns of transfers in Latin America (De Vos, 1987) and, specially, in Brazil (Carneiro, 2001; Saad, 1988; VanWey & Cebulko, 2007).

Our empirical results do not support altruistic behavior for bequests in two ways. First, the majority of intended bequest follows an equal division. Second, most of the significant variables for the probability of unequal sharing suggests that parents favor their children with the highest level of land-specific human capital. The striking prevalence of equal division of land among offspring must be a result of strong constraints that arise from the Brazilian legal system of equal inheritance. The lack of evidence supporting altruistic behavior for bequests is associated with a developed frontier settlement area, where smallholders have strategically consolidated the use of land. In the case of a property specialized in cocoa production, where investment requirements are high and paid back after approximately 25 years, the child with the best ability to continue the land use strategy should receive the largest share of the land. Risk averse landowners would then use the possibility that is opened with the disposition criterion in the Brazilian legislation to model their intention. For instance, if a parent has five children with one of them best suited for continuing cocoa production, he could transfer $15\%$ for each children and additionally 25% to the best suited child.

### 4.1. Description of the data

We test our model on a government sponsored settlement project in the rural area of Altamira, in the state of Pará, Brazil. Our study site comprises a total area of 404.700 hectares, located 740km away from Belém, the state capital, crossed by the Xingu River from North to South and by the Transamazon Highway from East to West (see Figure 1).

The rural area under study has some important characteristics that need to be stressed. Altamira is a relatively recent settlement frontier area. The Brazilian Government, through its National Institute of Colonization and Agrarian Reform, established a grid of small farm units (about 100 hectares) along the Transamazon Highway. All of the properties have their front to a road (called *Travessão*), or to the Transamazon Highway, in spite of considerable variation in soil fertility and accessibility during the rainy season along the site. The small size units were designed to incentivize family agriculture and small scale cattle ranching, although land use specialization has been observed in some farms (Guedes et al., 2012; VanWey, D'Antona, & Brondízio, 2007). Land quality and land use specialization may affect

[9] The actual transfer is not directly observed. We estimate it by means of the probability of transferring the land unequally as in McGarry (1999) and Baker and Micelli (2005).

the way the parent evaluates their children's return to land-specific human capital, altering the sharing rule for the land.

The Altamira dataset is part of a larger NIH-funded project, entitled *Amazonian Deforestation and the Structure of Households* (NIH #R01-HD35811-09). The project was led by the Department of Anthropology at the University of Indiana in collaboration with the Department of Demography at the State University of Campinas, Brazil. Data was first collected in 1997/1998, with a follow-up survey being conducted in 2005. During the first wave, 402 households on different pieces of land were sampled, being stratified by cohorts of settlement[10]. The researchers interviewed the head of the household, the spouse, and any other women at the property aged 15 and over. The 2005 follow-up was aimed at three groups present in the first wave: a) same couples interviewed in 1997/1998; b) other households located on the same piece of land sampled in the first wave, and c) children of the couples interviewed in 1997/1998 who were living in their own households in 2005.

### 4.2. Analytical Samples

In order to understand the behavior of farmers related to land transmission, we analyze the group of land owners in 1997/1998 who still held the property title in 2005. We were able to identify what the property owners intended to do with the land in the future for both waves of data.

We divided the observations into two groups: *effective bequest* (for the former owners who died between 1997/1998 and 2005 and for the ones who passed on the land during the period of analysis) and *intended bequests* (the future plan for the land reported in 2005 by those holding the title during the period). For the group of deceased farmers, we compare what happened to their land after death with their intentions in 1997/1998. We also conducted the same analysis for the children who effectively inherited the land sometime between 1997 and 2005. This comparison between effective and intended bequest was used to justify behavioral consistency between what is said and what has been done about land inheritance in our study area.

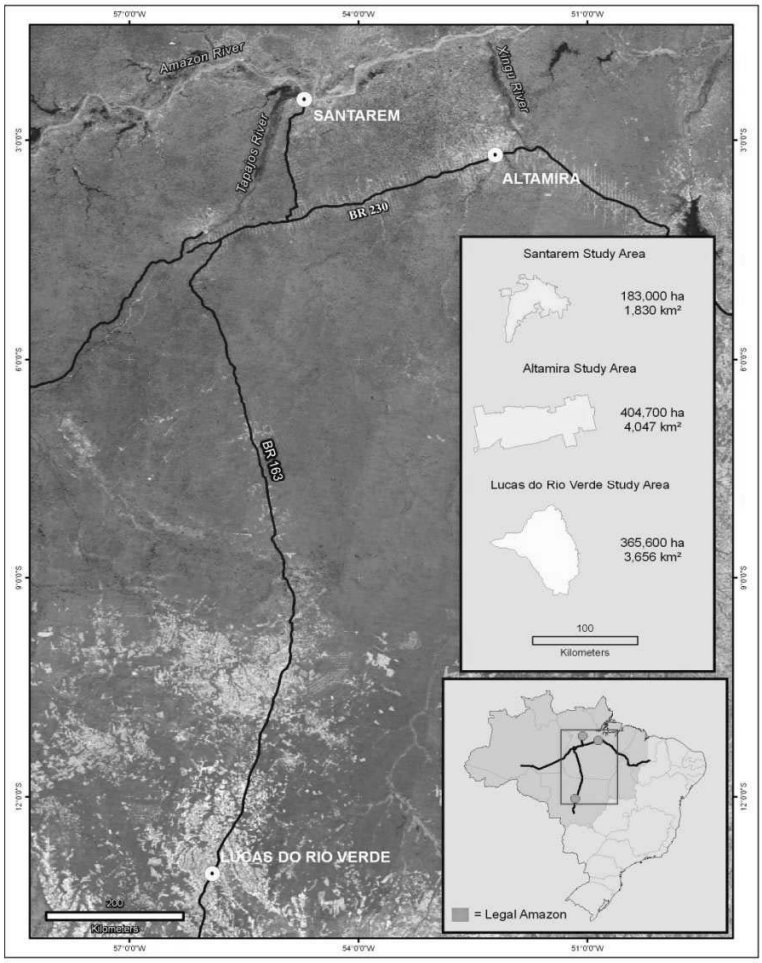
From the 402 farms interviewed in 1997/1998, 399 recorded the farm's owner as the person responsible for the land. In the other three cases, a child was considered the owner. In 2005, 22 out of 399 former owners had died. From the 377 surviving former owners, 315 still held the property ownership, but only 301 of them where interviewed in 2005.

We developed two models to analyze the land inheritance behavior in the region. The first model corresponds to all former owners who held the property title and were interviewed in 2005. This model corresponds to the determinants of the intention to pass on the land to the offspring. Approximately 280 out of 301 owners had valid information about the future plan for the land in the 2005 survey. We had to drop one case because of a missing observation on the area of the lot in 1997/1998 and six additional cases of households with no children. The final sample used in the study had 273 valid cases.

The second model analyzes the determinants of intended unequal land division. From the 280 owners with valid information about the future plans for their land, 180 wanted to pass on the property to their offspring. We dropped one unit because of a missing observation on the land size in 1997/1998. Eleven more cases were excluded because they consisted of families with less than two children. Additional seven cases were eliminated because of an absence of information about children's age and education used to create intra-siblings age and schooling variance. We focus on families with at least two children, since this is the most interesting setting to study transfers choices. Thus, the final sample was restricted to 161 observations.

[10]For more details on sampling strategies see VanWey et al. (2007)

**Figura 1.** Altamira Study Site, Legally defined Brazilian Amazon Region.




### 4.3. Measurement of Dependent Variables

Because we focus on the circumstances under which the land is divided unequally among the offspring, our primary dependent variable is the intended sharing rule for the land. In both waves of data, land owners where asked about their future plans for the lands they possessed. In the 2005 questionnaire, the following options where listed: a) divide equally among children, b) divide among sons, c) divide among daughters, d) give to a specific child, e) give somehow to children, and f) other plans. These categories were combined to create two different variables: one representing the intention to pass on the land in the future,[11] the other representing the unequal sharing rule. To create the first dummy variable, categories a) to e) were combined to represent the intention to pass on the land to the children. The second dummy variable, representing the intention to divide the land unequally, was created by combining categories b) to e) against category a).[12]

An important validation step for our primary dependent variable (intended unequal division) was the comparison between reported intentions in 1997/1998 with the actual division observed from 1997/1998

[11]This variable was used to estimate the selection equation, as will be explained later in this section.

[12]Category f) was considered incidental truncation.

and 2005. During this period, some land owners died or decided to pass on the land while still alive. As shown in Table 1, in about one-third of the cases for which the owner planned to pass the land to their children, the widow was the beneficiary of the transfer. Another one-third of the properties were divided equally among offspring. In-depth interviews with the deceased former owners back in 1997 were used to qualify their future plans before death. Content analysis indicates that the 19 cases (11 kept by the widow and eight with formal equal division to children) reflected a reported intention of the deceased to follow the equal sharing rule. For the three cases where informal equal division prevailed, the still living parent continued to reside on the farm. Lastly, for the two cases where informal unequal division prevailed, the still living parent moved to an urban area and passed on the land to the male children who already dwelt on the farm and had a long history of connection with the land. These results support our decision to use the future plan reported by the land owners in 2005 as a consistent proxy for actual behavioral decision regarding land inheritance patterns.

In our analytical sample for the first model (intention to pass on the land), 59% (161) of the owners in 2005 planned to give the land to their children in the future. Among these 161 cases, 26% (42) declared their intention to divide the property unequally. This is a remarkably high share of unequal bequests for a setting under a legal system that induces equal sharing. Similar levels of an equal bequest were also found in the US in the past (Tomes, 1981).

### 4.4. Methods and Estimation

We focus on the influence of upward transfers, children's liquidity constraints, and land-specific human capital return, as well as the potential of inter-siblings variance on unequal division. Since this model is biased because of sample selection, we performed a two-stage estimation model (Greene, 2003). The first stage corresponds to the selection equation (intention to pass on the land). Then, we generate the Inverse of Mills Ratio and apply it to the model of unequal intended bequest.

In order to estimate the models, we selected a series of variables derived from the survey. We use a woman's reproductive history to generate the children's demographic characteristics. The number of offspring was applied in the models to capture how family size affects the motive to transfer. We also use the number of sons and daughters separately as well as children's age. The gender division allows us to understand gender preferences in land inheritance. Children's age is used as a proxy for the young household life-cycle, which represents a liquidity constraint. We also consider occupation and educational attainment of the offspring as proxies for land-specific human capital investment. The occupation

**Tabela 1.** Comparison between effective bequest outcomes in 2005 and original future plan of the old owner in 1997/1998 - Altamira Study Area, Pará State, Brazil.

| Future plan for the land reported in 1997/1998 | Bequest outcome | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Widow kept | Equal Division | | Unequal Division | | Total |
| | | Formal | Informal | Formal | Informal | |
| Pass on to children | 11 | 8 | 3 | 3 | 2 | 27 |
| Increase the number of properties | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| Other | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Missing | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Total | 15 | 8 | 4 | 4 | 2 | 33 |

*Note:* the difference between formal and informal is the legal transfer of ownership.
*Source:* Altamira dataset (1997/1998 and 2005).

characteristic is especially relevant because it can reveal land-specific human capital investments. For age and schooling, we included the inter-siblings variance in order to test if parents consider the relative distribution of their offspring's return to land-specific human capital when deciding to adopt fixed or unequal rule for an intended bequest.

We also controlled for some of the parent's characteristics. We controlled for parents' health status and educational level. The owner's place of birth was also used to account for the cultural-spatial differences in land transmission, as is argued by Carneiro (2001).

## 5. RESULTS

### 5.1. Empirical Exercise

Table 2 presents summary measures of the data, broken down by endogenous and exogenous variables. The descriptive results show that, on average, 64% of smallholders intend to pass on the land to their children in the future. Among those, 26% intend to share it unequally. Children are approximately 20 years old, with five years of schooling, although educational variance is high. About 64% of male children have a land related occupation, similarly to 65% for female children. The type of agricultural activity by children's gender, however, differs. While female children are predominantly involved in household chores on the property, such as helping with milking and cheese production, male children are more frequently involved in harvesting, land clearing or more technical tasks. Upward transfers are not uncommon, with 25% of children helping their parents, mostly with on-the-lot work. Household annual income is about US$2,309, with an additional US$1,530 of equivalent production for self-consumption. This result shows the importance (56%) of production for self-consumption for household well-being in rural areas. Although most of smallholders have a single property, 30% have other types of properties, such as another rural lot or urban residence. The average lot allocates 45.6% of the area for commercial use (pasture and cocoa), with approximately 23% of those having high-fertility soil. Most of the properties have good accessibility during the rainy season, although road conditions vary considerably throughout the year due to precarious maintenance.

When variables are compared by intention and division rules, interesting differences arise as was predicted by our theoretical model. One interesting finding is the striking difference in land size and soil fertility by sharing rule. As shown in Table 2, the mean area in commercial land use for farmers adopting unequal sharing is 40% higher than this area for those favoring an equal division of land. Regarding soil fertility, this difference is 52% higher. These differences are important for our theoretical model, since larger farms and more fertile soils favor unequal sharing by maximizing the parent's utility function.

When the property is small, equal division would prevail in two situations. First, a minimum land size is required to allow small and different agricultural units to be productive if we assume that a threshold for the motivation to divide the land exists. This is exactly what we see from results in Table 2. Furthermore, for very small farms the impact of the variability in land-specific human capital among children is not enough to trigger unequal sharing. In this situation, the parent prefers to sell the land and equally divide the amount among the offspring. Second, the smaller the land size the smaller the amount $t$ that is transferred to the child, implying that a large contrast between expected children's return is required to satisfy equation (4). Intuitively, the family welfare would be reduced if the parent transferred a marginal unit of wealth from one child to another when both farm size and children's capital return are small. The wealth transferred, in this case, would be represented by an investment in the child's land-specific human capital. This is due to the fact that the marginal utility is decreasing in the total child's wealth. Therefore, a marginal reduction of his/her wealth considerably impacts his/her benefit. In short, even if the land remains productive when fractionated, the effect of smoothing consumption among children in the parent's utility function overlaps the other effects, favoring equal division.

Some children's characteristics also support our theoretical models. For instance, farmers who intend to share the land equally have a 37% higher probability of being helped by their children than those

**Tabela 2.** Descriptive Statistics: mean of explanatory variables—Altamira Study Area, Pará State, Brazil.

| Selected Explanatory Variables | Analytical sample | Intention to pass on | Other intentions | Equal bequest | Unequal bequest |
|---|---|---|---|---|---|
| *Children's Characteristics* | | | | | |
| Mean age | 20.01 | 21.00 | 18.19 | 21.35 | 19.97 |
| Age variance among siblings | 4.66 | 4.76 | 4.48 | 4.72 | 4.87 |
| Mean schooling | 4.57 | 4.71 | 4.32 | 4.67 | 4.81 |
| Schooling variance among sibling | 4.66 | 2.04 | 1.64 | 2.09 | 1.91 |
| Schooling missing (count) | 0.43 | 0.37 | 0.56 | 0.36 | 0.40 |
| Not currently married (count) | 3.20 | 3.31 | 3.00 | 3.33 | 3.24 |
| Married (count) | 2.08 | 2.28 | 1.70 | 2.29 | 2.27 |
| Son with non-agricultural occupation (0/1) | 0.36 | 0.36 | 0.36 | 0.36 | 0.37 |
| Daughter with non-agricultural occupation (0/1) | 0.35 | 0.39 | 0.27 | 0.38 | 0.43 |
| Upward transfer (0/1) | 0.25 | 0.28 | 0.21 | 0.30 | 0.22 |
| Living in the same household (count) | 2.51 | 2.51 | 2.52 | 2.63 | 2.18 |
| Living on the same lot (count) | 0.29 | 0.34 | 0.20 | 0.32 | 0.42 |
| Living off the lot (count) | 2.70 | 2.90 | 2.35 | 2.79 | 3.22 |
| *Parents' Characteristics* | | | | | |
| Form of land acquisition (1-won/0-bought) | 1.4 | 1.4 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
| Household annual income (Brazilian R$) | 5,104.8 | 5,710.4 | 3,964.0 | 4,046.7 | 10,620.4 |
| Monetized annual prod. for self-cons. (Braz. R$) | 3,381.3 | 3,128.7 | 3,857.1 | 3,017.1 | 3,457.9 |
| Has another property(ies) in the region? (0/1) | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.4 | 0.2 |
| Is father sick? (0/1) | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.3 |
| Is mother sick? (0/1) | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| Father's age (years) | 51.2 | 53.3 | 47.5 | 53.5 | 52.7 |
| Father is illiterate (0/1) | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| Father has primary education (0/1) | 0.6 | 0.7 | 0.6 | 0.7 | 0.7 |
| Father has secondary education (0/1) | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| Mother has secondary education (0/1) | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.3 |
| Area in pasture (ha) | 40.1 | 44.7 | 31.9 | 41.9 | 53.0 |
| Area in cacao (ha) | 5.5 | 6.5 | 3.6 | 4.7 | 11.8 |
| Rest of lot area (ha) | 63.5 | 65.3 | 60.1 | 68.8 | 55.3 |
| Year of acquisition (year) | 1,982.7 | 1,981.4 | 1,985.0 | 1,981.6 | 1,980.8 |
| Area with high-fertility soil (%) | 22.6 | 24.3 | 19.5 | 21.4 | 32.7 |
| Land accessible during rainy season (0/1) | 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0.8 |
| Distance to Medicilândia urban center (km) | 35,064.6 | 34,031.3 | 36,477.9 | 34,568.1 | 32,467.6 |

*Source:* Altarmira dataset (1997/1998; 2005)

intending to share unequally. The same pattern emerges when we look at the association between children's place of residence and the sharing rule. While 51% of the children live in the same household among those parents intending to divide the land equally, this proportion is 12% lower among parents who plan to distribute their property unequally. The opposite holds for the proportion of children living on the lot, which signals a child's investment in land-specific human capital. While these results are in accordance with our theoretical model, they are bivariate associations. Thus, we turn now to multiple regression associations.

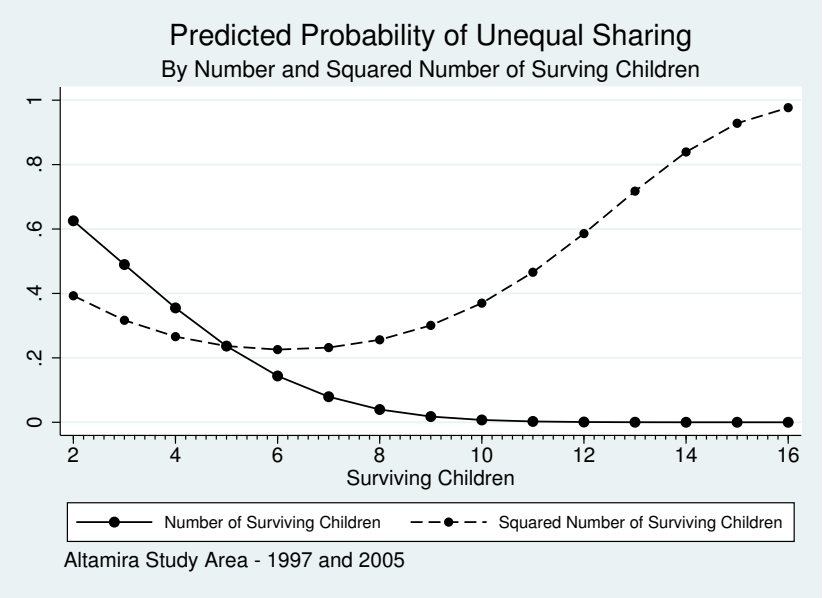
All independent variables are measured in 1997, while the dependent variable is measured in 2005, thus reducing potential bias caused by simultaneity. Because of the potential sample selection in our regression model for unequal sharing, we used a Heckman Selection Probit model. The Likelihood Ratio test of independent equations was not significant (p-value = 0.8745). Thus, we interpret results based on a traditional Probit model with correction for heteroskedasticity (Huber-White variance sandwich estimator). In addition, we use one-tail hypotheses testing because we derive the effect signs from our theoretical models. Table 3 renders statistical support for the main variables from our theoretical model. As shown in Figure 2, the increase in the number of children up to five reduces the probability of unequal sharing by increasing the marginal utility of children's wealth. This effect favors parent's intentions to smooth their children's consumption. For families with more than five children, further increase in family size favors unequal sharing. This is due to the fact that larger family size favors high contrast on returns in land-specific human capital. Properties with larger proportions dedicated to commercial agriculture are more likely to be divided unequally because of the reduction in the child's marginal utility of the amount bequeathed. Smallholders with other properties in the region are more likely to divide the land equally among offspring. This may be explained by the ability to use other properties to implement unequal division. Although our proxy for children's service provision is marginally statistically significant using a two-tail test, the one-tail result would be significant (p-value=0.044). Thus, parents who receive some help from their children are less likely to favor a specific child, suggesting the ability of these children to compensate for the contrast in an offspring's land-specific human capital return. Coefficients in Table 3 can be readily compared across independent variables because all the measures were standardized to have a zero mean and unit variance.

**Tabela 3.** Probit and Heckman Probit Regression for Unequal Sharing of Land—Altamira Study Area, Pará State, Brazil.

| Variables | Heckman Probit | | Probit | |
|---|---|---|---|---|
| Number of surviving children | −1.164* | [0.574] | −1.197* | [0.564] |
| Squared number of surviving children | 1.368** | [0.549] | 1.368** | [0.547] |
| % of lot on commercial land use | 0.202 | [0.175] | 0.175 | [0.176] |
| Distance to Altamira urban center | −0.230* | [0.133] | −0.230* | [0.133] |
| Has another rural lot | −0.636** | [0.266] | −0.631** | [0.268] |
| Total household annual income | 0.216* | [0.128] | 0.203* | [0.123] |
| Upward transfers (0/1) | −0.500* | [0.293] | −0.495* | [0.290] |
| Inverse of Mills ratio | 1.075 | [2.464] | | |
| Constant | −0.862 | [1.055] | −0.406** | [0.168] |
| Observations | 161 | | 161 | |

*Note:* Robust standard errors in brackets. One-tail test ** p<0.01, * p<0.05.
*Source:* Altamira dataset (1997, 1998, 2005).

**Figura 2.** Predicted probability of unequal sharing—Altamira Study Area, Pará State, Brazil.




### 5.2. Theoretical model

In the standard altruism model with uncertainty, an increase by one dollar in the income of parents actively making transfers to a child coupled with a one-dollar reduction in that child's income, results in the parents' increasing the transfer to the child by one dollar. The findings of Altonji et al. (1997) strongly reject the altruism hypothesis. Redistributing one dollar from a recipient child to donor parents leads to less than a 13-cent increase in the parents' transfer to the child. This is far less than the one-dollar increase implied by perfect altruism. Our result strengthens this evidence for the case of low levels of marginal utility and large contrasts in land-specific human capital returns. We conclude that an increase by one dollar unit in parents' wealth may not alter the current amount bequeathed to a less productive child. Indeed, an increase in parents' utility due to a transfer of one-dollar to a more productive child can compensate for the reduction of one-dollar in wealth from the less productive child.[13]

Baker and Micelli (2005) discuss two important results on unequal sharing rules, considering the amount of land-specific human capital and abilities for managing the land as distinct parameters. In the first case, they assume scale economies and show that heirs overinvest in land-specific human capital to induce unequal or non-altruistic bequest choices. Consequently, the bequest is entirely awarded to the heir with the higher relative ability to manage the land. The assumption of scale economies, however, does not embody wealth smoothing effects among children. In the second case, the authors assume scale diseconomies and the production function is concave only on the amount of land transferred by the parent. Therefore, the smoothing effects do not incorporate the total wealth from children investment in land-specific human capital.

In our model, we assume that there is a return to the human capital parameter that simultaneously incorporates the ability for managing the land and the land-specific human capital. Parents' utility embodies wealth smoothing effects which are quite robust in the case of high marginal utilities and low contrast in human capital returns among children. Therefore, parents can choose equal or altruistic sharing rules even when assumptions given in Baker and Micelli (2005) are assured, contrasting with their

[13] Obviously, the less productive child has the lower income.

results. We establish a condition on the parents' priors over land-specific human capital under which the child with the higher expected return receives the largest amount bequeathed. Furthermore, in our model including upward transfers, the equal sharing is a dominant rule regardless of any assumption of heterogeneity in children's land-specific human capital. This also contrasts with the results given in Baker and Micelli (2005).

## 6. CONCLUSION

Building on previous models of private transfers, we developed a theoretical model for intergenerational land transmission in rural settings. We propose an environment where agents live for two periods, considering consumption and investment strategies. Two different approaches were considered. In the first approach, parents make unilateral transfers to their children. In the second approach, children act strategically by providing services to their parents, thus influencing their transferring behavior. Different from Altonji et al. (1997), where uncertainty holds for income only, our model contemplates uncertainty on children's returns to land-specific human capital. The advantage of including uncertainty on returns is to strengthen Altonji et al. (1997)'s result of imperfect altruism and allow for strategic behavior of agents. Indeed, in our first model parents can transfer a larger share of inheritance to the child with the highest relative return among offspring. Our model of unilateral transfers assures that under a certain level of contrasts among children's returns, the child with the largest return will always receive a larger share of the total transfer. This result probes the economic altruism concept, and reinforces the finding of imperfect altruism provided by Altonji et al. (1997).

In the second model, we allow children to behave strategically, as is suggested in Bernheim et al. (1985). Based on a sequential move game, we provided a numerical example in which a parent can potentially choose different transferring amounts. As a result, rent seeking occurs as heirs compete for a larger share of the land. In a Nash equilibrium solution, however, the parent announces equal sharing and waits for his/her children to provide services. This minimizes rent seeking. Under this equilibrium, the less productive child can provide a sufficient amount of services to receive a larger inheritance share, inducing the parent to smooth consumption.

Neither Baker and Micelli (2005) nor Altonji et al. (1997) treated the human capital return as an endogenous variable in the model. This prevented them from establishing conditions on the primitives in order to prove theoretical results, assuring a larger share to the most productive child. Our model, therefore, provides a link between these two models by showing, through the game theory, as in Baker and Micelli (2005) and Bernheim et al. (1985), evidence of non-altruistic behavior as in Altonji et al. (1997). Our numerical and empirical results support the theoretical predictions established by our model. By using primary data on smallholders in an Amazonian frontier, we provide descriptive evidence of equal sharing as a predominant rule, indicating non-altruistic private behavior. Even among those intending to pass on the land unequally, our econometric results suggest that larger shares are more likely to be transferred to more productive children.

## REFERENCES

Altonji, J. G., Hayashi, F., & Kotlikoff, L. J. (1997). Parental altruism and inter vivos transfers: Theory and evidence. *Journal of Political Economy*, *105*(6), 1121–1166.

Arrondel, L., & Masson, A. (2006). Altruism, exchange or indirect reciprocity: What do the data on family transfers show? In S. C. Kolm & J. Mercier-Ythier (Eds.), *Handbook on the economics of giving, reciprocity and altruism* (Vol. 2, pp. 971–1053). North-Holland: Elsevier. doi: 10.1016/S1574-0714(06)02014-8

Baker, M., & Micelli, T. (2005). Land inheritance rules: theory and cross-cultural analysis. *Journal of Economic Behavior and Organization*, *56*(1), 77–102. doi: 10.1016/j.jebo.2003.09.004

Barro, R. J. (1974). Are government bonds net wealth? *The Journal of Political Economy*, *82*(6), 1095–1117.

Becker, G. (1974). A theory of social interactions. *The Journal of Political Economy*, *82*(6), 1063–1093.
Becker, G., & Tomes, N. (1979). An equilibrium theory of the distribution of income and intergenerational mobility. *The Journal of Political Economy*, *87*(6), 1153–1189.
Bernheim, B. D., & Severinov, S. (2003). Bequests as signals: An explanation for the equal division puzzle. *Journal of Political Economy*, *111*(4), 733–764.
Bernheim, B. D., Shleifer, A., & Summers, L. H. (1985). The strategic bequest motive. *The Journal of Political Economy*, *93*(6), 1045–1076.
Bernheim, B. D., Shleifer, A., & Summers, L. H. (1986). *Bequests as a means of payment* (Working Paper No. 1303). National Bureau of Economic Research. doi: 10.3386/w1303
Carneiro, M. J. (2001). Herança e gênero entre agricultores familiares. *Revista Estudos Feministas*, *9*(1), 22–55. doi: 10.1590/S0104-026X2001000100003
Chang, Y.-M. (2007). Transfers and bequests: a portfolio analysis in a Nash game. *Annals of Finance*, *3*(2), 277–295. doi: 10.1007/s10436-006-0050-2
Cox, D. (1987). Motives for private income transfers. *Journal of Political Economy*, *95*(3), 508–546.
Cox, D., & Jakubson, G. (1995). The connection between public transfers and private interfamily transfers. *Journal of Public Economics*, *57*(1), 129–167.
Cox, D., & Rank, M. R. (1992). Inter-vivos transfers and intergenerational exchange. *The Review of Economics and Statistics*, *74*(2), 305–314.
De Vos, S. (1987). Latin american households in comparative perspective. *Population Studies*, *41*(3), 501–517.
Faith, R. L. (2001). *Inheritance, equal division and rent seeking* (ASU Economics Working Paper No. 15/2001). doi: 10.2139/ssrn.275973
Greene, W. H. (2003). *Econometric analysis*. Pearson Education India.
Guedes, G. R., Brondízio, E. S., Barbieri, A. F., Resende, A., Penna-Firme, R., & D'Antona, A. O. (2012). Poverty and inequality in the rural Brazilian Amazon: A multidimensional approach. *Human Ecology*, *40*(1), 41–57. doi: 10.1007/s10745-011-9444-5
Hrdy, S. B., & Judge, D. S. (1993). Darwin and the puzzle of primogeniture. *Human Nature*, *4*(1), 1–45. doi: 10.1007/BF02734088
Keister, L. (2003). Sharing the wealth: The effect of siblings on adults' wealth ownership. *Demography*, *40*(3), 521–542.
Lee, R., & Mason, A. (2010). Some macroeconomic aspects of global population aging. *Demography*, *47*(1), S151–S172.
McGarry, K. (1999). Inter vivos transfers and intended bequests. *Journal of Public Economics*, *73*(3), 321–351.
Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, *54*(2), pp. 286–295.
Pereira, C. (2004). *Instituições de direito civil: Direitos das sucessões.* Rio de Janeiro: Editora Forense.
Saad, P. (1988). *Support transfers between the elderly and the family in Southeast and Northeast Brazil* (Ph.D. dissertation). The University of Texas, Austin.
Savage, L. (1964). *The foundations of statistics*. New York: Wiley.
Schoeni, R. F. (1997). Private interhousehold transfers of money and time: New empirical evidence. *Review of Income and Wealth*, *43*(4), 423–448.
Stark, O., & Zhang, J. (2002). Counter-compensatory inter-vivos transfers and parental altruism: compatibility or orthogonality? *Journal of Economic Behavior and Organization*, *47*(1), 19–25.
Stiglitz, J. E. (1969). Distribution of income and wealth among individuals. *Econometrica*, *37*(3), 382–397.
Tomes, N. (1981). The family, inheritance, and the intergenerational transmission of inequality. *Journal of Political Economy*, *89*(5), 928–958.
VanWey, L. K. (2004). Altruistic and contractual remittances between male and female migrants and households in rural Thailand. *Demography*, *41*(4), 739–756. doi: 10.1353/dem.2004.0039

VanWey, L. K., & Cebulko, K. B. (2007). Intergenerational coresidence among small farmers in Brazilian Amazônia. *Journal of Marriage and Family*, *69*(5), 1257–1270. doi: 10.1111/j.1741-3737.2007.00445.x

VanWey, L. K., D'Antona, A. O., & Brondízio, E. S. (2007). Household demographic change and land use/land cover change in the Brazilian Amazon. *Population and Environment*, *28*(3), 163–185. doi: 10.1007/s11111-007-004

VanWey, L. K., Guedes, G. R., & Dantona, A. O. (2012). Out-migration and land-use change in agricultural frontiers: insights from Altamira settlement project. *Population and Environment*, *34*(1), 44–68. doi: 10.1007/s11111-011-0161-1

VanWey, L. K., & Nelson, K. (2007). Intergenerational financial transfers from older Americans: Evidence from the Health and Retirement Study. In *Proceedings of the Population Association of America.*

## A. APPENDIX

**Lemma A.1.** The value function $v^i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ defined by (1) is strictly concave.

*Proof:* Fix $\alpha > 0$. First note that $\hat{c}_i(t) + \hat{a}_i(t) \leq y_i$ for $t \in \left\{ t_i, t_i' \right\}$ implies

$$\alpha \hat{c}_i(t_i) + (1-\alpha)\hat{c}_i(t_i') + \alpha \hat{a}_i(t_i) + (1-\alpha)\hat{a}_i(t_i') \leq y_i. \tag{A-1}$$

Furthermore

$$v_i(t) = u(\hat{c}_i(t)) + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left((1+r)\hat{a}_i(t) + t\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{for } t \in \left\{ t_i, t_i' \right\}$$

and the concavity of $u$ imply

$$\begin{aligned}
\alpha v_i(t_i) + (1-\alpha)v_i(t_i') &= \alpha u(\hat{c}_i(t_i)) + (1-\alpha)u\left(\hat{c}_i(t_i')\right) \\
&\quad + \beta \int_{\mathbb{R}_+} \alpha u\left((1+r)\hat{a}_i(t_i) + t_i\right) + (1-\alpha)u\left((1+r)\hat{a}_i(t_i') + t_i'\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \\
&\leq u\left(\alpha \hat{c}_i(t_i) + (1-\alpha)\hat{c}_i(t_i')\right) \\
&\quad + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left[\alpha\left((1+r)\hat{a}_i(t_i) + t_i\right) + (1-\alpha)\left((1+r)\hat{a}_i(t_i') + t_i'\right)\right] f_i(r)\,\mathrm{d}r \\
&\leq u\left(\alpha \hat{c}_i(t_i) + (1-\alpha)\hat{c}_i(t_i')\right) \\
&\quad + \beta \int_{\mathbb{R}_+} u\left[(1+r)\left(\alpha \hat{a}_i(t_i) + (1-\alpha)\hat{a}_i(t_i')\right) + \alpha t_i + (1-\alpha)t_i'\right] f_i(r)\,\mathrm{d}r \\
&\leq v_i\left(\alpha t_i + (1-\alpha)t_i'\right)
\end{aligned}$$

by Equation (A-1) and (1). Clearly, when $t_i \neq t_i'$, the inequations can be chosen strictly because $u$ is strictly concave. □

**Theorem A.2.** *Suppose Assumptions 3.1 and 3.2. Then, the optimal transfers $t_j^*, t_k^*$ must satisfy $t_j^* > t_k^*$.*

*Proof:* Assuming an interior solution,[14] differentiating with respect to $t_i$ and applying the Envelop theorem to equation (1) we get for each $t_i \in \mathbb{R}_+$

$$v_i'(t_i) = \beta \int_{\mathbb{R}_+} u'\left((1+r)\hat{a}_i(t_i) + t_i\right) f_i(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{for } i = j, k. \tag{A-2}$$

[14] The condition $\lim_{c\to 0^+} u'(c) = \infty$ assures the interior optimum.

Moreover, the F.O.C. of equation (3) with respect to $t_j, t_k$ evaluated on the optimum $(a_p^*, t_j^*, t_k^*)$ for a interior solution yields

$$\beta u'\Big((1+r_p)a_p^* - t_j^* - t_k^*\Big) = \mu v_i'(t_i^*) \quad \text{for } i = j,k.$$

Assumptions 3.1, 3.2 and equation (A-2) evaluated on $t_i = t_k^*$ imply that[15]

$$\begin{aligned} v_j'(t_k^*) &= \beta \int_{\mathbb{R}_+} u'\Big((1+r)\hat{a}_j(t_k^*) + t_k^*\Big) f_j(r)\,\mathrm{d}r \\ &\geq \beta \int_{\mathbb{R}_+} u'\Big((1+r)y + t_k^*\Big) f_j(r)\,\mathrm{d}r \\ &> \beta \int_{\mathbb{R}_+} u'\Big((1+r)\bar{a}_k + t_k^*\Big) f_k(r)\,\mathrm{d}r \\ &\geq \beta \int_{\mathbb{R}_+} u'\Big((1+r)\hat{a}_k(t_k^*) + t_k^*\Big) f_k(r)\,\mathrm{d}r \\ &= v_k'(t_k^*) = v_j'(t_j^*). \end{aligned}$$

Therefore we conclude that $v_j'(t_k^*) > v_j'(t_j^*)$. This implies that $t_j^* > t_k^*$ since Lemma A.1 assures that $v_j$ is concave and hence $v_j'$ is decreasing. □

[15] Observe that in the second and fourth inequality we use that $u'$ is decreasing, $\hat{a}_j(t_k^*) \leq y$ and $\hat{a}_k(t_k^*) \geq \bar{a}_k$.

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20150006
*Revista Brasileira de Economia*, **69**(1), 125–143

# Uma Análise da Transição dos Jovens Para o Primeiro Emprego no Brasil

Mauricio Reis*

**Sumário:** **1. Introdução; 2. Dados; 3. Método empírico; 4. Uma análise descritiva da duração do desemprego; 5. Os determinantes da duração do desemprego; 6. Conclusões; A. Apêndice.**

**Palavras-chave:** **Mercado de Trabalho dos Jovens, Primeiro Emprego, Duração do Desemprego.**

**Códigos JEL:** **J64, J60.**

Esse estudo analisa o processo de transição dos jovens do desemprego para o primeiro emprego. Os resultados mostram que a experiência prévia no mercado de trabalho parece influenciar positivamente a probabilidade de encontrar emprego, e que jovens e adultos com alguma experiência anterior de trabalho apresentam probabilidades semelhantes de transição do desemprego para o emprego. Os resultados também mostram que a dificuldade relativa dos jovens em busca do primeiro emprego é ainda mais acentuada para empregos considerados de melhor qualidade.

*This paper analyzes the probability of leaving unemployment for young first-time job seekers. Estimates indicate that the probability of finding a job seems to be positively affected by previous work experience. Also, young people who have been previously employed have similar unemployment spells to adults. Also according to evidence, the difference in exit probability between workers with previous experience and first-time job seekers is larger for good quality jobs.*

## 1. INTRODUÇÃO

A taxa de desemprego entre os jovens é geralmente bem maior do que a verificada para o total da população economicamente ativa.[1] No caso específico do Brasil, a situação dos jovens não é diferente. Considerando o período de janeiro de 2006 até dezembro de 2012, a taxa de desemprego registrada pela PME (Pesquisa Mensal de Emprego) para as seis principais regiões metropolitanas brasileiras foi de 7,28%. Enquanto entre os indivíduos na faixa etária de 25 até 65 anos, 5,13% se encontram desempregados, para os jovens com idade entre 15 e 24 anos a taxa de desemprego era de 16,22%.

A taxa de desemprego mais elevada observada entre os jovens pode ser consequência, em parte, da dificuldade enfrentada pelos indivíduos nesse grupo que se encontram desempregados para conseguir emprego. Além disso, os jovens também apresentam alta rotatividade, e esse fator tem sido normalmente apontado na literatura como o mais relevante para explicar as diferenças nas taxas de desemprego entre

*Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). Av. Presidente Antonio Carlos, 51 (1409), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 20020-010. Tel. +55 21 3515 8586. E-mail: mauricio.reis@ipea.gov.br

[1] Ver, por exemplo, O'Higgins (2010) para uma comparação entre diversos países.

grupos etários.[2] Para um subgrupo específico de jovens, composto pelos que estão tentando ingressar pela primeira vez no mercado de trabalho, entretanto, a duração do desemprego pode desempenhar um papel importante.

O objetivo desse estudo é analisar a duração do desemprego dos jovens no Brasil, entre a entrada na população economicamente ativa e a obtenção do primeiro emprego. Mais especificamente, pretende-se investigar os fatores que influenciam a probabilidade de transição dos jovens do desemprego para o primeiro emprego, procurando identificar as variáveis que reduzem a duração do desemprego experimentada durante esse processo. Além disso, pretende-se estimar como a probabilidade de saída do desemprego depende da própria duração do desemprego dos jovens, e comparar o comportamento desse grupo com o apresentado por trabalhadores com experiência prévia no mercado de trabalho.

Os jovens podem não apenas passar por um período longo de desemprego até a obtenção de um trabalho, como esse emprego pode apresentar características específicas, associadas a certo grau de precariedade do posto de trabalho.[3] A saída da condição de desempregado pode envolver a transição dos jovens para diversos destinos possíveis, para um emprego no setor informal da economia, ou para um trabalho temporário, ou em tempo parcial, por exemplo.[4] Também faz parte dos objetivos do estudo, portanto, analisar quais os fatores que influenciam as probabilidades de transição do desemprego para cada um desses destinos.

Evidências para o Brasil relacionadas à transição dos jovens para o primeiro emprego são escassas, embora alguns estudos indiquem que esse grupo tenha um comportamento diferente dos demais desempregados. Menezes-Filho e Pichetti (2000), analisando os determinantes da duração do desemprego na região metropolitana de São Paulo, mostram que o fato do indivíduo nunca ter trabalhado anteriormente reduz significativamente a probabilidade de conseguir emprego, indicando uma dificuldade para se obter o primeiro trabalho. Monte, Araújo e Lima (2007) analisam transições do desemprego para o emprego, comparando indivíduos que procuram o reemprego com aqueles em busca do primeiro emprego. Os resultados, obtidos a partir do estimador de Kaplan-Meier, mostram que as probabilidades de permanência no desemprego após os períodos de 12 e 24 meses são maiores para o grupo procurando o primeiro emprego.

A análise empírica adotada nesse artigo é baseada na estimação de modelos de duração usando os dados da PME (Pesquisa Mensal de Emprego). Os resultados encontrados mostram que jovens sem experiência no mercado de trabalho têm probabilidades mais baixas de saírem do desemprego, mesmo em relação a indivíduos na mesma faixa etária que já tiveram trabalho anteriormente. Essa dificuldade dos jovens em busca do primeiro emprego é ainda maior para os trabalhos no setor formal, com contrato por tempo indeterminado e em tempo integral. Não se notam, porém, diferenças entre jovens e adultos que já trabalharam anteriormente.

O artigo está estruturado em 5 seções, além dessa introdução. Na seção 2, são descritos os dados da PME, utilizados na análise empírica. A seção 3 apresenta a abordagem empírica, e a seção 4 mostra uma análise descritiva relacionando transições do desemprego para o emprego. Na seção 5, são apresentados e comentados os resultados estimados para os determinantes da transição do desemprego para o emprego,

[2] Como mostra a decomposição da taxa de desemprego apresentada por Marston (1976), um grupo pode apresentar uma taxa elevada pela dificuldade para obter emprego dos indivíduos nesse grupo que se encontram desempregados, pela dificuldade dos integrantes desse grupo permanecerem empregados, ou por entradas e saídas constantes da força de trabalho. De acordo com Layard, Nickell e Jackman (1991), as taxas mais elevadas de desemprego para os jovens na OCDE se devem ao fato desse grupo ser mais propenso a ficar desempregado. Resultados semelhantes para o Brasil são apresentados por Fiori (2005).

[3] Farber (1997) apresenta evidências de que trabalhadores que perdem o emprego nos Estados Unidos são mais propensos a se reempregarem em trabalhos com arranjos alternativos, que envolvem emprego temporário, trabalho em tempo parcial ou como conta-própria. Farber (1997) mostra também que esses empregos normalmente representam um processo de transição para empregos convencionais em um período seguinte. É possível que os jovem que entram no mercado de trabalho experimentem um processo semelhante.

[4] É possível até que o emprego tenha essas três características simultaneamente.

assim como de transições que consideram múltiplos destinos de saída do desemprego. A seção 6 resume as principais conclusões do artigo.

## 2. DADOS

Na análise empírica, são utilizados dados da PME, que é calculada pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) para o período de janeiro de 2006 até dezembro de 2012. A PME é representativa das seis principais regiões metropolitanas brasileiras (Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador e São Paulo). Usando a estrutura longitudinal da PME, é possível computar saídas dos desempregados dessa condição para a de ocupado três meses depois.

Cada domicílio selecionado para fazer parte da PME deve ser entrevistado 8 vezes durante um período de 16 meses, caso não exista atrito. Em cada entrevista, são coletadas informações sobre todos os moradores do domicílio com 10 anos ou mais. O grupo de interesse nesse estudo é representado por jovens desempregados que nunca tiveram emprego anteriormente. Portanto, é selecionada uma amostra de jovens com idade entre 15 e 24 anos no período da primeira entrevista da PME, que declararam nunca terem trabalhado antes.

Para indivíduos que nunca trabalharam, a duração do desemprego pode ser calculada pelo tempo de procura por trabalho. Nos períodos posteriores à primeira entrevista, podem ser observadas transições de parte desses indivíduos para a condição de empregados. São incluídos na amostra os indivíduos que três meses após a primeira entrevista permaneceram desempregados ou transitaram para a condição de empregados. Usando esse critério, são selecionados 2.420 jovens desempregados que nunca trabalharam antes.

As trajetórias dos jovens que nunca trabalharam são comparadas com as de dois outros grupos, representados por jovens na mesma faixa de idade, entre 15 e 24 anos, mas que já trabalharam anteriormente, e por indivíduos com idade entre 25 e 60 anos, que também já tiveram trabalho. Para esses dois grupos, a duração do desemprego é construída a partir do tempo de procura por emprego, sem considerar que para parte dos indivíduos o tempo sem emprego pode ser mais curto. Isso é feito para manter a comparabilidade com a amostra de jovens que nunca trabalharam.[5] A amostra de jovens que já trabalharam tem 4.803 observações, enquanto a terceira amostra, de adultos, é composta de 9.462 observações.

Além das transições do desemprego para o emprego, também são analisadas situações que consideram as características do emprego de destino, caso o indivíduo consiga se empregar. Três diferentes critérios são usados para classificar o tipo de emprego. Primeiro, os empregos são classificados entre formais e informais. São definidos como formais os trabalhadores com carteira, os funcionários públicos, os empregadores e os trabalhadores por conta-própria que contribuem para a previdência. Empregados sem carteira e trabalhadores por conta-própria que não contribuem para a previdência são classificados como informais. Em seguida, os empregos são classificados entre aqueles com contrato por tempo indeterminado e os temporários, com prazo determinado. Finalmente, os empregos são divididos entre aqueles em tempo integral, definidos nesse artigo como empregos com 30 horas ou mais habitualmente trabalhadas na semana, e os empregos em tempo parcial, que compreendem as situações em que o número de horas habitualmente trabalhadas na semana é inferior a 30.

A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas para as amostra de jovens (com idade entre 15 e 24 anos) a procura do primeiro emprego, de jovens desempregados que já trabalharam, e de adultos (definidos aqui como indivíduos com idade entre 25 e 60 anos). Nota-se que os jovens procurando o primeiro emprego representam 14,1% do total de desempregados que fazem parte da amostra, enquanto os jovens que já trabalharam tem uma participação de 29,1% nesse total. A participação conjunta desses dois grupos de jovens, portanto, corresponde a quase metade do total de desempregados na amostra.[6]

[5] Essa definição de tempo de desemprego é a mesma utilizada por Menezes-Filho e Pichetti (2000).

[6] Levando-se em conta que a participação dos adultos que nunca trabalharam é pequena, os dados na Tabela 1 indicam que os jovens representam uma parcela substancial dos desempregados no Brasil.

**Tabela 1.** Estatísticas descritivas.

| | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam |
|---|---|---|---|
| Média de escolaridade (em anos) | 9,95 | 9,90 | 9,37 |
| Média de idade (em anos) | 19,15 | 20,77 | 36,13 |
| Mulheres (%) | 56,37 | 50,00 | 53,56 |
| Negros (%) | 54,83 | 52,65 | 51,66 |
| Frequenta a escola em $t = 1$- (%) | 43,74 | 27,07 | 8,25 |
| Indivíduos desempregados há mais de 12 meses em $t = 1$ (%) | 12,68 | 6,63 | 12,05 |
| Encontraram emprego em $t = 4$ (%) | 28,85 | 39,37 | 41,35 |
| Encontraram emprego formal em $t = 4$ (%) | 11,62 | 17,70 | 17,95 |
| Emprego com contrato indeterminado em $t = 4$ (%) | 21,58 | 31,32 | 29,34 |
| Ocupado com 30 horas trabalhadas ou mais em $t = 4$ (%) | 21,93 | 33,53 | 34,72 |
| Observações | 2.420 | 4.803 | 9.462 |
| Participação na amostra (%) | 14,12 | 29,11 | 56,77 |

*Notas:* A amostra inclui trabalhadores desempregados no período da primeira entrevista da PME. O período $t = 1$ representa a primeira entrevista, enquanto o período $t = 4$ representa a quarta entrevista do indivíduo, realizada 3 meses depois. Todos os valores são calculados considerando o peso de cada observação na amostra.
*Fonte:* PME 2006–2012.

De acordo com a Tabela 1, quase metade dos jovens procurando pelo primeiro emprego se encontrava frequentando a escola. Entre jovens que já trabalharam a proporção que se encontrava nessa situação diminui para cerca de um quarto, enquanto entre os adultos é de apenas 8%. A frequência à escola pode reduzir a intensidade de busca por emprego, embora a própria decisão de estudar possa ter sido influenciada, em parte, pela dificuldade para conseguir emprego. Percebe-se também que 12,7% dos jovens que nunca trabalharam estão procurando emprego há mais de 12 meses, porcentagem semelhante a de adultos com idade entre 25 e 60 anos. Entre os jovens que já trabalharam anteriormente, apenas 6,6% estão desempregados há mais de 12 meses, quase a metade da porcentagem registrada para os dois outros grupos.

Entre a primeira e a quarta entrevistas da PME, 29% dos jovens desempregados que nunca trabalharam encontraram um emprego. Essa porcentagem é muito inferior quando comparada aos valores registrados para os outros dois grupos. Entre os jovens que já trabalharam, 39% conseguiram emprego, enquanto entre os adultos, 41% conseguiram se empregar durante esse mesmo período de 3 meses. Quando se consideram as características dos empregos obtidos pelos indivíduos em cada um desses grupos, as diferenças também são acentuadas. Apenas 12% dos jovens em busca do primeiro emprego conseguiram se ocupar no setor formal, ou seja, entre os que conseguiram emprego, quase 2/3 foram para o setor informal. Para os dois outros grupos considerados, 18% dos desempregados obtiveram um emprego formal no período de três meses.

A Tabela 1 mostra também que 22% dos jovens na coluna 1 transitaram para empregos com prazo indeterminado, mesma porcentagem dos que conseguiram empregos com pelo menos 30 horas de trabalho na semana. Entre os jovens que já trabalharam, assim como entre os adultos, transições para empregos com essas características são bem mais frequentes. Cerca de 30% dos desempregos nesses dois últimos grupos transitaram para empregos com contrato por prazo indeterminado, enquanto em torno de 34% conseguiram empregos com 30 horas de trabalho ou mais.

## 3. MÉTODO EMPÍRICO

A análise empírica utilizada neste artigo é baseada na estimação de modelos de duração com os dados em painel da PME. Primeiramente, as transições do desemprego para o emprego são descritas através do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier, apresentado abaixo. Para isso, definimos a função de risco, que fornece a probabilidade instantânea de o indivíduo deixar o desemprego em um dado período $t$, dado que permaneceu desempregado até $t$. Essa função de risco pode ser escrita da seguinte forma:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t / T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \tag{1}$$

onde $F(t)$ é a função distribuição acumulada de $T$, e $f(t)$ é a função densidade de probabilidade. A função sobrevivência, representada por $S(t)$, onde $S(t) = 1 - F(t)$, oferece a probabilidade de que a duração do desemprego seja maior ou igual a $t$. O estimador de Kaplan-Meier para a função sobrevivência procura apresentar a probabilidade de permanência no desemprego em cada instante de tempo,

$$\hat{S}(t_m) = \prod_{r=1}^{m} \frac{N_r - E_r}{N_r}, \qquad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{2}$$

onde $N_r$ é o número de indivíduos que não saíram do desemprego e nem estavam censurados no período $t_{r-1}$, e $E_r$ é o número de indivíduos que transitaram do desemprego para o emprego entre os períodos $t_{r-1}$ e $t_r$.

Como mencionado acima, transições do desemprego para o emprego podem ser analisadas também levando em consideração o tipo de emprego obtido. Quando as saídas do desemprego envolvem múltiplos destinos, porém, não é adequado utilizar o estimador de Kaplan-Meier, mas a função de incidência acumulada, que na situação em que são considerados $j$ possíveis destinos de saída do desemprego pode ser representada por

$$\hat{I}_j(t_m) = \sum_{t=1}^{m} \hat{S}(t_m) \frac{d_{jm}}{n_m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, M - 1, \tag{3}$$

onde $\hat{S}(t_m)$ é o estimador de Kaplan-Meier para saídas de todos os tipos; $d_{jm}/d_m$ é um estimador da função de risco para saídas do tipo $j$, sendo $d_{jm}$ o número de transições do desemprego para o destino $j$ no período $t_m$; e $n_m$ é o número de indivíduos em risco no período $t_{m-1}$.

Para analisar a influências de determinadas covariadas sobre a duração do desemprego, também são utilizados modelos paramétricos e semi-paramétricos, em que a função de risco é condicionada nas seguintes características: idade, gênero, raça, anos de escolaridade, região metropolitana de residência, além de *dummies* de ano. Sendo $x$ o vetor de variáveis explicativas e utilizando uma função Weibull, a função de risco é dada por

$$h(t, x_i) = e^{x_i' \beta} \alpha t^{\alpha - 1}. \tag{4}$$

Se $\alpha > 1$, a dependência da duração é positiva, ou seja, a probabilidade de saída do desemprego se torna mais elevada quanto maior o tempo de desemprego do indivíduo. Se $\alpha < 1$, a probabilidade de saída do desemprego diminui com o tempo de desemprego. Na situação em que $\alpha = 1$, a probabilidade de saída do desemprego não depende do tempo de permanência nesse estado.[7]

Os resultados também são estimados usando o modelo de Cox de riscos proporcionais (Cox, 1972, 1975). A função de risco nesse modelo pode ser definida por

$$h(t, x_i) = \kappa(x) \lambda_0(t), \tag{5}$$

[7] Também são estimados modelos que consideram a presença de heterogeneidade não-observada entre os indivíduos. Essa heterogeneidade é introduzida através de um termo multiplicativo. Adotando uma função Weibull para $T$, a função de risco nesse caso é dada por $h(t, x_i, v_i) = v_i e^{x_i' \beta} \alpha t^{\alpha - 1}$, onde $v_i$ é um termo com distribuição gaussiana inversa que procura captar a heterogeneidade não observada.

onde $\kappa(x)$ é representada pela função $e^{x_i'\beta}$, e $\lambda_0(t)$ é a função de risco base, que é estimada de forma não-paramétrica.

Para considerar situações em que existem múltiplos destinos de saída do desemprego, a função de risco para o modelo paramétrico passa a ser representada por $h_j(t,x_i)=\alpha_j\lambda_{ji}^{\alpha}t^{\alpha-1}$, onde $\lambda_{ji}=e^{x_{ji}'\beta_j}$ $(j=1,2,\ldots)$ e o subscrito $j$ representa os destinos de saída do desemprego. Para o modelo semiparamétrico, a função de risco no caso de múltiplos destinos pode ser escrita como $h_j(t,x_i)=h_{j0}(t)\phi\left(x_i,\beta_j\right)$.

Os resultados obtidos a partir do estimador de Kaplan-Meier e da função de incidência acumulada são mostrados na seção 4. Os resultados estimados usando os modelos paramétricos e semiparamétricos são apresentados na seção 5.

## 4. UMA ANÁLISE DESCRITIVA DA DURAÇÃO DO DESEMPREGO

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir do estimador não paramétrico de Kaplan-Meier para transições entre o desemprego e o emprego, assim como para a função de incidência acumulada, que considera múltiplos destinos de saída do desemprego. Na Figura 1, nota-se que a probabilidade de continuar desempregado após um determinado período de tempo é sempre maior para os jovens que nunca trabalharam anteriormente do que para os outros dois grupos reportados. Após 4 trimestres, por exemplo, a probabilidade de um jovem que nunca trabalhou ainda permanecer desempregado é de 64%, enquanto para os jovens na mesma faixa etária (de 15 até 24 anos) que já tiveram trabalho anteriormente essa probabilidade é estimada em 44%. Para a amostra de indivíduos com idade 25 e 60 anos que já trabalharam, a probabilidade de permanência no desemprego após 4 trimestres é estimada em 47%. Considerando um período de 20 trimestres, a probabilidade estimada de jovens em busca do primeiro emprego ainda se encontrarem desempregados é de 34%. Para os outros dois grupos analisados essa probabilidade varia entre 12% e 16%.

A Figura 2 mostra os resultados estimados para a função de incidência acumulada considerando transições do desemprego para o emprego formal e para o emprego informal. Nota-se que para os três grupos analisados as probabilidade de deixar o desemprego para um emprego informal são maiores do que as probabilidades de saída para um emprego formal. A maior diferença, porém, é verificada entre os jovens que nunca trabalharam. Após 4 trimestres, a probabilidade de transição para um emprego

**Figura 1.** Estimador de Kaplan-Meier para a probabilidade de permanência no desemprego (Saídas do desemprego para o emprego).

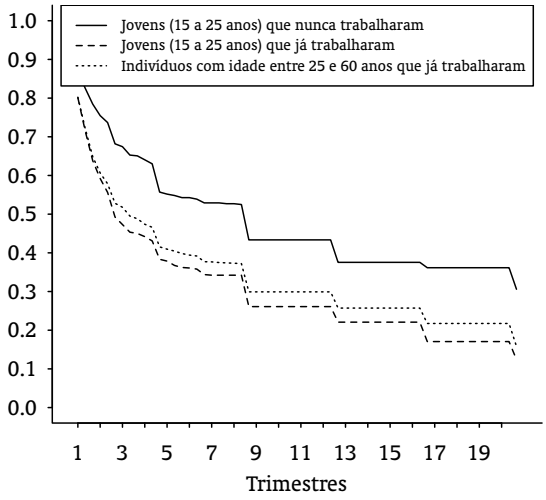
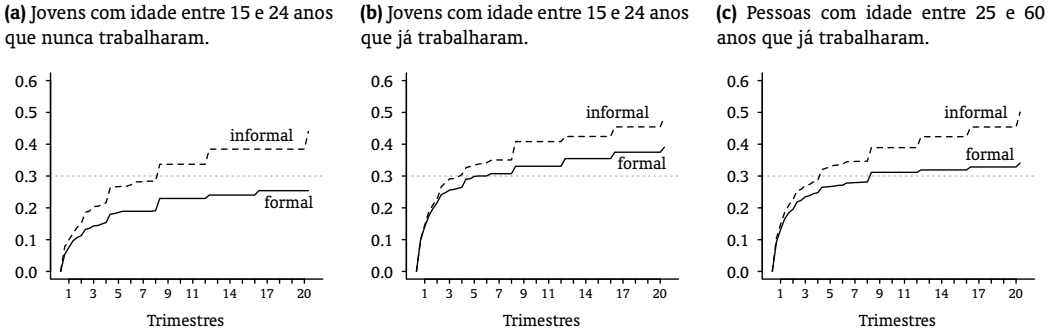


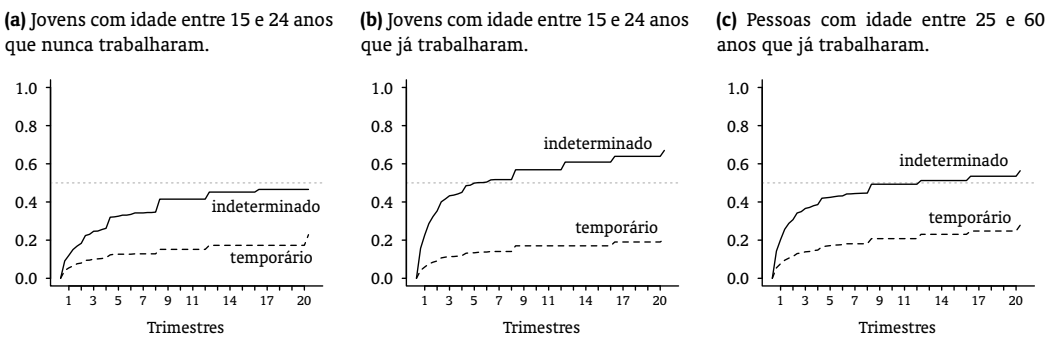
**Figura 2.** Função de incidência acumulada — transições do desemprego para empregos formais e informais.




informal é estimada em 21% nesse grupo, o que corresponde a 6 pontos percentuais a mais do que a probabilidade de saída para um emprego formal. Entre os jovens que já trabalharam, a probabilidade de transição para a informalidade após 4 trimestres é estimada em 30%, e a probabilidade de transição para um emprego formal é estimada em 26%. Para os indivíduos com idade entre 25 e 60 anos, as probabilidades estimadas de transição para empregos informais e formais são estimadas em 28% e 25%, respectivamente.

De acordo com os resultados reportados na Figura 3, jovens que nunca trabalharam anteriormente

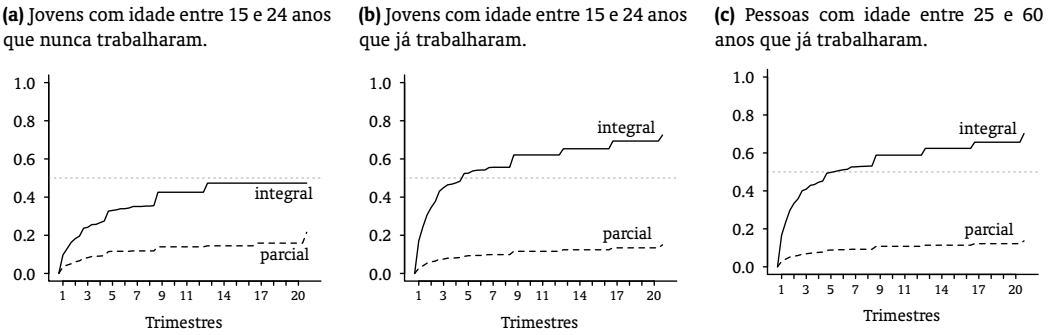
**Figura 3.** Função de incidência acumulada — transições do desemprego para empregos por prazo indeterminado ou temporários.




apresentam probabilidades de transição para empregos com contrato por prazo determinado semelhantes aos dois outros grupos de trabalhadores analisados. As probabilidades de saída do desemprego para um emprego por tempo indeterminado, no entanto, são bem mais baixas para os jovens procurando o primeiro emprego. Para esse grupo, a probabilidade estimada de saída do desemprego para um emprego com contrato por prazo indeterminado após 4 trimestres é estimada em 26%. Para os jovens e os adultos que já tiveram emprego antes, essas probabilidades são estimadas em 44% e 38%, respectivamente.

Na Figura 4, são consideradas transições do desemprego para empregos em tempo integral (com 30 horas habitualmente trabalhadas ou mais) ou parcial (com menos de 30 horas). As probabilidades de saída para empregos em tempo parcial são até mais intensas entre os jovens em busca do primeiro emprego do que para os demais grupos. Quando são consideradas transições para empregos em tempo integral, porém, nota-se que os grupos que compreendem indivíduos que já tiveram emprego anterior-

**Figura 4.** Função de incidência acumulada — transições do desemprego para empregos em tempo integral e parcial.




mente apresentam probabilidades próximas de 50% de deixarem o desemprego para esse estado após 4 trimestres. Para os jovens que nunca trabalharam, essa probabilidade, considerando o mesmo período, é estimada em 26%.

Resumindo, os resultados apresentados nesta seção mostram que a probabilidade de transição do desemprego para o emprego é mais baixa para os jovens que nunca trabalharam anteriormente. Para as saídas do desemprego envolvendo como destinos empregos classificados como de pior qualidade, os jovens que nunca trabalharam antes apresentam comportamentos semelhantes aos de grupos que tiveram alguma passagem pelo mercado de trabalho. Considerando transições do desemprego para empregos tidos como de melhor qualidade, entretanto, as probabilidades de saída do desemprego para esses destinos são mais baixas para os jovens procurando o primeiro emprego.

## 5. OS DETERMINANTES DA DURAÇÃO DO DESEMPREGO

### 5.1. Transições do desemprego para o emprego

A Tabela 2 mostra os resultados estimados para transições do desemprego para o emprego usando o modelo paramétrico com função Weibull, com e sem o termo para heterogeneidade não observada, e o modelo semi-paramétrico de Cox. As regressões são estimadas utilizando a amostra completa e incluem dummies para os jovens e as pessoas com idade entre 25 e 60 anos que tiveram trabalho anteriormente, enquanto o grupo de referência é representado por jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca tiveram trabalho antes da primeira entrevista da PME.

Em todas as colunas da Tabela 2, nota-se que a probabilidade estimada de transição para o emprego é sempre maior para indivíduos que já trabalharam anteriormente do que para os jovens procurando o primeiro emprego. Na coluna (1), os adultos apresentam um risco de saída do desemprego para o emprego 70% maior do que os jovens que nunca trabalharam. Entre os jovens, o fato de já ter trabalhado anteriormente aumenta em 64% o risco de saída do desemprego, de acordo com a coluna (1). Considerando a heterogeneidade não observada na coluna (2), as diferenças estimadas em relação ao grupo de referência, composto por jovens em busca do primeiro emprego, são ainda mais acentuadas.

Percebe-se também que a probabilidade de transição do desemprego para o emprego é menor para as mulheres, e também diminui com a idade e com a escolaridade. A dummy indicando que o indivíduo é negro não se mostra estatisticamente significativa em nenhum desses três modelos.

As diferenças por gênero, também identificadas em outros estudos na literatura econômica, podem ser atribuídas ao papel tradicionalmente desempenhado pelas mulheres nas tarefas domésticas, o que pode influenciar principalmente nas suas avaliações sobre possíveis propostas de emprego recebidas (Lynch, 1989). Menezes-Filho e Pichetti (2000) também analisam a relação entre a probabilidade de deixar

**Tabela 2.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego.

| | Weilbull | | Cox |
|---|---|---|---|
| | Sem heterogeneidade | Com heterogeneidade | |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,529 (0,053) | 0,797 (0,076) | 0,438 (0,044) |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,496 (0,045) | 0,750 (0,064) | 0,397 (0,038) |
| Idade | –0,011 (0,002) | –0,013 (0,003) | –0,005 (0,002) |
| Mulher | –0,280 (0,027) | –0,427 (0,038) | –0,250 (0,021) |
| Negro | 0,044 (0,031) | 0,039 (0,043) | 0,030 (0,024) |
| Escolaridade | –0,019 (0,004) | –0,029 (0,006) | –0,018 (0,003) |
| Parâmetro $\alpha$ | 0,882 (0,007) | 1,391 (0,011) | – |
| Parâmetro $\sigma^2$ | | 4,592 (0,129) | |
| Observações | 16.668 | 16.668 | 16.668 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

o desemprego e a idade e a escolaridade do trabalhador. Os resultados encontrados por esses autores são semelhantes aos reportados na Tabela 2, indicando que trabalhadores mais velhos e mais escolarizados, uma vez desempregados, apresentam maiores dificuldades para sair dessa situação para um emprego do que os mais jovens e menos escolarizados.[8] Na coluna (1), a dependência da duração é negativa, mas considerando a heterogeneidade não observada, na coluna (2), a dependência da duração passa a ser positiva. De acordo com esse último resultado, quanto maior o tempo de desemprego, maior a probabilidade de transição para o emprego.

Como mostrado na Tabela 1, uma parcela elevada dos jovens, principalmente os que não tiveram trabalho anteriormente, se encontrava frequentando a escola. A Tabela A-1, no Apêndice A, apresenta os resultados estimados para uma amostra restrita a indivíduos que não frequentavam a escola, usando as mesmas especificações da Tabela 2. Os resultados obtidos com essa amostra restrita são bastante semelhantes aos apresentados na Tabela 2.

As decisões sobre oferta de trabalho normalmente são bastante diferentes entre homens e mulheres, assim como a demanda por trabalho por parte dos empregadores também não é necessariamente igual para homens e mulheres. Para analisar se as transições do desemprego para o emprego apresentam diferenças por gênero, as tabelas A-2 e A-3, no Apêndice, mostram os resultados estimados separadamente para homens e mulheres. Algumas diferenças importantes por gênero podem ser notadas. Quando os adultos são comparados aos jovens que nunca trabalharam anteriormente, por exemplo, nota-se que a diferença na probabilidade de transição do desemprego para o emprego é bem maior entre os homens do que entre as mulheres. Já os resultados estimados para as probabilidades de transição dos jovens que já trabalharam em relação aos que nunca tiveram emprego são semelhantes entre homens e mulheres.

Na Tabela 3, as probabilidades de transição do desemprego para o emprego são estimadas usando um modelo paramétrico, separadamente para três diferentes amostras: (i) de jovens que nunca trabalharam,

[8] Os resultados são robustos a uma especificação que representa a escolaridade através de dummies para os seguintes grupos: (i) 4 a 7 anos de estudo, (ii) 8 a 10 anos, (iii) 11 a 14 anos, e (iv) 15 anos de estudo ou mais.

**Tabela 3.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego (Weilbull).

| | Sem heterogeneidade | | | Com heterogeneidade | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| Idade | –0,087 | –0,029 | –0,009 | –0,121 | –0,034 | –0,012 |
| | (0,020) | (0,012) | (0,002) | (0,030) | (0,016) | (0,003) |
| Mulher | –0,185 | –0,192 | –0,342 | –0,295 | –0,297 | –0,521 |
| | (0,078) | (0,051) | (0,035) | (0,113) | (0,070) | (0,049) |
| Negro | –0,030 | –0,030 | 0,096 | –0,060 | –0,063 | 0,114 |
| | (0,087) | (0,056) | (0,040) | (0,124) | (0,078) | (0,056) |
| Escolaridade | 0,040 | –0,011 | –0,020 | 0,050 | –0,017 | –0,031 |
| | (0,022) | (0,011) | (0,005) | (0,030) | (0,015) | (0,007) |
| Parâmetro $\alpha$ | 0,919 | 0,954 | 0,852 | 1,434 | 1,506 | 1,348 |
| | (0,019) | (0,013) | (0,008) | (0,036) | (0,021) | (0,013) |
| Parâmetro $\sigma^2$ | | | | 6,197 | 4,487 | 4,451 |
| | | | | (0,858) | (0,211) | (0,158) |
| Observações | 2.416 | 4.802 | 9.450 | 2.416 | 4.802 | 9.450 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem dummies para as regiões metropolitanas e para os anos.

(ii) de jovens que já trabalharam, e (iii) de adultos que tiveram trabalho anteriormente. Com exceção da escolaridade e da dummy para indivíduos classificados como negros, as demais variáveis apresentam resultados, para cada um dos grupos, semelhantes aos obtidos com a amostra completa na Tabela 2. A dummy *negro* é positiva e significativa apenas para os adultos, nas colunas (3) e (6). Já com relação a variável *escolaridade*, os coeficientes estimados são positivos para jovens que nunca trabalharam, nas colunas (1) e (4), enquanto para os adultos a probabilidade de saída do desemprego diminui com os anos de estudo. Para os três grupos considerados na Tabela 3, a dependência da duração é negativa quando os modelos não consideram a heterogeneidade não observada. Incluindo o termo para captar essa heterogeneidade, a dependência da duração passa a ser positiva, como mostram os resultados nas colunas (4), (5) e (6).

Na Tabela 4, são mostradas as evidências a partir da estimação de um modelo de Cox. De maneira geral, os resultados encontrados são semelhantes aos apresentados na Tabela 3. Para os jovens procurando o primeiro emprego, por exemplo, a probabilidade de saída do desemprego diminui com a idade, e também é menor para as mulheres em relação aos homens. Ainda para esse grupo, a probabilidade de transitar do desemprego para o emprego aumenta com a escolaridade, enquanto o efeito estimado para essa mesma variável é negativo para os adultos, sendo não significativo para os jovens que já trabalharam anteriormente.

### 5.2. Transições do desemprego para o emprego e a inatividade

Antes de mostrar os resultados de transições envolvendo diferentes tipos de emprego, esta seção apresenta as probabilidades estimadas de transição do desemprego, considerando saídas para o emprego ou para a inatividade. Indivíduos desempregados há muito tempo podem decidir sair do mercado de trabalho por desalento. Reis e Aguas (2014) encontram evidências para o Brasil indicando que a probabilidade de transição do desemprego para a inatividade se torna cada vez maior com o tempo de desemprego.

Os resultados obtidos na Tabela 5 para transições do desemprego para o emprego não são muito diferentes daqueles apresentados na coluna (2) da Tabela 2 e nas colunas (4), (5) e (6) da Tabela 3, em que o único destino de saída do desemprego considerado é o emprego. Nota-se, porém, que as diferenças dos jovens que nunca trabalharam em relação aos demais grupos são mais acentuadas na Tabela 5. Outra diferença que pode ser apontada se refere ao coeficiente da variável *idade*, que deixa de ser significativo para os jovens. Quanto às transições do desemprego para a inatividade, os resultados mostram que jovens procurando o primeiro emprego apresentam uma probabilidade menor de transição para a inatividade do que os adultos. Além disso, a dependência da duração é positiva para ambos os tipos de transição.

**Tabela 4.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego (Cox).

| | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam |
|---|---|---|---|
| Variável | (1) | (2) | (3) |
| Idade | −0,047 (0,018) | −0,007 (0,009) | −0,005 (0,002) |
| Mulher | −0,175 (0,067) | −0,162 (0,040) | −0,308 (0,028) |
| Negro | −0,026 (0,074) | −0,019 (0,067) | −0,067 (0,032) |
| Escolaridade | −0,028 (0,018) | −0,012 (0,008) | −0,021 (0,004) |
| Observações | 2.416 | 4.802 | 9.450 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem dummies para as regiões metropolitanas e para os anos.

**Tabela 5.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego ou a inatividade (Modelo Weilbull com heterogeneidade não observada).

| | Amostra completa | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Emprego* | *Inatividade* | *Emprego* | *Inatividade* | *Emprego* | *Inatividade* | *Emprego* | *Inatividade* |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 1,091 | –0,328 | | | | | | |
| | (0,073) | (0,060) | | | | | | |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 1,018 | –0,063 | | | | | | |
| | (0,062) | (0,049) | | | | | | |
| Idade | –0,019 | –0,011 | –0,020 | –0,220 | –0,005 | –0,125 | –0,025 | 0,000 |
| | (0,003) | (0,002) | (0,028) | (0,020) | (0,015) | (0,015) | (0,003) | (0,003) |
| Mulher | –0,672 | 0,306 | –0,361 | 0,189 | –0,428 | 0,190 | –0,852 | 0,466 |
| | (0,037) | (0,034) | (0,113) | (0,075) | (0,069) | (0,066) | (0,048) | (0,049) |
| Negro | 0,087 | –0,050 | 0,045 | –0,132 | –0,053 | –0,019 | 0,146 | –0,048 |
| | (0,042) | (0,037) | (0,127) | (0,085) | (0,076) | (0,074) | (0,055) | (0,053) |
| Escolaridade | –0,021 | –0,034 | 0,085 | –0,036 | –0,004 | –0,030 | –0,029 | –0,012 |
| | (0,006) | (0,005) | (0,029) | (0,018) | (0,014) | (0,014) | (0,007) | (0,007) |
| Parâmetro $\alpha$ | 1,354 | 1,441 | 1,458 | 1,528 | 1,500 | 1,555 | 1,311 | 1,405 |
| | (0,010) | (0,009) | (0,037) | (0,024) | (0,019) | (0,020) | (0,013) | (0,012) |
| Parâmetro $\sigma^2$ | 7,196 | 7,641 | 2,715 | 7,316 | 6,861 | 7,303 | 6,770 | 8,357 |
| | (0,201) | (0,167) | (1,630) | (0,460) | (0,301) | (0,292) | (0,248) | (0,261) |
| Observações | 26.842 | 26.842 | 4.481 | 4.481 | 7.223 | 7.223 | 1.293 | 14.293 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

### 5.3. Transições do desemprego para empregos formais e informais

A Tabela 6 mostra os resultados estimados, usando o modelo de riscos competitivos com função Weibull e um termo para heterogeneidade não observada, para transições do desemprego para empregos formais e informais. Nas duas primeiras colunas dessa tabela, são reportados os resultados estimados com a amostra completa. Nas demais colunas, de (3) até (8), são mostrados os resultados estimados separadamente para cada um dos três grupos de trabalhadores definidos nesse artigo.

Nota-se nas colunas (1) e (2) que as probabilidades de transição do desemprego para o emprego formal, assim como para o emprego informal, são maiores para indivíduos que já tiveram alguma experiência no mercado de trabalho. Além disso, as diferenças referentes à probabilidade de saída do desemprego entre esses grupos que já trabalharam anteriormente e os jovens procurando o primeiro emprego são mais acentuadas no caso de transições para um emprego formal. Em quase todas as equações, os coeficientes encontrados para as variáveis *idade* e *mulher* são negativos e significativos, enquanto os coeficientes obtidos para a variável *negro* são não significativos em todo os casos reportados.

Considerando a amostra completa, os resultados indicam que a escolaridade aumenta a probabilidade de transição do desemprego para o emprego formal, e reduz a probabilidade de transição para o emprego informal. Resultados semelhantes são encontrados para os grupos de trabalhadores que já tiveram alguma experiência prévia no mercado de trabalho. Para os jovens em busca do primeiro emprego, porém, os resultados mostram que um nível mais alto de escolaridade aumenta a probabilidade de transição para o emprego formal, mas o coeficiente referente a saída do desemprego para o emprego informal não se mostra significativo. Em todos os modelos estimados na Tabela 5 a dependência da duração é positiva, tanto para transições para o setor formal quanto para transições que envolvem o setor informal.

### 5.4. Transições do desemprego para empregos com contrato por prazo determinado e empregos com prazo indeterminado

Os resultados estimados para a probabilidade de saída do desemprego considerando como destinos empregos com prazo indeterminado e empregos temporários são mostrados na Tabela 7. A coluna (1) indica que indivíduos que já trabalharam têm probabilidades de transição do desemprego para um emprego com contrato por prazo indeterminado bem maiores do que os jovens que nunca trabalharam. Para as saídas que tem como destino um emprego temporário, na coluna (2), as probabilidades estimadas para os dois grupos com experiência prévia no mercado de trabalho são maiores do que para os jovens buscando o primeiro emprego, mas as diferenças não são tão acentuadas quanto as observadas na coluna (1).

Os resultados estimados para os anos de escolaridade, usando o total da amostra, indicam que aumentos na escolaridade reduzem as probabilidades de saída tanto para emprego por prazo indeterminado quanto para empregos temporários. Esses mesmos resultados são observados para os adultos que já trabalharam. Para os jovens que nunca trabalharam, os coeficientes estimados não são significativamente diferentes de zero, enquanto para os jovens que já trabalharam anteriormente a probabilidade de transição para um emprego com contrato por prazo indeterminado diminui com os anos de estudo. Considerando os jovens que nunca trabalharam, nota-se que a idade está associada a probabilidades mais baixas de transição para os dois tipos de emprego, enquanto as mulheres se mostram menos propensas a transitar para empregos com contrato por prazo indeterminado do que os homens. Para os dois destinos de saída do desemprego considerados na Tabela 7, os resultados para os três grupos de trabalhadores analisados mostram uma dependência da duração positiva.

### 5.5. Transições do desemprego para empregos em tempo integral e em tempo parcial

Na Tabela 8, são apresentados os resultados estimados para o modelo de riscos competitivos que considera dois destinos possíveis de saída do desemprego: i) um emprego em tempo integral, definido como

**Tabela 6.** Resultados estimados para transições do desemprego para empregos nos setores formal e informal (Modelo Weilbull com heterogeneidade não observada).

| | Amostra completa | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Emprego formal | Emprego informal | Emprego formal | Emprego informal | Emprego formal | Emprego informal | Emprego formal | Emprego informal |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,948 | 0,489 | | | | | | |
| | (0,119) | (0,097) | | | | | | |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,892 | 0,604 | | | | | | |
| | (0,095) | (0,084) | | | | | | |
| Idade | –0,018 | –0,004 | –0,071 | –0,161 | –0,010 | –0,056 | –0,024 | –0,002 |
| | (0,004) | (0,004) | (0,044) | (0,039) | (0,022) | (0,021) | (0,004) | (0,004) |
| Mulher | –0,549 | –0,352 | –0,358 | –0,248 | –0,282 | –0,313 | –0,694 | –0,392 |
| | (0,054) | (0,049) | (0,166) | (0,149) | (0,098) | (0,095) | (0,071) | (0,064) |
| Negro | 0,038 | 0,051 | –0,172 | 0,024 | –0,065 | –0,033 | 0,121 | 0,113 |
| | (0,061) | (0,055) | (0,186) | (0,166) | (0,110) | (0,104) | (0,082) | (0,073) |
| Escolaridade | 0,044 | –0,084 | 0,089 | 0,028 | 0,102 | –0,099 | 0,032 | –0,077 |
| | (0,009) | (0,008) | (0,045) | (0,039) | (0,022) | (0,019) | (0,011) | (0,009) |
| Parâmetro $\alpha$ | 1,36 | 1,39 | 1,36 | 1,48 | 1,48 | 1,52 | 1,33 | 1,36 |
| | (0,01) | (0,01) | (0,05) | (0,05) | (0,03) | (0,03) | (0,02) | (0,02) |
| Parâmetro $\sigma^2$ | 8,77 | 9,00 | 9,59 | 13,12 | 7,96 | 9,10 | 8,74 | 8,56 |
| | (0,42) | (0,33) | (2,068) | (2,579) | (0,59) | (0,54) | (0,56) | (0,40) |
| Observações | 17.129 | 17.129 | 2.416 | 2.416 | 4.802 | 4.802 | 9.450 | 9.450 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

**Tabela 7.** Resultados estimados para transições do desemprego para empregos por prazo indeterminado e empregos temporários. (Modelo Weilbull com heterogeneidade não observada).

| | Amostra completa | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Prazo indeterm. | Temporário | Prazo indeterm. | Temporário | Prazo indeterm. | Temporário | Prazo indeterm. | Temporário |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,878 | 0,273 | | | | | | |
| | (0,086) | (0,137) | | | | | | |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,880 | 0,318 | | | | | | |
| | (0,074) | (0,124) | | | | | | |
| Idade | –0,022 | 0,018 | –0,127 | –0,115 | –0,043 | 0,000 | –0,024 | 0,016 |
| | (0,003) | (0,005) | (0,035) | (0,054) | (0,018) | (0,034) | (0,004) | (0,005) |
| Mulher | –0,295 | –0,822 | –0,317 | –0,227 | –0,227 | –0,551 | –0,302 | –1,069 |
| | (0,043) | (0,070) | (0,135) | (0,201) | (0,078) | (0,145) | (0,057) | (0,090) |
| Negro | 0,047 | 0,013 | –0,137 | 0,129 | –0,023 | –0,219 | 0,121 | 0,082 |
| | (0,049) | (0,079) | (0,149) | (0,221) | (0,086) | (0,161) | (0,066) | (0,100) |
| Escolaridade | –0,033 | –0,022 | 0,058 | 0,038 | –0,035 | 0,049 | –0,031 | –0,028 |
| | (0,007) | (0,011) | (0,036) | (0,055) | (0,016) | (0,033) | (0,008) | (0,012) |
| Parâmetro $\alpha$ | 1,372 | 1,404 | 1,477 | 1,359 | 1,501 | 1,521 | 1,333 | 1,389 |
| | (0,012) | (0,020) | (0,048) | (0,060) | (0,023) | (0,040) | (0,015) | (0,025) |
| Parâmetro $\sigma^2$ | 5,963 | 19,608 | 9,802 | 17,219 | 5,521 | 22,448 | 5,873 | 17,506 ; |
| | (0,197) | (1,120) | (1,738) | (3,967) | (0,297) | (2,138) | (0,246) | (1,291) |
| Observações | 17.129 | 17.129 | 2.416 | 2.416 | 4.802 | 4.802 | 9.450 | 9.450 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

**Tabela 8.** Resultados estimados para transições do desemprego para o empregos em tempo integral e parcial. (Modelo Weilbull com heterogeneidade não observada).

| | Amostra completa | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que nunca trabalharam | | Jovens com idade entre 15 e 24 anos que já trabalharam | | Pessoas com idade entre 25 e 60 anos que já trabalharam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Tempo integral | Tempo parcial | Tempo integral | Tempo parcial | Tempo integral | Tempo parcial | Tempo integral | Tempo parcial |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,895<br>(0,083) | −0,165<br>(0,166) | | | | | | |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,908<br>(0,072) | 0,007<br>(0,141) | | | | | | |
| Idade | −0,012<br>(0,003) | −0,004<br>(0,007) | −0,071<br>(0,034) | −0,272<br>(0,063) | −0,018<br>(0,017) | −0,111<br>(0,042) | −0,015<br>(0,003) | 0,003<br>(0,007) |
| Mulher | −0,601<br>(0,041) | 0,441<br>(0,092) | −0,237<br>(0,131) | −0,425<br>(0,218) | −0,401<br>(0,076) | 0,352<br>(0,177) | −0,753<br>(0,053) | −0,793<br>(0,126) |
| Negro | 0,114<br>(0,046) | −0,344<br>(0,100) | 0,012<br>(0,143) | −0,328<br>(0,241) | −0,002<br>(0,084) | −0,414<br>(0,191) | 0,195<br>(0,061) | −0,328<br>(0,138) |
| Escolaridade | −0,022<br>(0,007) | −0,072<br>(0,015) | 0,046<br>(0,033) | 0,086<br>(0,007) | −0,015<br>(0,016) | −0,025<br>(0,038) | −0,023<br>(0,008) | −0,072<br>(0,018) |
| Parâmetro $\alpha$ | 1,373<br>(0,011) | 1,401<br>(0,025) | 1,418<br>(0,042) | 1,475<br>(0,073) | 1,493<br>(0,022) | 1,556<br>(0,057) | 1,346<br>(0,015) | 1,360<br>(0,033) |
| Parâmetro $\sigma^2$ | 5,435<br>(0,167) | 29,387<br>(2,475) | 8,538<br>(1,301) | 20,283<br>(5,118) | 5,148<br>(0,252) | 31,211<br>(5,327) | 5,248<br>(0,206) | 29,745<br>(3,297) |
| Observações | 17.129 | 17.129 | 2.416 | 2.416 | 4.802 | 4.802 | 9.450 | 9.450 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

um emprego com 30 horas ou mais habitualmente trabalhadas, ou ii) um emprego em tempo parcial, que é caracterizado nesse artigo por menos de 30 horas habitualmente trabalhadas na semana. Percebe-se na coluna (1) que os dois grupos de indivíduos que já trabalharam anteriormente, tanto aqueles com idade entre 25 e 60 anos quanto os jovens com idade entre 15 e 24 anos, apresentam probabilidades mais altas de transitarem para um emprego em tempo integral do que os jovens que nunca trabalharam anteriormente. As diferenças estimadas para transições do desemprego para empregos em tempo parcial, entretanto, não são estatisticamente significativas.

A Tabela 8 mostra que algumas variáveis apresentam efeitos bastante distintos dependendo do tipo de transição e do grupo de trabalhadores considerados. Para os dois grupos com alguma experiência prévia no mercado de trabalho, as mulheres apresentam probabilidades mais baixas de transição para um emprego em tempo integral do que os homens, mas probabilidades mais elevadas de transição para um emprego em tempo parcial. Entre os jovens que nunca trabalharam, entretanto, as probabilidades estimadas de saída do desemprego para as mulheres são menores nos dois tipos de destino.

Para os adultos que já tiveram trabalho, a escolaridade também apresenta coeficientes negativos para os dois destinos de saída do desemprego. Já para os jovens procurando o primeiro emprego, os resultados mostram que a probabilidade de saída para um emprego em tempo parcial aumenta com a escolaridade, enquanto o coeficiente referente a transições para empregos em tempo integral não se mostra significativamente diferente de zero. Para os três grupos de trabalhadores reportados na Tabela 8, as evidências indicam que a probabilidade de transição do desemprego para qualquer um dos dois tipos de emprego aumenta com a duração do desemprego.

## 6. CONCLUSÕES

Neste artigo, foram analisadas as transições dos jovens do desemprego até o primeiro emprego, usando informações longitudinais da PME. As trajetórias desses jovens foram comparadas com as apresentadas por dois outros grupos, formados por jovens na mesma faixa etária que já tiveram emprego anteriormente, e por indivíduos mais velhos, com idade entre 25 e 60 anos, também com alguma experiência no mercado de trabalho.

Os resultados indicam que jovens em busca do primeiro emprego apresentam probabilidades menores de sair do desemprego do que os demais trabalhadores que já tiveram emprego antes. No entanto, a situação dos jovens que já trabalharam anteriormente parece bastante semelhante a dos adultos. Portanto, parece que a dificuldade dos jovens transitarem do desemprego para o emprego está associada particularmente ao primeiro emprego. Uma vez adquirida alguma experiência no mercado de trabalho, indivíduos nesse grupo etário não mostram condições necessariamente piores do que os trabalhadores mais velhos no que se refere à probabilidade de conseguir emprego.

As evidências também mostram que algumas variáveis influenciam a probabilidade de transição do desemprego para o emprego de uma forma particular para os jovens em busca do primeiro emprego. A escolaridade, por exemplo, é uma variável associada a menores probabilidades de saída do desemprego para os indivíduos com experiência prévia no mercado de trabalho, o que pode estar relacionado com salários de reserva mais elevados para os mais escolarizados. Esse efeito compensaria a maior propensão a receber ofertas de emprego por parte dos trabalhadores mais escolarizados. Para os jovens procurando o primeiro emprego, no entanto, a escolaridade é um fator que aumenta a probabilidade de sair do desemprego. Níveis mais elevados de educação, portanto, podem acelerar esse processo de transição até o primeiro emprego.

As diferenças nos resultados estimados entre indivíduos com experiência prévia no mercado de trabalho e jovens procurando o primeiro emprego se mostram mais acentuadas para transições que tem como destino empregos considerados de melhor qualidade, como empregos no setor formal, com contratos por tempo indeterminado, ou em tempo integral. Já empregos temporários, no setor informal, ou em tempo parcial parecem oferecer oportunidades relativamente melhores para os jovens ingressarem pela primeira vez no mercado de trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Cox, D. R. (1972). Regression models and life tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, *34*(2), 187–220.

Cox, D. R. (1975). Partial likelihood. *Biometrika*, *62*(2), 269–76.

Farber, H. (1997). *Alternative employment arrangements as a response to job loss.* (Mimeo)

Fiori, P. (2005). Desemprego dos jovens no brasil. *Revista da ABET*, *5*(1), 30–60.

Layard, R., Nickell, S. & Jackman, R. (1991). *Unemployment: Macroeconomic performance and the labour market*. Oxford University Press.

Lynch, L. M. (1989). The youth labor market in the eighties: Determinants of re-employment probabilities for young men and women. *Review of Economics and Statistics*, *71*(1), 37–45.

Marston, S. (1976). Employment stability and high unemployment rates. *Brooking Papers on Economic Activity*, *1*, 169–203.

Menezes-Filho, N. A., & Pichetti, P. (2000). Os determinantes da duração do desemprego no Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *30*(1).

Monte, P., Araújo, T. & Lima, R. (2007). Primeiro emprego e reemprego: análise de inserção ocupacional e duração do desemprego no Brasil metropolitano. *Economia e Desenvolvimento*, *7*(1), 139–177.

O'Higgins, N. (2010). Youth labour markets in Europe and Central Asia. *IZA Discussion Paper Nº 5094*.

Reis, M., & Aguas, M. (2014). Duraçao do desemprego e transições para o emprego formal, a inatividade e a informalidade. *Economia Aplicada*, *18*(1), 35–50.


## A. APÊNDICE

**Tabela A-1.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego(individuos que não frequentavam a escola).

| | Weilbull | | Cox |
|---|---|---|---|
| | Sem heterogeneidade | Com heterogeneidade | |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,477 (0,063) | 0,731 (0,090) | 0,392 (0,052) |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,467 (0,058) | 0,710 (0,082) | 0,364 (0,048) |
| Idade | –0,010 (0,002) | –0,013 (0,003) | –0,005 (0,002) |
| Mulher | –0,282 (0,028) | –0,432 (0,041) | –0,256 (0,023) |
| Negro | 0,062 (0,034) | 0,068 (0,047) | 0,042 (0,027) |
| Escolaridade | –0,021 (0,002) | –0,032 (0,007) | –0,021 (0,004) |
| Parâmetro $\alpha$ | 0,871 (0,007) | 1,375 (0,012) | – |
| Parâmetro $\sigma^2$ | | 4,441 (0,134) | |
| Observações | 13.517 | 13.517 | 13.517 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

**Tabela A-2.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego (Homens).

| | Weilbull | | Cox |
|---|---|---|---|
| | Sem heterogeneidade | Com heterogeneidade | |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,669 (0,075) | 0,991 (0,107) | 0,546 (0,061) |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,510 (0,064) | 0,771 (0,092) | 0,406 (0,054) |
| Idade | –0,015 (0,003) | –0,019 (0,004) | –0,008 (0,002) |
| Negro | 0,101 (0,043) | 0,118 (0,060) | 0,068 (0,033) |
| Escolaridade | –0,030 (0,006) | –0,047 (0,009) | –0,029 (0,005) |
| Parâmetro $\alpha$ | 0,891 (0,009) | 1,410 (0,015) | – |
| Parâmetro $\sigma^2$ | | 4,192 (0,144) | |
| Observações | 7.839 | 7.839 | 7.839 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.

**Tabela A-3.** Resultados estimados para transições do desemprego para o emprego (Mulheres).

| | Weilbull | | Cox |
|---|---|---|---|
| | Sem heterogeneidade | Com heterogeneidade | |
| *Variável* | (1) | (2) | (3) |
| Indivíduo com idade entre 25 e 60 anos | 0,372 (0,076) | 0,599 (0,108) | 0,322 (0,063) |
| Jovem (15–24 anos) que já trabalhou | 0,487 (0,064) | 0,734 (0,090) | 0,393 (0,053) |
| Idade | –0,005 (0,003) | –0,007 (0,004) | –0,002 (0,002) |
| Negro | –0,010 (0,044) | –0,032 (0,061) | –0,006 (0,033) |
| Escolaridade | –0,005 (0,006) | –0,007 (0,009) | –0,005 (0,005) |
| Parâmetro $\alpha$ | 0,877 (0,009) | 1,371 (0,016) | – |
| Parâmetro $\sigma^2$ | | 4,911 (0,231) | |
| Observações | 8.829 | 8.829 | 8.829 |

*Notas:* Os erros-padrão são apresentados entre parênteses. Todas as regressões incluem *dummies* para as regiões metropolitanas e para os anos.