r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160020
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 379–398

Shortcomings of the Brazilian Pre-Salt Auction Design*

Aloisio Araujo†, Clara Costellini‡, Otávio Damé§, Paulo K. Monteiro¶

Contents: **1. Introduction; 2. The common value model; 3. Share Bidding Auctions; 4. Ranking of expected revenue; 5. Auctions with Sliding Scale Royalty Rates; 6. Conclusions; Appendix.**

Keywords: **Pre-Salt Auction, Profit Share Auction, Sliding Scale.**

JEL Code: **D44.**

The Brazilian government instituted a new regulatory framework for auctioning pre-salt oil reserves to replace the previous concession regime with a profit-share bidding auction. Motivated by the new rules, we present a model of revenue share bidding auction under affiliation. We prove the existence of monotone pure-strategy equilibrium and characterize its equilibrium bidding function. In addition, we prove that it generates an expected revenue at least as large as the usual bonus bidding auction. Next, we introduce in the model a function representing a royalty rate that is contingent on the value of the object. We suggest instrument improves expected revenue in both models, reducing the gap between them. Analyzing this new regulatory framework from the viewpoint of theoretical and numerical results obtained, we discuss some consequences and argue that the previous regime dominates the new one.

O governo Brasileiro estabeleceu regras de partilha de produção, regulamentando o leilão do pré-sal, em subtituição ao regime de concessão anterior. Motivados por essas mudanças estudamos aqui um modelo de leilão com repartição de receitas. Demonstramos a existência de equilíbrio monótono e determinamos a sua forma analítica. Em seguida introduzimos no modelo uma função representando a taxa sobre os direitos de exploração, contingente no valor da produção. Este instrumento pode aumentar a receita esperada tanto do leilão de bonus quanto do leilão de partilha e reduzir a diferença entre ambos. Analisando o novo regimento do ponto de vista dos resultados teóricos e numéricos obtidos, discutimos algumas consequências e argumentamos que o regime de concessão anterior é superior.

*We thank the comments of Flávio Menezes and three anonymous referees. We acknowledge the financial support of CNPq-Brazil.

†Escola Brasileira de Economia e Finanças, Fundação Getúlio Vargas (FGV/EPGE). Praia de Botafogo 190, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 22250-900. Email: aloisio.araujo@fgv.br

‡FGV/EPGE. Email: costellini@gmail.com

§FGV/EPGE. Email: otaviodame@gmail.com

¶FGV/EPGE. Email: pklm@fgv.br

1. INTRODUCTION

In 2007, Brazil discovered oil reserves in the pre-salt layer, which put the country on track to becoming one of the top oil producers in the world. According to estimates from the *World Energy Outlook 2013* (IEA, 2013), the country's oil production will triple by 2035, turning Brazil into the world's sixth-largest oil producer. The total extent of pre-salt recoverable oil and natural gas is estimated to be around 100 billion barrels of oil equivalent. This discovery tripled the amount of confirmed reserves in the country.

The new discoveries of pre-salt oil fields led to the institution of a new regulatory framework. The Law No. 12351 of December 22, 2010 established a production sharing contract regime to be applied especially for licensing of the pre-salt reserves and other areas considered strategic by the government. In this new regime, government and oil companies (henceforth OC) will share the profit generated by the production of oil and gas, allowing the Union to earn a portion of the wealth yielded by the pre-salt fields. According to the legal rules, the winner will be the one who offers to the Union the highest share of profit oil, defining a profit-share bidding auction.

The article 4 of Law No. 12351 determines that Petrobras must be the sole operator of all blocks contracted under profit-share regime. The operator is entitled to a minimum stake of 30% of the consortium. If Petrobras was not participating in the auction or was part of one of the defeated consortia, the winning bidder must form a new consortium with the Brazilian company. As part of this new consortium, Petrobras adheres to tender protocol rules and winning bid terms. Moreover, the proprietary rights and obligations will be proportional to the stakes of each member of the consortium.

In addition to a share of the profit oil, the winning bidder will have to pay the Union a signing bonus at the moment of signature the contract, and royalties rate of 15% of the value of production. The value of the signing bonus is fixed and predetermined in tender protocol, so it is not part of the bid. Signing bonus and royalties can not be reimbursed under any circumstances. In the event of commercial discovery, royalties will be subtracted from total production in profit calculation, and the winning consortium acquires the right to appropriate the production volume corresponding to the royalties due. However, the same does not happen to the value of the signing bonus, considered a non-recoverable cost.

One important difference between the concession and profit-share models is the ownership of the oil extracted. In the concession regime, all oil extracted is owned by the concessionaire, and all share payments (e.g. royalties) are converted using the oil market price at that specific date. In the profit-share regime the oil is owned by the Union, whether it was extracted or not. The parcel of oil extracted entitled to the winning bidder is the volume corresponding to the costs, royalties, and the portion of profit oil bid. Therefore, the new rule reveals a government preference to keep the oil instead of monetary gains. Apparently, this decision seems to be based on a political rather than economic reasoning. After all the government could purchase the oil in the market after receiving the monetary payment correspondent to it.

In addition to Petrobras and other OC's, representatives of a public enterprise will be part of the consortium. This new public enterprise, called Pré-Sal Petróleo S.A. (PPSA), was created aiming to manage profit-share contracts, and contracts to trade the Union's oil, natural gas and other fluid hydrocarbons. Therefore, PPSA will be in the consortium as representative of Union's interest in the profit-share contract.

The operational committee of the consortium is responsible for its management. The operation committee is in charge of defining the exploration plans, elaborate plan for evaluation of discovery of oil deposits and natural gas, declare commerciality of each deposit discovered and define plan for field production development. However, all of these plans must be submitted to analysis and approval by the National Agency of Petroleum, Natural Gas and Biofuels (ANP).

In our analysis, we highlight three parts of this new framework:

(i) a fixed bonus,
(ii) a profit share bidding auction, and
(iii) Petrobras as obligatory participant and the sole operator of all blocks contracted under profit-share regime.

In assuming this role, Petrobras will be responsible for "running and executing, directly or indirectly, all exploration, evaluation, development, production and decommissioning of exploration and production installation activities."

Libra's oil field auction was the first test of the new regime. According to estimates, Libra holds as much as 12 billion barrels of recoverable oil, which corresponds to almost 2 years of United States' consumption.[1] If this volume of recoverable oil is confirmed, it will be the largest auction of an oil field worldwide.

The tender protocol confirms that Petrobras shall be the sole operator and must join the winning consortium with a minimum interest of 30%. The consortia may be formed by a maximum of five companies, and may include Petrobras. However, a company may not be part of more than one consortium.

In addition to the qualification process, any consortium interested in competing in the bidding round should pays a participation fee of R$ 2,067,400.00.

The signature bonus was set at R$ 15 billion. Thus, the winning consortium will have to pay this amount to be able to sign the production sharing contract. Each member of the consortium will be responsible for paying a portion of the signature bonus corresponding to its stake.

Bids will be classified in order of highest to lowest profit share of oil and the winning consortium will be the one who offers the highest surplus in oil for the Union. The bids should only indicates the percentage of profit oil offered to the Federal Government, respecting the minimum share of 41.65%.

Although, the profit share that will be delivered to the Union throughout the exploration process is adjusted by the oil price and the average daily production. More specifically, the portion of the surplus in oil offered by tenderers should refer to the Brent[2] oil price in a range of US$ 100.01 and US$ 120.00, and to an average daily oil production of active producing wells between 10,001 barrels/day and 12,000 barrels/day. So, the higher is the Brent price or the average daily production, the higher is the government's share. This rule is related to the sliding scale royalty rate in section 5.

The production sharing contract requires a percentage of local content in the exploration and production activities. In the exploration phase, which will last four years, the contracted consortium must meet a minimum of 37% of local content. After that, in the development stage, the minimum percentage will be 55% for modules with first oil up to 2021, and 59% for modules with first oil as of 2022.

On October 21st of 2013 Brazil finally held the first pre-salt field auction. The Libra oil field attracted 11 companies to register for the qualification process, most of them national oil companies. This number was well below the government's expectations of around 40 companies. From these 11 companies, only a five-member consortium was formed and actively participated in the bidding round.

The Libra field was sold to a consortium led by Petrobras (40%), and including the French OC Total (20%), Anglo-Dutch Shell (20%) and China's state-owned CNOOC (10%) and CNPC (10%). The consortium was the only competitor and won the auction with a bid of profit oil into the Union of 41.65%, the floor established in the tender protocol.

It is difficult to argue that the first pre-salt auction was a success. It lacked participation and the winning consortium won with the minimum allowed bid. We show in Monteiro, Araujo, Costellini, &

[1] Based on data from 2012, provided by U.S. Energy Information Administration (EIA).

[2] Brent oil is a specification of crude oil that serves as a reference price for buyers and sellers of oil in the whole world. This benchmark is used mainly in Europe and by OPEC, and it is a mix of crude oil from 15 different oil fields in the North Sea.

Damé (2016) that the new auction format lacks the existence of nice[3] equilibrium strategies. Of course this is not decisive but one more difficulty for the firms' bidding calculus.

Participation is key to an auction success.[4] For example, Bulow & Klemperer (1996) show, in a private values setting, that the best negotiation with n bidders is not as good as an auction with $n+1$ bidders. But participation could not be lower in the first pre-salt auction. The privileged position of Petrobras as exclusive operator of all pre-salt oil fields is, certainly, a key factor in reducing competition. If one OC has a superior technology why should Petrobras be privy to it? This might also works in the other way around, but Petrobras has no choice here, being an obligatory participant. Another competition reducing factor is Pré-Sal Petróleo S.A. (PPSA). This is a public company that do not enter with any money but might create innumerous inefficiencies.

The need to monitor costs in a profit sharing model is probably the most important reason for the creation of PPSA. This is not needed in a revenue sharing auction. The savings and efficiency gains points to the desirability of a revenue sharing arrangement. Production is clearly easier and less costly to monitor. A revenue sharing concession framework without preferences will have greater participation and competition and is with high probability more profitable for the OC and for the Government.

We discuss, mainly with numerical simulation, alternatives that could lead to a higher expected revenue for the government. Following this line of thought, in section 5 we extend our analysis of bonus bidding and revenue share to auctions with sliding scale royalty rates. We introduce in the models a function representing a royalty rate that is contingent on the value of the object. This instrument increase the expected revenue in both models and reduce the gap between them. With numerical exercises, we show that this result may be obtained by a simple sliding scale royalty rates, easily implemented in practice. This structure is widely used for governments around the world in mineral rights leasing auctions.

2. THE COMMON VALUE MODEL

We study, as briefly as possible, the theory behind the (symmetric) bonus bidding, the revenue share and the profit share bidding auctions. A contract to explore a resource with common value random return, V, is to be awarded through an auction. The contract is disputed by $N > 1$ bidders. To explore the resource the winner incur a cost $c > 0$. We suppose $\mathbb{E}[V] > c$.

Remark 1. It is customary to suppose $V \geq 0$. We however allow for $V < 0$. This gives flexibility and indeed later, we suppose V normally distributed.

Each bidder $n = 1,\ldots,N$ receives a random signal/estimate value S_n. Let $S = (S_1,\ldots,S_N)$. We suppose that (S,V) has a distribution with density $f(s,v) = f(s_1,\ldots,s_N,v)$. The density f is symmetric in $(s_1,\ldots,s_N)$. Let $h(v) = \int f(s,v)\,\mathrm{d}s$ be the density of V. Here $\mathrm{d}s := \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_N$. And let

$$g(s_i \,|\, v) = \frac{\int f(s_i, s_{-i}, v)\,\mathrm{d}s_{-i}}{\int f(s,v)\,\mathrm{d}s}$$

be the conditional density of s_i for a given v. We suppose $S_1,\ldots,S_N$ conditionally independent for a given V:

Assumption 1. *The density $f(s,v)$ is continuous and can be written as*

$$f(s,v) = h(v)g(s_1 \,|\, v)\cdots g(s_N \,|\, v). \tag{DA1}$$

[3] By nice we mean strictly increasing differentiable bidding functions.

[4] From the seller's viewpoint, of course.

If $n \in \mathbb{N}$ and $x,y \in \mathbb{R}^n$ we define

$$x \vee y \coloneqq \Big(\max\{x_1,y_1\},\ldots,\max\{x_n,y_n\}\Big),$$

and

$$x \wedge y \coloneqq \Big(\min\{x_1,y_1\},\ldots,\min\{x_n,y_n\}\Big).$$

Definition 1. If $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ then k has multivariate monotone likelihood ratio if

$$k(x)k(y) \leq k(x \vee y)k(x \wedge y),$$

for every $x,y \in \mathbb{R}^n$.

If $n = 2$ we simply say that k has monotone likelihood ratio.

Definition 2. A family of random variables $X_1,X_2,\ldots,X_m$ with joint distribution density f_X is affiliate if f_X has multivariate monotone likelihood ratio.

Remark 2. If the density $f(s,v)$ satisfies (DA1) then it has multivariate monotone likelihood ratio if and only if $g(s_i \,|\, v)$ has monotone likelihood ratio.

We now add our second assumption:

Assumption 2 (Affiliation)**.** *$S_1,\ldots,S_N,V$ are affiliated.*

3. SHARE BIDDING AUCTIONS

We analyze three types of auctions: bonus bidding, revenue share bidding and profit-share bidding auctions.

Notation. Let $G(x \,|\, v) = \int_{-\infty}^{x} g(u \,|\, v)\,\mathrm{d}u$ and $\phi(x,v) = G^{N-1}(x \,|\, v)$. And let the density of S_1 be denoted by $\tilde{g}(s) = \int g(s|v)h(v)\,\mathrm{d}v$. Also define $Y = \max\{S_2,\ldots,S_N\}$.

For convenience and to be in the setup for the numerical simulations we suppose $f(s,v) > 0$ for every $(s,v) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

3.1. Bonus bidding auction

The fee or bonus bidding auction is the usual first-price auction. The winner is the bidder who offers the highest bonus. Prospective bidders that have a low estimate S_i may not participate in the bidding due to the fixed cost $c > 0$.

Definition 3. An equilibrium of the bonus auction is a pair $(s_f, B(\cdot))$ such that

(i) Bidder $n = 1,\ldots,N$ enters a bid, $B(s_n)$, if his signal $s_n \geq s_f$. If $s_n < s_f$ he does not participate;
(ii) If each participating bidder bids according to $B(\cdot)$ then the bonus bid $B(s_n)$ maximizes the participating bidder n expected payoff and his optimal payoff is non-negative;
(iii) Any bidder with signal below s_f has a negative payoff if he enters a bid.

To find the equilibrium suppose, let us say, Bidder 1, with signal $S_1 = s$, bids $B(x)$. Then his expected payoff is (see notation above),

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \mathbb{E}\Big[(V - B(x) - c)I_{Y<x}\,\Big|\,S_1 = s\Big] \\ &= \frac{\int (v - c - B(x))g(s \,|\, v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\tilde{g}(s)}.\end{aligned}$$

Thus s_f is defined by

$$\mathbb{E}\left[(V-c)I_{Y<s_f}\,\middle|\,S_1=s_f\right]=0. \tag{1}$$

We prove in the Appendix the existence of s_f. The first order condition is

$$\pi'(x)\tilde{g}(s)=\int(v-c-B(x))g(s\,|\,v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v-B'(x)\int g(s\,|\,v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.$$

In equilibrium $\pi'(s)=0$. This gives equation (4) below. Define

$$a_f(x)=\frac{\int(v-c)g(x\,|\,v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int g(x\,|\,v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v},\qquad c_f(x)=\frac{\int g(x\,|\,v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int g(x\,|\,v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

We omit the proof of the next theorem.

Theorem 1. *The symmetric equilibrium of the fee bidding auction, $(s_f,B(\cdot))$, is given by (i) and (ii):*

(i) The cutoff s_f satisfy

$$\mathbb{E}\left[(v-c)I_{Y<s_f}\,\middle|\,S_1=s_f\right]=0. \tag{2}$$

(ii)

$$B(s)=\int_{s_f}^{s}\exp\left(-\int_y^s c_f(u)\,\mathrm{d}u\right)a_f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Remark 3. The bidding function, $B(\cdot)$, solves the differential equation

$$B'(x)=a_f(x)-c_f(x)B(x) \tag{4}$$

with initial condition $B(s_f)=0$. This equation may be solved using the integrating factor method[5] and gives (3).

3.2. Revenue share auction

In a revenue share auction (also called royalties share auction) each participating Bidder bids a share, $0\le b\le 1$, of the contract. This share is the fraction of the positive returns which is given to the seller. Losses (that is, if $V<0$) are not shared. The winner is the bidder that offers the highest share. A symmetric equilibrium of the revenue share bidding auction $(s_*,b(\cdot))$ is defined analogously as in the bonus bidding auction. The expected revenue of (say) Bidder 1 with signal $S_1=s$ bidding a share $b(x)$ is

$$\psi(x):=\mathbb{E}\left[(V-c-b(x)V^+)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1=s\right]. \tag{5}$$

Let s_* be the participation cutoff and $b(\cdot)$ be the equilibrium bidding sharing function. As before, since in equilibrium $b(s_*)=0$,

$$\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s_*}\,\middle|\,S_1=s_*\right]=0. \tag{6}$$

We see that $s_*=s_f$. We show in the Appendix that $b(\cdot)$ satisfy the differential equation (ii) below.

Define

$$a(s)=\frac{\int(v-c)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v},\qquad c(s)=\frac{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Proposition 1. *A symmetric equilibrium of the revenue share bidding auction, $(s_*,b(\cdot))$, is such that:*

[5] See Menezes & Monteiro (2008), Appendix B

(i) The participation cutoff is given by

$$\int (v-c)g(s_*\,|\,v)\phi(s_*,v)h(v)\,\mathrm{d}v = 0. \tag{7}$$

(ii) The bidding function solves the differential equation

$$b'(s) = a(s) - c(s)b(s),$$

with initial condition $b(s_*) = 0$.

Solving the differential equation we get

$$b(s) = \int_{s_*}^{s} \exp\left(-\int_y^s c(u)\,\mathrm{d}u\right) a(y)\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

The next theorem is proved in the appendix.

Theorem 2. $(s_*, b(\cdot))$ *is an equilibrium.*

3.3. Profit share auction

In the profit share auction the winner pays the seller a fraction of the profit $(v-c)^+$. If we define $\tilde{V} = V - c$ we may apply the previous revenue share equilibrium existence theorem.

4. RANKING OF EXPECTED REVENUE

We will show that the revenue share bidding auction has a higher revenue than the bonus bidding auction. Suppose the density f is continuously differentiable.

Theorem 3. *The revenue share bidding auction expected revenue is higher than the bonus bidding auction expected revenue.*

Proof. We use Proposition 7.1, page 104 in Krishna's book (Krishna, 2002). Let $\psi_{sh}(x) \coloneqq \psi(x)$ from (5). Note that

$$\begin{aligned}
\psi_f(x) = \pi(x) &= \mathbb{E}\left[(V-c)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right] - \mathbb{E}\left[I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right]B(x),\\
\psi_{sh}(x) &= \mathbb{E}\left[(v-c)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right] - b(x)\,\mathbb{E}\left[V^+ I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right]\\
&= \mathbb{E}\left[(v-c)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right] - \mathbb{E}\left[I_{Y<x}\,\middle|\,S_1 = s\right]\frac{b(x)\,\mathbb{E}\left[V^+ I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]}{\mathbb{E}\left[I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]}.
\end{aligned}$$

If we define $Q^f(x,s) = B(x)$ and

$$Q^{sh}(x,s) = \frac{b(x)\,\mathbb{E}\left[V^+ I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]}{\mathbb{E}\left[I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]},$$

we see that $Q^f(s_*,s_*) = 0 = Q^{sh}(s_*,s_*)$. To apply Proposition 7.1 in Krishna's book we need to check that $\frac{\partial\left(Q^{sh}(x,s) - Q^f(x,s)\right)}{\partial s} \geq 0$. But this follows from

$$\frac{\mathbb{E}\left[V^+ I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]}{\mathbb{E}\left[I_{Y<x}\,|\,S_1 = s\right]} = \mathbb{E}\left[V^+\,\middle|\,Y < x, S_1 = s\right]$$

being increasing in s. □

Reece (1979) supposes each $S_1,\ldots,S_N,V$ to be log-normally distributed. He shows, numerically, that the profit share auction expected revenue dominates the revenue share auction expected revenue. Our numerical simulations (not included in the figures below) confirms this.

5. AUCTIONS WITH SLIDING SCALE ROYALTY RATES

In the following numerical simulations we suppose returns to be normally distributed. So we introduce the assumption:

Assumption 3. *The return V has a normal distribution, $\mathcal{N}(\mu,\sigma_V^2)$. The signal S_i, $i=1,\ldots,N$ conditional on V is normally distributed with mean V and variance σ^2. Thus*

$$f(s_1,\ldots,s_N,v) = h(v)g(s_1|v)\cdots g(s_N|v),$$
$$h(v) = \frac{1}{\sigma_V\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma_V^2}\right),$$
$$g(s_i|v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s_i-v)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Lemma 1. *The density f has multivariate monotone likelihood ratio.*

Proof. It suffices to show that $g(s|v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s-v)^2}{2\sigma^2}\right)$ has monotone likelihood ratio. This is true, since if $s'' > s'$,

$$\frac{g(s''|v)}{g(s'|v)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s''-v)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s'-v)^2}{2\sigma^2}\right)} = \exp\left(\frac{(s'-v)^2}{2\sigma^2} - \frac{(s''-v)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left((s''-s')(2v-s'-s'')\right)$$

is increasing in v. □

We now consider an auction where the winner will be required to pay a prefixed sliding scale royalty rate (henceforth SSRR) based on the value of the good in addition to the bonus bid. We show that this rule may increase the expected revenue of both models studied in the previous section and the gap between them shrink.

This type of rule is frequently used on oil lease auctions around the world. Governments set up some ranges of revenue or production volume and determine extra royalty rates to be paid when these ranges are reached. The SSRR is frequently based on the average daily production per well per month on a given area. In most cases the international price of oil is also considered in the arrangement of the SSRRs.

In model developed in this section, we depict the SSRR by a function depending on v. Let $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ be the function representing the SSRR. We suppose $\xi(v)=0$ if $v\leqq 0$.

Assumption 4. *The function $\xi(\cdot)$ is increasing and $x-\xi(x)$ is strictly increasing if $x>0$.*

In particular $x>\xi(x)$ if $x>0$. Now, we define a bonus bidding auction with SSRR. If Bidders $i=2,\ldots,N$ bids according to the strictly increasing differentiable function, $b_f(\cdot)$, Bidder 1, with signal $S_1=s$, problem is to choose x maximizing

$$\psi_f(x) = \mathbb{E}\left[(V-b_f(x)-\xi(v))I_{Y<x}\,\middle|\,S_1=s\right].$$

Next we define a share bidding auction with SSRR. Bidder's 1 problem is to choose x to maximize

$$\psi_s(x) = \mathbb{E}\left[\left((1-b_s(x))(V^+-\xi(v))-V^-\right)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1=s\right].$$

Next corollaries present the solution for the fee bidding auction with SSRR and for the share bidding auction with SSRR, respectively:

Corollary 1. *The bidding function b^*_{f} is an equilibrium of the bonus bidding auction with sliding scale, such that*

$$b^*_{\text{f}}(x) = \tau(x,x) - \int_{s_0}^{x} \exp\left(-\int_t^x \frac{\hat{f}(z,z)}{\int_{-\infty}^{z}\hat{f}(z,y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}z\right)\left[\frac{\mathrm{d}\tau(t,t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t, \tag{9}$$

where $\tau(s,y) = \mathbb{E}\left[V - \xi(V)\,|\,S_1 = s, Y = y\right]$.

Moreover, b^*_{f} solves

$$\begin{aligned} b^{*\prime}_{\text{f}}(x) &= \frac{\left(\tau(x,x) - b^*_{\text{f}}(x)\right)\hat{f}(x,x)}{\int_{-\infty}^{x}\hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y}; \\ b^*_{\text{f}}(s_0) &= \tau(0,0) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Corollary 2. *The bidding function b^*_{s} is an equilibrium of the revenue share bidding auction with sliding scale, such that:*

$$\begin{aligned} b^*_{\text{s}}(x) = 1 &- \mathbb{E}\left[-\int_{s_0}^{x}\frac{\tau^+(z,z)\hat{f}(z,z)}{\int_{-\infty}^{z}\tau^+(z,y)\hat{f}(z,y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}z\right] \\ &- \int_{s_0}^{x}\left(\frac{[u^-(t,t)]\hat{f}(t,t)}{\int_{-\infty}^{t}\tau^+(t,y)\hat{f}(t,y)\,\mathrm{d}y}\right)\mathbb{E}\left[-\int_t^x\frac{\tau^+(z,z)\hat{f}(z,z)}{\int_{-\infty}^{z}\tau^+(z,y)\hat{f}(z,y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{11}$$

where $\tau^+(s,y) = \mathbb{E}\left[V^+ - \xi(V^+)\,|\,S_1 = s, Y = y\right]$.

Moreover, b^*_{s} solves

$$\begin{aligned} b^{*\prime}_{\text{s}}(x) &= \frac{\left[(1 - b^*_{\text{s}}(x))\tau^+(x,x) - u^-(x,x)\right]\hat{f}(x,x)}{\int_{-\infty}^{x}\tau^+(x,y)\hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y}; \\ b^*_{\text{s}}(s_0) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Notice that $\tau(s,y)$ and $\tau^+(s,y)$ are increasing in both variables due to Assumption 3. So, the proof of corollaries 2 and 1 follow from the theorems 2 and 1, respectively.

From this equilibrium result, we would like to show that it is possible to improve expected revenue by introducing a SSRR in the model. It is not easy to reach this result analytically, since a very aggressive royalty rate may result in the opposite effect. The main difficulty is to determine a shape of the function ξ that would lead to an increase in the expected revenue. Thus, the problem will be solved by numerical methods, and we select some examples of SSRRs to verify how the expected revenue changes. Since numerical methods will be used, it is necessary to choose specific values to all model parameters. We assume[6] that distribution of true resource value V is normal with standard deviation $\sigma_v^2 = (10)^2$, and the mean μ_v is set such that approximately 25% of all oil fields are economically viable ($\mu_v \cong -2.133$). We assume that the signals are unbiased, or putting differently, the distribution of the signal S_i was set in such a way that $\mathbb{E}\left[S_i\,|\,v\right] = v$. In addition, the random variable $s\,|\,v$ is assumed to be normally distributed with mean v and variance $\sigma_s^2 = 49$. We are considering a symmetric model, so all agents observe signals from the same distribution.

[6] Our main goals with this exercise is to suggest that a revenue improvement is possible if a correct SSRR is chosen. The results seems robust to other values for σ_v^2, μ_v and σ_s^2.

Based on the parameters values, we look into some examples of SSRRs that permit us to identify the results we want to show. We divide support of V^+ into k intervals and define $\xi(\cdot)$ as

$$\xi(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v < v_1 \\ \delta_1(v - v_1) & \text{if } v \in [v_1, v_2) \\ \delta_1(v_2 - v_1) + \delta_2(v - v_2) & \text{if } v \in [v_2, v_3) \\ \quad \vdots & \\ \sum_{i=1}^{k-2} \delta_i(v_{i+1} - v_i) + \delta_{k-1}(v - v_{k-1}) & \text{if } v \geq v_{k-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Let $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{k-1} \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_{k-1} \end{bmatrix}$. We assign different values to these vectors making SSRR more or less aggressive depending on the level of royalty rates (Δ) and the thresholds ($\mathcal{V}$). So, the higher are levels of rates and the lower are the thresholds, the more aggressive is the SSRR.

According to the function ξ described above, the royalty rates are calculated separately in each interval. For example, assume that $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$. If the realization of the common value is $v = 4.5$, the amount of royalty due to the auctioneer will be $\xi(4.5) = 0.2(3-2) + 0.3(4-3) + 0.4(4.5-4) = 0.7$. Assuming that $\tilde{b}_{\tilde{f}}$ and $\tilde{b}_{\tilde{s}}$ are the winning bids of fee and share bidding models respectively, the amount of the final payoffs of the winner will be

$$PO_{\tilde{f}} = v - \tilde{b}_{\tilde{f}} - \xi v = 4.5 - \tilde{b}_{\tilde{f}} - 0.7 = 3.8 - \tilde{b}_{\tilde{f}};$$
$$PO_{\tilde{s}} = \left(1 - \tilde{b}_{\tilde{s}}\right)\left(v - \xi(v)\right) = \left(1 - \tilde{b}_{\tilde{s}}\right)(3.8).$$

Next, we present five parametrizations that go from less to more aggressive SSRR:

- Parametrization 1: $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$;
- Parametrization 2: $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1.8 & 2.2 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$;
- Parametrization 3: $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1.8 & 2.2 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$;
- Parametrization 4: $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1.8 & 2.2 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.97 & 0.98 & 0.99 \end{bmatrix}$;
- Parametrization 5: $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$ and $\Delta = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.97 & 0.98 & 0.99 \end{bmatrix}$.

The results of our numerical exercises are presented in Figure 1. The figures illustrate auctioneer's expected revenue resulting from different numbers of participants. Dashed lines represent models with SSRRs, and continuous lines represent regular models.

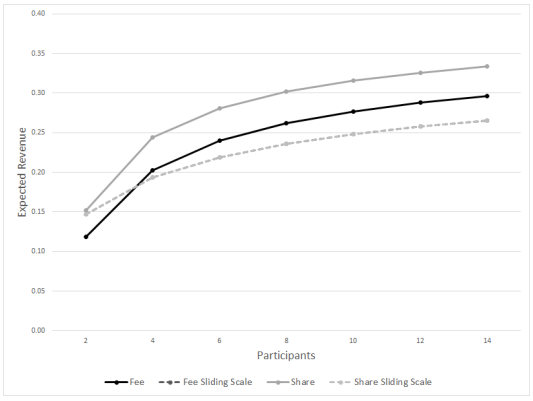
The expected revenues of both auction schemes is higher when we include the function $\xi(\cdot)$. In figures 1(a) to 1(d) we can observe the evolution of the curves as more aggressive SSRRs are being implemented in the model. Moreover, the gap between the dashed lines were getting smaller and it practically disappears in Figure 1(e).

When a SSRR is present in an auction, the winner's final payment become more connected to the value of the object. In case of overestimation, the punishment of the winning bidder is less severe if compared with the standard auctions. It means that the winner's curse effects will be ameliorated and, consequently, bidders will be more comfortable to bid more aggressively. Thus, the SSRR allows the seller to capture a larger share of bidders' surplus.

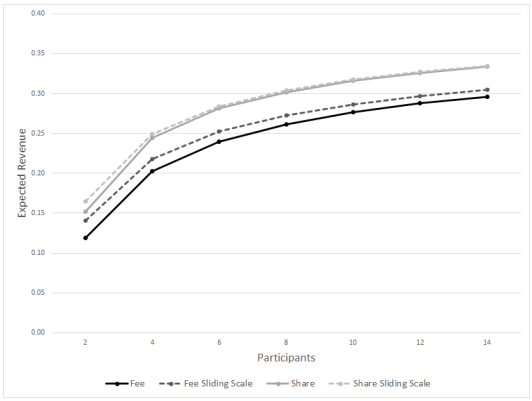
However, if the SSRR is too aggressive, bidders will require a very high signal to start bidding and the auctioneer's expected revenue may fall short. On these terms, the bidders' expected payoff for a

Figure 1. Expected revenue and number of participants.

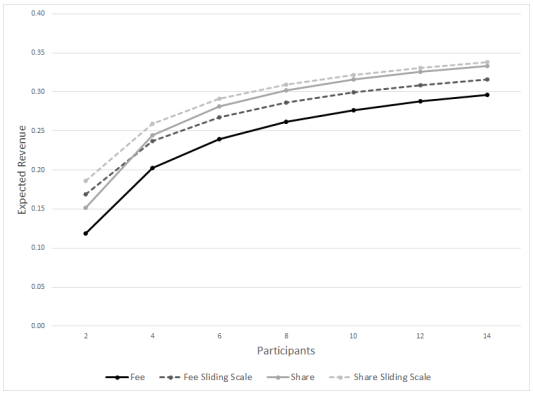
(a) Param. 1



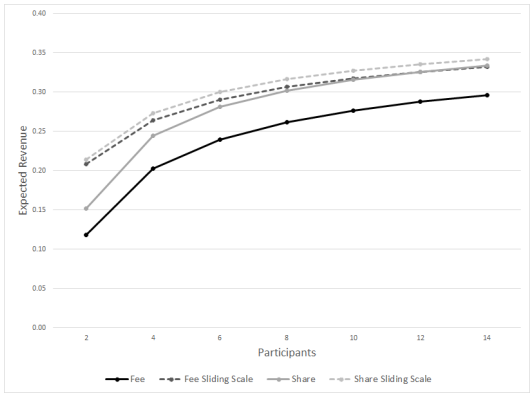
(b) Param. 2



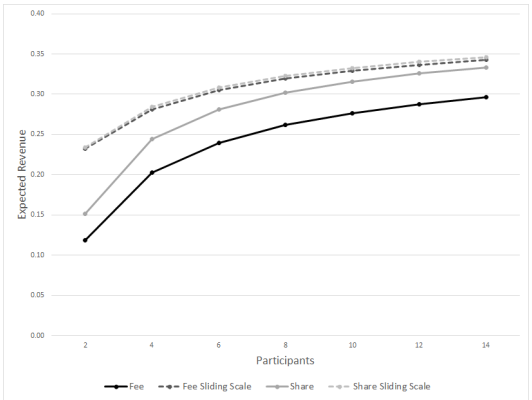
(c) Param. 3



(d) Param. 4



(e) Param. 5



large set of observed signals s will be so small that they will prefer to stay out of the auction. In other words, the value of s_0 will be very high. That is what happened in the exercise presented on Figure 1(e).

This results indicates that there should be an optimal royalty rate function ξ that would lead to maximum and identical expected revenues for both types of auctions. Nevertheless, there seems to be no simple way of establishing this optimal function ξ. The winner's curse is directly related to the number of participants in the auction, thus the effectiveness of a SSRR will be also related with it. The more competition we have in an auction, the more severe will be the effects of winner's curse. The SSRR used in example of Figure 1(e) did not decrease the expected revenue when there were only two participants competing for the object. Hence, the choice of ξ, depends on the level of competition of the auction.

Despite we do not have a result that characterizes an optimal function ξ, the numerical exercises presented here shows that there is no need of a complex function to reach the desired results. With SSRRs that could be easily implemented in a practical case, our models generate higher expected revenue and almost vanish the gap between bonus and revenue share bidding auction. The SSRR used in the exercise exhibited on Figure 1(d) is very similar and even simpler than SSRRs present in oil leasing auctions of many countries.

6. CONCLUSIONS

Motivated by the new pre-salt reserves Brazilian regulatory framework, we analyzed a revenue share bidding auction model. A symmetric common values model with a risk neutral seller and risk neutral bidders was considered. We proved the existence of monotone pure-strategy equilibrium in the revenue share bidding model, and so, we could compare its expected revenue with the bonus bidding model. We conclude that revenue share bidding auction generates expected revenue at least as large as the bonus bidding auction. A numerical example suggests that this expected revenue can be improved if a sliding scale royalty rate is introduced in the model.

We discussed the new Brazilian regulatory framework and its first test. The outcome of this first pre-salt auction was not good for the government. The auction failed to draw a larger number of competitors, and this lack of competition entailed a minimum revenue for the Union. It is possible to identify some reasons for this poor result.

The compulsory participation of Petrobras is a controversial topic of the new regulatory framework that deserves attention. It creates a very unusual situation, where Petrobras is somehow competing against itself, since the competitors will be its partners in the future. It seems that this rule was created to increase government control over the industry via Petrobras; however, it can be detrimental to Petrobras. This rule forces Petrobras to form consortium with (perhaps) unwanted partners, or operate blocks that it considers un-viable. Petrobras will be compelled to join every exploration contract signed and pay for bids that were offered by other companies. Besides risking large losses, Petrobras will have to bear a considerable amount of money as capital expenditure, since oil production is a long-term investment.

The profit-share model is usually chosen by countries[7] with a bad reputation in respecting contracts, which is not the case of Brazil. Countries with unstable political systems or notorious for disrespecting agreements usually fail to draw international OCs to invest in their oil fields when a concession regime is used. In this system, the concessionaire is elected through a bonus bidding auction, thus the winning bidder pays at once a large amount of money and is entitled to explore the oil field for a determined period of time. Thus, this regime is very risky to the international OCs, since there is a high probability of default by the government of these countries. Meanwhile, in the profit-share regime the

[7] See Araujo, Costellini, Damé, & Monteiro (2012) for a review of the main production-sharing agreement worldwide.

payment is made throughout the contract period, so the consequences of breaking an agreement are much severe.

On the other hand, the profit-share regime requires a costly monitoring of costs. The public enterprise PPSA was created with this purpose. However it is unlikely that this monitoring activities do not generate management inefficiencies. This measure and Petrobras privileged position might have scared away several potential competitors. Recently, Mexico has also instituted a profit-share auction to lease oil and gas rights. However, they designated independent audit firms to deal with cost monitoring. The initial tests of their model proved to be much more efficient than Brazilian model, since a large number of international participants were attracted to the auctions.

In section 4 we demonstrate that the profit-share bidding auction generates a higher expected revenue than the bonus-bidding auction. However, as presented in section 5, by including a sliding scale royalty rate in both models, the expected revenues tend to reach higher levels with a lower gap between them, making the advantage of profit-share model vanish. In other words, the results indicate that, besides achieving a higher level, the expected revenue produced by both revenue share and bonus bidding auctions converge when an appropriate SSRR is introduced. Therefore, we think that a bonus bidding auction with a SSRR might be the most appropriate model for leasing oil and gas rights. Using this approach, the government could avoid the cost monitoring problem, and may attract more participants to the auctions.

The concession model,[8] used in Brazil before the pre-salt discoveries, seems to be much more reasonable than the new production-sharing regime. The Decree No. 2705, of August 3, 1998, establishes the "special participation" for the concession regime, defined as an "extraordinary financial compensation owed by concessionaires of exploration and production of crude oil and natural gas, in the case of a large volume of production or high earnings." Thus, this "special participation" described in this Decree is exactly a SSRR contingent to the production volume. Hence, using the concession regime, the Brazilian government could draw a larger number of foreign competitors and thus would be able to raise more money in each block. It must be emphasized that specifics SSRR could be planned for each block auctioned, considering its individual characteristics. An alternative to make the pre-salt fields more attractive would be replacing PPSA for independent audit firms, following the Mexican profit-share model.

At the time of this writing, a bill was approved that would relieve the mandatory participation in all pre-salt fields. This new proposal lays down that Petrobras may have preference to act as operator in each pre-salt field, and as a consequence to ensure the minimum stake of 30 percent of this field. The National Council for Energy Policy will be responsible to offer Petrobras this right of preference, considering domestic interest. If the right of preference is not offered or not exercised, Petrobras may still participate in the auction on an equal footing with the other competitor companies. We consider the change an improvement but still lacking. If Petrobras is offered the option and exercise it the outcome is probably low competition as before. If Petrobras does not exercise the option and does not participate in the auction low competition is the probable outcome. If Petrobras does not exercise the option and does participate in the auction can the outcome be competitive? It is unclear. It is fair to guess that if Petrobras expected much competition it would have exercised its preference option. This topic needs more investigation.

[8] In the concession regime, the winning consortium was determined by a formula that considers the amount of signature bonus (a fee that should be paid at once in the beginning of the contract), the minimum exploratory program and the percentage of local content used throughout exploration and production period. Despite the auction being decided by these three criteria, as reported by Moura, Canêdo-Pinheiro, & Daitx (2012), in 95% of the blocks successfully auctioned, the winner was the one who offered the higher amount of signature bonus.

REFERENCES

Araujo, A., Costellini, C., Damé, O., & Monteiro, P. K. (2012). *O novo marco regulatório do petróleo e o regime de partilha de produção: Uma revisão teórica*. (unpublished)

Bulow, J., & Klemperer, P. (1996). Auctions versus negotiations. *The American Economic Review*, *86*(1), 180–194. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2118262

IEA (International Energy Agency). (2013). *World energy outlook 2013*. Paris: OECD/IEA. Retrieved from https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/world-energy-outlook-2013.html

Karlin, S., & Rinott, Y. (1980). Classes of orderings of measures and related correlation inequalities. I. Multivariate totally positive distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, *10*(4), 467–498. doi: 10.1016/0047-259X(80)90065-2

Krishna, V. (2002). *Auction theory*. Academic Press.

Menezes, F. M., & Monteiro, P. K. (2008). *An introduction to auction theory*. Oxford University Press.

Monteiro, P. K., Araujo, A., Costellini, C., & Damé, O. (2016). A note on auctions with compulsory partnership. *Revista Brasileira de Economia*, *70*(4), 379–398. doi: 10.5935/0034-7140.20160025

Moura, R. L. d., Canêdo-Pinheiro, M., & Daitx, F. (2012). Determinantes do lance vencedor em leilões de petróleo e gás: Avaliando o caso brasileiro. *Revista Brasileira de Economia*, *66*(4), 429–444. doi: 10.1590/S0034-71402012000400003

Reece, D. K. (1979). An analysis of alternative bidding systems for leasing offshore oil. *The Bell Journal of Economics*, *10*(2), 659–669. doi: 10.2307/3003357

Sarkar, T. K. (1969, August). *Some lower bounds of reliability* (Technical Report No. 124). Stanford, CA: Department of Operations Research and Department of Statistics, Stanford University. Retrieved from https://statistics.stanford.edu/research/some-lower-bounds-reliability

APPENDIX.

A.1.

Definition 4. A function $k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is increasing if $x,y \in \mathbb{R}^n$ and $x \geq y$ implies $k(x) \geq k(y)$. It is strictly increasing if $x \gneqq y$ implies $k(x) > k(y)$.

For a proof of the Lemma 2 see Karlin & Rinott (1980) page 484.

Lemma 2 (Sarkar (1969))**.** *If $Z_1,\ldots,Z_k$ are affiliated and $H(z_1,\ldots,z_k)$ is increasing then the conditional expectation*

$$\mathbb{E}\left[H(Z_1,\ldots,Z_k)\,\middle|\,Z_1 = z_1,\ldots,Z_k = z_k\right]$$

is increasing.

We omit the (easy) proof of Lemma 3.

Lemma 3. *Suppose $g(u|v)$ has monotone likelihood ratio. Let $G(x|v) = \int_{u<x} g(u|v)\,\mathrm{d}u$. Then the function $v \to \frac{g(x|v)}{G(x|v)}$ is increasing.*

Let $Y \equiv Y_1 := \max\{S_2,\ldots,S_N\}$. Let Y_2 be the second highest number in $\{S_2,\ldots,S_N\}$, Y_3 the third highest, ..., $Y_{N-1} = \min\{S_2,\ldots,S_N\}$ the $(N-1)^{\text{th}}$ highest. Using the conditional independence of $S_1,\ldots,S_N$ given V, the density of $(S_1,Y_1,Y_2,\ldots,Y_{N-1},V)$ is easily shown to be

$$f_{(S_1,Y,Y_2,\ldots,Y_{N-1},V)}(s_1,y_1,y_2,\ldots,y_{N-1},v) = \begin{cases} (N-1)!\,f(s_1,y_1,\ldots,y_{N-1},v) & \text{if } y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_{N-1} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is also immediate to check that $f_{(S_1,Y,Y_2,\ldots,Y_{N-1},V)}$ has multivariate monotone likelihood ratio. Hence $S_1,Y,Y_2,\ldots,Y_{N-1},V$ are affiliated.

The following proposition is (1.16), page 471 of Karlin & Rinott (1980).

Proposition 2. *Any subfamily of an affiliated family of random variables is affiliated.*

Corollary 3. *S_1,Y,V are affiliated.*

Let $f_{(S_1,Y,V)}$ denote the density of (S_1,Y,V). A routine calculation gives

$$f_{(S_1,Y,V)}(s_1,y,v) = (N-1)g(s_1|v)g(y|v)G^{N-2}(y|v)h(v). \tag{DSYV}$$

And if $f_{Y,V|S}$ denote the conditional density of (Y,V) for S_1 given we have

$$f_{Y,V|S}(y,v|s_1) = \frac{(N-1)g(s_1|v)g(y|v)G^{N-2}(y|v)h(v)}{\int g(s_1|v)h(v)\,\mathrm{d}v}. \tag{DYV}$$

A.2. Proof of existence of the cutoff s_f

We prove the

Lemma 4. *There is a solution s_f to*

$$\mathbb{E}\left[(v-c)I_{Y<s_f}\middle|S_1=s_f\right]=0.$$

We begin with the following:

Proposition 3. *The function $s\to\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s}|S_1=s\right]$ is increasing.*

Proof. We have that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s}\middle|S_1=s\right] &= \frac{\int(v-c)1_{Y<s}h(v)g(s|v)(N-1)g(y|v)G^{N-2}(y|v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}y}{\int h(v)g(s|v)\,\mathrm{d}v}\\ &= \frac{\int(v-c)1_{Y<s}h(v)g(s|v)G^{N-1}(s|v)\,\mathrm{d}v}{\int h(v)g(s|v)\,\mathrm{d}v}.\end{aligned}$$

Suppose $s'<s''$. Let

$$f_1(v)=\frac{h(v)g(s'|v)G^{N-1}(s'|v)}{\int h(v)g(s'|v)\,\mathrm{d}v}\quad\text{and}\quad f_2(v)=\frac{h(v)g(s''|v)G^{N-1}(s''|v)}{\int h(v)g(s''|v)\,\mathrm{d}v}.$$

If we prove that $f_1(v')f_2(v'')\le f_1(v'\wedge v'')f_2(v'\vee v'')$ then from Karlin & Rinott (1980), Theorem 2.2 on page 477, we conclude

$$\int(v-c)f_1(v)\,\mathrm{d}v\le\int(v-c)f_2(v)\,\mathrm{d}v,$$

and this will end the proof. □

We proceed to prove that $f_1(v')f_2(v'')\le f_1(v'\wedge v'')f_2(v'\vee v'')$.

Proof. This will be true if and only if

$$\frac{h(v')g(s'|v')G^{N-1}(s'|v')}{\int h(v)g(s'|v)\,\mathrm{d}v}\,\frac{h(v'')g(s''|v'')G^{N-1}(s''|v'')}{\int h(v)g(s''|v)\,\mathrm{d}v}$$
$$\leq \frac{h(v'\wedge v'')g(s'|v'\wedge v'')G^{N-1}(s'|v'\wedge v'')}{\int h(v)g(s'|v)\,\mathrm{d}v}\,\frac{h(v'\vee v'')g(s''|v'\vee v'')G^{N-1}(s''|v'\vee v'')}{\int h(v)g(s''|v)\,\mathrm{d}v}.$$

Canceling the denominators:

$$h(v')g(s'|v')G^{N-1}(s'|v')h(v'')g(s''|v'')G^{N-1}(s''|v'')$$
$$\leq h(v'\wedge v'')g(s'|v'\wedge v'')G^{N-1}(s'|v'\wedge v'')h(v'\vee v'')g(s''|v'\vee v'')G^{N-1}(s''|v'\vee v'').$$

Noting that $s''=s'\vee s''$ and $s'=s'\wedge s''$ this inequality is equivalent to say that $\phi:=g(s|v)G^{N-1}(s|v)h(v)$ has multivariate monotone likelihood ratio. But from (DYV) we see that $N\phi$ is the density of (Y,V) if there are $N+1$ bidders. Since (N,Y) is affiliated the proof is finished. □

Thus if $\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s}\,|S_1=s\right]>0$ for every s, every bidder participates (that is $s_*:=-\infty$). If $\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s}\,|S_1=s\right]<0$ for every s there will be no participating bidders. Otherwise there will be a s_f satisfying (6).

Remark 4. We easily show that the case of no-participating bidders does not occur since

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(v-c)1_{Y<S_1}\right] &= \int_{y<s_1}(v-c)g(s_1|v)(N-1)g(y|v)G^{N-2}(y|v)h(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s_1\\ &= \int(v-c)g(s_1|v)G^{N-1}(s_1|v)h(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s_1\\ &= \frac{1}{N}\int(v-c)h(v)\,\mathrm{d}v>0\end{aligned}$$

implies the existence of s such that $\mathbb{E}\left[(V-c)1_{Y<s}\,|S_1=s\right]>0$.

A.3. The revenue share bidding equilibrium

A.3.1. Differential equation for $b(\cdot)$

Let $x^+:=\max\{x,0\}$. Suppose bidders $n=2,\ldots,N$ bids according to $b(\cdot)$. If Bidder 1 has signal s and bids as if his signal is x his expected profit is

$$\psi(x):=\mathbb{E}\left[(V-c-b(x)V^+)I_{Y<x}\,\middle|\,S_1=s\right]. \tag{A-1}$$

Note that we used the assumption that losses are not shared. Thus the seller payment is $b(x)V^+$. And we also used that $I_{b(Y)<b(x)}=I_{Y<x}$. We may write

$$\begin{aligned}\psi(x)\tilde{g}(s) &= \int_v\int_{y<x}\left(v-c-b(x)v^+\right)g(s|v)\phi'(y,v)h(v)\,\mathrm{d}v\\ &= \int\left(v-c-b(x)v^+\right)g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Differentiating:

$$\psi'(x)\tilde{g}(s)=-b'(x)\int v^+g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v+\int\left(v-c-b(x)v^+\right)g(s|v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v. \tag{A-2}$$

If $b(\cdot)$ is an equilibrium then $\psi'(s)=0$. Thus

$$b'(s)\int v^+ g(s|v)\phi(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v=\int\left(v-c-b(s)v^+\right)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v.$$

Define

$$a(s)=\frac{\int(v-c)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v},\qquad c(s)=\frac{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Then

$$\begin{aligned}b'(s)&=a(s)-b(s)c(s);\\ b(s_*)&=0.\end{aligned}$$

A.3.2. Proof that $b(\cdot)$ is an equilibrium

We need the

Lemma 5. *The ratio* $\frac{a(s)}{c(s)}<1$ *is increasing.*

Proof. Note first that since $v-c=v^+-(v^-+c)\le v^+$ it is immediate $\frac{a(s)}{c(s)}<1$. We may write

$$\frac{a(s)}{c(s)}=\frac{\int(v-c)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}=1-\frac{\int(v^-+c)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Thus it suffices to prove that $\frac{\int\left(v^-+c\right)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}$ is decreasing. Note that

$$\begin{aligned}\frac{\int(v^-+c)g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}&=\frac{\mathbb{E}\left[V^-+c\,|\,S_1=s,Y=s\right]\int g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\mathbb{E}\left[V^+\,|\,S_1=s,Y=s\right]\int g(s|v)\phi'(s,v)h(v)\,\mathrm{d}v}\\&=\frac{\mathbb{E}\left[V^-+c\,|\,S_1=s,Y=s\right]}{\mathbb{E}\left[V^+\,|\,S_1=s,Y=s\right]}.\end{aligned}$$

Lemma 2 implies that the denominator is increasing and the numerator is decreasing. □

Lemma 6. *The function* $b(\cdot)$ *is strictly increasing and smaller than* 1.

Proof. We will prove that $b'(s)>0$. For this it suffices to prove that $b(s)<\frac{a(s)}{c(s)}$. Thus

$$\begin{aligned}b(s)&=\int_{s_*}^s\exp\left(-\int_y^s c(u)\,\mathrm{d}u\right)a(y)\,\mathrm{d}y=\int_{s_*}^s\exp\left(-\int_y^s c(u)\,\mathrm{d}u\right)\frac{a(y)}{c(y)}c(y)\,\mathrm{d}y\\&\le\frac{a(s)}{c(s)}\int_{s_*}^s\exp\left(-\int_y^s c(u)\,\mathrm{d}u\right)c(y)\,\mathrm{d}y=\frac{a(s)}{c(s)}\left[\exp\left(-\int_y^s c(u)\,\mathrm{d}u\right)\Big|_{s_*}^s\right]\\&=\frac{a(s)}{c(s)}\left[1-\exp\left(-\int_{s_*}^s c(u)\,\mathrm{d}u\right)\right]<\frac{a(s)}{c(s)}<1.\end{aligned}$$

□

Theorem 4. $(s_*,b(\cdot))$ *is an equilibrium of the revenue share auction.*

Proof. Let $\widehat{f}(s,y) = \int g(s|v)\phi'(y,v)h(v)\,\mathrm{d}v$ and $\widehat{g}(s,y,v) = g(s|v)\phi'(y,v)h(v)$. From equation (A-2):

$$\psi'(x)\tilde{g}(s) = -b'(x)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v + \int \big(v - c - b(x)v^+\big)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v. \tag{A-3}$$

Suppose $x < s$. We separate the proof in two cases. In the first case we suppose

$$\frac{\widehat{f}(s,x)}{\widehat{f}(x,x)} \geq \frac{\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Since $v \to v - c - b(x)v^+$ is increasing, Lemma 2 implies

$$\mathbb{E}\left[V - c - b(x)V^+ \,|\, S = s, Y = x\right] \geq \mathbb{E}\left[V - c - b(x)V^+ \,|\, S = x = Y\right].$$

Thus

$$\begin{aligned}\frac{\int (v - c - b(x)v^+)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v}{\widehat{f}(s,x)} &= \mathbb{E}\left[V - c - b(x)V^+ \,\middle|\, S = s, Y = x\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[V - c - b(x)V^+ \,\middle|\, S = x = Y\right] = \frac{\int (v - c - b(x)v^+)\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v}{\widehat{f}(x,x)}.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\int (v - c - b(x)v^+)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v &\geq \frac{\widehat{f}(s,x)}{\widehat{f}(x,x)}\int (v - c - b(x)v^+)\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v \\ &= b'(x)\frac{\widehat{f}(s,x)}{\widehat{f}(x,x)}\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v \\ &\geq b'(x)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Hence from (A-3), $\psi'(x) \geq 0$. In the second case, we suppose

$$\frac{\widehat{f}(s,x)}{\widehat{f}(x,x)} < \frac{\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Let us write

$$\int (v - c - b(x)v^+)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v = (1 - b(x))\alpha - \beta,$$

where $\alpha = \int v^+\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v$, and $\beta = \int (v^- + c)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v$. The function $v \to v^- + c$ is decreasing thus using Lemma 2:

$$\begin{aligned}\beta &= \int (v^- + c)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v = \mathbb{E}\left[V^- + c \,|\, S = s, Y = x\right]\widehat{f}(s,x) \\ &\leq \mathbb{E}\left[V^- + c \,|\, S = x = Y\right]\widehat{f}(s,x) = \frac{\widehat{f}(s,x)}{\widehat{f}(x,x)}\int (v^- + c)\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v \\ &< \frac{\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}\int (v^- + c)\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v = \big(c(x) - a(x)\big)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Now from the Claim below,

$$\alpha \geq \frac{\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}\int v^+\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v = c(x)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.$$

Thus

$$\begin{aligned}\int (v-c-b(x)v^+)\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v &= (1-b(x))\alpha-\beta\\ &\geq (1-b(x))c(x)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v - (c(x)-a(x))\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v\\ &= \Big(a(x)-b(x)c(x)\Big)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v = b'(x)\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Hence $\psi'(x)\geq 0$ in any case. Finally the case $x>s$ is analogous. □

Claim 1. *If $s>x$,*

$$\frac{\int v^+\widehat{g}(s,x,v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(s|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v} \geq \frac{\int v^+\widehat{g}(x,x,v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(x|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

To prove the claim we need the following

Proposition 4. *Let f_1,f_2,f_3,f_4 be non-negative functions on $\mathbb{R}^m$ such that*

$$f_1(x)f_2(y)\leq f_3(x\vee y)f_4(x\wedge y),\forall x,y\in\mathbb{R}^m.$$

Then

$$\int f_1(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int f_2(x)\,\mathrm{d}x\leq\int f_3(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int f_4(x)\,\mathrm{d}x.$$

For a proof see Theorem 2.1 page 475 of Karlin & Rinott (1980). The following inequality implies the Claim: If $s''>s'$ then

$$\frac{\int v^+ g(s''|v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(s''|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v} \geq \frac{\int v^+ g(s'|v)\phi'(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}{\int v^+ g(s'|v)\phi(x,v)h(v)\,\mathrm{d}v}.$$

Thus let us suppose $s''>s'$. Let

$$f_1(v) = v^+ g(s'|v)\phi'(x,v)h(v) \tag{A-4}$$
$$f_2(v) = v^+ g(s''|v)\phi(x,v)h(v) \tag{A-5}$$
$$f_3(v) = v^+ g(s''|v)\phi'(x,v)h(v) \tag{A-6}$$
$$f_4(v) = v^+ g(s'|v)\phi(x,v)h(v). \tag{A-7}$$

The claim is true[9] if we show that

$$\int f_3(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int f_4(x)\,\mathrm{d}x\geq\int f_1(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Thus from Proposition 4 it suffices to check that

$$\begin{aligned}(v'\vee v'')^+ g(s''|v'\vee v'')\phi'(x,v'\vee v'')h(v'\vee v'')(v'\wedge v'')^+ g(s'|v'\wedge v'')\phi(x,v'\wedge v'')h(v'\wedge v'')\\ \geq (v')^+ g(s'|v')\phi'(x,v')h(v')(v'')^+ g(s''|v'')\phi(x,v'')h(v'').\end{aligned}$$

[9] Just choose $s'=x$.

If $v' \wedge v'' \leq 0$ both lines are null. If $v', v'' > 0$ we may cancel $(v')^+(v'')^+$ on both sides. We may also cancel $h(v')h(v'')$ on both sides of the inequality. Thus it suffices to prove

$$g(s''|v' \vee v'')g(s'|v' \wedge v'')\phi'(x|v' \vee v'')\phi(x, v' \wedge v'') \geq g(s'|v')g(s''|v'')\phi'(x, v')\phi(x, v'').$$

The monotone likelihood ratio property of $g(s|v)$ implies that it is enough to prove the inequality without the g's:

$$\phi'(x|v' \vee v'')\phi(x, v' \wedge v'') \geq \phi'(x, v')\phi(x, v'').$$

Thus we need to prove that

$$g(x|v' \vee v'')G^{N-2}(x|v' \vee v'')G^{N-1}(x|v' \wedge v'') \geq g(x|v')G^{N-2}(x|v')G^{N-1}(x|v'').$$

Dividing both sides by $G^{N-2}(x|v')G^{N-2}(x|v'')$ we get

$$g(x|v' \vee v'')G(x|v' \wedge v'') \geq g(x|v')G(x|v'').$$

If $v' \geq v''$, both sides are equal. If $v' < v''$ we need to prove that

$$g(x|v'')G(x|v') \geq g(x|v')G(x|v'').$$

But this is Lemma 3.

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160021
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 399–417

A Taxa de Juros Natural e a Regra de Taylor no Brasil: 2003–2015

Fernando de Holanda Barbosa[*]
Felipe Diogo Camêlo[†]
Igor Custodio João[‡]

Sumário: **1. Introdução; 2. Resenha da literatura; 3. Taxa de juros natural no Brasil: 2003–2015; 4. Regra de Taylor no Brasil: 2003–2015; 5. Conclusão.**

Palavras-chave: **Política monetária, Taxa de Juros Natural, Regra de Taylor, Economia Aberta Pequena.**

Códigos JEL: **E31, E37, E52.**

Este trabalho estima a taxa de juros natural e a Regra de Taylor para o Brasil no período 2003–2015. A taxa de juros natural de uma economia aberta pequena é igual a taxa de juros internacional adicionada aos prêmios de risco, do país e do câmbio. Este arcabouço permite analisar os componentes que determinam a elevada taxa de juros do mercado interbancário brasileiro. A taxa natural variou ao longo do tempo e é usada na estimação da Regra de Taylor. Foram utilizadas variáveis do tipo "dummy" para testar a hipótese de mudança no comportamento do Banco Central à taxa de inflação, ao hiato de produto e ao câmbio no Governo Dilma. A evidência empírica não rejeita a hipótese de que os coeficientes dos hiatos da inflação e do produto, da Regra de Taylor, mudaram no Governo Dilma.

This paper estimates the natural rate and the Taylor Rule for the Brazilian economy from 2003 to 2015. The natural rate in a small open economy is equal to the international real rate of interest, adjusted for the premium due to country risk and exchange rate risk. This framework allows decomposing the interest rate into components to understand why the Brazilian interbank market rate is so high when compared to other countries. This natural rate is not constant and we use it to estimate the Taylor rule. We test the hypotheses that the Brazilian central bank has changed its response to inflation, output and exchange rate during President Dilma Roussef's first mandate. We cannot reject this hypothesis with respect to inflation and output gaps.

[*]Escola Brasileira de Economia e Finanças / Fundação Getúlio Vargas (FGV/EPGE). Praia de Botafogo 190, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 22250-900. Email: fernando.holanda@fgv.br

[†]FGV/EPGE

[‡]FGV/EPGE

1. INTRODUÇÃO

A taxa de juros natural é a taxa de juros de equilíbrio entre poupança e investimento no pleno emprego da economia. Ela é uma variável não observável, no jargão da estatística uma variável latente. Existem dois métodos para estimá-la. No método estatístico, emprega-se algum filtro da taxa de juros real para extrair o componente de tendência, que é identificado com a taxa natural. O segundo método baseia-se na teoria econômica. No modelo do agente representativo a taxa de juros natural depende de três parâmetros, a taxa de preferência, a elasticidade de substituição do consumo e a taxa prevista do crescimento da produtividade da mão de obra.

Numa economia aberta pequena, o modelo do agente representativo não é apropriado por produzir resultados contrafactuais. Nos modelos Mundell–Fleming e de Gerações Superpostas (Barbosa, 2015), a taxa natural de uma economia aberta pequena é igual a taxa de juros real internacional. Em países que existe restrições a mobilidade de capital deve-se adicionar os prêmios de risco apropriados. Este trabalho estima a taxa de juros natural para a economia brasileira usando a metodologia de uma economia aberta pequena, diferente da abordagem de outros trabalhos, resenhados na seção seguinte, que usaram o modelo de uma economia fechada.

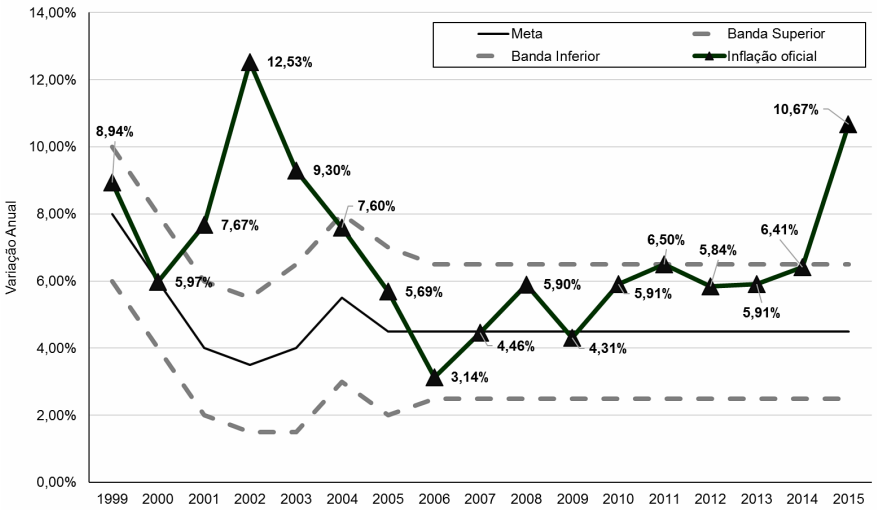
O fato de que o grau de abertura da economia brasileira é pequeno, medido pela razão do comércio internacional (importações mais exportações) como proporção do PIB, não justifica o uso do modelo de uma economia fechada para o cálculo da taxa de juros natural. Deve-se observar os diferentes canais de integração do país com os mercados financeiros internacionais. Um mecanismo importante ocorreu com a securitização da dívida externa brasileira em 1994. A dívida externa foi transformada em títulos públicos em dólares emitidos pelo governo brasileiro.[1] Estes títulos dependem das taxas de títulos públicos americanos e do risco país. Os títulos públicos brasileiros emitidos domesticamente (em reais) devem pagar, por arbitragem, levando-se em conta o risco cambial, a mesma taxa dos títulos em dólares. A taxa de juros doméstica depende, portanto, da taxa de juros internacional. A estimativa da taxa de juros natural é feita para o período 2003–2015, que corresponde aos governos do PT, dos Presidentes Lula e Dilma.

Um fato estilizado da economia brasileira é a elevada taxa de juros real do mercado interbancário, a taxa SELIC, que é o instrumento de política monetária do Banco Central do Brasil. Existem algumas hipóteses que tentam explicar este fato, semidominância fiscal (Favero & Giavazzi, 2002), incerteza jurisdicional (Arida, Bacha & Lara-Resende, 2004), efeito contágio dos títulos da dívida pública (Barbosa, 2006), baixa taxa de poupança (Goldfajn & Bicalho, 2011) e mercado de crédito segmentado (Schwartsman, 2011). A taxa de juros real é igual a soma da taxa de juros natural ($\bar{r}$) com o hiato da taxa de juros ($r-\bar{r}$), pois $r \equiv \bar{r} + r - \bar{r}$. O hiato da taxa de juros depende da política monetária. A hipótese do mercado de crédito segmentado pode explicar este componente. A estimação da taxa de juros natural, com a metodologia deste trabalho, permite uma análise quantitativa dos vários componentes que determinam a taxa de juros natural no Brasil: i) a taxa de juros internacional; ii) o prêmio de risco país; iii) o prêmio de risco do câmbio; e iv) a taxa de retorno real das LFTs.

O Brasil adotou, em 1999, o sistema de metas de inflação. O sistema delega ao Banco Central do Brasil (Bacen) a decisão de fixar a taxa de juros nominal, a taxa SELIC, no Comitê de Política Monetária (Copom), com base na meta de inflação definida pelo Conselho Monetário Nacional. O sistema de metas foi capaz de manter a taxa de inflação, medida pelo índice de preços do consumidor (IPCA), dentro da banda, até 2014, como mostra a Figura 1. No período 2011–2014, da administração da Presidente Dilma, a taxa de inflação ficou no intervalo entre 5,8% e 6,5%, próxima da banda superior de 6,5%. Em 2015 a

[1] Os C-Bonds (Capitalization Bonds) foram emitidos em abril de 1994 na renegociação da dívida externa brasileira, com prazo de vinte anos, juros semestrais, inicialmente capitalizados nos primeiros seis anos. Estes títulos tinham elevada liquidez no mercado secundário e pagavam um spread sobre os títulos americanos com perfil semelhante. Os C-Bonds foram resgatados em 2006 e desde então substituídos pelos Global-Bonds, principal título em dólares emitido pelo governo brasileiro.

Figura 1. Comportamento da inflação.



Fonte: Banco Central do Brasil e IBGE.

inflação ultrapassou o teto da banda.

Uma variável importante na Regra de Taylor é a taxa de juros natural. No longo prazo, para qualquer especificação desta regra, a taxa de juros nominal é igual a soma da taxa de juros natural com a meta de inflação. No curto prazo, o banco central deve ajustar a taxa nominal as variações da taxa de juros natural. Este trabalho estima uma Regra de Taylor para a economia brasileira, no período 2003–2015, usando a série construída da taxa de juros natural. Esta regra leva em conta o fato de que a economia brasileira é uma economia aberta pequena e que a taxa de juros natural variou ao longo do tempo. Este trabalho contribui para a literatura que trata de regras de política monetária apresentando uma regra para a fixação da taxa de juros nominal numa economia aberta pequena, que não comete erros de especificação comuns em alguns estudos empíricos, do Brasil e de outros países, como será mostrado adiante.

Este trabalho também tem como objetivo testar a hipótese de que a função de reação do Banco Central, a Regra de Taylor, mudou os seus parâmetros no primeiro mandato da Presidente Dilma, como sugere o comportamento da taxa de inflação da Figura 1. Esta abordagem tem sido usada na literatura e foi usada, por exemplo, no trabalho de Judd & Rudebusch (1998), que analisaram a função de reação para os mandatos de Alan Greenspan, Paul Volcker e Arthur Burns como presidentes do Federal Reserve, o banco central americano

O trabalho está organizado do seguinte modo. A seção 2 contém uma resenha da literatura que trata da estimação da taxa de juros natural no Brasil, da estimação da Regra de Taylor em economias abertas e da estimação da Regra de Taylor no Brasil. A seção 3 estima a taxa natural para a economia brasileira no período 2003–2015, supondo nosso país uma economia aberta pequena, e analisa a postura da política monetária com base na taxa natural estimada. A seção 4 apresenta o modelo, os dados e os resultados das estimações da Regra de Taylor para o Brasil no período 2003–2015. A seção 5 resume as principais conclusões deste trabalho.

2. RESENHA DA LITERATURA

Esta seção contém três resenhas. A primeira analisa alguns trabalhos que estimaram a taxa de juros natural brasileira. A segunda resenha artigos que estimaram a Regra de Taylor numa economia aberta. A terceira descreve os métodos aplicados em trabalhos que estimaram a Regra de Taylor na economia brasileira.

2.1. A taxa natural no Brasil: uma resenha da evidência empírica

Em um dos primeiros trabalhos aplicados ao Brasil, Muinhos & Nakane (2006) estimam diferentes taxas reais de equilíbrio, considerando quatro metodologias: i) tendência estatística das taxas de juros reais a partir do uso do filtro HP; ii) modelo Keynesiano para pequena economia aberta, com uma estimativa constante no tempo; iii) taxa natural igual ao produto marginal do capital, fazendo estimativas a partir das hipóteses clássicas dos modelos de crescimento; e iv) modelo de painel, tentando medir o efeito do risco de inflação e do prêmio de risco da dívida brasileira, e de outros emergentes, em relação aos títulos americanos.

Com exceção feita ao primeiro método, todos os outros não se enquadram no padrão desejável para análise de política monetária. De toda maneira, o artigo reforça um fato que já estava razoavelmente consolidado na literatura: o Brasil tem, de fato, taxas de juros reais mais altas do que outros países com fundamentos semelhantes.

Barcellos Neto & Portugal (2009) usam o arcabouço teórico e empírico formulado por Laubach & Williams (2003). Além de utilizarem filtros para as taxas de juros reais e estimarem uma regra de Taylor, na qual a taxa de juros natural é o intercepto da equação, os autores realizam uma estimação baseada no trabalho original de Laubach e Williams, a partir de modelo macroeconômico simplificado de espaço-estado. Trata-se da primeira contribuição focada em estimar a taxa de juros natural do Brasil e não apenas explicar a persistência dos altos níveis das taxas. Evidentemente, uma crítica pertinente ao trabalho é o fato de os autores suporem que a economia brasileira se comporta tal qual uma economia fechada.

O veredito dos autores é de que a taxa de juros real brasileira foi consistentemente mantida abaixo da taxa de juros real estimada, o que indicaria uma postura da política monetária muito menos rígida por parte das autoridades monetárias brasileiras. A despeito da falta de confiança nas estimativas por conta da premissa de economia fechada, trata-se de uma maneira de mostrar que o caminho para explicar a persistência de taxas reais altas de juros está em outros fatores que não a taxa praticada pelo BACEN.

Ribeiro & Teles (2013) seguem linha semelhante ao trabalho de Barcellos Neto & Portugal (2009), novamente com o pressuposto de economia fechada. No entanto, além da especificação utilizada, os autores incluem algumas modificações inspiradas em Mésonnier & Renne (2004).

Outro ponto relevante foi a abrangência maior de tempo do estudo deles, incluindo dados depois de 2005. Ao estenderem a análise, Ribeiro & Teles (2013) mostram que a taxa de juros natural brasileira está em queda desde 2006, em especial por conta da evolução da taxa de crescimento potencial do Brasil. Esse resultado seria o esperado diante das mudanças estruturais da economia brasileira, embora não tenham desenvolvido abertamente o tema.

Além do modelo apresentado, os autores também fazem uma análise da política monetária recente por meio do cálculo de três tipos diferentes de hiatos de juros. Diferentemente de Barcellos Neto & Portugal (2009), afirmam, diante de suas estimativas, que o BACEN manteve um perfil conservador entre 2001 e 2005, ficando mais próximo da neutralidade apenas após 2005.

Gottlieb (2013) segue a metodologia de Laubach & Williams (2003), com resultados também muito parecidos, mostrando uma tendência de queda da taxa de juros natural até 2012, em decorrência de mudanças estruturais da economia brasileira. O pressuposto de economia fechada continua sendo parte fundamental do artigo.

Segundo a autora teria sido relevante a mudança de postura do BACEN que passou a buscar a convergência da taxa real de juros e da taxa de desemprego com seus valores de equilíbrio. Diante das incertezas nas estimativas (Orphanides & Williams, 2006), essa era uma postura extremamente arriscada, como foi destacado no trabalho ao falar da postura do BACEN após o aperto monetário iniciado em 2010 e finalizado em 2011:

> O período mais recente aponta para a flexibilização da política monetária novamente. Se de fato a taxa neutra continuar caindo, motivada pela pressão global e pelo afrouxamento monetário adotado no resto do mundo, essa política pode não ser perigosa para a economia brasileira. Caso contrário, o período mais recente acende um alerta para os riscos que isso pode ter sobre o cenário inflacionário. (Gottlieb, 2013)

A análise, no entanto, é excessivamente leniente com a atuação do Banco Central do Brasil. O fato é que, desde 2009, a política monetária tem sido permissiva com a inflação, fechando dois anos quase no teto da meta e outros três em quase 6% ao ano.

Perrelli & Roache (2014) utilizam cinco métodos diferentes: i) estimativas estruturais; ii) filtros estatísticos; iii) estimativas a partir da estrutura a termo da taxa de juros; iv) modelos de espaço-estado; e v) regressões a partir de fundamentos, incluindo algumas variáveis de economia aberta. Os autores mostram que nas duas últimas décadas houve uma queda significativa do nível da taxa de equilíbrio, como observado em trabalhos resenhados acima. Por outro lado, embora não seja dado muito destaque ao fato, suas estimativas apontam para uma reversão desse ciclo de queda, algo que pode ter impacto relevante para a política monetária brasileira.

A principal conclusão que chegamos com esta resenha de trabalhos que estimaram a taxa de juros natural do Brasil é de que todos os autores usam modelos que admitem uma economia fechada, sem se preocupar com o fato de que a economia brasileira é uma economia aberta pequena. Esta crítica aplica-se aos métodos de estimação da taxa de juros natural baseados na teoria econômica. Os métodos estatísticos que aplicam um filtro a taxa de juros real podem ser aplicados tanto a uma economia fechada como a uma economia aberta.

2.2. A Regra de Taylor em Economias Abertas Pequenas

Taylor (1993) sugeriu uma função de reação para representar a política monetária do Fed, que ficou conhecida como Regra de Taylor. Os parâmetros desta função não foram estimados, mas calibrados para reproduzir a taxa de juros do mercado interbancário americano, conhecida, em inglês, pela taxa dos "Fed funds". A regra consiste em uma taxa de juros nominal igual à soma dos seguintes componentes: i) a taxa de juros considerada consistente com o pleno emprego (que o autor sugere ser igual a 2% ao ano, próxima à suposta taxa de crescimento estacionária de 2,2%), a taxa de juros natural; ii) a inflação acumulada dos últimos doze meses; iii) a diferença entre a inflação e uma meta implícita da taxa de inflação de 2% ao ano; e iv) a diferença (percentual) entre o produto e o produto potencial (o hiato de produto). A regra original de Taylor tem a seguinte especificação:

$$i = 2 + \pi + 0{,}5\tilde{\pi} + 0{,}5\tilde{y}, \tag{1}$$

onde i é a taxa de juros nominal, π a taxa de inflação, $\tilde{\pi}$ o hiato da taxa de inflação, definido pela diferença entre a taxa e a meta da inflação, e $\tilde{y}$ o hiato de produto. Taylor usa uma estimativa log-linear do hiato para mostrar que sua regra descreve o comportamento da política monetária do Fed no período 1987–1992. Ele omite o câmbio nesta regra argumentando que uma reação forte ao câmbio deterioraria a reação à inflação e ao hiato de produto. Em economias pequenas e abertas, no entanto, o autor admite que o câmbio tenha um papel importante (Taylor, 2002, p.16).

A regra de Taylor tem sido estimada para diferentes países e épocas. A especificação econométrica contém pelo menos três variáveis, a própria taxa de juros defasada, o hiato da inflação e o hiato do produto:

$$i_t = a_0 + a_1 i_{t-1} + a_2 \tilde{\pi}_t + a_3 \tilde{y}_t + \varepsilon_t. \tag{2}$$

A constante, nesta especificação, embute a hipótese de que a taxa de juros natural não varia ao longo do tempo. A taxa de juros defasada é introduzida com o objetivo de captar o comportamento dos bancos centrais de mudarem a taxa de juros de maneira gradual, produzindo inércia na evolução da mesma. O hiato da inflação pode ser medido por diferentes modos, seja pelo hiato atual ou pelo hiato futuro, no horizonte de projeção contemplado pelo banco central. O hiato do produto também pode ser medido por diferentes modos, seja por um filtro, como o HP, seja pelo resíduo de uma regressão do produto com relação ao tempo ou pela diferença entre o produto e o produto potencial estimado por uma função de produção.

Judd & Rudebusch (1998), por exemplo, estimaram a Regra de Taylor dos EUA para o período 1978–1997, separando a amostra em três períodos correspondentes às gestões de três presidentes no Fed: Alan Greenspan (1987 a 1997), Paul Volcker (1979 a 1987) e Arthur Burns (1970 a 1978), ignorando o curto interregno de George Miller (1978 a 1979), que deixou o Fed para assumir a Secretaria do Tesouro no governo de Jimmy Carter.

Clarida, Gali & Gertler (1997) estimaram a Regra de Taylor para seis países (EUA, Japão, Alemanha, Reino Unido, Itália e França), concluindo que houvera uma acentuação generalizada na importância dada à inflação em 1979, mostrada pela alta das taxas de juros a partir de então, até alcançar-se uma maior estabilidade de preços. Os modelos foram estimados por GMM. Foram incluídas outras variáveis explicativas na equação da taxa de juros objetivo, entre elas, a taxa de câmbio. O horizonte (n) da expectativa de inflação foi escolhido 12 meses e foram usados dados mensais. A atividade econômica foi medida por meio de um índice de produção industrial. O hiato foi, então, calculado por meio de uma tendência quadrática. Para os EUA, foi percebido que um modelo que leva em consideração as taxas de juros defasadas de um e dois períodos se ajusta melhor aos dados. Neste caso, não foram usadas variáveis externas. As estimativas corroboram a reputação de agressividade em diminuir a inflação que o Fed ganhou nessa época, apresentando coeficientes para os hiatos da inflação e do produto próximos àqueles vistos no Japão e na Alemanha, em torno de 1,5 e 0,5, respectivamente.

Nas economias abertas e pequenas a taxa de câmbio pode exercer um papel importante no processo decisório da autoridade monetária. Ocorrem, então, duas mudanças importantes na Regra de Taylor. Em primeiro lugar, a taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo, a taxa natural, depende da taxa de juros real internacional e varia ao longo do tempo. Portanto, a hipótese de que ela é constante não deve ser usada, como, em geral, ocorre nos estudos empíricos da regra de Taylor numa economia grande, admitida fechada, no sentido de que eventos externos não afetam sua taxa de juros. Em segundo lugar, numa economia aberta pequena a taxa de câmbio é uma variável importante na decisão da fixação da taxa de juros pelo banco central. Portanto, a regra de Taylor ganha um termo adicional na economia aberta e pequena, geralmente alguma transformação da taxa de câmbio. Este termo deve ter média zero no longo prazo, para que, no equilíbrio, a taxa de juros se iguale à taxa natural mais a inflação, como na economia fechada. Alguns estudos empíricos não atendem esta propriedade, acarretando erro de especificação. Portanto, a regra de Taylor de uma economia pequena e aberta pode ser especificada, por exemplo, pelo seguinte conjunto de equações:

$$\hat{i}_t = \bar{r}_t + \pi_t + \phi \tilde{\pi}_t + \theta \tilde{y}_t + \gamma_1 \tilde{q}_t + \gamma_2 \Delta \tilde{q}_t \tag{3}$$

$$i_t = \lambda \hat{i}_t + (1-\lambda)\varphi(L) i_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varphi(1) = 1. \tag{4}$$

O símbolo $\bar{r}_t$ representa a taxa de juros natural com o índice indicando que a mesma varia com o tempo, q_t é a taxa de câmbio real, o til representa a diferença entre o valor corrente e o valor de equilíbrio de

longo prazo, Δ é a primeira diferença da variável assinalada. A segunda equação especifica a inércia do processo de ajustamento da taxa de juros desejada para a taxa de juros observada, onde $\varphi(L)$ é um polinômio no operador de defasagem L ($Lx_t = x_{t-1}$).

Clarida et al. (1997) usaram dois modelos para analisar economias abertas, com câmbio fixo ou flutuante. Ele difere da estimativa para os EUA ao acrescentar variáveis explicativas de economia aberta, como o câmbio e a taxa de juros externa. Este modelo é usado para estimar as funções de reação da Alemanha e do Japão em todo o período de amostra; e do Reino Unido, França e Itália para o período quando havia alguma liberdade de política monetária. Os autores, então, comparam as funções estimadas ao que foi posto em prática no período seguinte, por imposição do regime de câmbio fixo.

As estimativas para o Bundesbank indicam que o estoque de moeda não importa para a definição da taxa de juros, apesar de que havia na Alemanha metas explicitas para esta variável. Para as taxas de juros, a estimativa é significativa estatisticamente e positiva, mas quantitativamente pequena.

O Banco do Japão teve uma resposta maior para a inflação e menor para o hiato de produto, se assemelhando mais a um sistema puro de resposta à inflação do que os outros países estudados. A taxa de câmbio tem um efeito positivo e significante, mas como na Alemanha, de pequena magnitude.

Os últimos três países não tiveram a mesma liberdade com suas políticas monetárias. A partir de 1979, funcionou na Europa o Mecanismo Europeu de Taxas de Câmbio (MTC), no qual cada país membro se comprometia a atrelar sua moeda ao marco alemão. Até o começo da década de 1990 controles de capitais permitiam que os países membros tivessem alguma liberdade de política econômica para buscar objetivos domésticos. O enrijecimento do sistema impôs aos países membros, então, a política monetária praticada pelo Bundesbank.

A estimação da Regra de Taylor foi feita em duas etapas. Primeiramente, de maneira similar àquela para a Alemanha, para o período terminando na entrada do MTC rígido, e começando na data que os autores acreditam ser o começo da política monetária não acomodatícia da inflação, a saber, 1979/6 para a Inglaterra, 1981/6 para a Itália, e 1983/5 para a França. Os autores então comparam a taxa de juros alvo que esta regra estimada apontaria para o período do MTC rígido, e a comparam com a que de fato foi praticada, criando um índice de tensão do sistema.

Concluem, os autores, que o Banco da Inglaterra, o Banco da França e o Banco da Itália agiram mais em função do Bundesbank do que em função de sua própria taxa de inflação. As três estimativas sem que se inclua a taxa de juros alemã fornecem constantes grandes e estimativas para a taxa de juros real de equilíbrio alta, da ordem de 6,5%. Quando se inclui a taxa de juros alemã, vê-se coeficientes estimados maiores para esta do que para a inflação nos três países. Conclui-se que estes países tiveram taxas de juros anormalmente altas para se manter no MTC, explicando a derrocada do sistema por opção de seus integrantes. Itália e Reino Unido acabaram saindo dele, e a França (que, dos três, era a que tinha a maior resposta a taxa alemã) mudou para um regime de bandas cambiais. Um agravante foi a situação doméstica da Alemanha, que teve que incorrer em déficits públicos para financiar o processo de unificação no final da década de 1980. Em resposta, o Bundesbank elevou a taxa de juros, levando os membros da MTC a fazerem o mesmo.

2.3. Resenha Seletiva de Estimativas da Regra de Taylor no Brasil

Holland (2005) estimou a Regra de Taylor para o Brasil, no período de julho de 1999 a janeiro de 2005, usando o índice de produção industrial para estimar o hiato de produto por uma tendência linear e pelo filtro HP. O modelo é baseado na especificação prospectiva (*forward-looking*), incluindo-se uma dummy igual a um para o período da crise energética (entre maio de 2001 e fevereiro de 2002), e estimado por GMM. Estimativas deste modelo base variando-se o método de estimação do hiato de produto e a inclusão ou não da taxa de câmbio apresentam um coeficiente para o desvio da meta de inflação entre 2,33 e 4,35 (entre 2,33 e 2,62 nas especificações com o filtro HP, e entre 4,28 e 4,35 nas demais), indicando uma resposta forte e estatisticamente significante à inflação. O coeficiente para o hiato de

produto é negativo e estatisticamente significante (entre −1,41 e −0,95). Este coeficiente negativo não tem sentido teórico, mas, argumenta o autor, pode ser explicado pela dummy da crise energética. Os coeficientes estimados para a variação da taxa de câmbio real são pequenos e não significantes.

O autor estimou variações desse modelo usando taxas nominais de câmbio e o nível da taxa de juros, ao invés da primeira diferença. O coeficiente do desvio da meta de inflação foi estimado em 3,93, em média, muito alto em comparação com outros países. Nestas novas especificações, quando o filtro HP é usado para se estimar o hiato de produto, e a variação do câmbio nominal é usada como variável explicativa, seu coeficiente é significante e positivo, ficando entre 0,38 e 0,51. O autor conclui que o câmbio nominal é importante para a definição das taxas de juros, mas o real não.

Modelos da regra de Taylor que usam a taxa de câmbio nominal como variável explicativa introduz um erro de especificação que invalidam as conclusões do mesmo. No longo prazo, quando o desvio da inflação com relação a meta e o hiato de produto convergem para zero, a taxa de câmbio nominal será igual à diferença entre as taxas de inflação doméstica e externa, se a taxa de câmbio real de longo prazo for constante. As especificações que não levam em conta este fato implicam numa taxa de juros nominal, no longo prazo, diferente da soma da taxa de juros natural com a meta da taxa de inflação. As conclusões de Holland advindas da estimação com a taxa de câmbio nominal, portanto, devem ser vistas com cautela.

Teles & Brundo (2006) compararam a abordagem tradicional à estimação da Regra de Taylor a uma abordagem com medidas discretas de política monetária. A taxa de juros (tradicionalmente medida pela SELIC no Brasil) é uma medida contínua que, argumentam os autores, pode sofrer de problemas de endogeneidade. Mudanças institucionais que afetem a taxa de juros de equilíbrio de longo prazo, ou um maior crescimento econômico que leve a uma expansão da oferta de moeda por meio do crédito têm efeitos sobre a taxa de juros que não se originam da decisão do governo de combater choques inflacionários. Os autores tentam, então, isolar as determinações do COPOM que têm claramente o objetivo de conduzir uma política monetária de combate à inflação. Para tanto foram criados três indicadores discretos que assumem valores dependendo da motivação, expressa nas atas do COPOM, para a mudança de juros. O primeiro índice assume o valor 1 quando a taxa SELIC é elevada, 0 quando ela não é alterada, e −1 quando a meta é reduzida. O segundo indicador, mais restritivo, considera apenas variações "cujo motivo explicitado na ata do COPOM foi o de provocar um choque para combater uma variação inesperada na inflação corrente observada" (p.4). O terceiro é similar, mas considera não a inflação corrente observada, e sim a expectativa de inflação. Nas especificações discretas foram usados três modelos: o probit ordenado (OP), o probit ordenado dinâmico com parâmetros constantes (FP-DOP), e o probit ordenado dinâmico com parâmetros variáveis (TVM-DOP). Foram estimadas, também, especificações contínuas, tanto com parâmetros fixos como variáveis.

Os autores observam que os parâmetros estimados são condizentes com um combate a inflação que converge para um equilíbrio, pois a reação à inflação maior que um menos o parâmetro de suavização.

O modelo mais adequado a essa regra é o modelo que leva em conta a expectativa da inflação. Os resultados dos modelos com parâmetros variáveis apontam uma quebra em 2003, quando a reação à inflação parece ter se intensificado.

Os modelos discretos apontam resultados semelhantes. O coeficiente referente à inflação e ao desvio dela em relação à meta é, na maioria das especificações, positivo e significativo. Nas especificações dinâmicas eles têm comportamentos instáveis, mas também parecem ter aumentado a partir de 2003. Os autores concluem que a política monetária se tornou mais rígida no sistema de metas de inflação e no governo Lula.

Gonçalves & Fenolio (2007) testaram, por meio de estimações da função de reação do BACEN, se os ciclos políticos influenciam a política monetária no Brasil. Diversos estudos foram conduzidos sobre a influência de ciclos políticos na política monetária e fiscal no mundo, concluindo, em geral, que em paí-

ses de democracia antiga a influência fiscal é pequena e a monetária é nula. No Brasil detectou-se forte influência na política fiscal. Os autores não encontram evidência de que os ciclos tenham influência nas decisões de política monetária. Foi estimada uma especificação baseada em Minella, Freitas, Goldfajn & Muinhos (2002), semelhante à de Judd & Rudebusch (1998), da Regra de Taylor com a inclusão de dummies referentes aos ciclos políticos, e com dados trimestrais e por MQO. Em seguida, foram feitas novas estimativas usando dados mensais, por MQO como por GMM, com resultados semelhantes à primeira.

Utilizaram-se dados trimestrais na estimação para permitir a comparação com estimativas feitas para outros países. O hiato do produto foi estimado por meio da série de produção industrial do IBGE, tratada pelo filtro HP. O desvio da meta de inflação se baseia em Minella et al. (2002) e é uma média dos desvios esperados para os próximos doze meses, em relação à meta do ano do desvio. A medida da taxa de juros foi a SELIC efetiva que vigorou no último dia do trimestre analisado. O modelo foi estimado por MQO. Foram incluídas seis dummies de política, uma em cada estimação: uma dummy igual a 1 nos 4 trimestres anteriores à eleição, incluindo o trimestre eleitoral; uma dummy excluindo o trimestre eleitoral; uma dummy cíclica de 0 a 4, sendo 0 no trimestre eleitoral, 1 no trimestre imediatamente posterior, subindo 1 a cada trimestre até 4, e então voltando a diminuir 1 por trimestre até a próxima eleição; e mais 3 dummies iguais às anteriores, mas considerando também as eleições municipais. Foram estimados, então, 7 modelos, um sem a variável de política e um para cada uma delas. Os coeficientes das variáveis econômicas (todas menos as de política) são significantes ao nível 5%. Os resultados se mantém estáveis entre os modelos. A constante fica entre 12,97 e 13,83; o coeficiente da Selic defasada fica entre 0,63 e 0,66; o do desvio da inflação, entre 4,54 e 4,95; o do hiato defasado, entre 1,05 e 1,27. Os coeficientes para as variáveis de política não são significantes e são todos próximos de zero.

Para as estimações seguintes foram utilizados dados mensais. Escolheu-se usar o hiato do produto defasado em dois períodos, pois o IBGE divulga a série de produção industrial com dois meses de atraso. Para a estimativa por GMM, o hiato de produto defasado em dois períodos e a Selic defasada foram usadas como instrumentos de si mesmas. Para o desvio da meta de inflação foram usadas: a diferença da variação interanual da taxa de câmbio média do mês com uma e duas defasagens; a taxa de juros do mercado futuro expressa pela taxa de SWAP Pré-DI de 360 dias, descontada a taxa de risco Brasil medida pelo Embi+ Brasil do banco JP Morgan, e defasada em um e dois períodos; e a diferença do índice CRB20 defasado em um período e corrente. As dummies cíclicas foram estendidas para variarem entre 1 e 12, cobrindo o mesmo período de tempo que no modelo trimestral. No modelo estimado por MQO, os coeficientes apresentam pouca variação em relação aos do modelo trimestral. Os níveis de significância continuam valendo e as conclusões não mudam. Para o modelo estimado por GMM, há mais variação entre os coeficientes, mas as conclusões também não mudam. Os autores concluem, portanto, que os ciclos políticos não influenciaram a política monetária no período analisado.

3. TAXA DE JUROS NATURAL NO BRASIL: 2003–2015

Numa economia aberta pequena sem restrições a mobilidade do capital e com ativos substitutos perfeitos a taxa de juros real doméstica é igual a taxa de juros internacional. Quando estas hipóteses não forem satisfeitas deve-se incorporar os termos de risco soberano (γ_t) e do risco cambial (τ_t), supondo-se que não haja oportunidades de arbitragem. Portanto, a taxa de juros natural numa economia aberta pequena é dada por

$$\bar{r}_t = r_t^* + \gamma_t + \tau_t . \tag{5}$$

Após adicionar os três termos, aplica-se um filtro Hodrick-Prescott para dados mensais ($\lambda = 14400$), de forma a eliminar as flutuações voláteis destes termos. Este procedimento é repetido para cada uma das medidas calculadas.

Para construir a taxa de juros natural brasileira, como pode ser visto na equação (5), é necessário obter dados de uma taxa de juros internacional, de uma medida de risco soberano e também de

prêmio cambial.

Como medida de taxa de juros internacional, há diferentes escolhas possíveis, em decorrência de diferentes horizontes de maturidade. As escolhas usuais são a taxa de juros efetiva praticada pelo Federal Reserve Bank (Fed) — Fed Funds Effective Rate — descontada a inflação americana, que é divulgada pelo Bureau of Labor Statistics, e a LIBOR, uma taxa internacional de referência, também descontada a inflação americana.

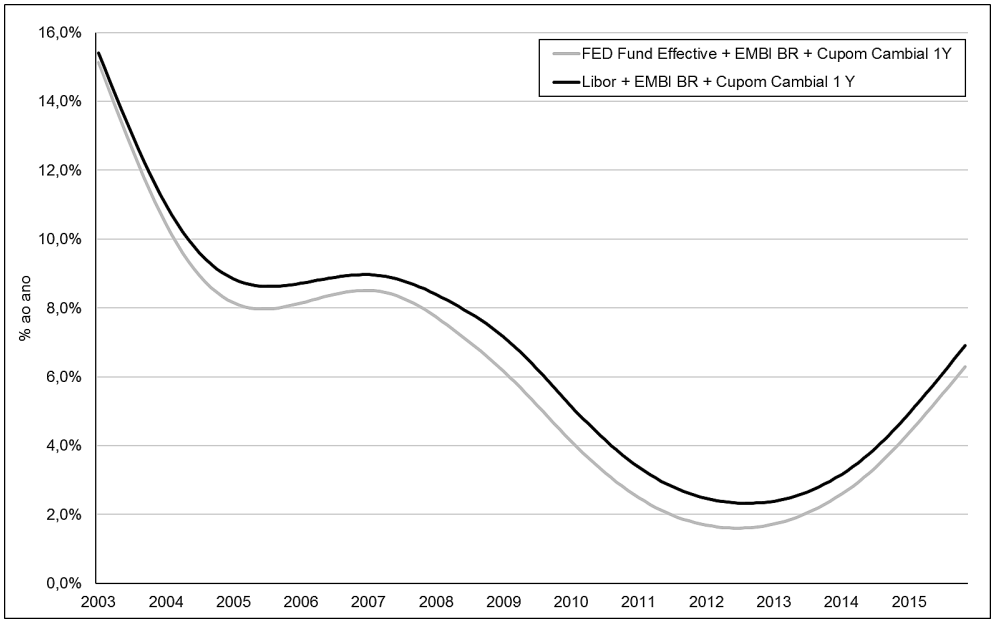
No tocante à medida de risco soberano, há, novamente, diferentes escolhas possíveis em decorrência de diferentes horizontes de maturidade. No horizonte de um ano, a medida usual é EMBI+ Brazil, um índice de risco construído e publicado pelo banco JP Morgan.[2]

Para medir o prêmio cambial, utilizou-se o cupom cambial, que é o prêmio pago ao investidor para assumir o risco de investir na moeda do país escolhido. O cálculo do cupom para o horizonte de um ano foi baseado na metodologia apresentada por França (2010), que extrai a variação cambial do DDI Futuro, também conhecido como "cupom cambial sujo" por ser calculado com a PTAX do dia anterior à venda, e adiciona-se a taxa do dólar no mercado pronto (*spot*, no jargão em inglês).

Análise dos Resultados

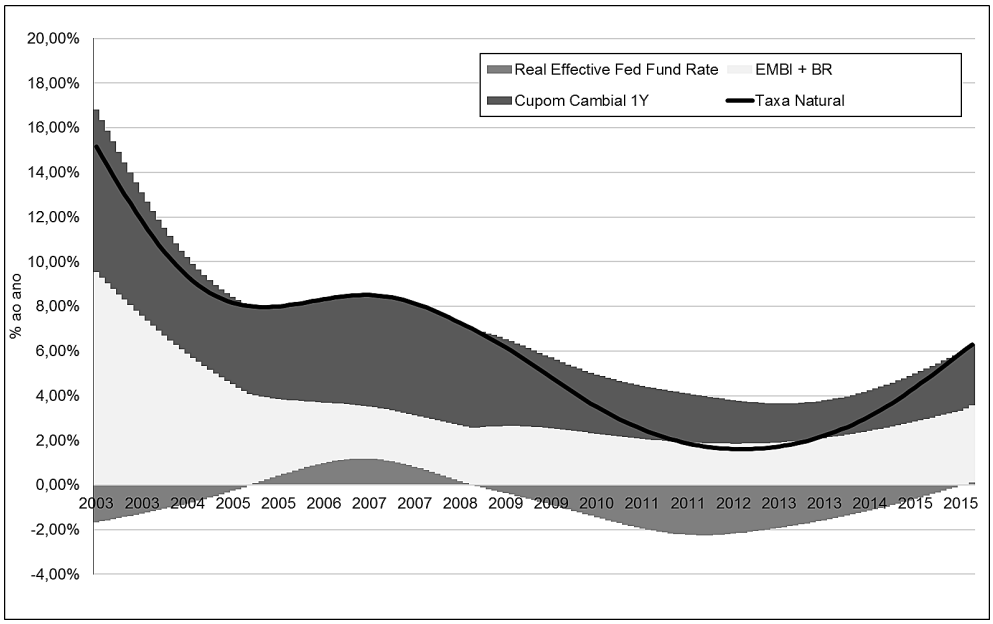
A Figura 2 mostra que ambas as medidas de curto prazo apresentam forte queda até o começo de 2013 e, desde então, têm subido. Para entender esses movimentos, é essencial examinar os componentes escolhidos, como exposto na Figura 3, que contém a estimativa baseada na taxa efetiva do Fed. Entre 2003 e 2007, grande parte da redução pode ser explicada pela estabilização do cenário macroeconômico brasileiro, fato que se refletiu na queda dos prêmios de risco e de câmbio e que dominou um certo aperto das condições monetárias internacionais.

Figura 2. Diferentes medidas para a taxa de juros natural brasileira (títulos internacionais de curto prazo).



[2] O EMBI+, calculado pelo banco americano JP Morgan, é um índice baseado nos títulos de dívida emitidos pelos países emergentes, evidenciando, em pontos-base, o spread soberano entre os títulos do país de referência e os títulos do Tesouro dos EUA, medindo, portanto, o risco de investir nesse país.

Figura 3. Taxa natural baseada na FED Fund — contribuição de cada componente.



Entre 2008 e 2013, por outro lado, a queda da taxa natural reflete a política monetária extremamente agressiva dos EUA, como resposta à crise financeira internacional, que não só provocou queda dos juros reais mas diminui o risco cambial. Desde 2013, no entanto, a deterioração da economia brasileira — em decorrência da piora dos resultados fiscais, da aceleração da inflação e também de piores expectativas dos agentes econômicos com relação à política econômica — provocou o aumento do risco de investimento em ativos brasileiros, revertendo parcialmente a queda da taxa natural.

Na economia brasileira existe um título público indexado a taxa de juros SELIC, a Letra Financeira do Tesouro (LFT), que domina as Reservas Bancárias do Banco Central do Brasil, por pagarem juros, terem liquidez imediata e seu preço não ser afetado pela taxa de juros (Barbosa, 2006). Estes títulos, por arbitragem, devem render, na média, o mesmo que outro título que tenha a mesma maturidade. Logo, a taxa de juros natural no Brasil deve ter um termo para medir este componente, como indicado por λ na expressão

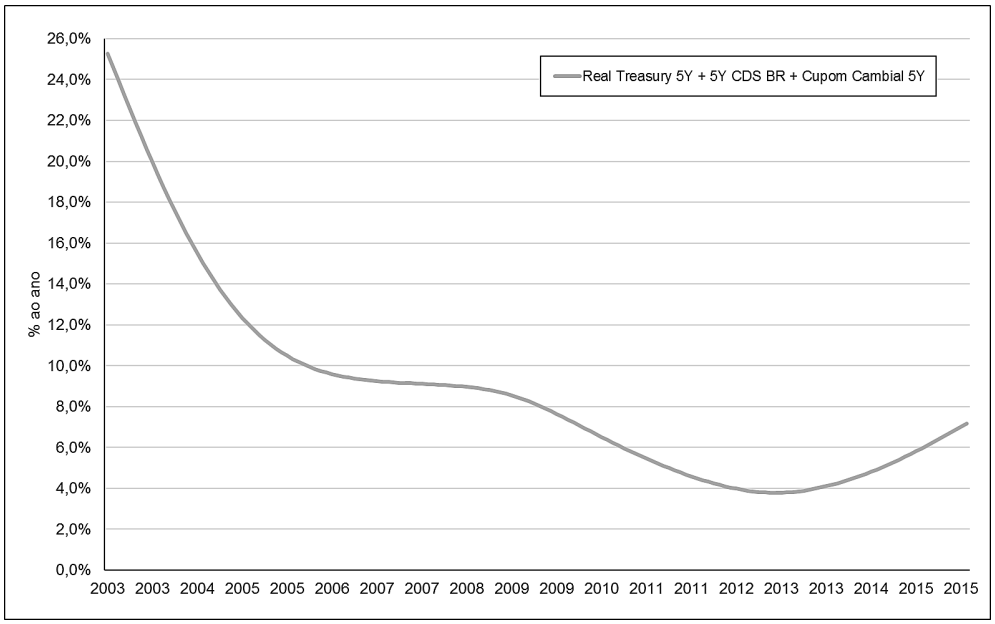
$$\bar{r}_t = r_t^* + \gamma_t + \tau_t + \lambda_t. \tag{6}$$

Para a medida de longo prazo, utiliza-se a taxa de juros paga pelo título público americano "protegido da inflação" com cinco anos de maturidade, conhecido como TIPS 5Y e também divulgado pelo Fed. A taxa de retorno deste título público americano é uma aproximação para medir o componente da "jabuticaba" das LFTs. Para medir o risco país no horizonte de 5 anos, utilizou-se o *Credit Default Swap* (CDS)[3] brasileiro, cujas taxas são resultado das operações de mercado desse derivativo, sendo divulgado pela Bloomberg. Para o risco cambial usou-se o mesmo procedimento das taxas de curto prazo.

A série da taxa de juros natural construída com este título de cinco anos de maturidade, apesar da diferença de nível, apresenta a mesma evolução histórica, com forte redução até o começo desta década e, desde então, uma reversão parcial da queda. Sua evolução está na Figura 4.

[3] O CDS é um derivativo de crédito, permitindo ao investidor comprar proteção para um crédito contra o risco de default do emissor do ativo. Nos últimos anos, tornou-se um dos *benchmarks* para precificar o crédito e, por consequência, o risco de investir em um ativo.

Figura 4. Diferentes medidas para a taxa de juros natural brasileira (Treasury 5 anos).



Admitindo-se que a taxa de juros de um título público brasileiro emitido em reais, por arbitragem, seja igual à taxa de juros internacional paga pelos títulos públicos brasileiros emitidos em dólares, pode-se dizer que esta taxa é uma boa aproximação para a taxa de juros natural. Pode-se, então, extrair o componente de tendência de uma taxa paga por um título brasileiro de longo prazo, como a NTN-B, que é um título indexado ao IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Ampliado) do IBGE. Como medida de longo prazo, calculou-se a evolução da taxa do título com vencimento em 2045 e também a evolução da taxa do título com 5 anos, construída com diversas maturidades diferentes desde 2005, como mostra a Figura 5.

A Figura 6 contém as diferentes estimativas da taxa de juros natural brasileira construídas a partir de diferentes hipóteses. De modo geral, elas mostram um padrão semelhante, embora os níveis sejam diferentes. Por exemplo, a taxa natural construída com a taxa do Fed tem um mínimo de 1,6%, enquanto a taxa construída com o título do Tesouro Americano de cinco anos tem um mínimo de 3,8% ao ano.

As estimativas da taxa de juros natural permitem avaliar a postura (*policy stance* no jargão em inglês) da política monetária do banco central brasileiro desde 2003. Se a taxa de juros real for inferior à taxa natural, há uma política expansionista. Caso contrário, há uma política contracionista. Compara-se, então, a taxa SELIC deflacionada pelo IPCA (Índice de Preços ao Consumidor) calculado pelo IBGE com duas das diversas medidas de taxa natural calculadas na seção anterior. A Figura 7 apresenta essa comparação.

A postura contracionista entre meados de 2003 e 2007 se refletiu em forte redução da inflação, como se observa na Figura 1. Por outro lado, entre 2008 e 2010, diante das incertezas resultantes da crise internacional e também de seus efeitos reais, a política monetária se tornou expansionista, de forma que a inflação passou a oscilar um pouco mais, embora ainda dentro da meta.

Em 2011 a política monetária começou a ter uma condução diferente do que indicaria a meta de inflação do BACEN. Apesar do aumento da inflação e da perspectiva de outros aumentos, houve uma reversão brusca de um ciclo de aumento dos juros. Como pode ser observado na Figura 7, isso se reflete em uma política monetária expansionista a partir de meados 2012 até o fim 2013, quando um novo ciclo

Figura 5. Diferentes medidas para a taxa de juros natural brasileira (Títulos Brasileiros).

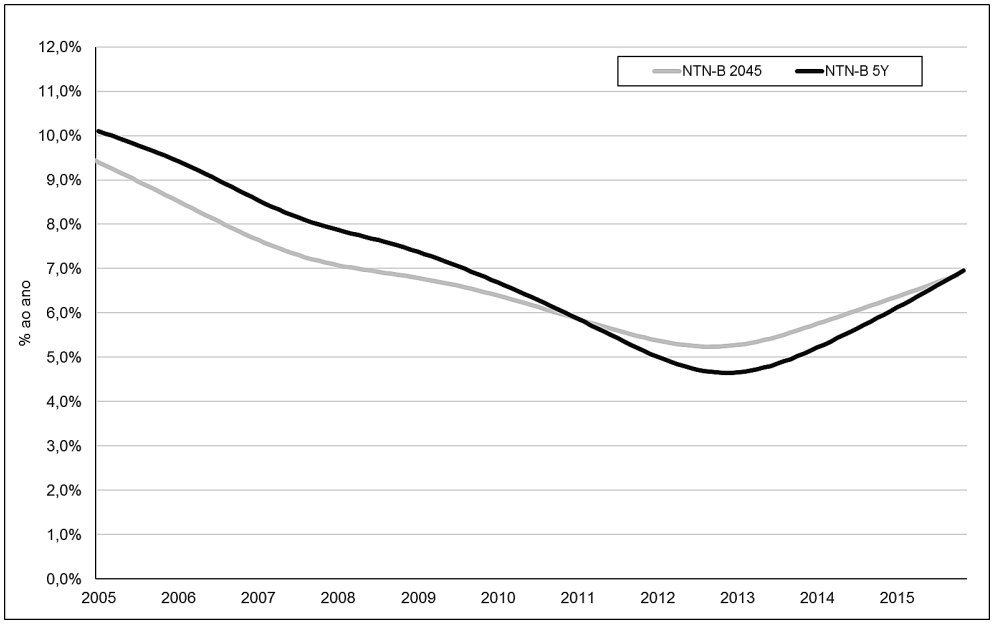


Figura 6. Comparação entre as diferentes medidas para a taxa de juros natural brasileira.

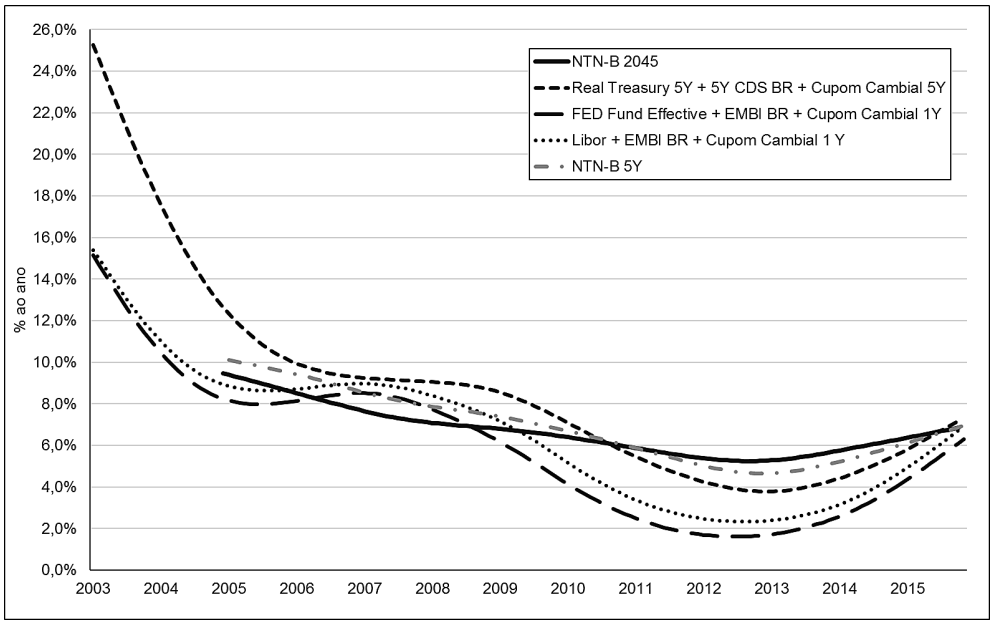
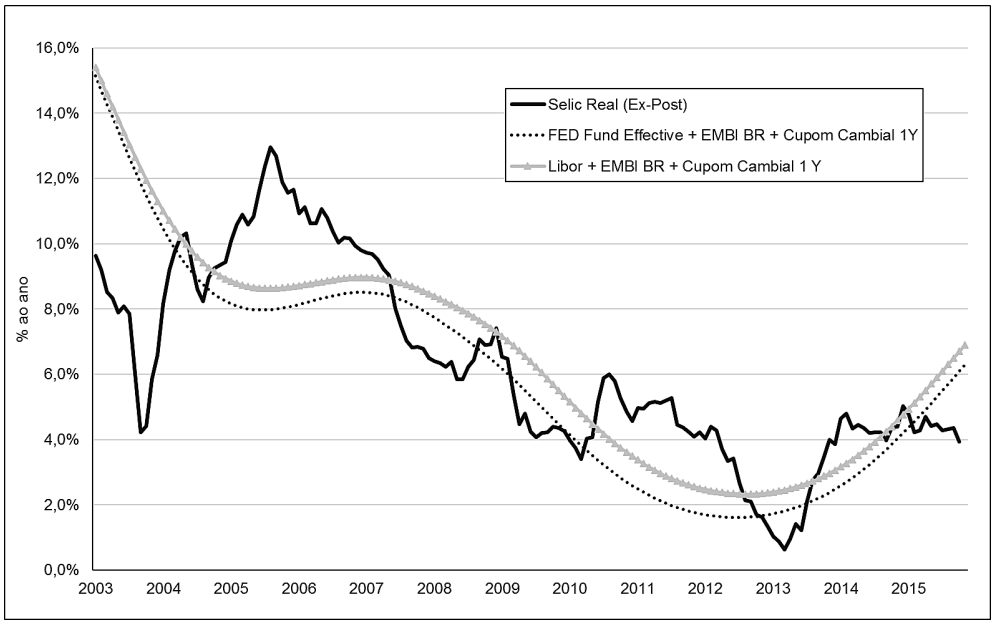


Figura 7. *Policy Stance* do BACEN – Taxa Natural (Medidas de Curto Prazo) vs. Selic Real (Ex-post).



de alta da taxa de juros foi iniciado, o qual continua desde então.

Quando se considera a taxa natural baseada no título americano de maturidade de cinco anos (TIPS 5Y), a avaliação seria ainda mais drástica, com a política monetária expansionista desde meados de 2007. Os efeitos dessa política sobre a inflação foram claros, pois o índice permaneceu no teto da meta ou próximo a ele em todos anos desde 2011 e, em 2015, ultrapassou o teto da meta em mais de 6 pontos percentuais, como pode ser visto na Figura 1.

O aumento da inflação, no entanto, vinha sendo mascarado com o represamento de tarifas de energia e também de combustíveis e, apenas com uma certa dose de "realismo tarifário" imposto em 2015, ficou claro para a sociedade brasileira a gravidade da situação. Além disso, esse aumento da inflação mais do que anula os aumentos da taxa SELIC depois da eleição de 2014, evidenciando o fato de que a política monetária teria de ser mais austera, agravando a recessão.

4. REGRA DE TAYLOR NO BRASIL: 2003–2015

A especificação da Regra de Taylor é prospectiva (*forward-looking*, no jargão em inglês) baseada em Judd & Rudebusch (1998) e Soares & Barbosa (2006). A equação (7) define a taxa de juros desejada e a equação (8) descreve o mecanismo de ajustamento:

$$\hat{i}_t = \bar{r}_t + \pi_t + \beta_1(\pi^e_{t+n} - \bar{\pi}) + \beta_2 y_t + \beta_3 y_{t-1} + \beta_4(q_t - q_{t-1}) + \beta_5(\Delta q_t - \Delta q_{t-1}), \tag{7}$$

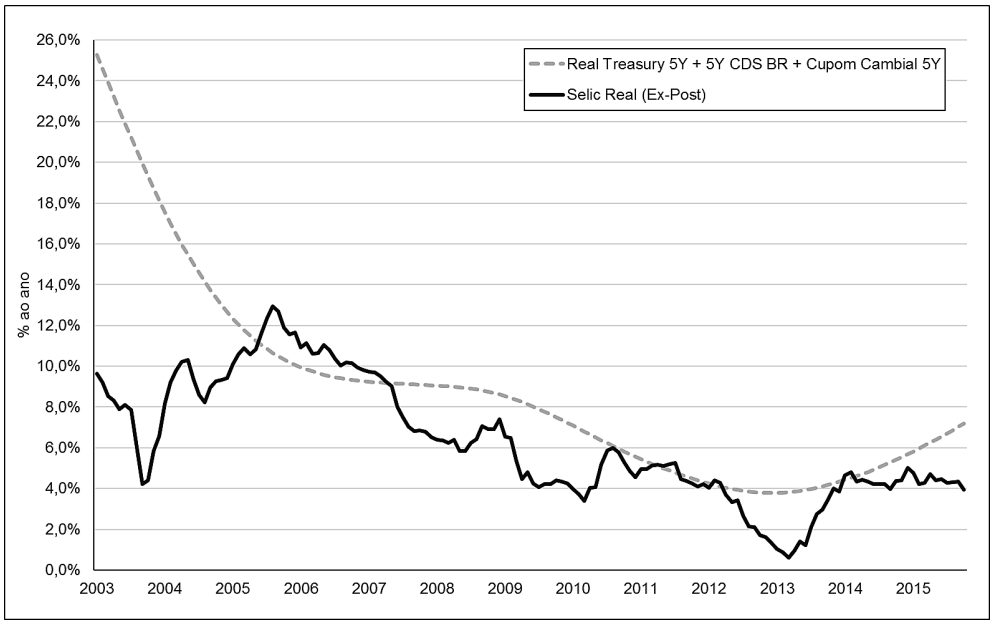
$$\Delta i_t = \lambda\left(\hat{i}_t - i_{t-1}\right) + \rho\Delta i_{t-1}. \tag{8}$$

Substituindo-se a equação (7) na equação (8) obtém-se

$$\Delta i_t = \alpha_1\left(\bar{r}_t + \pi_t - i_{t-1}\right) + \alpha_2\left(\pi^e_t - \bar{\pi}\right) + \alpha_3 y_t + \alpha_4 y_{t-1} + \alpha_5\Delta q_t + \alpha_6\Delta\Delta q_t + \alpha_7\Delta i_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{9}$$

onde $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \lambda\beta_1$, $\alpha_3 = \lambda\beta_2$, $\alpha_4 = \lambda\beta_3$. $\alpha_5 = \lambda\beta_4$, $\alpha_6 = \lambda\beta_5$, $\alpha_7 = \rho$ e $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\alpha_4 > 0$, $\alpha_5 > 0$, $\alpha_6 > 0$, $0 < \alpha_7 < 1$.

Figura 8. *Policy Stance* do BACEN – Taxa Natural (TIPS 5Y) vs. Selic Real (Ex-Post).



A regra de política monetária indica que a taxa de juros aumenta se a diferença entre a taxa de juros natural nominal e taxa de juros vigente no período anterior aumenta, se as expectativas inflacionárias estiverem acima da meta, se o produto estiver acima do potencial e se ocorrer uma depreciação cambial real entre o período atual e o anterior. Os dados da economia brasileira não mostram uma tendência na taxa de câmbio real indicando, portanto, não existir o efeito Harrod–Balassa–Samuelson, que invalidaria a variação da taxa de câmbio real como variável explicativa da Regra de Taylor.

Dados

Antes de analisar as estimativas da Regra de Taylor cabe descrever os dados que foram utilizados e suas fontes. Para a taxa de juros natural usou-se os valores computados na segunda seção a partir das diferentes metodologias explicitadas.

A taxa de inflação é medida pelo índice de preços ao consumidor IPCA, publicada pelo IBGE. A expectativa de inflação é dada pela mediana suavizada das expectativas para a inflação acumulada nos próximos doze meses divulgadas no Boletim Focus do Banco Central. As metas de inflação são estabelecidas pelo Conselho Monetário Nacional, para cada ano calendário, e são publicadas pelo Banco Central do Brasil.

O hiato de produto é medido pela diferença entre o logaritmo natural do Índice de Atividade Econômica do Banco Central (IBC-BR) e sua tendência de longo prazo, extraída a partir da utilização do filtro HP com parâmetro de suavização mensal ($\lambda = 14400$). A taxa de câmbio real é o logaritmo natural da taxa de câmbio real efetiva publicada pelo Banco Central, utilizando o IPCA. A taxa de juros é a taxa SELIC. Para haver uniformidade na interpretação dos coeficientes, todas as unidades das variáveis utilizadas nas regressões, com exceção das variáveis dummy, estão em porcentagens.

Análise dos Resultados

A especificação do modelo requer, naturalmente, a utilização de métodos econométricos com variáveis instrumentais. Diante do problema de simultaneidade usou-se o método dos momentos generalizados GMM (na sigla em inglês).

O ano de 2003 foi um ano atípico devido ao choque político do ano anterior com a eleição do Presidente Lula. Acreditava-se que o Presidente Lula iria seguir a antiga cartilha do PT que não contemplava o uso da taxa de juros para combater a inflação e a taxa de inflação esperada aumentou ultrapassando os dois dígitos. Introduziu-se, portanto, uma variável dummy para este ano, de acordo com a seguinte especificação:

$$\Delta i_t = \alpha_1\left(\bar{r}_t + \pi_t - i_{t-1}\right) + \alpha_2\left(\pi_t^e - \bar{\pi}\right) + \alpha_3 y_t + \alpha_5(q_t - q_{t-1}) + \alpha_7\Delta i_{t-1} + \alpha_8 D03_t + \varepsilon_t. \quad (10)$$

O hiato do produto defasado e a aceleração da taxa de câmbio real não foi incluída nesta especificação porque estas variáveis não foram significantes.

Na Tabela 1 são apresentadas as estimativas dos coeficientes da equação (10) quando a taxa de juros natural é medida adicionando-se a taxa real do Fed Funds aos prêmios de risco do país e do câmbio.[4] Os coeficientes têm os sinais previstos pela teoria e todos são significativos. O coeficiente do hiato da inflação (a razão α_2/α_1) é igual a 2,1, bem maior do que o parâmetro correspondente da Regra de Taylor original para os Estados Unidos, igual a 0,5. O parâmetro do hiato do produto (a razão α_3/α_1) é igual a 1,2, também maior do que o coeficiente calibrado por Taylor para os EUA (0,5). Além disso, os dois coeficientes que representam o processo de suavização são significativos.

O coeficiente estimado para a variação da taxa de câmbio real é igual a 0,7 (a razão α_5/α_1). A evidência empírica com relação a variação da taxa de câmbio real não rejeita a hipótese sugerida por Taylor (2001, 2002) de que a taxa de câmbio deve ser incluída como uma das variáveis da regra de política monetária.

Com o objetivo de entender as razões que levaram a taxa de inflação e das expectativas estarem acima da meta do Banco Central, explora-se a possibilidade de sua função de reação ter mudado durante o primeiro governo da Presidente Dilma. Para fazer essa inferência, inclui-se uma dummy relativa a esse período. Esta dummy, no entanto, diferentemente da primeira que muda o intercepto, afeta os coeficientes angulares. D_t representa a dummy com valor igual a um de janeiro de 2011 até dezembro de 2014, e zero em caso contrário. A especificação tem o seguinte formato:

$$\Delta i_t = \alpha_1\left(\bar{r}_t + \pi_t - i_{t-1}\right) + \alpha_2\left(\pi_t^e - \bar{\pi}\right) + \alpha_2^d D_t\left(\pi_t^e - \bar{\pi}\right) + \alpha_3 y_t + \alpha_3^d D_t y_t + \alpha_5(q_t - q_{t-1}) + \alpha_5^d D_t(q_t - q_{t-1}) + \alpha_7\Delta i_{t-1} + \alpha_8 D03_t + \varepsilon_t. \quad (11)$$

Os resultados apresentados na Tabela 1, na coluna da equação (11a), indicam que, durante o governo Dilma, o Banco Central passou a dar um menor peso à inflação e maior peso ao hiato de produto, embora não tenha alterado suas reações à variação do câmbio, uma vez que o coeficiente dessa variável é insignificante e pode ser excluído sem prejuízo empírico, como mostra a coluna da equação (11b) da Tabela 1.

Com a inclusão da dummy relativa ao governo Dilma o coeficiente da variação defasada da taxa de juros deixa de ser significante. O modelo sem esta variável tem a seguinte especificação:

$$\Delta i_t = \alpha_1\left(\bar{r}_t + \pi_t - i_{t-1}\right) + \alpha_2\left(\pi_t^e - \bar{\pi}\right) + \alpha_2^d D_t\left(\pi_t^e - \bar{\pi}\right) + \alpha_3 y_t + \alpha_3^d D_t y_t + \alpha_5(q_t - q_{t-1}) + \alpha_5^d D_t(q_t - q_{t-1}) + \alpha_8 D03_t + \varepsilon_t. \quad (12)$$

[4] A estimativa do modelo quando usa-se a taxa de juros natural que inclui o componente das LFTs produziu resultados incongruentes com a regra de Taylor. Uma possível razão para este fato é que a proxy que mede a taxa de retorno real das LFTS não seja apropriada.

Tabela 1. Regra de Taylor (GMM): 2003–2015 (Taxa de Juros Natural – Fed Funds).

Variáveis	(1) Equação (10)	(2) Equação (11a)	(3) Equação (11b)	(4) Equação (12)
Hiato de Juros	0,079***	0,066***	0,069***	0,070***
	(0,014)	(0,014)	(0,014)	(0,015)
Surpresa Inflacionária	0,170***	0,334***	0,342***	0,363***
	(0,036)	(0,059)	(0,057)	(0,054)
Hiato de Produto	0,097***	0,115***	0,112***	0,119***
	(0,025)	(0,026)	(0,026)	(0,024)
Variação Mensal do Câmbio Real	0,053*	0,053*	0,051**	0,048*
	(0,028)	(0,031)	(0,026)	(0,026)
Surpresa Inflacionária – Dilma		−0,315***	−0,307***	−0,336***
		(0,070)	(0,067)	(0,058)
Hiato de Produto – Dilma		0,164**	0,146**	0,167***
		(0,065)	(0,061)	(0,057)
Variação Mensal do Câmbio Real – Dilma		(0,038)		
		(0,044)		
Variação Selic em $t-1$	0,232***	0,071	0,074	
	(0,075)	(0,091)	(0,093)	
Dummy – 2003	−1,830***	−2,324***	−2,378***	−2,466***
	(0,267)	(0,303)	(0,293)	(0,314)
Observações	150	150	150	150
Estatística J de Hansen	4.631	5.748	3.547	3.806
R^2	0,538	0,547	0,546	0,540

Notas: Erros-padrão robustos entre parênteses.
*** $p < 0{,}01$, ** $p < 0{,}05$, * $p < 0{,}1$.

Os resultados da estimação dos coeficientes desta especificação estão na Tabela 1, na coluna que corresponde à equação (12). Como seria de esperar a retirada da variável de suavização não altera as estimativas dos coeficientes da Regra de Taylor. O parâmetro do hiato da inflação diminui de 5,2 (α_2/α_1) no período Lula para 0,4 ($(\alpha_2+\alpha_2^d)/\alpha_1$) no período Dilma, enquanto o coeficiente do hiato do produto aumenta de 1,7 (α_3/α_1) para 4,0 ($(\alpha_3+\alpha_3^d)/\alpha_1$) no Governo Dilma. A evidência empírica não rejeita, portanto, a hipótese de que o Banco Central do Brasil mudou sua função de reação no primeiro mandato da Presidente Dilma.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve três objetivos. Em primeiro lugar, estimou-se a taxa de juros natural da economia brasileira, supondo que se trata de uma economia aberta pequena. Em segundo lugar, estimou-se a regra de Taylor para o Brasil, considerando o fato de que a taxa de juros natural varia ao longo do tempo, diferentemente das estimativas feitas para outras economias como a americana. A regra de Taylor inclui outras variáveis da economia aberta, como o câmbio real, que possam ter influência na decisão de política monetária. Em terceiro lugar, testou-se a hipótese de que teria havido uma mudança no com-

portamento do Banco Central do Brasil durante o primeiro mandato do governo da Presidente Dilma, ou seja, se teria havido mudanças na regra de Taylor brasileira.

A taxa de juros natural do mercado interbancário no Brasil pode ser explicada por quatro componentes: i) taxa de juros internacional; ii) prêmio de risco de câmbio; iii) prêmio de risco país; e iv) prêmio LFT. Ela não depende, portanto, da taxa de poupança doméstica da economia brasileira nem tampouco do déficit público. A sustentabilidade da dívida pública afeta a taxa de juros natural via prêmio de risco país.

As diversas estimativas para a taxa de juros natural revelam uma forte queda até o começo desta década, com uma breve reversão a partir de meados de 2012. Ademais, as medidas de curto prazo baseadas no arcabouço teórico para economias abertas pequenas mostraram-se significantes quando incluídas na regra de Taylor, indicando que essa variável e a hipótese de economia aberta e pequena não devem ser ignoradas em trabalhos sobre política monetária no Brasil. Ainda nesse aspecto, a outra variável de economia aberta utilizada — a variação mensal da taxa de câmbio real — também se mostrou significante e, portanto, relevante no processo decisório da autoridade monetária brasileira.

A evidência empírica encontrada por este trabalho sugere que, durante o primeiro governo de Dilma Roussef, o Banco Central teve uma postura significativamente mais leniente do que em todo os outros anos analisados, o que pode ser entendido como uma das razões de a inflação ter ficado consistentemente acima da meta desde 2011.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arida, P., Bacha, E. L. & Lara-Resende, A. (2004). *Credit, interest, and jurisdictional uncertainty: Conjectures on the case of Brazil* [mimeo]. Instituto de Estudos de Política Econômica, Casa das Garças, Rio de Janeiro, Brasil.

Barbosa, F. d. H. (2006). The contagion effect of public debt on monetary policy: The Brazilian experience. *Revista de Economia Política*, *26*(2), 231–238. doi: 10.1590/S0101-31572006000200004

Barbosa, F. d. H. (2015). *The natural rate of interest in a small open economy* [mimeo].

Barcellos Neto, P. C. F. d., & Portugal, M. S. (2009). The natural rate of interest in Brazil between 1999 and 2005. *Revista Brasileira de Economia*, *63*(2), 103–118. doi: 10.1590/S0034-71402009000200003

Clarida, R., Gali, J. & Gertler, M. (1997, November). *Monetary policy rules in practice: Some international evidence* (Working Paper Nº 6254). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: 10.3386/w6254

Favero, C. A., & Giavazzi, F. (2002, July). *Why are Brazil's interest rates so high?* (Working Paper Nº 224). Milano: IGIER – Università Bocconi.

França, D. M. (2010). *Derivativos cambiais do mercado brasileiro: Precificação e administração de riscos* (Dissertação, EPGE-FGV, Rio de Janeiro). Disponível em: http://hdl.handle.net/10438/6958

Goldfajn, I., & Bicalho, A. (2011, fevereiro). *A longa travessia para a normalidade: Os juros reais no Brasil* (Texto para Discussão Nº 02/2011). Departamento de Pesquisa Macroeconômica – Itaú Unibanco. Disponível em: https://www.itau.com.br/itaubba-pt/analises-economicas/publicacoes/textos-para-discussao/a-longa-travessia-para-a-normalidade-os-juros-reais-no-brasil

Gonçalves, C. E. S., & Fenolio, F. R. (2007). Ciclos eleitorais e política monetária: Evidências para o Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *37*(3), 465–487. Disponível em: http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/6

Gottlieb, J. W. F. (2013). *Estimativas e determinantes da taxa de juros real neutra no Brasil* (Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro). Disponível em: http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/1111765_2013_completo.pdf

Holland, M. (2005, dezembro 6–9). Monetary and exchange rate policy in Brazil after inflation targeting. In *XXXIII Encontro Nacional de Economia da ANPEC*, Natal, RN. Disponível em: http://www.anpec.org.br/

encontro2005/artigos/A05A032.pdf

Judd, J. P., & Rudebusch, G. D. (1998). Taylor's Rule and the Fed: 1970–1997. *FRBSF Economic Review*, *3*, 3–16. Disponível em: http://www.frbsf.org/economic-research/publications/economic-letter/1998/econrev/98-3/3-16.pdf

Laubach, T., & Williams, J. C. (2003). Measuring the natural rate of interest. *Review of Economics and Statistics*, *85*(4), 1063–1070. doi: 10.1162/003465303772815934

Mésonnier, J.-S., & Renne, J.-P. (2004, September). *A time-varying natural rate for the euro area* (Notes d'Études et de Recherche N° 115). Paris: Banque de France. Disponível em: https://www.banque-france.fr/en/economics-statistics/research/working-paper-series/document/115-1.html

Minella, A., Freitas, P. S. d., Goldfajn, I. & Muinhos, M. K. (2002, November). *Inflation targeting in Brazil: Lessons and challenges* (Working Paper N° 53). Brasília, DF: Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps53.pdf

Muinhos, M. K., & Nakane, M. I. (2006, March,). *Comparing equilibrium real interest rates: Different approaches to measure Brazilian rates* (Working Paper N° 101). Brasília: Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps101.pdf

Orphanides, A., & Williams, J. C. (2006, April). *Inflation targeting under imperfect knowledge* (Working Paper N° 2006-14). Federal Reserve Bank of San Francisco. Disponível em: https://fedinprint.org/items/fedfwp/2006-14.html

Perrelli, R., & Roache, S. K. (2014, May). *Time-varying neutral interest rate: The case of Brazil* (Working Paper N° 14/84). IMF. Disponível em: https://www.imf.org/external/pubs/cat/longres.aspx?sk=41552.0

Ribeiro, A., & Teles, V. K. (2013). Taxa natural de juros no Brasil. *EconomiA*, *14*, 733–750. Disponível em: http://www.anpec.org.br/revista/aprovados/Natural.pdf

Schwartsman, A. (2011, julho 07). Sobre jabutis e jabuticabas. *Valor Econômico*.

Soares, J. J. S., & Barbosa, F. d. H. (2006, dezembro 5–8). Regra de Taylor no Brasil: 1999–2005. In *XXXIV Encontro Nacional de Economia da ANPEC*, Salvador, BA. Disponível em: http://www.anpec.org.br/encontro2006/artigos/A06A085.pdf

Taylor, J. B. (1993). Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, *39*(1), 195–214. doi: 10.1016/0167-2231(93)90009-L

Taylor, J. B. (2001). The role of the exchange rate in monetary-policy rules. *American Economic Review*, *91*(2), 263–267. doi: 10.1257/aer.91.2.263

Taylor, J. B. (2002). Using monetary policy rules in emerging market economies. In *Stabilization and Monetary Policy: The International Experience*. Paper presented at Banco de Mexico's 75th Anniversary Seminar, Mexico City, November 14–15, 2000.

Teles, V. K., & Brundo, M. (2006, dezembro 5–8). Medidas de política monetária e a função de reação do Banco Central no Brasil. In *XXXIV Encontro Nacional de Economia da ANPEC*, Salvador, BA. Disponível em: http://www.anpec.org.br/encontro2006/artigos/A06A082.pdf

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160022
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 419–440

Consumption-Wealth Ratio and Expected Stock Returns: Evidence from Panel Data on G7 Countries*

Andressa Monteiro de Castro†
João Victor Issler‡

Contents: **1. Introduction; 2. Present-Value Theory; 3. Macroeconomic and Financial Data; 4. Cointegration Analysis (*cay*); 5. Forecasting Stock Returns In-Sample; 6. Out-of-Sample Forecasts; 7. Cointegration and Forecasting with a FMOLS Estimate of *cay*; 8. Conclusions; Appendix A. VECM Heterogeneous Cointegrating Vectors; Appendix B. FMOLS Heterogeneous Cointegrating Vectors.**

Keywords: **Consumption-Wealth Ratio, Stock Returns, Unbalanced Panel, Cointegrating Residual.**

JEL Code: **C22, D91, E21.**

Using the theoretical framework of Lettau & Ludvigson (2001), we perform an empirical investigation on how widespread is the predictability of cay—a modified consumption-wealth ratio—once we consider a set of important countries from a global perspective. We chose to work with the set of G7 countries, which represent more than 64% of net global wealth and 46% of global GDP at market exchange rates. We evaluate the forecasting performance of cay using a panel-data approach, since applying cointegration and other time-series techniques is now standard practice in the panel-data literature. Hence, we generalize Lettau and Ludvigson's tests for a panel of important countries. We employ macroeconomic and financial quarterly data for the group of G7 countries, forming an unbalanced panel. For most countries, data is available from the early 1990s until 2014Q1, but for the U.S. economy it is available from 1981Q1 through 2014Q1. Results of an exhaustive empirical investigation are overwhelmingly in favor of the predictive power of cay in forecasting future stock returns and excess returns.

Usando o arcabouço teórico de Lettau & Ludvigson (2001), investigamos a existência de previsibilidade vis-à-vis os excessos de retorno de uma versão modificada da razão

*We are especially grateful for the comments and suggestions given by Wagner Gaglianone, Pedro Cavalcanti Ferreira, Ricardo Sousa and other seminar participants at the *2nd International Workshop on "Financial Markets and Nonlinear Dynamics"* (FMND) in Paris. Any remaining errors are ours. Both Castro and Issler gratefully acknowledge the support from CNPq, FAPERJ, INCT and FGV on different grants. We also thank Marcia Waleria Machado, Marcia Marcos, Andrea Virginia, and Rafael Burjack for excellent research assitence.

†Fundação Getúlio Vargas, Escola Brasileira de Economia e Finanças (FGV/EPGE). Praia de Botafogo 190, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 22250-900. Email: dessascmc@gmail.com

‡FGV/EPGE. Email: jissler@fgv.br

consumo-riqueza para os países do grupo G7. Num exercício empírico exaustivo, confirmamos a potencial previsibilidade da razão consumo-riqueza num arcabouço de dados de painel, algo inédito para esse representativo grupo de paises.

1. INTRODUCTION

The link between macroeconomic and financial markets has long driven a great deal of theoretical and empirical work in the macroeconometric literature. Taking the asset-pricing equation as a starting point, and using a present-value approach, one can derive several interesting implications between macroeconomic data and future returns or excess returns. The work of Campbell (1987), Campbell & Shiller (1987, 1988a), Campbell & Deaton (1989), and Campbell & Mankiw (1989), are good early examples of the connection between macroeconomic and financial variables. Indeed, one should expect some asset-return predictability following this literature, although the evidence is weak. Compare, for example, the results in Fama & French (1988) and Pesaran & Timmermann (1995) with those in Campbell & Thompson (2008). Recently, Guillén, Issler, & Saraiva (2015) examine the usefulness of imposing different layers of present-value-model restrictions in forecasting financial data — a directly related issue.

In an interesting paper, Lettau & Ludvigson (2001) study the role of transitory trend deviations for consumption, asset holdings and labor income in predicting future stock market fluctuations. Using a forward-looking model, with a novel present-value equation, they show that, when investors expect higher returns in the future, they react by raising current consumption relative to its trend vis-a-vis asset wealth and labor income in order to smooth consumption in line with the asset-pricing equation. Therefore, these current transitory fluctuations of consumption about its trend carry information about the future dynamics of returns and excess returns. These issues are investigated using the time-series framework of cointegration and cross-equation restrictions in the context of a vector autoregressive (VAR) model.

Despite the strong empirical evidence provided by Lettau & Ludvigson (2001) for the U.S. stock market, there has been only a few papers trying to investigate this issue with an a broader international perspective. For example, Ioannidis, Peel, & Matthews (2006), Tsuji (2009) and Gao & Huang (2008) extended the time-series analysis of Lettau & Ludvigson (2001) to other countries, which yields country-specific results. Nitschka (2010), on the other hand, used the consumption-wealth ratio of the U.S. economy as a predictor of foreign stock returns. In a more elaborate paper, Sousa (2010) shows that housing wealth could be an important component of aggregate wealth when predicting asset returns.

Despite the unquestionable value-added of the subsequent literature, what we see as lacking in it is the use of a broad enough approach to test the idea that transitory trend deviations for consumption (c), asset-wealth holdings (a) and labor income (y) are able to predict future stock market fluctuations, i.e., the usefulness of cay in forecasting returns. If the present-value model holds, it should hold for every country, and not only to the U.S. economy. Instead of employing a country-specific approach to the matter, we propose to use a panel-data approach for a group of relevant countries, which will be able to test the predictability theory in a broader sense. In order to cover a group of relevant countries, we decided to focus on the G7 group: Canada, France, Germany, Italy, Japan, the United Kingdom and the United States.

The group of G7 countries represents more than 64% of net global wealth (US$ 263 trillion). They also represent 46% of global GDP evaluated at market exchange rates. Thus, the G7 group is definitely relevant from a global perspective. We limit our study to the group of G7 countries because of the lack of data on asset-wealth holdings for a broader group of countries, especially at the quarterly frequency. Since applying cointegration and other time-series techniques is now standard practice in the panel-data literature, generalizing Lettau and Ludvigson's tests for a panel of countries is immediately feasible, and

will be highly informative for global financial markets. Additional advantages of employing panel-data tests vis-a-vis country specific tests is the fact that one gathers more information using the former—the cross-sectional dimension.

The first step of our empirical analysis is to test for the existence of a single cointegrating relationship among consumption, asset wealth, and labor income, with panel cointegration tests. Our performed tests allow for heterogeneity in the linear combination forming the cointegrating relationship (cay_h) as well as imposing homogeneity restrictions in it (cay). Here, we also discuss whether or not the estimated linear combinations ($\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$) conform to theory in some respects, looking at alternative estimates in the cases where they do not. With our estimates in hand, the next step is to implement an in-sample forecasting exercise, where we investigate whether or not $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$ help to forecast future stock returns and excess returns. We also include in these regressions some financial variables that are widely used in the literature to predict stock returns. Our final forecasting test asks whether or not $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$ help to forecast future stock returns out of sample. Here, the forecasting regression is recursively re-estimated, mimicking closely the exercise a financial analyst will do in practice. Again, we employ a variety of alternative predictors in a horse-race between $\widehat{cay}$ (or $\widehat{cay}_h$) and these potential predictors. Finally, we repeat the in-sample and out-of-sample forecasting tests for cointegrating results that did not conform to theory.

In performing our empirical tests we employ macroeconomic real quarterly data per capita, measured in 2010 country's own currency, as well as financial data for returns and excess returns. Our main sources of data are the National Accounts Statistics of the OECD database, the Federal Reserve Economic Data (FRED) of the FED of St. Louis, and the International Financial Statistics (IFS), provided by the IMF. We have an unbalanced panel. For most countries, data is available from the early 1990s until 2014Q1, but for the U.S. economy it is available from 1981Q1 through 2014Q1.

Our final results allow for a very broad examination of the present-value theory behind cay, and its potential forecasting power for future returns. First, we find overwhelming evidence of a single cointegration vector for consumption, asset wealth, and labor income. This is true whether or not we allow for heterogeneity in computing the cointegrating relationship. Despite these results, in some cases the coefficients in the linear combination did not conform to theory. The coefficients of asset wealth and labor income must reflect the participation of asset wealth and human capital in total wealth. Thus, they must lie between zero and one and add up to unity. These theoretical restrictions did not hold in some cases, which required alternative estimation techniques. Second, $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$ help to forecast future stock returns and excess returns in sample. This is true whether or not we consider additional regressors in forecasting. Third, $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$ help to forecast future stock returns and excess returns in the out-of-sample exercise, usually performing better than alternative regressors. Finally, using estimates of cay and cay_h that conform to economic theory does improve forecasts of future accumulated excess returns.

The next section presents a brief review of the theoretical framework which establishes the present-value relationship between cay and expected stock returns. In section 2, we thoroughly detail the aggregate and financial data that we use to construct our panel. Section 3 presents the results of the integration and cointegration analyses in a penal-data context, i.e., we build the estimates of cay and cay_h. Section 4 reports the results of in-sample forecasting. In section 5, we perform out-of-sample forecasts. In section 6, we re-estimate cay and cay_h using the fully-modified OLS (FMOLS) estimator to obtain cointegration estimates that conform to theory. Then, we revisit our previous forecasting exercise. Finally, in section 7, we conclude.

2. PRESENT-VALUE THEORY

Consider a representative consumer who invests her/his total wealth and receive a time-varying return. Let W_t and C_t be the aggregate wealth and aggregate consumption in period t, respectively. $R_{w,t+1}$ is

the net return on aggregate invested wealth. The budget constraint faced by this agent is

$$W_{t+1} = (1 + R_{w,t+1})(W_t - C_t). \tag{1}$$

Campbell & Mankiw (1989) suggest log-linearizing (1), obtaining

$$\Delta w_{t+1} \approx r_{w,t+1} + (1 - 1/\rho_w)(c_t - w_t) + k_1, \tag{2}$$

where the lower case letters from now on are used to denote the logs of the corresponding variables, $r_{w,t+1} \equiv \log(1+R)$; ρ_w is the steady-state proportion of investment on wealth; and k_1 is a non-interesting constant. For future reference, all k_i, $i = 2,3,\ldots$, are constants as well.

If the consumption-wealth ratio is stationary, it is possible to solve this equation forward in expectations. Thus, taking the conditional expectation and assuming that the transversality condition $\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\rho_w^i (c_{t+i} - w_{t+i})\right] = 0$ holds, the log consumption-wealth may be written as

$$c_t - w_t = \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_w^i (r_{w,t+i} - \Delta c_{t+i}) + k_2, \tag{3}$$

which means that there is a present value relationship between consumption-wealth ratio and the return on aggregate wealth.

A main problem with (3) is that total wealth has two components: asset wealth and human capital. However, the latter is non observable. Lettau & Ludvigson (2001) deal with this issue in an elegant way. They define aggregate wealth as asset wealth plus human capital $W_t = A_t + H_t$, the log of aggregate wealth may be approximated as

$$w_t \approx \gamma a_t + (1-\gamma) h_t + k_3, \tag{4}$$

where γ is the average share of asset holdings in total wealth. Furthermore, Campbell (1996) shows that the return to aggregate wealth, which is given by

$$1 + R_{w,t} = \gamma_t (1 + R_{a,t}) + (1 - \gamma_t)(1 + R_{h,t}), \tag{5}$$

may be log-linearized to get to a tractable intertemporal model with constant coefficients:

$$r_{w,t} \approx \gamma r_{a,t} + (1-\gamma) r_{h,t} + k_4. \tag{6}$$

Substituting (4) and (6) into (3), gives

$$c_t - \gamma a_t - (1-\gamma) h_t = \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_w^i \left[\gamma r_{a,t+i} + (1-\gamma) r_{h,t+i} - \Delta c_{t+i}\right] + k_5. \tag{7}$$

To deal with non observable that human capital, Lettau & Ludvigson (2001) use the fact that labor income can be interpreted as the dividend on human wealth, implying

$$(1 + R_{h,t+1}) = \frac{H_{t+1} + Y_{t+1}}{H_t}. \tag{8}$$

Once more, log-linearizing this expression, we obtain:

$$r_{h,t+1} \approx \rho_h h_{t+1} + (1 - \rho_h) y_{t+1} - h_t + k_6,$$

where ρ_h is the steady-state proportion $H/(H+Y)$. Solving it forward, taking the expectation and imposing that $\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\rho_h^i (h_{t+i} - y_{t+i})\right] = 0$, the log human capital can be described as

$$h_t = y_t + \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_h^i (\Delta y_{t+i} - r_{h,t+i}) + k_7. \tag{9}$$

Lettau & Ludvigson (2001) show that the nonstationary component of human capital is captured by labor income, implying that $h_t = \kappa + y_t + \mu_t$, where κ is a constant. It is easy to see from (9) that $\mu_t = \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_h^i (\Delta y_{t+i} - r_{h,t+i})$. This term is a stationary random variable, since we are assuming that Δy_t is stationary—labor income has a unit root—and that the return on human wealth is practically constant.

Replacing the log of human wealth in expression (7) by the one obtained in (9), it is possible to rewrite the log consumption-wealth ratio in terms of observable variables:

$$cay_t \equiv c_t - \gamma a_t - (1-\gamma) y_t \tag{10}$$

$$= \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_w^i \left[\gamma r_{a,t+i} + (1-\gamma) r_{h,t+i} - \Delta c_{t+i} \right] + (1-\gamma)\mu_t + k_8. \tag{11}$$

Under the assumption that $r_{w,t}$, Δc_t and Δy_t are stationary,[1] equations (10) and (11) imply that c_t, a_t and y_t are cointegrated and $c_t - \gamma a_t - (1-\gamma) y_t$ is the cointegrating linear combination labelled as cay_t, where $(1, -\gamma, -(1-\gamma))$ is the cointegrating vector (Lettau & Ludvigson, 2004). Besides, cay_t Granger-causes the right-hand term in brackets, since these terms are dated from $t+1$ onwards. Therefore, provided that the expected future returns on human capital and consumption growth are relatively smooth, changes in cay_t should forecast future changes on asset returns.[2]

This result is by and large consistent with a wide range of forward-looking models of investor behavior, where agents, disliking sharp fluctuations on consumption, will attempt to smooth out transitory movements in asset wealth due to variations in future expected asset returns. For instance, when higher returns are expected in the future, the forward-looking investors will currently increase their consumption out of their asset wealth and labor income, rising consumption above trend—an increase in cay_t—and vice-versa for the case when lower returns are expected in the future.

3. MACROECONOMIC AND FINANCIAL DATA

We work with a typical panel of macroeconomic data, where the cross-sectional dimension is small and the time-series dimension is large. As noted above, we possess an unbalanced panel for G7 countries:[3]: Canada, France, Germany, Italy, Japan, United Kingdom and United States. All aggregate variables are quarterly, seasonally adjusted, per capita, and measured in 2010 country's own currency. To deflate data we use the CPI from International Financial Statistics (IFS)—the IMF database—and for quarterly population figures we interpolate annual data provided by OECD.

Consumption data used here is private final consumption expenditure from National Accounts Statistics of OECD's database. Labor income used here is the compensation of employees, provided by the Federal Reserve Economic Data (FRED) of the Federal Reserve Bank of St. Louis, but the original source is OECD as well. Asset holdings data were taken separately from each of the G7 country's central bank.

Asset holdings is a critical variable in our analysis, since it determines the time span for each country in the database. Tabela 1 specifies the details of the *financial asset holdings* data used in this paper.

Real asset returns and excess returns are obtained from stock indices. To obtain the log of real gross returns r_t for each country, we take their quarterly closing prices, adjusted for dividends. Nominal

[1] We test the evidence of unit root process in consumption and labor income in our panel data. Both don't reject at 5% significance level the null hypothesis of unit root, including individual effects and individual linear trends.

[2] Lettau & Ludvigson (2001) find that cay_t is a strong predictor of excess returns on aggregate US stock market indexes for both short and long run.

[3] The reason for choosing G7 is the lack of data availability for other countries in quarterly frequency, specially of households asset wealth.

Table 1. Data sources.

Canada (1990Q1–2014Q1)	CANSIM, Statistics Canada: Net worth of households and non-profit institutions serving households (NPISH)
France (1996Q1–2014Q1)	Webstat, Banque de France: Net financial assets of households and NPISH
Germany (1991Q1–2014Q1)	Deutsche Bundesbank: Financial Asset of households and NPISH
Italy (1995Q1–2014Q1)	BDS, Banca D'Italia: Total financial instruments held by households and NPISH
Japan (1997Q4–2014Q1)	Bank of Japan: Total assets of households
United Kingdom (1997Q1–2014Q1)	Bank of England: Financial assets of households and NPISH
United States (1981Q1–2014Q1)	Board of Governors of the Federal Reserve System: Net worth of households and NPISH

stock indices are provided by Bloomberg and are deflated using the seasonally adjusted CPI figures from IFS. The stock indices used here are: S&P/TSX composite index for Canada, CAC 40 for France, DAX for Germany, FTSEMIB for Italy, Nikkei 225 for Japan, FTSE 100 for United Kingdom and S&P 500 for United States. To obtain quarterly log of excess returns $r_t - r_{f,t}$, we need to specify the risk-free rate $r_{f,t}$. The raw data is the percent per annum treasury bill rate from government securities for each country, taken from IFS.

We also considered some additional financial variables such as dividend yield, payout ratio and relative bill rate, in order to extend our analysis and compare the predictive power of cay and that of these variables. Here, we let $d - p$ denote the dividend yield, where d is the log of quarterly dividends per share and p is the log of the stock index. Since Campbell & Shiller (1988b), this variable has been widely used to forecast excess returns,[4] especially for long horizons. Following Lamont (1998), the payout ratio is represented by $d - e$, where e is the log of quarterly earnings per share. As well as the stock index, both dividends per share and earnings per share are provided by Bloomberg. Finally, we build the relative bill rate $RREL$ subtracting from the T-bill rate its 12-month backward moving average, a method suggested by Hodrick (1992).

4. COINTEGRATION ANALYSIS (cay)

First, we test whether each of the variables in $cay_t \equiv c_t - \gamma a_t - (1-\gamma) y_t$—consumption ($c_t$), asset wealth ($a_t$), and labor income ($y_t$)—have or not a unit root in (log) levels. We perform a panel unit root test proposed by Maddala & Wu (1999), which consists of a Fisher (1932) test[5] that combine the significance levels from individual unit root tests, such as Phillips–Perron (PP) and Augmented Dickey–Fuller (ADF).

[4] Campbell & Shiller (1988b) show that the log dividend-price ratio may be written as $d_t - p_t = \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho_a^j (r_{a,t+j} - \Delta d_{t+j})$, which means that if the dividend-price ratio is high, agents must be expecting either high future asset returns or low dividend growth rates.

[5] We choose the Fisher test due to the structure of our data. The asymptotic validity for this test depend on T going to infinity, while for other tests, depend on N going to infinity.

For all three variables, in both tests—PP and ADF—the null hypothesis of presence of unit root is not rejected at a ten percent significance level,[6] which we interpret to mean that their process is integrated of order one.

Next we conduct two panel cointegration tests to verify if there is a single cointegrating relationship among consumption, asset wealth and labor income. The first one is a residual-based test proposed by (Kao, 1999), in which homogeneity restrictions are imposed in the cointegrating vector. We strongly reject the null of no cointegration, with a p-value of 0.29%.[7] This allows the conclusion of the existence of at least one cointegrating vector. The second test is another Fisher-type test suggested by Maddala & Wu (1999) using a Johansen (1991) procedure to determine the number of cointegrating relations among those three variables in the panel. Since the variables are integrated of order one, we can have zero, one, or two cointegrating vectors. In this case, no homogeneity restrictions are imposed for the cointegrating coefficients. Results are presented in Tabela 2, and indicate that there is indeed a single cointegrating vector for consumption, asset wealth and labor income. Therefore, we are confident that there is a single cointegrating vector for consumption, asset wealth, and labor income, these three variables sharing two common trends.

The next step is to estimate the parameters of the cointegrating vector, $cay_t \equiv c_t - \gamma a_t - (1-\gamma)y_t$. Instead of imposing *a priori* theoretical restrictions, where $0 \leq \gamma \leq 1$, we estimate the coefficients unrestricted, once imposing homogeneity restrictions—all coefficients are the same across the panel, and once without homogeneity restrictions—coefficients vary across cross-sectional units. In the former case, we estimate the following cointegrating vector:

$$cay_t = c_{i,t} - \beta_a a_{i,t} - \beta_y y_{i,t}, \tag{12}$$

whereas in the latter case, we estimate

$$cay_{hi,t} = c_{i,t} - \beta_{a,i} a_{i,t} - \beta_{y,i} y_{i,t}. \tag{13}$$

We estimate cointegrating vectors using Johansen (1991) full-information maximum likelihood (FIML) procedure. Regarding deterministic terms, we assume a linear deterministic trend in data. We chose a vector autoregressive (VAR) model of order two in levels. Tabela 3 presents the estimates of the cointegrating parameters for (12).[8] One can immediately see that the coefficient of labor income is negative, -0.6406, although it is not significant. Further unit root tests on the cointegrating residual confirm that $\widehat{cay}_t$ does not have a unit root.[9]

We now turn to the estimation of equation (13)—cointegrating vector without imposing homogeneity restrictions. We estimate separately a vector error-correction model (VECM) for each country, with results reported in the Appendix A. Again, further unit root tests on the cointegrating residuals confirms that $\widehat{cay}_{h_{i,t}}$ does not have a unit root.

---

[6] Probabilities for Fisher test are computed using asymptotic χ^2 distribution.

[7] Probabilities for Kao test are computed using asymptotic Normal distribution

[8] With one lag in difference, linear trend and one cointegrating relationship, we estimate the following VEC through a pooled OLS.

$$\Delta c_{i,t} = \alpha_1(c_{i,t-1} - \beta_a a_{i,t-1} - \beta_y y_{i,t-1} - \mu) + \gamma_{11}\Delta c_{i,t-1} + \gamma_{12}\Delta a_{i,t-1} + \gamma_{13}\Delta y_{i,t-1} + \eta_1 + \epsilon_{1,i,t}$$
$$\Delta a_{i,t} = \alpha_2(c_{i,t-1} - \beta_a a_{i,t-1} - \beta_y y_{i,t-1} - \mu) + \gamma_{21}\Delta c_{i,t-1} + \gamma_{22}\Delta a_{i,t-1} + \gamma_{23}\Delta y_{i,t-1} + \eta_2 + \epsilon_{2,i,t}$$
$$\Delta y_{i,t} = \alpha_3(c_{i,t-1} - \beta_a a_{i,t-1} - \beta_y y_{i,t-1} - \mu) + \gamma_{31}\Delta c_{i,t-1} + \gamma_{32}\Delta a_{i,t-1} + \gamma_{33}\Delta y_{i,t-1} + \eta_3 + \epsilon_{3,i,t}.$$

The right-hand side variable in parenthesis is the error correction term. In long run equilibrium, this term should be zero. However, if any variable of this term deviates from the long run equilibrium, the error correction term would be nonzero and the other variables would adjust to restore the equilibrium relation. The coefficients α measure the speed of adjustment of each endogenous variable towards the equilibrium (Engle & Granger, 1987).

[9] Here, and in what follows, we regard this as an informal, but informative test.

Table 2. Johansen Fisher Panel Cointegrating Test.

Hypothesized Num. of Coint.	Fisher Stat. Trace Test	P-value*	Fisher Stat. Max-Eigen Test	P-value*
None	40.28	0.0002	36.84	0.0008
At most 1	16.56	0.2805	10.77	0.7044
At most 2	28.45	0.0124	28.45	0.0124

Notes: This table reports the panel cointegration test on consumption, asset wealth and income, assuming that there is a linear deterministic trend in data, including an intercept in the cointegration equation, and using one lag in difference (two lags in level) on the VAR tested.
*Probabilities are computed using asymptotic χ^2 distribution.

Table 3. Panel cointegrating vector estimates.

Estimated Parameters	*Asset Wealth*	*Labor Income*	*Constant*
Consumption	**−1.4581*****	**0.6406***	2.0963
	(0.4292)	(0.3674)	

Notes: This table presents the estimated parameters of the cointegrating vector $(1, -\widehat{\beta}_y, -\widehat{\beta}_a)$ from the VEC estimation, with respective standard errors in parenthesis. On the specification, we include an intercept in the cointegrating equation, once we assume there is a linear deterministic trend in data, we use one lag in difference and impose one cointegrating relationship. 594 observations are included in this estimation after adjustments. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%, computed using asymptotic Normal distribution.

One thing to note is that in the estimation of (12) and (13) we obtained some counter-intuitive results, or results that go against the present-value theory in section 2. These violations happen when $-\beta_a$'s or $-\beta_y$'s are outside the interval $[0,1]$, which happened for $-\beta_y$ in Tabela 3, and for $-\beta_{a,i}$ and $-\beta_{y,i}$ for a few countries in Appendix A. It is hard to explain why these violations happen. There may be measurement error on the data used; it can be the consequence of using a first-order approximation log linear approximation in building (11); etc. In any case, to deal with this issue, we will also consider alterative estimates of (12) and (13) in which these violations are much more infrequent; see the results in section 7.

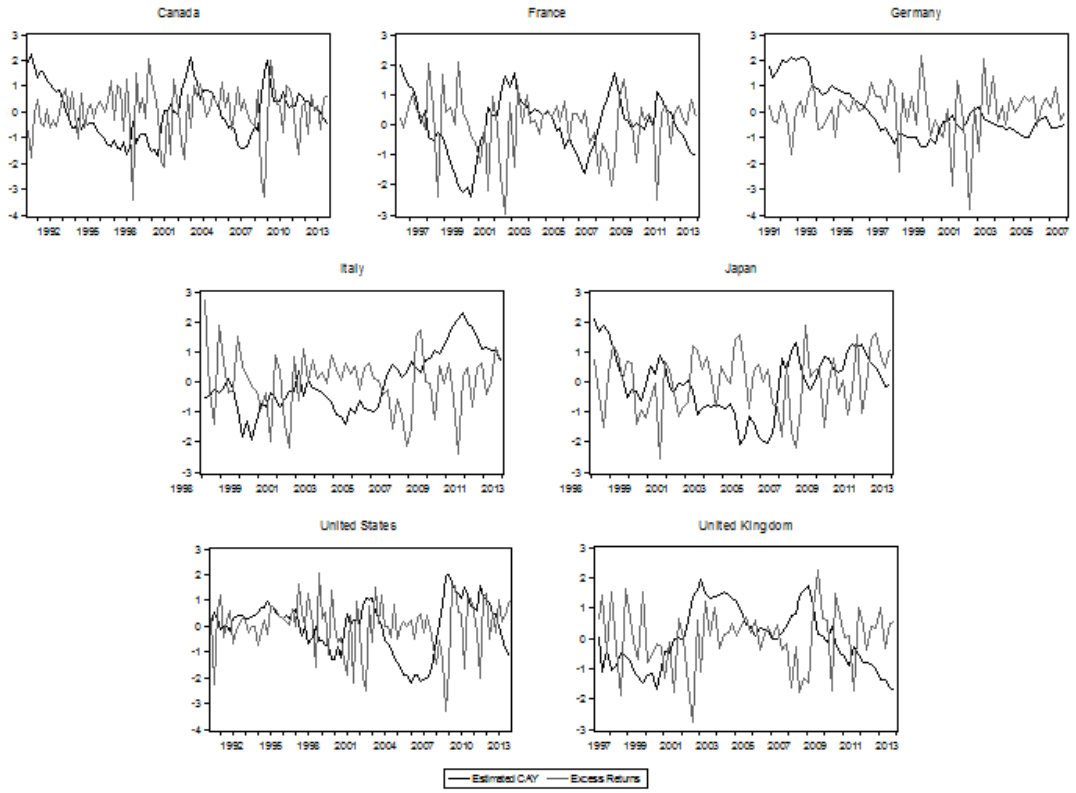
5. FORECASTING STOCK RETURNS IN-SAMPLE

In this section, we investigate if cay can anticipate real stock returns and real excess returns in sample using a panel-data structure. The intuition here is that variations on cay should precede variations on stock returns, since, theoretically, the forward-looking investor would increase or decrease current consumption with regard to his wealth, according to future fluctuations on expected stock returns. Figura 1 presents individual graphs for log excess returns—log returns on stock indexes minus the log return on T-bill—and $\widehat{cay}$ normalized series.[10]

For some countries such as Canada, France, Japan and United Kingdom, sharp variations of $\widehat{cay}$ clearly preceding spikes in excess returns, for both positive and negative fluctuations. It is also interesting to note that recently most countries have presented a pronounced decreasing in $\widehat{cay}$. Another feature of $\widehat{cay}$ is its counter-cyclical behavior. In fact, when we make a panel regression of consumption

[10] Here, we disaggregate the panel into seven time series, one for each country, and detrend them individually in order to eliminate any individual trend effects.

Figure 1. Excess Returns and Estimated cay.



growth on contemporaneous $\widehat{cay}$ controlling for cross section fixed effects, we obtain a coefficient of -0.005181 statistically significant at the 1% level.

Tabela 4 presents in-sample one-quarter-ahead regressions with real returns and excess returns as dependent variables and both $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay}_h$ and other financial variables as regressors, including cross-section fixed effects. On all of these regressions, we make White cross-section corrections to the standard errors.[11] Regressions with one-period lag of the dependent variable as a regressor are also computed on Tabela 4. It is well known that the LSDV (least squares dummy variable)—the "fixed effects model" we have used in the previous regressions—with a lagged dependent variable generates biased estimates when the time dimension of the panel is small (Judson & Owen, 1999). Nevertheless, Nickell (1981) derives an expression for the bias showing that it goes to zero when T approaches infinity. For our purposes, since we are under a large T, small N, environment, the LSDV model bias should be very small, we thus take these in-sample results seriously. Again, we use the White cross-section correction in these regressions as well.

[11] This method considers the pool regression as multivariate regressions with one equation for each cross-section, and computes for the system of equations robust standard errors. The robust variance matrix estimator is given by

$$Avar(\hat{\beta}) \equiv \left(\frac{NT}{NT-K}\right)\left(\sum_t X_t' X_t\right)^{-1}\left(\sum_t X_t' \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t' X_t\right)\left(\sum_t X_t' X_t\right)^{-1},$$

where NT is the total number of stacked observations and K is the total number of estimated parameters. See Arellano (1987) and Wooldridge (2010). We choose this estimator because of its consistency for panels with large T and fixed N.

Table 4. In-sample one-quarter-ahead regressions.

				Panel A: Real Returns, r_{t+1}					
#	Total Obs	Constant	lag	$\widehat{cay}_t$	$\widehat{cay_h}_t$	$d_t - p_t$	$d_t - e_t$	$RREL_t$	$\overline{R}^2$
1	584	0.0065		0.0326					-0.0045
		(0.0098)		(0.0240)					
2	433	0.0924	0.1596	0.0369		0.0239	-0.0042	3.7276	0.0248
		(0.0917)	(0.1091)	(0.0320)		(0.0252)	(0.0141)	(2.9619)	
3	584	0.0065			0.0708				-0.0060
		(0.0097)			(0.0718)				
4	450	0.1130	0.1636		-0.0025	0.0311	-0.0094	3.5497	0.0234
		(0.0951)	(0.1160)		(0.1193)	(0.0261)	(0.0151)	(2.9224)	
				Panel B: Excess Returns, $r_{t+1} - r_{f,t+1}$					
#	Total Obs.	Constant	lag	$\widehat{cay}_t$	$\widehat{cay_h}_t$	$d_t - p_t$	$d_t - e_t$	$RREL_t$	$\overline{R}^2$
5	559	0.0033		0.0214					-0.0069
		(0.0097)		(0.0244)					
6	432	0.0943	0.1605	0.0317		0.0249	-0.0042	3.3996	0.0209
		(0.0932)	(0.1100)	(0.0314)		(0.0255)	(0.0142)	(2.9338)	
7	559	0.0034			0.0996				-0.0059
		(0.0096)			(0.0732)				
8	449	0.1179	0.1667		0.0311	0.0328	-0.0096	3.2541	0.0201
		(0.0965)	(0.1169)		(0.1214)	(0.0264)	(0.0151)	(2.9118)	

Notes: This table shows some regressions of one-step-forward returns forecasts. Total Obs. refers to the total panel unbalanced observations included after adjustments, and *lag* is the one-lag backward dependent variable, i.e. on t, used as a regressor. The Constant is an overall fixed effects mean and we omit the specific fixed effects of each country. The last column reports the adjusted R^2. White cross-section corrected standard errors appear in parenthesis.

In Tabela 4, at one-quarter ahead, both $\widehat{cay}$ and $\widehat{cay_h}$ are not able to predict stock returns, since their coefficients are not statistically significant. The same is true for the other financial variables considered in Tabela 4. It is also worth noting that the $\overline{R}^2$ are extremely low, especially on the regressions with either $\widehat{cay}$ or $\widehat{cay}_h$ as a single regressor.

From equation (11), one can conclude that cay should be a good predictor of consumption growth as well as of asset returns. Thus, we investigate whether or not it helps to forecast either accumulated consumption growth or accumulated excess returns. Tabela 5 presents the results over horizons spanning 1 to 24 quarters, where regressions are estimated by the LSDV model. Results are presented in Tabela 5.

From Tabela 5, we conclude the following. First, $\widehat{cay}$ is a much better predictor for both consumption growth and excess returns than $\widehat{cay}_h$. This means that if one wants to make forecasts about consumption growth or excess returns using any of those two variables in a panel, it is better to estimate a single cointegrating vector for the entire panel and build a cay with homogeneous coefficients rather than estimate one cointegrating vector for each country and make an heterogeneous cay. This is a rather convenient result, since $\widehat{cay}$'s estimating method is a much more parsimonious way of obtaining the cointegrating vector for the entire panel. Second, comparing results in Tabela 4 with those in Tabela 5, $\widehat{cay}$ has a better performance on predicting excess returns over longer horizons than just one period ahead. In fact, regressions 1 and 3 of Tabela 5 show that for short horizons, $\widehat{cay}$ is more likely to predict consumption growth, and for longer periods, its forecasting power is greater on excess returns. In fact, regression 3 from Tabela 5 shows $\widehat{cay}$'s forecasting power as well as its adjusted R^2 increasing

Table 5. In-sample long-horizon regressions.

#	Reg.	Forecast Horizon H 1	2	3	4	8	12	16	24
		Panel A: Consumption Growth, $\sum_{i=1}^{H} \Delta c_{t+i}$							
1	$\widehat{cay}_t$	**-0.0047***	**-0.0069***	**-0.0080***	-0.0072	0.0014	0.0091	0.0141	0.0131
		(0.0026)	(0.0036)	(0.0043)	(0.0052)	(0.0107)	(0.0146)	(0.0180)	(0.0208)
		[0.0267]	[0.0454]	[0.0580]	[0.0660]	[0.0962]	[0.1218]	[0.1540]	[0.2407]
2	$\widehat{cay}_{ht}$	0.0040	0.0073	0.0081	-0.0008	-0.0290	-0.0425	-0.0597	**-0.1312****
		(0.0077)	(0.0125)	(0.0169)	(0.0186)	(0.0285)	(0.0350)	(0.037802)	(0.0575)
		[0.0163]	[0.0363]	[0.0512]	[0.0621]	[0.0982]	[0.1229]	[0.1552]	[0.2490]
		Panel B: Excess Stock Returns, $\sum_{i=1}^{H}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$							
3	$\widehat{cay}_t$	0.0214	**0.0669***	**0.1331*****	**0.2302*****	**0.5800*****	**0.9233*****	**1.1272*****	**1.2443*****
		(0.0244)	(0.0392)	(0.0503)	(0.0642)	(0.1308)	(0.1521)	(0.1294)	(0.1312)
		[-0.0069]	[0.0034]	[0.0175]	[0.0438]	[0.0809]	[0.1639]	[0.2379]	[0.3824]
4	$\widehat{cay}_{ht}$	0.0996	0.1534	0.1857	0.2003	**0.2902****	0.2672	-0.0323	**-0.7786*****
		(0.0732)	(0.1032)	(0.1290)	(0.1495)	(0.1371)	(0.1967)	(0.2269)	(0.2311)
		[-0.0059]	[0.0010]	[0.0079]	[0.0145]	[0.0526]	[0.1019]	[0.1560]	[0.3652]
5	$d_t - p_t$	0.0117	0.0348	0.055985	**0.0657****	**0.1585*****	**0.1911****	**0.2802*****	**0.3126*****
		(0.0201)	(0.0302)	(0.0351)	(0.0304)	(0.0596)	(0.0787)	(0.0703)	(0.0783)
		[-0.0072]	[0.0031]	[0.0134]	[0.0214]	[0.0429]	[0.0783]	[0.1537]	[0.2783]
6	$d_t - e_t$	0.0009	-0.0087	-0.020391	**0.0391****	**0.0941*****	**0.1445*****	**0.3224*****	**0.2911*****
		(0.0138)	(0.0306)	(0.0397)	(0.0180)	(0.0360)	(0.0393)	(0.0360)	(0.0420)
		[-0.0077]	[-0.0035]	[0.0047]	[0.0251]	[0.0554]	[0.1202]	[0.3018]	[0.3788]
7	$RREL_t$	0.5207	3.6982	**6.0328***	-3.5101	-4.7525	**-13.174****	**-13.635****	-7.1375
		(2.1074)	(2.7613)	(3.1641)	(2.7862)	(5.2727)	(5.7636)	(6.8009)	(8.0032)
		[-0.0041]	[0.0086]	[0.0219]	[0.0149]	[0.0243]	[0.0685]	[0.1038]	[0.1633]
8	$d_t - p_t$	0.0180	0.0557	**0.0900***	**0.0621***	**0.1332***	0.1162	0.0873	0.1577
		(0.0262)	(0.0438)	(0.0509)	(0.0340)	(0.0692)	(0.0814)	(0.0757)	(0.0979)
	$d_t - e_t$	-0.0016	-0.0165	-0.0348	0.0217	0.0590	**0.1107****	**0.2950*****	**0.2561*****
		(0.0146)	(0.0330)	(0.0426)	(0.0192)	(0.0433)	(0.0459)	(0.0410)	(0.0494)
	$RREL_t$	2.2272	**8.1993****	**12.2728*****	**-6.1581****	**-9.5835***	**-17.3299*****	**-15.2702*****	**-20.3082****
		(3.1878)	(3.8109)	(3.8679)	(3.1330)	(5.7054)	(5.7694)	(5.6160)	(9.1230)
		[0.0002]	[0.0513]	[0.0903]	[0.0430]	[0.0723]	[0.1436]	[0.3143]	[0.3972]
9	$\widehat{cay}_t$	0.0179	0.0663	**0.1404*****	**0.2311*****	**0.6340*****	**1.0124*****	**1.0701*****	**0.8687*****
		(0.0312)	(0.0443)	(0.0523)	(0.0808)	(0.1524)	(0.1489)	(0.1413)	(0.1695)
	$d_t - p_t$	0.0173	0.0524	0.0814	0.0468	0.0859	0.0232	-0.0213	0.055328
		(0.0267)	(0.0438)	(0.0516)	(0.0363)	(0.0740)	(0.0828)	(0.0758)	(0.1126)
	$d_t - e_t$	-0.0016	-0.0168	-0.0368	0.0181	0.0489	**0.1011****	**0.2959*****	**0.2569*****
		(0.0146)	(0.0332)	(0.0429)	(0.0189)	(0.0416)	(0.0431)	(0.0389)	(0.0499)
	$RREL_t$	2.4396	**8.6521****	**12.686*****	**-6.2927****	**-9.8741***	**-17.736*****	**-14.923*****	**-16.368***
		(3.3107)	(3.9507)	(3.9608)	(3.1389)	(5.3831)	(5.2806)	(5.0180)	(9.1167)
		[-0.0002]	[0.0572]	[0.1012]	[0.0740]	[0.1366]	[0.2733]	[0.4733]	[0.5058]

Notes: This table reports the estimates from the long-horizon regressions of accumulated consumption growth and accumulated excess stock returns on $\widehat{cay}$, $\widehat{cay_h}$ and the financial variables. We omit the constants of all regressions. "Reg." indicates the regressors included in each regression. The forecast horizon length is in quarters. White cross-section corrected standard errors are displayed in parenthesis and $\overline{R}^2$ are in brackets at the end of each regression. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%.

through time, which is probably due to the strong persistence in cay and excess return series. Third, when we add alternative financial variables on the longer-term regressions, we observe that $\widehat{cay}$ is a much better predictor of excess returns than $d-p$ in regression 5, the same being true for the payout ratio, on regression 6. On the other hand, comparing the $\overline{R}^2$ of regressions 3 and 7 we observe a better fit for $RREL$ as a predictor up to one year ahead. However, for longer horizons, $\widehat{cay}$ has a better fit. Fourth, in regression 9, we use $\widehat{cay}$ together with all other financial variables. It is interesting to notice that the forecasting power of dividend yield has vanished. The only two important predictors of excess returns are cay and $RREL$. For longer horizons, the payout ratio $d-e$ may be considered a good predictor as well.

From the theoretical framework (equation (11)), cay should Granger-cause asset returns. We perform Granger causality tests[12] investigating if $\widehat{cay}$ Granger-causes excess stock returns. Indeed, with a lag length from four quarters onwards, we reject the null that $\widehat{cay}$ does not Granger-cause excess returns, at 1% significance.

6. OUT-OF-SAMPLE FORECASTS

In our view, a true test for predictability should be out-of-sample, since this is the context that is of interest to academics, practitioners, and financial analysts alike. To address this issue, we estimate nested and non-nested models and make out-of-sample forecast comparisons using their mean-squared forecast error (MSFE). Because our results in the previous section using the heterogeneous version of the cointegrating vector ($\widehat{cay}_h$) were disappointing, from now on we focus only on the homogeneous version, $\widehat{cay}$. Nested and non-nested models are first estimated using data from the beginning of the sample until the first quarter of 2004, and then recursively re-estimated adding one quarter at a time and calculating one-step-ahead forecasts until the fourth quarter of 2013. Our forecast accuracy measure is the trace of the MSFE matrix for all countries (implies equal weights across countries).

The so-called Nested Model consists of two regressions. The unrestricted model, which includes $\widehat{cay}$ and an alternative regressor explaining future excess returns, and the restricted model, where we exclude $\widehat{cay}$ from the unrestricted model, justifying its name. The so-called Non-Nested Model consists also of two regressions. Model 1, which includes $\widehat{cay}$ alone, and model 2, which includes only an alternative regressor, so both models are non-nested.

We analyze the MSFE of models using either $\widehat{cay}$, with cointegrating parameters estimated using the full sample, or $reest\,\widehat{cay}$, with the cointegrating parameters re-estimated every period. The target variables are the one-step-forward excess returns ($r_{t+1}-r_{f,t+1}$), and also the two years accumulated excess returns, $\sum_{i=1}^{8}(r_{t+i}-r_{f,t+i})$. Tabela 6 presents the results for nested regressions. From Tabela 6, it is clear that adding $\widehat{cay}$ to the benchmark models always decrease the MSFE of the regressions on a two-year horizon. This happens whether the cointegrating coefficients are re-estimated or not. For one quarter ahead, $\widehat{cay}$ and $reest\,\widehat{cay}$ also do better than the constant and lagged benchmarks, but not when we include d_t-p_t, d_t-e_t, and $RREL_t$. Again, the benefit of adding $\widehat{cay}$ in these regressions is greater over the two years accumulated excess returns, which is consistent with the results from long-term regressions above.

In Tabela 7, we extend our analysis by making nonnested forecasts. Compared to the financial variables, $\widehat{cay}$ produces superior forecasts regardless of whether its coefficients are re-estimated or whether we want to predict the next quarter or two years accumulated excess returns. The strength of $\widehat{cay}$ as a predictor may be noticed specially with regard to the payout ratio, $d-e$. However, when making

[12] The tests consist of running regressions with different lags, l, of the form

$$(r_t-r_{f,t})=\alpha_0+\alpha_1(r_{t-1}-r_{f,t-1})+\cdots+\alpha_l(r_{t-l}-r_{f,t-l})+\beta_1\widehat{cay}_{t-1}+\cdots+\beta_l\widehat{cay}_{t-l}+u_t$$

and checking the F-statistics for the joint hypothesis of $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_l=0$.

Table 6. Out-of-sample nested comparisons.

		MSE_u/MSE_r	
#	Comparison	$r_{t+1} - r_{f,t+1}$	$\sum_{i=1}^{8}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$
1	$\widehat{cay}_t$ vs. $r_t - r_{f,t}$	0.9978	0.9893
2	$\widehat{cay}_t$ vs. $const$	0.9981	0.9851
3	$\widehat{cay}_t$ vs. $(d_t - p_t) + (d_t - e_t) + RREL_t$	1.0097	0.9822
4	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $r_t - r_{f,t}$	0.9988	0.9954
5	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $const$	0.9980	0.9897
6	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $(d_t - p_t) + (d_t - e_t) + RREL_t$	1.0076	0.9872

Notes: This table shows the results of the nested comparisons, displaying the MSE ratio from the unrestricted model, which includes either $\widehat{cay}$ or *reest* $\widehat{cay}$, over the restricted model without this variables. The first valued column refers to one-quarter-ahead excess returns forecasts and the second one refers to two years accumulated excess returns predictions. The first three rows are computed with $\widehat{cay}$ estimated from the full sample and the last three with its parameters recursively re-estimated (*reest* $\widehat{cay}$).

Table 7. Out-of-sample nonnested comparisons.

		MSE_1/MSE_2	
#	Comparison	$r_{t+1} - r_{f,t+1}$	$\sum_{i=1}^{8}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$
1	$\widehat{cay}_t$ vs. $r_t - r_{f,t}$	1.0032	0.9862
2	$\widehat{cay}_t$ vs. $d_t - p_t$	0.9956	0.9938
3	$\widehat{cay}_t$ vs. $d_t - e_t$	0.9822	0.9616
4	$\widehat{cay}_t$ vs. $RREL_t$	0.9863	0.9874
5	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $r_t - r_{f,t}$	1.0035	0.9915
6	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $d_t - p_t$	0.9959	0.9992
7	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $d_t - e_t$	0.9825	0.9668
8	$reest\ \widehat{cay}_t$ vs. $RREL_t$	0.9866	0.9928

Notes: This table reports the results of nonnested comparisons, displaying the MSE ratio from the first model, with either $\widehat{cay}$ or *reest* $\widehat{cay}$ as the sole predictor, over the second model, with financial variables or lagged excess returns. Once more, the first valued column refers to one-quarter-ahead excess returns forecasts and the second one refers to two years accumulated excess returns predictions. The first four rows are computed with $\widehat{cay}$ estimated from the full sample and the last two with its parameters recursively re-estimated.

forecasts over one quarter ahead, both $\widehat{cay}$ and *reest* $\widehat{cay}$ produce higher MSFEs in relation to lagged excess returns. Except for *RREL*, the impact of $\widehat{cay}$ and *reest* $\widehat{cay}$ over the MSFE ratio is greater for two years accumulated excess returns. At this time length, the forecasting power of $\widehat{cay}$ even overcomes the predictive power of lagged excess returns. Moreover, comparing the first four rows with the last four, we see that $\widehat{cay}$ has a superior forecasting power than its re-estimated version, as one would expect.

All in all, we find that $\widehat{cay}$ beats most alternatives across both horizons investigated here. Out-of-sample results are consistent with the in-sample results as a whole, confirming the predictability of $\widehat{cay}$ embedded in equation (11).

7. COINTEGRATION AND FORECASTING WITH A FMOLS ESTIMATE OF cay

As pointed out in the Introduction, from a theoretical perspective, the cointegrating vector should be

$$cay_t = (1, -\gamma, -(1-\gamma)) \begin{pmatrix} c_t \\ a_t \\ y_t \end{pmatrix},$$

where $0 \leq \gamma \leq 1$ should be the share of asset wealth in total wealth. However, inspection of our empirical results in section 4 and the Appendices, shows that not always these theoretical restrictions were obeyed. Two possible reasons for that are measurement error on the components of cay_t or the fact that we obtain the present-value equation (11) using a first-order log-linear approximation.

Lettau & Ludvigson (2001) and some subsequent papers in the literature also present these problems, especially the fact that coefficients did not add up to unity, which was not viewed as major issue. So, we follow the early literature and try to estimate the cointegrating vector using a method that could in principle yield estimates of the homogeneous cointegrating vector $(1, -\beta_a, -\beta_y)$, where $0 \leq \beta_a, \beta_y \leq 1$, with an analogous restriction binding also for the heterogeneous case. However, we do not impose that $\beta_a + \beta_y = 1$. To implement that, we apply the Fully Modified Ordinary Least Squares (FMOLS) proposed by Phillips & Hansen (1990). This approach, in contrast to the standard OLS, eliminates problems of asymptotic bias of the estimates caused by the long run correlation between the cointegrating equation and stochastic regressors innovations. This allows inference on the cointegrating vector.

Tabela 8 reports the results on the homogeneous cointegrating vector, obtained from the FMOLS for the entire panel. In Appendix B, we present the heterogeneous vectors results, derived from the time-series FMOLS regressions estimated separately for each country.

Table 8. Panel homogeneous cointegrating vector.

Estimated Parameters	*Asset Wealth*	*Labor Income*	R^2
Consumption	**−0.1952*****	**−0.8244*****	0.99
	(0.0144)	(0.0327)	

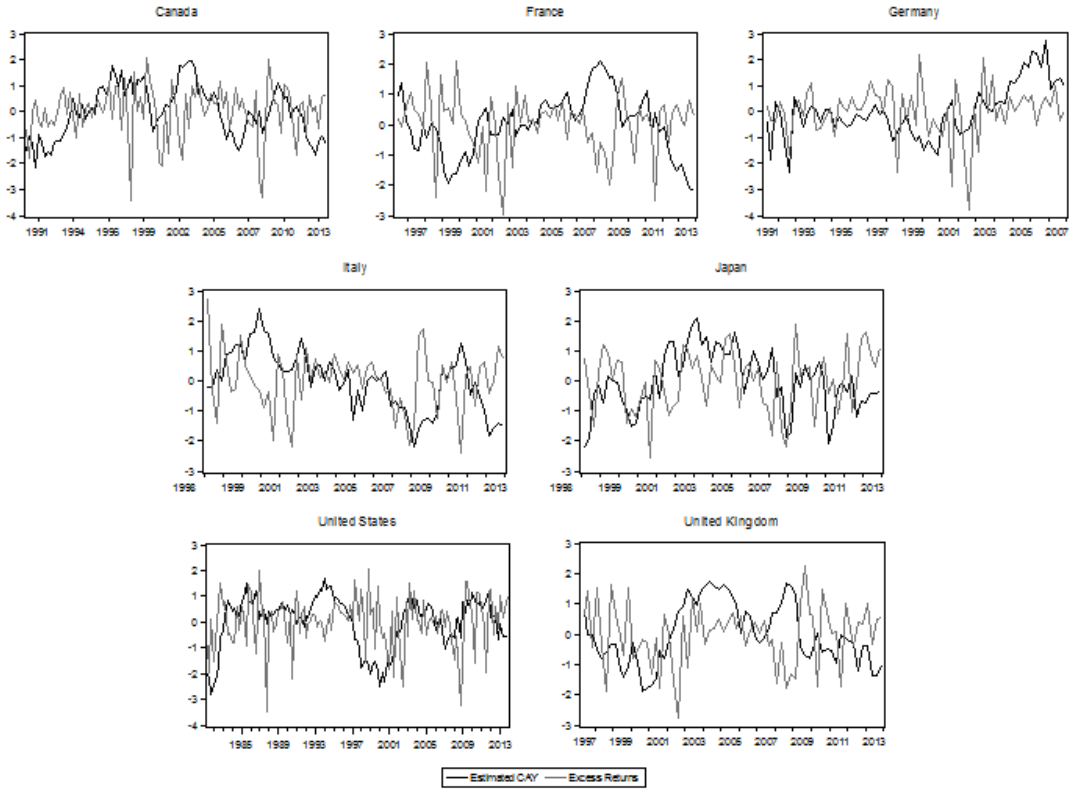
Notes: This table presents the estimated parameters of the cointegrating vector $(1, -\widehat{\beta}_y, -\widehat{\beta}_a)$ from the FMOLS estimation, with respective standard errors in parenthesis. On the specification, we include an intercept in the cointegrating equation. 601 observations are included in this estimation after adjustments. Both estimates are statistically significant at 1% level (***), computed using asymptotic χ^2 distribution.

For the homogeneous cointegrating vector, contrary to previous results, we now do not observe a negative share for human-capital wealth. Also, for the heterogeneous case, we only observed two instances with negative shares for asset wealth (France and the UK), which are very small numerically and statistically insignificant. Thus, from a practical and statistical point-of-view, our FMOLS cointegrating vectors are theoretically valid.

With these new results in hand, we build $\widehat{cay}_f$, the homogeneous version of the cointegrating residual using FMOLS, and $\widehat{cay}_{fh}$, its heterogenous counterpart. Once again, we check the stationarity of $\widehat{cay}_f$ and $\widehat{cay}_{fh}$ by performing the Fisher-ADF and PP panel unit root tests, including individual intercepts but not any trends. For both variables, the presence of unit root is strongly rejected on both ADF and PP tests, confirming their stationarity.

Figura 2 shows variations of $\widehat{cay}_f$ preceding some movements on excess returns for countries such as Canada, France, Germany and United Kingdom. In addition, we notice that some countries present a faster responsiveness of excess returns over movements on $\widehat{cay}_f$. For instance, considering

Figure 2. Excess Returns and Estimated cay.



the year of 2013, the excess returns of France, Italy, Japan and United Kingdom have already followed the latest $\widehat{cay}_f$ swings. On the other hand, United States and Canada still show opposite movements between those two variables. Thus, if $\widehat{cay}_f$ is indeed a good predictor of excess returns, we should expect a decline in excess return's path in the next few quarters of 2014 and 2015 for both Canada and United States.

Next, we perform the in-sample one-quarter-ahead predictability tests using $\widehat{cay}_f$ or $\widehat{cay}_{hf}$. Results are presented in Tabela 9. Contrary to previous results, now, both $\widehat{cay}_f$ and $\widehat{cay}_{fh}$ can significantly forecast one-quarter-ahead stock returns and excess returns. But, other financial variables included in the regressions cannot.

Tabela 10 we presents the results of forecasting tests for in-sample long-term regressions, investigating the impact of $\widehat{cay}_f$ and $\widehat{cay}_{fh}$ over accumulated consumption growth and accumulated excess returns.

From Panel A on Tabela 10 we notice that $\widehat{cay}_{fh}$ is a better predictor of consumption growth than $\widehat{cay}_f$, based on a larger adjusted R^2. In contrast, in Panel B, $\widehat{cay}_f$ is a better predictor overall. Comparing $\widehat{cay}_f$ with the other financial variables (rows 4 and 5) $\widehat{cay}_f$ is a much better predictor of excess returns than $d-p$, except for a horizon of six years. The same is not true for the payout ratio, on row 6. On the other hand, comparing the $\overline{R}^2$ of rows 3 and 7 we observe a better fit with $RREL$ as a predictor only up to three quarters ahead. On row 9, we make the long-horizon regressions on $\widehat{cay}_f$ and all financial variables together, results are still the same as in Tabela 5—$\widehat{cay}_f$ and $RREL$ as stronger predictors of excess returns for intermediate horizons, and for longer horizons the payout ratio $d-e$ may also be

Table 9. In-sample one-quarter-ahead regressions.

Panel A: Real Returns, r_{t+1}									
#	Total Obs	*Constant*	*lag*	$\widehat{cay}_{f_t}$	$\widehat{cay}_{fh_t}$	$d_t - p_t$	$d_t - e_t$	$RREL_t$	$\overline{R}^2$
1	584	0.0069		**0.3547*** **					0.0018
		(0.0097)		(0.1267)					
2	433	0.1120	0.1549	**0.3232***		0.0284	-0.0001	3.7247	0.0309
		(0.0941)	(0.1104)	(0.1919)		(0.0254)	(0.0146)	(3.0236)	
3	584	0.0069			0.3127				-0.0041
		(0.0098)			(0.2421)				
4	450	0.1076	0.1649		0.1577	0.0294	-0.0089	3.5740	0.0243
		(0.0880)	(0.1161)		(0.2196)	(0.0244)	(0.0151)	(2.9221)	
Panel B: Excess Returns, $r_{t+1} - r_{f,t+1}$									
#	Total Obs.	Constant	*lag*	$\widehat{cay}_{f_t}$	$\widehat{cay}_{fh_t}$	$d_t - p_t$	$d_t - e_t$	$RREL_t$	$\overline{R}^2$
5	559	0.0037		**0.4244*** **					0.0051
		(0.0096)		(0.1297)					
6	432	0.1148	0.1540	**0.3903** **		0.0295	0.0004	3.3901	0.0317
		(0.0955)	(0.1112)	(0.1950)		(0.0257)	(0.0146)	(3.0125)	
7	559	0.0039			0.3881				-0.0033
		(0.0096)			(0.2421)				
8	449	0.1075	0.1673		0.2300	0.0297	-0.0086	3.2640	0.0219
		(0.0891)	(0.1171)		(0.2205)	(0.0246)	(0.0152)	(2.9111)	

Notes: This table shows some regressions of one-step-forward returns forecasts. Total Obs. refers to the total panel unbalanced observations included after adjustments, and *lag* is the one-lag backward dependent variable, i.e. on t, used as a regressor. The Constant is an overall fixed effects mean and we omit the specific fixed effects of each country. The last column reports the adjusted R^2. White cross-section corrected standard errors appear in parenthesis. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%.

considered a good predictor.

Tabela 11 presents the results of the out-of-sample forecasting exercise for excess returns. Again, we make both nested and nonnested comparisons and use either $\widehat{cay}_f$ or *reest* $\widehat{cay}_f$, which has its coefficients recursively re-estimated using FMOLS.

At the one-quarter-ahead horizon, results for *reest* $\widehat{cay}_f$ in Tabela 11 are disappointing, but $\widehat{cay}_f$ still beats lagged excess returns and the constant-return model. For the accumulated excess returns up to two years ahead, both $\widehat{cay}_f$ or *reest* $\widehat{cay}_f$ forecast much better than any of the alternatives. The decrease in MSFE can reach up to 14%, which is impressive compared to previous results.

Tabela 12 present the results of the non-nested tests. For accumulated excess returns, note that $\widehat{cay}_f$ or *reest* $\widehat{cay}_f$ produce superior forecasts than any other alternative predictor. For one-step-ahead, the same can be said about $\widehat{cay}_f$, with an excellent out-of-sample performance beating alternative predictors by more than 15%. However, *reest* $\widehat{cay}_f$ is beaten almost by all alternative predictors, with the exception of $d - e$.

The results in the current section show that taking into account theoretical restrictions may improve forecasting performance – compare the results in Tables 6 and 11, and results in Tables 7 and 12—especially those of accumulated excess returns over the two-year horizon. These empirical results are in line with those obtained by Guillén et al. (2015), who compared the out-of-sample forecasting performance of present-value models for the long- and short-interest rates, and for prices and dividends, with those of an unrestricted VAR, a cointegrating VAR, and a VAR with imposed cointegration and common-cycle restrictions, for these same variables. There, it became clear the advantages of impos-

Table 10. In-sample long-horizon regressions.

#	Reg.	Forecast Horizon H 1	2	3	4	8	12	16	24
		Panel A: Consumption Growth, $\sum_{i=1}^{H} \Delta c_{t+i}$							
1	$\widehat{cay}_{f_t}$	**-0.0323*** **	**-0.0578*** **	**-0.1537*** **	**-0.0838*** **	**-0.1079** **	**-0.1348***	**-0.1691***	**-0.3456** **
		(0.0108)	(0.0166)	(0.0329)	(0.0248)	(0.0474)	(0.0733)	(0.1017)	(0.1621)
		[0.0305]	[0.0549]	[0.0830]	[0.0767]	[0.1043]	[0.1272]	[0.1586]	[0.2533]
2	$\widehat{cay}_{fh_t}$	**-0.0714*** **	**-0.1219*** **	**-0.1537*** **	**-0.1839*** **	**-0.2159*** **	-0.1741	-0.1082	-0.2700
		(0.0148)	(0.0241)	(0.0329)	(0.0423)	(0.0807)	(0.1141)	(0.1368)	(0.1940)
		[0.0459]	[0.0718]	[0.0830]	[0.0922]	[0.1106]	[0.1254]	[0.1532]	[0.2435]
		Panel B: Excess Stock Returns, $\sum_{i=1}^{H}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$							
3	$\widehat{cay}_{f_t}$	**0.4244*** **	**0.8800*** **	**1.3672*** **	**1.4580*** **	**3.7857*** **	**5.3733*** **	**5.2354*** **	**3.0325*** **
		(0.1297)	(0.1943)	(0.2509)	(0.2800)	(0.5579)	(0.6422)	(0.7373)	(1.0610)
		[0.0051]	[0.0248]	[0.0462]	[0.0529]	[0.0984]	[0.1619]	[0.1855]	[0.2547]
4	$\widehat{cay}_{fh_t}$	0.3881	**0.8770** **	**1.4381*** **	**2.1433*** **	**5.4529*** **	**7.9904*** **	**8.5069*** **	**6.6140*** **
		(0.2421)	(0.3621)	(0.4265)	(0.5020)	(0.7686)	(0.8105)	(0.8090)	(1.0691)
		[-0.0033]	[0.0097]	[0.0249]	[0.0440]	[0.1436]	[0.2298]	[0.2730]	[0.4250]
5	$d_t - p_t$	0.0117	0.0348	0.055985	**0.0657** **	**0.1585*** **	**0.1911** **	**0.2802*** **	**0.3126*** **
		(0.0201)	(0.0302)	(0.0351)	(0.0304)	(0.0596)	(0.0787)	(0.0703)	(0.0783)
		[-0.0072]	[0.0031]	[0.0134]	[0.0214]	[0.0429]	[0.0783]	[0.1537]	[0.2783]
6	$d_t - e_t$	0.0009	-0.0087	-0.020391	**0.0391** **	**0.0941*** **	**0.1445*** **	**0.3224*** **	**0.2911*** **
		(0.0138)	(0.0306)	(0.0397)	(0.0180)	(0.0360)	(0.0393)	(0.0360)	(0.0420)
		[-0.0077]	[-0.0035]	[0.0047]	[0.0251]	[0.0554]	[0.1202]	[0.3018]	[0.3788]
7	$RREL_t$	0.5207	3.6982	**6.0328***	-3.5101	-4.7525	**-13.174** **	**-13.635** **	-7.1375
		(2.1074)	(2.7613)	(3.1641)	(2.7862)	(5.2727)	(5.7636)	(6.8009)	(8.0032)
		[-0.0041]	[0.0086]	[0.0219]	[0.0149]	[0.0243]	[0.0685]	[0.1038]	[0.1633]
8	$d_t - p_t$	0.0180	0.0557	**0.0900***	**0.0621***	**0.1332***	0.1162	0.0873	0.1577
		(0.0262)	(0.0438)	(0.0509)	(0.0340)	(0.0692)	(0.0814)	(0.0757)	(0.0979)
	$d_t - e_t$	-0.0016	-0.0165	-0.0348	0.0217	0.0590	**0.1107** **	**0.2950*** **	**0.2561*** **
		(0.0146)	(0.0330)	(0.0426)	(0.0192)	(0.0433)	(0.0459)	(0.0410)	(0.0521)
	$RREL_t$	2.2272	**8.1993** **	**12.272*** **	**-6.1581** **	**-9.5835***	**-17.329*** **	**-15.270*** **	**-20.308** **
		(3.1878)	(3.8109)	(3.8679)	(3.1330)	(5.7054)	(5.7694)	(5.6160)	(9.1230)
		[0.0002]	[0.0513]	[0.0903]	[0.0430]	[0.0723]	[0.1436]	[0.3143]	[0.3972]
9	$\widehat{cay}_{f_t}$	**0.3949** **	**0.8832*** **	**1.3711*** **	**2.0112*** **	**4.8117*** **	**5.8325*** **	**5.3440*** **	**3.1608** **
		(0.1956)	(0.2642)	(0.2819)	(0.3194)	(0.5854)	(0.6328)	(0.7381)	(1.2583)
	$d_t - p_t$	0.0214	0.0630	**0.1003** **	**0.0762** **	**0.1678*** **	**0.1664** **	**0.1423***	**0.2175** **
		(0.0269)	(0.0437)	(0.0496)	(0.0322)	(0.0612)	(0.0757)	(0.0739)	(0.1037)
	$d_t - e_t$	0.0026	-0.0067	-0.0201	**0.0438** **	**0.1092** **	**0.1668*** **	**0.3511*** **	**0.3004*** **
		(0.0150)	(0.0329)	(0.0424)	(0.0197)	(0.0436)	(0.0439)	(0.0393)	(0.0535)
	$RREL_t$	2.4770	**8.7199** **	**12.705*** **	**-6.2200** **	-9.2138	**-16.235*** **	**-14.157*** **	**-17.045***
		(3.3823)	(3.9924)	(3.9796)	(3.0262)	(5.6297)	(5.7525)	(5.3590)	(9.3017)
		[0.0120]	[0.0808]	[0.1333]	[0.1373]	[0.2186]	[0.3077]	[0.4666]	[0.4734]

Notes: This table reports estimates from the long-horizon regressions of accumulated consumption growth and accumulated excess stock returns on $\widehat{cay}_f$, $\widehat{cay}_{fh}$ and the financial variables. We omit the constants of all regressions. "Reg." indicates the regressors included in each regression. The forecast horizon length is in quarters. White cross-section corrected standard errors are displayed in parenthesis and $\overline{R}^2$ are in brackets at the end of each regression. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%.

ing a fully-fledged theoretical model, although an intermediately restricted model produced forecasting winners more frequently.

8. CONCLUSIONS

Using the theoretical framework of Lettau & Ludvigson (2001), we perform an empirical investigation on how widespread is the predictability of *cay*—a modified consumption-wealth ratio—once we consider a set of important countries from a global perspective. We chose to work with the set of G7 countries, which represent more than 64% of net global wealth (US$ 263 trillion), and 46% of global GDP at market exchange rates. We evaluate the forecasting performance of *cay* using a panel-data approach, since applying cointegration and other time-series techniques is now standard practice in the panel-data literature. Hence, generalizing Lettau and Ludvigson's tests for a panel of countries is feasible and highly informative for global financial markets.

Table 11. Out-of-sample nested comparisons.

		MSE_u/MSE_r	
#	Comparison	$r_{t+1} - r_{f,t+1}$	$\sum_{i=1}^{8}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$
1	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $r_t - r_{f,t}$	0.9887	0.8833
2	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $const$	0.9892	0.8804
3	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $(d_t - p_t) + (d_t - e_t) + RREL_t$	1.0005	0.8603
4	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $r_t - r_{f,t}$	1.0192	0.8727
5	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $const$	1.0169	0.8759
6	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $(d_t - p_t) + (d_t - e_t) + RREL_t$	1.0169	0.8767

Notes: This table shows the results of the nested comparisons, displaying the MSE ratio from the unrestricted model, which includes either $\widehat{cay}_f$ or *reest* $\widehat{cay}_f$, over the restricted model, without these variables. The first value column refers to one-quarter-ahead excess returns forecasts and the second one refers to two years accumulated excess returns predictions. The first three rows are computed with $\widehat{cay}_f$ estimated from the full sample and the last three with its parameters recursively re-estimated (*reest* $\widehat{cay}_f$).

Table 12. Out-of-sample nonnested comparisons.

		MSE_1/MSE_2	
#	Comparison	$r_{t+1} - r_{f,t+1}$	$\sum_{i=1}^{8}(r_{t+i} - r_{f,t+i})$
1	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $r_t - r_{f,t}$	0.9916	0.8798
2	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $d_t - p_t$	0.9841	0.8866
3	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $d_t - e_t$	0.9708	0.8578
4	$\widehat{cay}_{f_t}$ vs. $RREL_t$	0.9748	0.8809
5	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $r_t - r_{f,t}$	1.0192	0.8695
6	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $d_t - p_t$	1.0116	0.8762
7	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $d_t - e_t$	0.9979	0.8477
8	$reest\ \widehat{cay}_{f_t}$ vs. $RREL_t$	1.0020	0.8706

Notes: This table reports the results of nonnested comparisons, displaying the MSE ratio from the first model, with $\widehat{cay}_f$ as the sole predictor, over the second model, with financial variables or lagged excess returns. Once more, the first valued column refers to one-quarter-ahead excess returns forecasts and the second one refers to two years accumulated excess returns predictions. The first four rows are computed with $\widehat{cay}_f$ estimated from the full sample and the last two with its parameters recursively re-estimated.

We employ macroeconomic and financial quarterly data for the group of G7 countries, forming an unbalanced panel. For most countries, data is available from the early 1990s until 2014Q1, but for the U.S. economy it is available from 1981Q1 through 2014Q1. Our final results allowed a very broad examination of the present-value theory behind cay, which conclusions we list below:

1. We find overwhelming evidence of a single cointegration vector for consumption, asset wealth, and labor income, in forming cay.

2. In some cases, the coefficients in the cointegrating linear combination did not conform to theory, since they must lie between zero and one and add up to unity. This issue required alternative estimation techniques and forecast evaluation.

3. Estimates of cay help to forecast future stock returns and excess returns in sample. This is true whether or not we consider additional regressors in forecasting.

4. Estimates of cay help to forecast future stock returns and excess returns in the out-of-sample exercise, usually performing better than alternative regressors.

5. Finally, using estimates of cay that conform to economic theory does improve forecasts of future accumulated excess returns up to the two-year horizon.

All in all, we believe that our evidence has shown that the predictive power of cay is not a phenomenon restricted to the U.S. economy, but a much wider phenomenon, which deserves to be studied more broadly.

REFERENCES

Arellano, M. (1987). Computing robust standard errors for within-groups estimators. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, *49*(4), 431–434.

Campbell, J. Y. (1987). Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis. *Econometrica*, *55*(6), 1249–1273.

Campbell, J. Y. (1996). Understanding risk and return. *Journal of Political Economy*, *104*(2), 298–345.

Campbell, J. Y., & Deaton, A. (1989). Why is consumption so smooth? *The Review of Economic Studies*, *56*(3), 357–373.

Campbell, J. Y., & Mankiw, N. G. (1989). Consumption, income and interest rates: Reinterpreting the time series evidence. In O. J. Blanchard & S. Fischer (Eds.), *NBER Macroeconomics Annual 1989, Volume 4* (pp. 185–246). MIT Press. Retrieved from http://www.nber.org/chapters/c10965

Campbell, J. Y., & Shiller, R. J. (1987). Cointegration and tests of present value models. *Journal of Political Economy*, *95*(5), 1062–1088.

Campbell, J. Y., & Shiller, R. J. (1988a). The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors. *The Review of Financial Studies*, *1*(3), 195–228.

Campbell, J. Y., & Shiller, R. J. (1988b). Stock prices, earnings, and expected dividends. *Journal of Finance*, *43*(3), 661–76.

Campbell, J. Y., & Thompson, S. B. (2008). Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average? *The Review of Financial Studies*, *21*(4), 1509–1531.

Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, *55*(2), 251–276.

Fama, E. F., & French, K. R. (1988). Dividend yields and expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, *22*(1), 3–25.

Fisher, R. A. (1932). *Statistical methods for research workers* (4th ed.). Edinburgh: Oliver and Boyd.

Gao, P. P., & Huang, K. X. (2008). Aggregate consumption-wealth ratio and the cross-section of stock returns: Some international evidence. *Annals of Economics and Finance*, *9*(1), 1–37.

Guillén, O. T. a. H., Issler, J. V., & Saraiva, D. (2015). Forecasting multivariate time series under present-value model short- and long-run co-movement restrictions. *International Journal of Forecasting*, *31*(3), 862–875.

Hodrick, R. J. (1992). Dividend yields and expected stock returns: Alternative procedures for interference and measurement. *Review of Financial Studies*, *5*(3), 357–386.

Ioannidis, C., Peel, D., & Matthews, K. (2006). Expected stock returns, aggregate consumption and wealth: Some further empirical evidence. *Journal of Macroeconomics*, *28*(2), 439–445.

Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, *59*(6), 1551–1580.

Judson, R. A., & Owen, A. L. (1999). Estimating dynamic panel data models: A guide for macroeconomists. *Economics Letters*, *65*(1), 9–15.

Kao, C. (1999). Spurious regression and residual-based tests for cointegration in panel data. *Journal of Econometrics*, *90*(1), 1–44.

Lamont, O. (1998). Earnings and expected returns. *Journal of Finance*, *53*(5), 1563–1587.

Lettau, M., & Ludvigson, S. (2001). Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns. *Journal of Finance*, *56*(3), 815–849.

Lettau, M., & Ludvigson, S. C. (2004). Understanding trend and cycle in asset values: Reevaluating the wealth effect on consumption. *American Economic Review*, *94*(1), 276–299.

Maddala, G. S., & Wu, S. (1999). A comparative study of unit root tests with panel data and new simple test. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, *Special Issue 61*, 631–652.

Nickell, S. J. (1981). Biases in dynamic models with fixed effects. *Econometrica*, *49*(6), 1417–1426.

Nitschka, T. (2010). International evidence for return predictability and the implications for long-run covariation of the G7 stock markets. *German Economic Review*, *11*, 527–544.

Pesaran, M. H., & Timmermann, A. (1995). Predictability of stock returns: Robustness and economic significance. *Journal of Finance*, *50*(4), 1201–1228.

Phillips, P. C. B., & Hansen, B. E. (1990). Statistical inference in instrumental variables regression with $I(1)$ processes. *Review of Economic Studies*, *57*(1), 99–125.

Sousa, R. M. (2010). Consumption, (dis)aggregate wealth, and asset returns. *Journal of Empirical Finance*, *17*(4), 606–622.

Tsuji, C. (2009). Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns in Japan. *International Journal of Economics and Finance*, *1*(2), 123–133.

Wooldridge, J. M. (2010). *Econometric analysis of cross section and panel data* (2nd ed.). The MIT Press.

APPENDIX A. VECM HETEROGENEOUS COINTEGRATING VECTORS

This appendix provides the results from the VEC regressions for each country separately. Tabela A-1 shows the cointegrating vector parameters estimates when we relax the homogeneity restrictions, leading to heterogeneous coefficients among countries. On every VEC specification, we include an intercept in the cointegrating equation, we use one lag in difference for the endogenous variables and impose on cointegrating relationship among them.

With these estimated parameters we construct the variable $\widehat{cay}_h$, which represents the cointegrating residual when we allow for heterogeneity on coefficients, just as we describe in section 4.

Table A-1. Heterogeneous cointegrating vectors.

Estimated Parameters *Consumption*	$AssetWealth$	$LaborIncome$	$Constant$
Canada	**1.0091*** **	**-3.0200*** **	9.5197
	(0.2245)	(0.4719)	
France	**0.7842*** **	**-2.7832*** **	6.4006
	(0.1925)	(0.3837)	
Germany	**-0.2011*** **	**-0.4126*** **	-2.7835
	(0.0107)	(0.0772)	
Italy	-0.1789	0.5172	-10.4017
	(0.1215)	(0.3965)	
Japan	**-0.3486*** **	**-0.3826*** **	-2.0229
	(0.0331)	(0.0709)	
United Kingdom	**-0.1073** **	**-0.8947*** **	0.0846
	(0.0452)	(0.0451)	
United States	**-0.6898*** **	0.1587	-2.1200
	(0.23672)	(0.4907)	

Notes: This table presents the estimated parameters of the cointegrating vectors $(1, -\widehat{\beta}_{y,i}, -\widehat{\beta}_{a,i})$ for each country from the VEC estimations, with respective standard errors in parenthesis. On every VEC specification, we include an intercept in the cointegrating equation, we use one lag in difference for the endogenous variables and impose one cointegrating relationship among them. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%, computed using asymptotic Normal distribution.

APPENDIX B. FMOLS HETEROGENEOUS COINTEGRATING VECTORS

This appendix provides the results from the FMOLS regressions for each country separately. Tabela B-2 shows the cointegrating vector parameters estimates when we relax the homogeneity restrictions, leading to heterogeneous coefficients among countries. In addition, in the specification, we include distinct constants in the cointegrating structure for each country.

With these estimated parameters we construct the variable $\widehat{cay}_{fh}$, which represents the cointegrating residual when we allow for heterogeneity on coefficients, just as we describe in section 7.

Table B-2. Heterogeneous cointegrating vectors.

Estimated Parameters *Consumption*	$AssetWealth$	$LaborIncome$	$Constant$	R^2
Canada	**-0.2322*** **	**-0.5455*** **	0.4957	0.99
	(0.0324)	(0.0695)	(0.3412)	
France	0.0008	**-0.9523*** **	0.4770*	0.97
	(0.0381)	(0.0694)	(0.2856)	
Germany	**-0.1931*** **	**-0.3664*** **	3.2525***	0.95
	(0.0087)	(0.0575)	(0.4430)	
Italy	**-0.2874*** **	**-0.1677***	3.8119***	0.89
	(0.0339)	(0.0995)	(0.5481)	
Japan	**-0.3107*** **	**-0.3372*** **	3.298***	0.76
	(0.0272)	(0.0606)	(1.2337)	
United Kingdom	0.0006	**-0.8837*** **	1.1555***	0.97
	(0.0286)	(0.0267)	(0.4118)	
United States	**-0.4810*** **	**-0.4591** **	-1.4607	0.96
	(0.1046)	(0.2180)	(0.9745)	

Notes: This table presents the estimated parameters of the cointegrating vectors $(1, -\widehat{\beta}_{y,i}, -\widehat{\beta}_{a,i})$ for each country, with respective standard errors in parenthesis. We include individual intercepts in the cointegrating specification. Statistics with * are significant at 10% level, ** at 5% and *** at 1%, computed using asymptotic χ^2 distribution.

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160023
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 441–455

A Macroeconomic Model of Credit Risk in Uruguay

Gabriel Illanes[*], Alejandro Pena[†], Andrés Sosa[‡]

Contents: **1. Introduction; 2. Credit risk models; 3. Applications by sectors in the Uruguayan economy; 4. Conclusions.**

Keywords: **Credit Risk, Default, Structural Models, Central Banking, Test Stress.**

JEL Code: **E58.**

In this paper we evaluate credit risk of the economy as a whole, aiming at the study of the financial stability. This analysis uses as proxy the credit granted by the banking system. We use a non-linear parametric model based on Merton's structural framework for the analysis of the risk associated to a loan portfolio. In this model, default occurs when the return of an economic agent falls under certain threshold which depends on different macroeconomic variables. We use this model to assess the credit risk module in stress tests for the local banking system. We also estimate the "elasticities" of credit categories correspondig to corporate credit and consumer credit, both in national currency and american dollars. We obtain the parameters for the model using maximum likelihood, where the likelihood function contains a random latent factor which is assumed to follow a normal distribution.

Neste artigo avaliamos o risco de crédito para toda a economia, almejando o estudo da estabilidade financeira. Esta análise usa como proxy o crédito distribuído pelo sistema bancário. Usamos um modelo paramétrico não-linear, baseado no framework estrutural de Merton, para análise do risco associado a cada portfólio de empréstimos. Neste modelo, o default ocorre quando o retorno de um agente econômico cai abaixo de um certo ponto de corte que depende de diferentes variáveis macroeconômicas. Usamos este modelo para acessar o módulo de risco de crédito em testes de estresse para o sistema bancário local. Também estimamos as "elasticidades" das categorias de crédito correspondentes ao crédito corporativo e crédito pessoal, tanto em moeda local como em dólares americanos. Obtemos os parâmetros para o modelo maximizando uma função verossimilhança que contém um fator aleatório latente com distribuição normal.

[*]Universidad de la República, Facultad de Ciencias, Centro de Matemática. Iguá 4225, Esq. Mataojo, Montevideo, Uruguay. CP 11400. Email: gillanes@cmat.edu.uy

[†]Banco Central del Uruguay, Superintendencia de Servicios Financieros, Departamento Riesgos Financieros. Diagonal Fabini 777, Montevideo, Uruguay. CP 11100. Email: apena@bcu.gub.uy

[‡]Universidad de la República, Facultad de Ciencias, Centro de Matemática. Iguá 4225, Esq. Mataojo, Montevideo, Uruguay. CP 11400. Email: asosa@cmat.edu.uy

1. INTRODUCTION

There are two types of basic strategies to model credit risk, and from each one of them a group of models is obtained. The first group of models estimates risk factors at an individual level. These models have been developed mostly by commercial banks, in order to develop credit policies. These models can evaluate the risk of every borrower; however, procyclicality in credit evaluation is a problem, which consist in being too optimist during boom times, and too pessimistic during low economy cycles. Some examples of this kind of models are IRB model (Internal Ratings-Based Approach), advocated by Basel II as the simplest internal model for credit risk evaluation and the assess of the required capital by that risk.

The credit risk model we use belongs to the second group, in which the aggregate credit risk for the whole economy is estimated, and then used to evaluate financial stability. The default rate of the economy is an input variable of stress tests, for which it is important to have a way to estimate it.

In particular, one of our objectives is to present a one-factor credit risk model for a loan portfolio. We want a model able to estimate the proportion of defaulted loans in economy as a response to the evolution of different macroeconomic variables. There exists a wide range of empirical work and applications for this kind of models, for example Céspedes & Martín (2002), Cipollini & Missaglia (2005), Hamerle, Leibig, & Scheule (2004), Lucas & Klaassen (2003), Rosch (2003) and Rosch (2005).

In section 2 we describe the economic risk model for a loan portfolio, compute the default probability without conditioning to the random latent factor, compute the likelihood function to be optimized, and explain how to select the macroeconomic variables most related to every credit category. In section 3 we describe the available data to fit the models, and then we present and discuss the obtained results for every model. In section 4 we discuss the results and conclude.

2. CREDIT RISK MODELS

The objective of credit risk models is to quantify possible losses in case of counterparty default. The default risk for the economy as a whole is estimated in order to study the stability of he financial system.

This kind of models have been studied in depth for several decades. There exists an extensive literature based on default probabilities for individual borrowers and for the economy as a whole, or for a given commercial bank of the system. For the former case, dependencies between macroeconomic variables and credit risk are established. For the latter case, one possible variant for the model is to use a model for panel data to estimate the parameters at a global level, taking into account the information of each one of the banks.

2.1. Credit risk models used by the central banks

Credit risk models used by Central Banks are used for stress tests and have the objective of assessing the financial stability of the bank system. Therefore, they belong to the group of models that evaluate the aggregate credit risk. Most of credit risk models are either structural models or reduced models. However, there exist another kind of model that aims to keep the best features of both structural and reduced models; they are called hybrid models.

Structural models are based on Merton (1974), in which the debtor's capability to meet obligations is studied, computing the probability of debtor's assets fall under certain thershold. These models are widely known in the financial markets, and they are used by important financial firms. The hypothesis is that investors have all market information, and they have full knowledge about assets and debts values of all firms. The structural models include among others the models presented in Geske (1977) and J.P. Morgan & Co. (1997).

Reduced form models describe debtor's default risk by the means of the first jump in a stochastic process (Poisson Process), independent of available market information. These models assume that the

probability of meeting obligations have the same structure as a discount factor. The reduced models are include in Duffie & Singleton (1997) and Jarrow & Turnbull (1995) where the advantages of this approach of credit risk are introduced.

2.2. Review of credit models applied to financial systems

The most traditional approach for the study of credit risk consists in obtaining an empirical relationship between a dependent variable representing the credit quality of a loan portfolio, and a set of marcoeconomic variables to be selected. This methodology was used by Central Banks in United Kingdom, Germany, Belgium, Finland and Czech Republic (Jakubík, 2007).

The Bank of England (Bunn, Cunningham, & Drehmann, 2005), used this model to estimate the default rate of loans granted to non-financial companies, loans granted to individuals for house purchase secured by a mortage, and in credit card portfolios. This default rates are estimated from variables such as gross domestic product, real interest rate, unemployment rate, companies indebtedness level and other macroeconomic indicators.

In the case of the Bank of Finland (Virolainen, 2004), uses an empirical model based on a logistic regression that aims to explain default rate of different sectors of the economy, also using macroeconomic variables.

Linear approximations can be reasonable when shock is small, but when shocks are large it might be necessary to introduce non-linear factors. Based on this concept, the Bank of Canada (Coletti et al., 2008), studied the relationship between a logistic transformation of the default rate of different sectors of the economy and two macroeconomic variables—gross domestic product and interest rate—transformed by polynomial functions.

The Bank of Japan (2007), used a probit transformation of the probability of a rating transitions in which the independent variables are the gross domestic product growth and the ratio of interest bearing liability to cash flow.

The Bank of Spain (Jiménez & Mencía, 2007), used a probit transformation of the default rate and the independent variables are change in the real gross domestic product growth, interest rate, term spread, six sectoral variables and two latent factors (unobserved common factors).

In Latin America, there are few references available of application of this methods. In Caicedo Cerezo, Bielsa, & Casanovas Ramón (2011), credit risk is quantified using Merton's model for companies in the Colombian market between 2005 and 2007.

In the case of Uruguay, no publications about default probability estimation using structural models were found. For that reason, this paper can become the first reference in the application of structural models and credit risk assessment for Uruguayan economy as a whole.

2.3. Mathematical model

The model assumes a homogeneous portfolio of companies in the economy. The standardized log-return of company i in time t satisfies the equation

$$R_t^{(i)} = \sqrt{\rho} F_t + \sqrt{1-\rho} U_t^{(i)}, \tag{1}$$

where F is the logarithm of the returns in the economy, independent of company i (systematic factor of economy) and it is modeled using a standard normal distribution; $U^{(i)}$ is the specific return of company i, which is also modeled using a standard normal distribution; and factor ρ represents the sensitivity of the return to the non-observable factor of the economy. We will also assume that variables F and U are independent.

We say that company i defaults when its return $R_t^{(i)}$ falls below certain threshold T. If we define the random variable Y as a binary random variable taking value 1 if company i defaults and 0 otherwise, we obtain the following equation for default probability for company i on time t is

$$p_t^{(i)} = \mathrm{P}\left(Y_t^{(i)} = 1\right) = \mathrm{P}\left(R_t^{(i)} < T\right).$$

Default threshold T can be set as a constant, or it can be modeled using macroeconomic variables related to the economy. We choose the latter, modeling the default threshold as a linear combination of N macroeconomic variables,

$$p_t^{(i)} = \mathrm{P}\left(Y_t^{(i)} = 1\right) = \mathrm{P}\left(\sqrt{\rho}F_t + \sqrt{1-\rho}U_t^{(i)} < \beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt}\right) = \Phi\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt}\right),$$

where Φ is the standard normal distribution function.

The probability of default, conditioned to the non observable factor f_t is given by

$$p^{(i)}(f_t) = \mathrm{P}\left(U_t^{(i)} < \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho}f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho}f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right), \tag{2}$$

the formula which can also be written as

$$\Phi^{-1}\left(p^{(i)}(f_t)\right) = \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt}}{\sqrt{1-\rho}} - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}f_t. \tag{3}$$

As companies can be regarded as homogeneous, if the number of companies grows, the default rate DR_t converges to the conditional probability of default. This means that we can estimate the default rate of the portfolio by the individual probability of default.

We assume that the number of companies in default at time t conditioned to the latent factor $d_t(f_t)$ follows a binomial distribution, where the parameters are the conditional probability of default $p^{(i)}(f_t)$ and the total number of companies n_t.

The non-conditional probability of default can be obtained integrating over the non-observable random factor

$$\mathrm{P}(D_t = d_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t}(p(f_t))^{d_t}(1-p(f_t))^{n_t-d_t}\phi(f_t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

where ϕ is the standard normal density function.

The model assumes portfolios of all agents are homogeneous. This hypothesis is commonly used in literature, such as Bluhm & Overbeck (2003), Jakubík (2005) and Vasicek (1987). However, this hypothesis is not always met in practice; this is mostly due to different sizes of portfolios, and different recovery rates for portfolios of similar sizes. There exists a large body of literature in panel data econometrics pointing out the various consequences for inferences of neglecting heterogeneity. This problem has been addressed using several different approaches, for example, using quadratic factors in a two-factor model to capture the effects of different sizes of portfolios (Barone-Adesi, Gagliardini, & Urga, 2000), adding random variables representing different recovery rates (Molins & Vives, 2016), and the application of models using Markov Chain Monte Carlo (Luo & Shevchenko, 2013).

Using a data set containing the total number of companies (n_t), the total cases of default (d_t) and the most relevant macroeconomic variables (x_{jt}), parameters of equation (4) can be estimated using

maximum likelihood. The logarithm of the likelihood function for the random vector $(D_t)_{t\in 1\dots T}$ is

$$\begin{aligned} l(\bar{\beta},\rho) &= \sum_{t=1}^{t=T} \log\Big(\mathrm{P}(D_t = d_t)\Big) \\ &= \sum_{t=1}^{t=T} \log \int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t} \Big(p(f_t)\Big)^{d_t} \Big(1-p(f_t)\Big)^{n_t-d_t} \phi(f_t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{t=1}^{t=T} \log \Bigg\{ \int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t} \left[\Phi\left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho} f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right]^{d_t} \\ &\qquad \left[1-\Phi\left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho} f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right]^{n_t-d_t} \phi(f_t)\,\mathrm{d}t \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Now we have to find parameters $\bar{\beta}$ and ρ such that function l presents an absolute maximum for those values. In our case, we have the problem of approximating integral (5), because its primitive function can not be computed. This problem is studied in depth in Jakubík (2005). Here, we will use the Gaussian quadrature method.

The estimated coefficients $\bar{\beta}$ can not be interpreted as elasticities of the impacts of macroeconomic variables on the credit risk, due to different scales of the variables and non-linearity of the model.

2.4. Adjustment of the model

There are several macroeconomic variables related to credit risk which can be used to fit the model. We would like those variables to meet the hypotheses of the model; this is, normality of F_t in (1) and independence of conditional probabilities of default (2).

Taking this into consideration, we will select a subset of macroeconomic variables for which those hypotheses are met. We observe that, if the hypotheses of the model are met, and if $\frac{d_t}{n_t}$ is a good approximation of $p^{(i)}(f_t)$, then the residuals of a multiple linear regression with $\frac{d_t}{n_t}$ as dependent variable and the (possibly lagged) macroeconomic variables as independent variables should be independent and normally distributed.

All the macroeconomic variables that could predict the probabilities $p^{(i)}$ should be considered, making the regressions of vector $p^{(i)}(f_t)$ against the different choices of subgroups of such variables with the purpose of choosing the subgroups that adjusts best to the tests. It is convenient to verify not only that the signs of the coefficients β_i be coherent with the economic intuition, but also that the coefficients are statistically significant.

Therefore, we will consider all macroeconomic variables related to $p^{(i)}$, and we will regress $p^{(i)}(f_t)$ against all possible subsets of the macroeconomic variables. We will select the subset of variables that best fits the hypothesis test for normality of the residuals. We will also verify that the regression coefficients β_i are significant, and that the sign of β_i do not contradict economic intuition for the macroeconomic variable i. Independence of the residuals can also be tested and used as a subset selection criterion, possibly adding lagged values of the dependent variable $\frac{d_t}{n_t}$ as independent variables (this will not work if lagged values of $\frac{d_t}{n_t}$ are too important as explanatory variables).

3. APPLICATIONS BY SECTORS IN THE URUGUAYAN ECONOMY

We will study the credit risk of the consumer credit in national currency category, and corporate credit in dollars category, as they are the most important categories in the banking system. However, results

for consumer credit in dollars and corporate credit in national currency are also shown. For this purpose, we will use a data set consisting of monthly observations of different macroeconomic variables.

3.1. Data set

We will fit all models using a data set consisting of monthly observations, from December 2001 until May 2013 (138 observations in total). For every economy sector, the dependent variable is the observed proportion of defaulted loans in the private banking system corresponding to that sector. In order to weight properly the importance of people or companies in default, and also in order to respect homogeneity hypothesis as much as we can, we will assume all loans to grant the same amount of money. It must be noted that, as the selected likelihood function (5) is not linear, results will slightly depend on the selected amount of money for an individual loan.

We remark that, during the observation time, the largest values of default rate of the banking system are obtained in 2003, due to a deep economic crisis in Uruguay. After that period, we observe a decreasing trend in the default rate due to economic growth.

We fitted for the proportion of defaulted loans for four sectors: corporate credit and consumer credit, for both national currency and American dollars. The available macroeconomic variables we considered to fit the models are:

- Country Risk of Uruguay (CR). EMBIG computed by JP Morgan. Source: Bloomberg.
- Inflation Rate (IR). Source: National Institute of Statistics, Uruguay (INE).
- Lending Rate for Corporations in American Dollars (LRCorD). Source: Central Bank of Uruguay.
- Lending Rate for Corporations in Uruguayan Pesos (LRCorP). Source: Central Bank of Uruguay.
- Lending Rate for Consumers in American Dollars (LRConD). Source: Central Bank of Uruguay.
- Lending Rate for Consumers in Uruguayan Pesos (LRConP). Source: Central Bank of Uruguay.
- Monthly activity indicator based on Gross Domestic Product (GDP). Quarterly observations adapted linearly to monthly observations.
- Nominal Exchange Rate (NER). Source: Central Bank of Uruguay.
- Real Exchange Rate (RER). Source: Central Bank of Uruguay.
- Real Wage Index (RW). Source: National Institute of Statistics, Uruguay (INE).
- Six-month Libor Rate (LR). Source: Bloomberg.
- Unemployment Rate (UR). Unemployment rate for the whole country, considering towns and cities over 5,000 inhabitants.

Macroeconomic variables exhibit great volatility in 2003 due to financial crisis. As well, large variance in some of the variables is also observed during 2008–2009. This is due to world financial crisis because Uruguay is a small open economy, not significant in international markets and vulnerable to different external impacts.

There are some international macroeconomic variables that are not taken into account directly, that might affect credit default risk. Some of them are commodity prices, foreign interest rates and measures of external volatility. However, we can capture some of their variability via the considered macroeconomic variables.

Commodity prices are not explicitly considered due to Uruguayan regimen of exchange-rate flexibility. This means that a drop in the commodity prices might lead to a quick increase in the nominal exchange rate (NER). Furthermore, the use of hedging instruments is becoming common practice in Uruguay to protect against variation of prices.

Regarding the international interest rates, we only consider six-month Libor Rate. However, we consider different Uruguayan interest rates which usually depend on the evolution of the Libor rate. Six-month Libor rate is not selected for any of the fitted models, but this does not mean that it does not affect credit risk.

We are not considering variables that measure the volatility of international markets, such as VIX (Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index). However, VIX variable is highly correlated with Uruguayan Country Risk, therefore, we consider the volatility of international markets in an indirect way.

3.2. Consumer Credit in National Currency

3.2.1. Fitting the model

Following the variable selection criterion established in section 2.4, we found that a suitable subset of macroeconomic variables for consumer credit in national currency is (6-months lagged) Unemployment Rate, (3-months lagged) lending rate for consumers in Uruguayan pesos, and (3-months lagged) inflation rate.

The results for the linear regression are in Tabela 1.

Table 1. Consumer Credit in National Currency: linear regression.

	Coefficients	Typical Deviation	Statistic t	p-value
Constant	−2.4450	0.0514	−47.59	0.00
UR (−6)	6.8737	0.5884	11.68	0.00
IR (−3)	−2.1353	0.6946	−3.08	0.00
LRConP (−3)	0.7988	0.1170	6.83	0.00

Chi-square normality test for the residuals yields a p-value of 0.532, so normality of the residuals hypothesis is not rejected.

As the coefficients of the linear regression are significant, the sign of different coefficients fit economic intuition, and residuals can be regarded as normal, we can use this subset of macroeconomic variables to fit the one-factor model. Obtained results are shown in Tabela 2.

Table 2. Consumer Credit in National Currency: Main Model. The log-likelihood is −9,529.93.

	Coefficients
Constant	−2.3846
UR (−6)	6.1568
IR (−3)	−2.3524
LRConP (−3)	0.8742
ρ	0.0045

A small value for ρ is observed, as we should expect for the consumers category, according to IRB model of Basel II.

An adequate stress test can be done considering different possible values for the macroeconomic variables involved in the model, as we show in Tabela 3.

We observe that the variable with the largest impact on the model is the unemployment rate, as we expected. The non-linearity of the model can be observed in the Tabela 3, an increase of one percent in unemployment rate will lead to large impacts on the model as the unemployment rate increases. From

Table 3. Consumer Credit in National Currency: Stress Test for Main Model.

IR	LRConP	Unemployment Rate (UR)							
		7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%
5%	25%	3.2%	3.7%	4.2%	4.8%	5.4%	6.1%	6.9%	7.8%
	28%	3.4%	3.9%	4.4%	5.0%	5.7%	6.4%	7.3%	8.1%
	31%	3.6%	4.1%	4.7%	5.3%	6.0%	6.8%	7.6%	8.5%
	34%	3.8%	4.3%	4.9%	5.6%	6.3%	7.1%	8.0%	9.0%
	37%	4.0%	4.6%	5.2%	5.9%	6.7%	7.5%	8.4%	9.4%
6%	28%	3.2%	3.7%	4.2%	4.8%	5.4%	6.2%	6.9%	7.8%
	31%	3.4%	3.9%	4.5%	5.1%	5.7%	6.5%	7.3%	8.2%
	34%	3.6%	4.1%	4.7%	5.3%	6.0%	6.8%	7.7%	8.6%
	37%	3.8%	4.4%	5.0%	5.6%	6.4%	7.2%	8.0%	9.0%
7%	31%	3.2%	3.7%	4.2%	4.8%	5.5%	6.2%	7.0%	7.8%
	34%	3.4%	3.9%	4.5%	5.1%	5.8%	6.5%	7.3%	8.2%
	37%	3.6%	4.2%	4.7%	5.4%	6.1%	6.9%	7.7%	8.6%
8%	34%	3.3%	3.7%	4.3%	4.8%	5.5%	6.2%	7.0%	7.9%
	37%	3.5%	3.9%	4.5%	5.1%	5.8%	6.5%	7.4%	8.3%

an economic point of view, this can be explained by a larger impact of first and second order effects when the unemployment rate is high. In contrast, the impact of the lending rate in the model is limited.

3.2.2. Alternative models

Many alternative models can be done selecting a different subset of (possibly lagged) macroeconomic variables related to this category, as long as they satisfy all hypotheses stated in section 2.4. We compare the fitted models using the likelihood ratio. The results are shown in Tabela 4.

Table 4. Consumer Credit in National Currency: alternative models. Maximum likelihood −9,560.92 and −10,297.47 respectively.

Alternative 1		Alternative 2	
	Coefficients		Coefficients
Constant	−2.2943	IR	−3.7541
GDP	−0.0038	RW	−0.0169
RER(−6)	0.0070	LRConP	1.2080
LRConP	0.8414	ρ	0.0364
ρ	0.0271		

We observe that, for these alternative models, the sign of the coefficients also fit economic intuition. However, the alternative models have two main disadvantages with respect to the model in section 3.2.1: the values for ρ are higher, and the obtained log-likelihoods are smaller.

3.3. Corporate Credit in American Dollars

For this category we will show three alternative models, one of them based on a classic approach, so we can compare and discuss the results and the advantages of each one of them.

All models are based on the variable selection criterion discussed in section 2.4. We note that we added a dummy variable *D2009* to capture (if needed) the effects of the international crisis in 2008–2009. This international crisis did not have a great impact on credit risk for consumers; however, during that period, the international crisis did have a high impact on the variability of several macroeconomic variables, such as country risk and gross domestic product.

3.3.1. First Model

The first model is fitted using Gross Domestic Product, (12-months lagged) Real Exchange Rate, Lending Rate for Corporations in American Dollars and dummy variable D2009. The results for the linear regression are shown in Tabela 5.

Table 5. Corporate credit in American Dollars: First Model. Linear regression.

	Coefficients	Typical Deviation	Statistic t	p-value
GDP	−0.0217	0.0007	−29.31	0.00
RER (−12)	−0.0074	0.0011	−6.49	0.00
LRCorD	21.3200	1.4626	14.58	0.00
D2009	−0.4885	0.0955	−5.11	0.00

Chi-square normality test for the residuals yields a p-value of 0.3866, so normality of the residuals hypothesis is not rejected.

As the coefficients of the linear regression are significant, the sign of different coefficients fit economic intuition, and residuals can be regarded as normal, we can use this subset of macroeconomic variables to fit the one-factor model. Obtained results are shown in Tabela 6.

Table 6. Corporate Credit in American Dollars: First Model. The log-likelihood is −3,184.00.

	Coefficients
GDP	−0.0221
RER (−12)	−0.0046
LRCorD	17.8457
D2009	−0.4607
ρ	0.0737

The value for ρ obtained in this model is larger than the one obtained for the model in section 3.2.1, as expected according to IRB model of Basel II.

The sign of the coefficient corresponding to real exchange rate is negative, which means that an increase of the real exchange rate would decrease the percentage of defaulted credits. This result might seem counterintuitive. However, we note that in the Corporate Credit category we can find companies selling non-tradable goods, and companies selling tradable goods; the latter ones would increase their capacity to pay from an increase of the real exchange rate. This result indicates that there is a greater proportion of companies selling tradable goods in the Corporate Credit in American Dollars category, meaning that currency mismatch is not very relevant.

In order to study the impact of the selected macroeconomic variables in the probability of default, we present a stress test. The results are shown in Tabela 7. We observe that, for this category, the variable with largest impact on the probability of default is the Lending Rate for Corporations in American dollars. The other two variables have similar moderate impacts.

Table 7. Corporate Credit in American Dollars: First Model. Stress Test.

RER	LRCorD	Gross Domestic Product (GDP)				
		−1%	0%	1%	2%	3%
−10%	2%	0.72%	0.65%	0.59%	0.53%	0.48%
	4%	2.20%	2.03%	1.87%	1.72%	1.58%
	6%	5.60%	5.24%	4.90%	4.58%	4.27%
	8%	11.90%	11.30%	10.71%	10.15%	9.61%
0%	2%	0.69%	0.63%	0.57%	0.52%	0.47%
	4%	2.14%	1.97%	1.82%	1.67%	1.53%
	6%	5.48%	5.13%	4.79%	4.47%	4.17%
	8%	11.70%	11.10%	10.53%	9.96%	9.43%
10%	2%	0.67%	0.62%	0.56%	0.51%	0.46%
	4%	2.08%	1.92%	1.77%	1.66%	1.50%
	6%	5.36%	5.01%	4.68%	4.37%	4.08%
	8%	11.50%	10.91%	10.34%	9.79%	9.25%

3.3.2. Second Model

The second model is fitted using Unemployment Rate, (6-months lagged) Nominal Exchange Rate, and dummy variable D2009.

This model has a good predictive power. However, the economic interpretation of the coefficients for the selected macroeconomic variables is not very clear. One possible interpretation is that companies selling non-tradable goods have their clients in the domestic market, meaning that an increase of the unemployment rate would drastically decrease the demand for goods, leading to an increase of credit risk. Moreover, companies selling tradable goods may have a large proportion of sells in the domestic market, and thus being affected in case of an increase of the unemployment rate.

This results could be improved if we are able to distinguish between companies selling tradable goods and non-tradable goods.

The results for the linear regression are shown in Table Tabela 8.

Chi-square normality test for the residuals yields a p-value of 0.4498, so normality of the residuals hypothesis is not rejected.

We are able to fit the one-factor model. The results are shown in Tabela 9. Again, for this case, the Unemployment Rate is the variable with largest impact on the probability of default.

Table 8. Corporate Credit in American Dollars: Second Model. Linear regression.

	Coefficients	Typical Deviation	Statistic t	p-value
Constant	−3.7114	0.0583	−63.61	0.00
UR	17.0033	0.5685	29.90	0.00
NER (−6)	0.6123	0.0772	7.93	0.00
D2009	−0.2251	0.0694	−3.24	0.00

3.3.3. Third Model

This model is fitted using the subset of macroeconomic variables which is traditionally considered for the estimation of the macroeconomic-level credit risk in Uruguay. We will consider (6-months lagged)

Table 9. Corporate Credit in American Dollars: Second Model. The log-likelihood is −4,002.69.

	Coefficients
Constant	−3.5621
UR	16.0535
NER (−6)	0.6430
D2009	−0.2694
ρ	0.0401

Table 10. Corporate Credit in American Dollars: Second Model. Stress Test.

RER	Unemployment Rate (UR)					
	7%	8%	9%	10%	11%	12%
-20%	1.21%	1.87%	2.81%	4.10%	5.81%	7.99%
-10%	1.42%	2.18%	3.23%	4.66%	6.53%	8.90%
0%	1.66%	2.52%	3.70%	5.28%	7.33%	9.88%
10%	1.93%	2.90%	4.22%	5.96%	8.18%	10.92%
20%	2.24%	3.33%	4.79%	6.70%	9.10%	12.02%

Nominal Exchange Rate, Gross Domestic Product, Country Risk and the dummy variable D2009. The results for the linear regression are shown in Tabela 11.

Chi-square normality test for the residuals yields a p-value of 0, so normality of the residuals hypothesis is rejected. This means that it is not adequate to fit the one-factor model using this subset of macroeconomic variables.

Table 11. Corporate Credit in American Dollars: Third Model. Linear Regression.

	Coefficients	Typical Deviation	Statistic t	p-value
Constant	0.4013	0.1752	2.29	0.02
NER (−6)	0.9818	0.0852	11.52	0.00
GDP	−0.0225	0.0013	−17.40	0.00
CR	5.2724	0.9609	5.49	0.00
D2009	−0.5642	0.0786	−7.18	0.00

3.3.4. Corporate Credit in American Dollars. Conclusions

Three models were fit for the Corporate Credit in American Dollars category. The first model has a very clear economic interpretation and a good transmission of the macroeconomic variables, but it has a poor prediction power. The second model has a high prediction power, but economic interpretation is not so clear. The third model has average prediction power and economic interpretation, but the non-normality of the residuals does not allow us to fit a one-factor model for this subset of macroeconomic variables.

3.4. Corporate Credit in National Currency – Consumer Credit in American Dollars

This categories are not as developed as the previous ones. Although we will present all the results as we did for the previous categories, we will not analyze them in depth. For both categories, we present

the results for the selected model and two alternative models, as it was done in section 3.2.

3.4.1. Corporate Credit in National Currency

The selected macroeconomic variables for the main model are Unemployment Rate and Lending Rate for Corporations in Uruguayan Pesos. Some evidence of errors in the data were found for some months, so we chose to use a dummy variable $DUMMY$ to take those errors into account. The results for the main model and two alternative models are shown in Tabela 12.

Table 12. Corporate Credit in National Currency. Maximum likelihood −3,543.83, −3,563.75 and −3,602.89 respectively.

Model		Alternative 1		Alternative 2	
	Coefficients		Coefficients		Coefficients
Constant	−2.9412	Constant	1.9266	Constant	−1.0015
UR	7.4698	RER	−0.0092	LRCorP	0.7974
LRCorP	0.5930	GDP	−0.0241	GPD	−0.0103
DUMMY	0.7026	DUMMY	−0.2320	DUMMY	−0.2069
ρ	0.0000	ρ	0.0427	ρ	0.0364

We note, from Tabela 13, that Unemployment Rate is selected again for a Corporate Credit category, despite of being a macroeconomic variable related to the domestic demand of goods. The lending rate is positively correlated with credit risk, and the value of ρ shows that the non-observable macroeconomic factor is not relevant for this category, possibly reflecting a lower credit risk arising from currency mismatch for this category.

Table 13. Corporate Credit in National Currency: Main Model. Stress Test.

LRCorP	Unemployment rate (UR)					
	7%	8%	9%	10%	11%	12%
10%	2.47%	2.94%	3.47%	4.08%	4.77%	5.56%
15%	2.65%	3.14%	3.71%	4.35%	5.08%	5.89%
20%	2.83%	3.35%	3.95%	4.63%	5.39%	6.24%
25%	3.03%	3.58%	4.21%	4.92%	5.72%	6.60%

3.4.2. Consumer Credit in American Dollars

For this category, the selected macroeconomic variables for the main model are Unemployment Rate, Real Wage Index, and (6-month lagged) Nominal Exchange Rate. The results for the main model and two alternative models are shown in Tabela 14.

As in the Consumer Credit in National Currency category, from Tabela 15, we conclude that Unemployment Rate is again a relevant macroeconomic variable. We also note that an increase of the Nominal Exchange Rate will lead to an increase of credit risk, reflecting that the income of most families is in national currency.

4. CONCLUSIONS

We estimated credit default risk as a function of different macroeconomic variables, using a one-factor model based on Merton's Model. In this model, the event of default is defined when a debtor's assets fall

Table 14. Consumer Credit in American Dollars. Maximum likelihood −10,337.35, −10,360.79 and −10,400.21 respectively.

Model		Alternative 1		Alternative 2	
	Coefficients		Coefficients		Coefficients
Constant	−0.4805	Constant	1.5938	Constant	−1.3693
UR	9.3977	NER (−6)	0.6631	UR	10.7032
RW	−0.0164	GDP	−0.0241	GPD	−0.0081
NER	0.5144	LRConD	−0.5645	LRConD	0.2502
ρ	0.0175	ρ	0.0244	ρ	0.0062

Table 15. Consumer Credit in American Dollars: Main Model. Stress Test.

NER	RW	Unemployment Rate (UR)					
		7%	8%	9%	10%	11%	12%
−10%	−2%	6.65%	7.91%	9.32%	10.90%	12.63%	12.63%
	−1%	6.40%	7.62%	9.00%	10.54%	12.24%	14.08%
	0%	6.14%	7.34%	8.69%	10.19%	11.85%	13.66%
	1%	5.91%	7.06%	8.38%	9.85%	11.48%	13.25%
	2%	5.67%	6.80%	8.08%	9.51%	11.11%	12.85%
0%	−2%	7.32%	8.66%	10.17%	11.83%	13.63%	15.58%
	−1%	7.05%	8.37%	9.83%	11.45%	13.22%	15.14%
	0%	6.78%	8.06%	9.49%	11.08%	12.81%	14.71%
	1%	6.52%	7.77%	9.16%	10.72%	12.43%	14.28%
	2%	6.27%	7.46%	8.84%	10.37%	12.04%	13.87%
10%	−2%	8.04%	9.47%	11.06%	12.80%	14.68%	16.69%
	−1%	7.75%	9.14%	10.70%	12.40%	14.26%	16.24%
	0%	7.46%	8.82%	10.34%	12.02%	13.84%	15.80%
	1%	7.18%	8.51%	9.99%	11.64%	13.43%	13.35%
	2%	6.91%	8.21%	9.66%	11.26%	13.02%	14.92%

under a threshold dependent on some macroeconomic variables, meaning that the value of the threshold is updated based on the macroeconomic environment of the economy.

We focused mostly on the two most important categories for Uruguayan economy, which are Consumer Credit in National Currency and Corporate Credit in American Dollars. Additionally, we present the results for the two other categories, which are Consumer Credit in American Dollars (2% of total bank credits) and Corporate Credit in National Currency (12% of total bank credits).

For the Consumer Credit in National Currency category, we obtain a very appropriate model both form the point of view of predictive power and from the point of view of economic intuition. The selected macroeconomic variables are the unemployment rate, the real interest rate and the inflation rate. A further possible improvement to model this category is to discriminate the residential mortgage loans from the total consumer credit.

For the Corporate Credit in American Dollars category we discuss three different models, each one with its advantages in terms of prediction power, economic intuition and capture of transmission mechanisms of macroeconomic environment to the portfolio credit quality. To our understanding, the model that captures best the transmission mechanisms is the one that explains the default rate based

on an index of economic activity, the interest rate charged by the banks, and the real exchange rate. Nevertheless, it is thought that this model must be improved by assessing the credit risk by economic sectors.

We observe that all the models confirm a strong relationship between the macroeconomic environment and the quality of the loan portfolios of the banking system. Therefore, a possible application of these models is the stress tests referred in Basel II, which could be used both to assess the stability of the financial system as a whole, and to assess the capital level of each institution as its capacity to face adverse shocks. We present the stress tests for all categories, which show credit default probabilities for different economic scenarios.

REFERENCES

Bank of Japan. (2007, September). *Financial system report* (BOJ Report). Bank of Japan. Retrieved from https://www.boj.or.jp/en/research/brp/fsr/data/fsr07b.pdf (Box 8: The Framework for Macro Stress-Testing of Credit Risk Incorporating Transition in Borrower Classifications, pp.44–45)

Barone-Adesi, G., Gagliardini, P., & Urga, G. (2000, October). *Homogeneity hypothesis in the context of asset pricing models: The quadratic market model* [Cass Business School Research Paper]. Retrieved from https://doc.rero.ch/record/5394/files/1_fin0102.pdf

Bluhm, C., & Overbeck, L. (2003). Systematic risk in homogeneous credit portfolio. In G. Bol, G. Nakhaeizadeh, S. T. Rachev, T. Ridder, & K.-H. Vollmer (Eds.), *Credit risk: Measurement, evaluation and management* (pp. 35–48). Heidelberg: Physica-Verlag HD. doi: 10.1007/978-3-642-59365-9_2

Bunn, P., Cunningham, A., & Drehmann, M. (2005, June). Stress testing as a tool for assessing systemic risks. *Financial Stability Review*, *18*, 116–126. Retrieved from http://www.bankofengland.co.uk/archive/Documents/historicpubs/fsr/2005/fsrfull0506.pdf

Caicedo Cerezo, E., Bielsa, M. M. C., & Casanovas Ramón, M. (2011). medición del riesgo de crédito mediante modelos estructurales: Una aplicación al mercado colombiano. *Cuadernos de Administración* (Bogotá), *24*(42), 73–100. Retrieved from http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0120-35922011000100004

Céspedes, J., & Martín, D. (2002, January). *The two factor model for credit risk: A comparison with the BIS II one factor model.*

Cipollini, A., & Missaglia, G. (2005, Febraury). *Business cycle effects on portfolio credit risk: Scenario generation through dynamic factor analysis.* SSRN. doi: 10.2139/ssrn.665724

Coletti, D., Lalonde, R., Misina, M., Muir, D., St-Amant, P., & Tessier, D. (2008, June). Bank of Canada participation in the 2007 FSAP Macro Stress-Testing Exercise. *Financial System Review* (Bank of Canada). Retrieved from http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2012/01/fsr-0608-coletti.pdf

Duffie, D., & Singleton, K. J. (1997). An econometric model of the term structure of interest-rate swap yield. *The Review of Financial Studies*, *52*(4), 1287–1321. doi: 10.1111/j.1540-6261.1997.tb01111.x

Geske, R. (1977). The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *12*(4), 541–552.

Hamerle, A., Leibig, T., & Scheule, H. (2004). *Forecasting credit portfolio risk* (Discussion Paper No. 01/2004). Frankfurt am Main: Deutsche Bundesbank. Retrieved from https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Downloads/Publications/Discussion_Paper_2/2004/2004_02_01_dkp_01.pdf

Jakubík, P. (2005). Macroeconomic credit risk model. In Czech National Bank (Ed.), *Financial stability report* (pp. 84–92). Czech National Bank. Retrieved from https://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/en/financial_stability/fs_reports/fsr_2005/FSR_2005_art2.pdf

Jakubík, P. (2007, March). *Credit risk in the Czech economy* (Working Paper No. 11/2007). Prague: FSV–IES. Retrieved from http://ies.fsv.cuni.cz/sci/publication/show/id/2031/lang/en

Jarrow, R., & Turnbull, S. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, *50*(1), 53–85. doi: 10.1111/j.1540-6261.1995.tb05167.x

Jiménez, G., & Mencía, J. (2007). *Modelling the distribution of credit losses with observables and latent factors* (Documentos de Trabajo No. 0709). Madrid: Banco de España. Retrieved from http://www.bde.es/informes/be/docs/dt0709e.pdf

J.P. Morgan & Co. (1997). *CreditMetrics*™ (Technical Document). New York: J.P. Morgan & Co.

Lucas, A., & Klaassen, P. (2003). *Discrete versus continuous state switching models for portfolio credit risk* (Discussion Paper No. 2003-075/2). Amsterdam: Tinbergen Institute. Retrieved from http://www.tinbergen.nl/discussionpaper/?paper=431

Luo, X., & Shevchenko, P. V. (2013). *Markov chain monte carlo estimation of default and recovery: Dependent via the latent systematic factor.* arXiv.org. Retrieved from https://arxiv.org/abs/1011.2827

Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, *22*, 449–470.

Molins, J., & Vives, E. (2016). Model risk on credit risk. *Risk and Decision Analysis*, *6*(1), 65–78. doi: 10.3233/RDA-150115

Rosch, D. (2003). Correlations and business cycles of credit risk: Evidence from bankruptucies in Germany. *Financial Market and Portfolio Management*, *17*(3), 309–331.

Rosch, D. (2005). An empirical comparison of default risk forecast from alternative credit rating philosophies. *International Journal of Forecasting*, *21*, 37–51.

Vasicek, O. (1987, February). *Probability of loss on loan portfolio* (Tech. Rep.). San Francisco, CA: KMV Corporation.

Virolainen, K. (2004). *Macro stress testing with a macroeconomic credit risk model for Finland* (Discussion Paper No. 18·2004). Helsinki: Suomen Pankki (Bank of Finland). Retrieved from http://www.suomenpankki.fi/en/julkaisut/tutkimukset/keskustelualoitteet/Pages/dp2004_18.aspx

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160024
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 457–480

Efeitos das Intervenções Cambiais Sobre a Taxa de Câmbio Futura no Brasil*

Marcio Magalhães Janot†
Leonardo Peixoto Macedo‡

Sumário: **1. Introdução; 2. Base de dados; 3. Efeitos das intervenções cambiais sobre a taxa de câmbio futura; 4. Conclusão.**

Palavras-chave: **Intervenções Cambiais, Taxa de Câmbio Futura, Volatilidade.**

Códigos JEL: **F31, E58.**

Este artigo estima os efeitos das intervenções cambiais do Banco Central do Brasil sobre o retorno e volatilidade da taxa de câmbio futura BRL/USD usando dados intradiários de outubro de 2011 a março de 2015. Os resultados mostram que as intervenções não antecipadas pelo mercado impactam de modo persistente o nível da taxa de câmbio e os efeitos variam com o tamanho das intervenções. Volumes negociados mais elevados impactam a taxa de câmbio mais fortemente que intervenções menores. Por fim, não encontramos evidências de que as intervenções cambiais reduzem de maneira significativa a volatilidade cambial no curto prazo.

This paper estimates the effects of Brazilian Central Bank (BCB) interventions on the return and volatility of the BRL/USD future exchange rate using intraday data from October 2011 to March 2015. The results show that interventions not anticipated by the market affect the level of exchange rate persistently and the effects vary with the size of the intervention. Higher volumes affect the exchange rate more strongly than minor interventions. Finally, we didn´t find evidence that foreign exchange interventions reduce significantly the exchange rate volatility in the short run.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o Banco Central do Brasil (BCB) tem feito intervenções frequentes no mercado de câmbio, realizando compra e venda de dólares à vista e a termo, e de derivativos vinculados à moeda americana (swaps cambiais). A atuação dos bancos centrais nos mercados de câmbio é uma prática

*Os autores agradecem aos comentários e sugestões do editor e do parecerista anônimo que ajudaram a melhorar a presente versão do trabalho. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente dos autores e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

†Banco Central do Brasil e Ibmec/RJ. Endereço de correspondência: Av. Presidente Vargas, 730/14º andar, Centro, Rio de Janeiro/RJ, CEP 20071-900. Email: marcio.janot@bcb.gov.br

‡Banco BBM. Email: leonardomacedo@bancobbm.com.b

comum ao redor do mundo e, por isso, os efeitos de suas intervenções têm sido largamente discutidos na literatura, principalmente em estudos voltados para países desenvolvidos.[1]

Os artigos voltados para países emergentes, e para o Brasil em particular, são bem mais escassos, principalmente quando utilizada frequência intradiária da variação da taxa de câmbio. Como os países desenvolvidos não são mais os maiores detentores de reservas internacionais e praticamente não têm realizado intervenções cambiais, o estudo de seus efeitos passa a ser uma questão que se refere principalmente aos mercados emergentes, onde as intervenções ocorrem regularmente, como aponta Menkhoff (2012). Desta forma, são necessários mais estudos sobre intervenções cambiais em países emergentes que busquem analisar questões como: as intervenções cambiais dos bancos centrais afetam os retornos e a volatilidade da taxa de câmbio? Em caso positivo, esses efeitos são persistentes ou temporários? O tamanho das intervenções cambiais é importante ou a sinalização dada pelas intervenções já é suficiente? As intervenções não esperadas pelo mercado são mais eficazes para afetar o comportamento do nível e da volatilidade da taxa de câmbio? O mercado consegue se antecipar às intervenções cambiais não anunciadas?

Neste trabalho, tentaremos responder a essas perguntas avaliando os efeitos imediatos e diários das intervenções do BCB sobre o retorno e a volatilidade da taxa de câmbio BRL/USD. Adicionalmente, testaremos se intervenções com volumes mais elevados impactam a taxa de câmbio mais fortemente que intervenções menores. E por fim, analisaremos se intervenções não esperadas pelo mercado afetam mais o mercado de câmbio que intervenções anunciadas.

Para isso, utilizaremos uma metodologia de estudo de eventos com uma base de dados intradiária construída com intervalos regulares de 5 minutos para a taxa de câmbio futura BRL/USD negociado na BM&FBovespa e para as intervenções cambiais. Optamos pelo uso da cotação do dólar futuro ao invés da taxa de câmbio à vista pela maior liquidez e disponibilidade dos dados no site da BM&FBovespa. Analisaremos as intervenções realizadas pelo BCB no mercado à vista e através de leilões de swaps cambiais no período amostral de 3 de outubro de 2011 e 31 de março de 2015.

Para tentar isolar o máximo possível os efeitos causados pelas intervenções cambiais sobre a taxa de câmbio futura, incorporamos na análise os efeitos intradiários das surpresas oriundas da divulgação de indicadores macroeconômicos brasileiros e dos Estados Unidos (EUA).

Alguns dos principais resultados encontrados foram:

(i) As intervenções do BCB, quando feitas de maneira inesperada pelo mercado, impactam o nível da taxa de câmbio mais fortemente do que as intervenções antecipadas, e de modo persistente;
(ii) Não há antecipação do mercado em relação às intervenções não anunciadas pelo BCB;
(iii) As intervenções parecem ser uma resposta do BCB a um determinado movimento da taxa de câmbio (compras de dólar ocorrem após um período de apreciação do real e vendas de dólar ocorrem após um período de depreciação do real);
(iv) O tamanho das intervenções importa, onde volumes negociados mais elevados impactam a taxa de câmbio mais fortemente que intervenções menores, porém de forma não linear; e
(v) Não há evidências concretas de que a atuação do BC contribui de maneira clara para a redução da volatilidade cambial no curto prazo.

Tais resultados estão em linha com os encontrados na literatura. Assim como o BCB, o Banco Nacional da Suíça (SNB, sigla em inglês) também disponibiliza para o público uma longa base de dados com algumas informações das intervenções, como data, horário, tamanho, entre outras. Por isso, existem diversos estudos sobre os impactos das intervenções do SNB sobre a taxa de câmbio CHF/USD. Payne & Vitale (2003) testaram os efeitos imediatamente antes e depois das intervenções do SNB e ao compará-los com os efeitos dos negócios dos demais participantes do mercado chegaram à conclusão que a atuação do SNB tem um efeito persistente sobre a taxa de câmbio e quanto maior o tamanho da intervenção, maior o

[1] Para uma análise abrangente da literatura sobre os efeitos das intervenções cambiais, ver Sarno & Taylor (2001) e Neely (2005).

impacto. Já Pasquariello (2007) analisou adicionalmente os efeitos das intervenções do SNB sobre outras medidas da taxa de câmbio CHF/USD e mostrou que houve um aumento da volatilidade cambial após as intervenções.

Apesar de muitos outros bancos centrais de países desenvolvidos não divulgarem informações precisas sobre as intervenções, existem estudos sobre os efeitos das intervenções cambiais em alguns desses países. Por exemplo, Dominguez (2003, 2006) verificou o impacto das intervenções dos bancos centrais dos países do G3 (EUA, Alemanha e Japão) sobre as taxas de câmbio DEM/USD e JPY/USD, utilizando reportagens da Reuters como uma aproximação para o horário das intervenções. Os resultados apontaram que as intervenções geram um aumento da volatilidade cambial no curto prazo e que há poucas evidências de que afetam a volatilidade no longo prazo.

A literatura empírica que estuda o caso brasileiro ainda é bastante escassa e não conclusiva. Usando dados diários para testar os efeitos das intervenções cambiais do BCB sobre a volatilidade cambial, Araujo (2004) e Oliveira & Plaga (2011) mostram que as intervenções podem adicionar ou reduzir a volatilidade da taxa de câmbio dependendo da metodologia adotada e do período analisado. Já Novaes & Oliveira (2007) e Meurer, Teixeira & Tomazzia (2010) mostram que as intervenções cambiais são capazes de afetar a dinâmica da taxa de câmbio, porém essas possuem maior efetividade em períodos de baixa volatilidade cambial. Vervloet (2010), por sua vez, mostra que os efeitos das intervenções cambiais esterilizadas sobre a taxa de câmbio são de magnitude muito reduzida e de curta duração. Já Borges & Rossi (2010) analisaram se as intervenções do BCB no mercado cambial introduzem algum tipo de previsibilidade no comportamento da taxa de câmbio e concluíram que há indícios significativos de que o BCB tende a intervir no mercado contra uma tendência em curso da taxa de câmbio, gerando assim lucros para os agentes privados.

Mais recentemente, alguns estudos fizeram uso de dados intradiários para testar os efeitos das intervenções cambiais. Nakashima (2012) mostrou a existência de retornos anormais no contrato de dólar futuro nos momentos próximos à realização dos leilões de câmbio pelo BCB. Já Kohlscheen & Andrade (2014) encontraram que os leilões de swaps cambiais realizados pelo BCB entre julho de 2011 e dezembro de 2012 afetaram o nível da taxa de câmbio à vista, embora não tenham alterado diretamente a oferta de moeda estrangeira no mercado. Nogueira (2014), por sua vez, encontrou que as intervenções do BCB impactaram a taxa de câmbio futura apenas quando realizadas de maneira inesperada.

Em outro estudo recente usando dados semanais, Chamon, Garcia & Souza (2015) estimaram os efeitos do anúncio do programa de swaps cambiais de 22 de agosto de 2013 e de sua extensão em 19 de dezembro de 2013. A conclusão que chegaram foi que o anúncio inicial gerou uma apreciação cambial persistente nas primeiras semanas, contudo as vendas diárias que ocorreram no período restante não geraram impactos adicionais sobre a taxa de câmbio. Além disso, documentaram que ambos os programas não tiveram impacto significativo sobre a volatilidade cambial.

Como cada instrumento de intervenção utilizado pelo BCB pode ter uma finalidade específica e distinta dos demais, seus efeitos sobre o mercado de câmbio podem ser diferentes. Desta forma, optamos por fazer uma análise segmentada das intervenções cambiais realizadas pelo BCB nos mercados à vista e de swaps cambiais, com os swaps sendo analisados por tipos: leilões surpresas, programa de venda diária de contratos de swaps cambiais por meio de leilões de oferta pública e rolagens de posições existentes.

Pelo nosso conhecimento, este é o primeiro artigo a testar os efeitos intradiários e diários de cada tipo de intervenção cambial sobre o retorno e volatilidade da taxa de câmbio futura, analisando se o tamanho ou o fato da intervenção ter surpreendido o mercado importam.

Na seção 2, será explicado como a base de dados foi construída, os diferentes instrumentos de intervenções utilizados pelo Banco Central e quais surpresas de indicadores macroeconômicos serão consideradas no trabalho. A seção 3 está dividida em três partes, onde serão verificados inicialmente os impactos intradiários das intervenções, em seguida se o volume das intervenções importa e, por fim, os impactos diários. Em todas as etapas desta seção serão apresentadas a metodologia utilizada e os

resultados encontrados. Na seção 4 serão apresentadas as conclusões do trabalho.

2. BASE DE DADOS

2.1. Dólar futuro BM&F

Para avaliar os efeitos intradiários das intervenções do BCB é necessária a construção de uma base de dados que contenha as cotações da taxa de câmbio BRL/USD em alta frequência. Optamos pela utilização da cotação do dólar futuro negociado na BM&F por ser um mercado que apresenta maior liquidez que as negociações com dólar à vista e também que a cotação da taxa de câmbio se forma primeiro no mercado futuro, sendo então transmitida por arbitragem para o mercado à vista (Ventura & Garcia, 2012).

A BM&F disponibiliza em seu site arquivos com todas as ofertas de compra (*bid*) e de venda (*ask*) com intervalos inferiores a um segundo desde outubro de 2011.[2] Desta forma, o período amostral compreende variações do dólar futuro entre 3 de outubro de 2011 e 31 de março de 2015. O contrato de dólar futuro utilizado é aquele com vencimento no primeiro dia útil do mês seguinte ao mês corrente (o primeiro vencimento negociado), por ser o único com elevada liquidez.

Para lidar com o fato do intervalo entre cada cotação fornecida pela BM&F não ser uniforme, geramos novas séries para os *bid's* e *asks's* com intervalos de 5 minutos, sendo que a cotação do dólar futuro nessas novas séries é a média das cotações do minuto anterior ao horário de referência. Por exemplo, o preço referente ao horário de 09:05 é a média de todas as cotações entre 09:04 e 09:05 da série original. Por fim, construímos as séries dos preços e retornos intradiários do dólar futuro que serão utilizadas no trabalho:

$$p_t = \ln\left(\frac{P_{t,\text{bid}} + P_{t,\text{ask}}}{2}\right), \tag{1}$$

$$r_t = (p_t - p_{t-1}) \times 100. \tag{2}$$

onde p_t é o preço médio do dólar futuro para cada 5 minutos; $P_{t,\text{bid}}$ é o preço médio dos bid's do dólar futuro para cada 5 minutos; $P_{t,\text{ask}}$ é o preço médio dos ask's do dólar futuro para cada 5 minutos; r_t é o retorno intradiário da taxa de câmbio; e R_d é o retorno diário da taxa de câmbio calculado pelo somatório de r_t no dia d.

A Tabela 1 apresenta o resumo das estatísticas descritivas para a série de retorno (r_t) e retorno ao quadrado (r_t^2) em intervalos regulares de 5 minutos e diário (R_d e R_d^2). As propriedades estatísticas desses dados já são bem conhecidas na literatura. A distribuição dos retornos da taxa de câmbio é quase que simetricamente centrada ao redor de zero e possui caudas gordas.

2.2. Intervenções cambiais

Ao longo do período analisado, o BCB realizou intervenções diretas no mercado de câmbio através dos seguintes instrumentos:

i) Leilão de dólar no mercado à vista. Operação de compra ou venda de dólares em troca de reais. No período contemplado pela base de dados todas as intervenções deste tipo ocorreram entre fevereiro e abril de 2012, em um momento em que o BCB tentava conter um movimento de apreciação do real, inclusive com ajuda do Governo que adotou algumas medidas regulatórias como, por exemplo, a imposição de impostos sobre posição vendida de derivativos e sobre a entrada de capital estrangeiro no país para alguns tipos de aplicações.

[2] `ftp://ftp.bmf.com.br/MarketData/bmf/`

Tabela 1. Resumo das estatísticas descritivas da taxa de câmbio futura.

	Intradiário		Diário	
	r_t	r_t^2	R_d	R_d^2
N	92.231	92.231	855	855
Média	0,00	0,01	0,06	1,37
Mediana	0,00	0,00	0,07	0,88
Desvio Padrão	0,11	0,09	0,92	1,46
Máximo	2,43	9,39	3,79	12,35
Mínimo	−3,06	0,00	−3,70	0,06
Assimetria	−0,01	33,34	0,01	2,84
Curtose	53,65	2.027,82	4,58	15,29

ii) Leilão de dólar a termo. Operação equivalente ao leilão de dólar à vista, porém com liquidação em uma data futura definida pelo BCB. No período amostral foram apenas dois leilões de compra em fevereiro de 2012.

iii) Leilão de swap cambial (SCC ou SCS – ativos negociados na BM&F) Operação que consiste na troca da variação cambial do período de vigência do swap somado ao cupom cambial (taxa de juros em dólar no Brasil) acordado no início da operação pela taxa de juros doméstica.[3] Nesse tipo de operação não há troca de principal, apenas a liquidação em reais do resultado dos swaps. Esse tipo de intervenção foi o mais utilizado pelo BCB no período recente cujo objetivo principal era o de fornecer hedge cambial. Os leilões de swap cambial ocorreram em diversos momentos ao longo dos últimos anos. Tem como diferencial não impactarem diretamente as reservas cambiais já que não há troca financeira das moedas, apenas a liquidação, em reais, do resultado da operação. Até 22 de agosto de 2013, os anúncios de intervenção do BCB através deste instrumento costumavam surpreender o mercado. A partir deste dia, foi anunciado um programa de venda diária de dólares através de swaps cambiais que durou até 31 de março de 2015, após ter sido prorrogado algumas vezes. Por isso, as intervenções que ocorreram de forma inesperada, serão avaliadas de maneira segmentada às intervenções do programa, visando verificar o impacto do efeito surpresa. Além disso, também serão avaliadas separadamente as intervenções que são rolagens de posições já existentes. Ao realizar a rolagem, apesar de não haver uma compra/venda efetiva de dólares no momento da intervenção, o BCB neutraliza o impacto do vencimento dos swaps vigentes. Durante o período analisado, as operações de rolagem raramente ocorriam até o anúncio do programa, a partir do qual passaram a ocorrer quase que diariamente.

iv) Leilão de linha Consiste em um leilão de dólar no mercado à vista em conjunto com um leilão de dólar a termo na ponta inversa. Dessa forma, esse tipo de leilão não afeta a exposição cambial das instituições envolvidas. É utilizado pelo BCB principalmente em momentos de falta de liquidez no mercado de dólar à vista. Desde 2012, o BCB tem sempre realizado esse tipo de intervenção no final do ano, além de em alguns outros momentos, quando necessário.

A Tabela 2 mostra as estatísticas descritivas com informações sobre o número e volume das intervenções realizadas pelo BCB entre os dias 3 de outubro de 2011 e 31 de março de 2015. Valores positivos

[3] Até maio de 2013 o BCB utilizava nos leilões de swap cambial os contratos de SCC (Contrato de Swap Cambial com Ajuste Periódico) em que a taxa de juros doméstica utilizada para precificação do contrato é o CDI. Em maio de 2013 a BM&F criou os contratos de SCS (Contrato de Swap Cambial com Ajuste Periódico Baseado em Operações Compromissadas de Um Dia) em que a taxa de juros utilizada é a SELIC.

Tabela 2. Intervenções cambiais do Banco Central do Brasil.

	Tipo de Intervenção					
	Leilão no Mercado à Vista	Leilão de Swap Cambial Surpresa	Leilão de Swap Cambial Programa	Leilão de Swap Cambial Rolagem	Leilão de Linha	Leilão no Mercado a Termo
Compra de Dólar						
N	36	11	0	3	0	2
Média	310	1.081	0	1.708	0	3.503
Mediana	243	1.290	0	1.650	0	3.503
Desv. Pad.	245	656	0	326	0	705
Máx.	1.062	2.175	0	2.060	0	4.001
Mín.	11	175	0	1.415	0	3.004
Venda de Dólar						
N	0	45	373	296	48	0
Média	0	−1.447	−241	−587	−830	0
Mediana	0	−1.375	−200	−500	−801	0
Desv. Pad.	0	704	131	372	743	0
Máx.	0	−400	−100	−250	0	0
Mín.	0	−3.000	−500	−3.275	−2.992	0
Total						
N	36	56	373	299	48	2
Média	310	−950	−241	−564	−830	3.503
Mediana	243	−1.050	−200	−500	−801	3.503
Desv. Pad.	245	1.225	131	436	743	705
Máx.	1.062	2.175	−100	2.060	0	4.001
Mín.	11	−3.000	−500	−3.275	−2.992	3.004

Notas: A tabela mostra as estatísticas descritivas para as intervenções do Banco Central do Brasil entre os dias 3 de Outubro de 2011 e 31 de Março de 2015. N é a quantidade de intervenções. Os valores estão em milhões de dólares. Valores positvos (negativos) representam compra (venda) de dólares. No caso do leilão de linha, compra (venda) de dólar é a compra (venda) de dólar a vista e venda (compra) de dólar a termo.

(negativos) representam compra (venda) de dólares. Nos leilões de linha uma compra (venda) de dólar significa uma compra (venda) de dólar à vista e venda (compra) de dólar a termo.

Pode-se notar que, ao longo do período amostral, sempre que o BCB interveio no mercado à vista foi na ponta de compra de dólares. Para os leilões de linha, sempre interveio fornecendo dólares à vista para o mercado. Quando interveio através de leilões de swap cambial, na maioria das vezes, foi na ponta de venda de dólares. Desde que começou o programa de venda de dólares através de swaps cambiais até o fim do período analisado, o BCB não interveio nenhuma vez comprando dólares.

Entre outubro de 2011 e agosto de 2013, mês do início do programa, o número de intervenções de venda de dólares foi bem próximo ao de compra, porém com volume superior para as vendas. Além disso, nota-se que o volume das intervenções no mercado à vista foi bem inferior ao volume das intervenções surpresas de swap cambial, com os leilões de dólar à vista apresentando um maior desvio padrão em relação à média e mediana quando o tamanho das intervenções é considerado em módulo.

Neste trabalho vamos focar apenas as intervenções nos mercados à vista e de swaps cambiais. Os leilões de dólar a termo foram usados apenas duas vezes pelo BCB no período amostral e os leilões de linha não são intervenções direcionais e, portanto, assume-se que tenha pouco impacto sobre a taxa de câmbio. Coletamos a data e horário dos comunicados anunciando a realização dos leilões e o volume de

cada um deles. Todas as informações são públicas e foram retiradas dos sistemas SISBCB, BC Correio e Selic RTM, utilizados pelo BCB para comunicação com os participantes do mercado.

2.3. Indicadores macroeconômicos

Indicadores macroeconômicos que refletem a situação da economia são periodicamente divulgados e, consequentemente, podem vir a impactar a taxa de câmbio. Com o intuito de isolar o máximo possível os efeitos das intervenções sobre a dinâmica do dólar futuro, adicionamos as surpresas na divulgação de alguns indicadores macroeconômicos do Brasil e dos EUA como variáveis de controle nas regressões.

As surpresas macroeconômicas são calculadas pela diferença entre o valor realizado da variável e a mediana das expectativas de mercado. Para que os coeficientes estimados possam ser comparados entre os indicadores, as surpresas foram padronizadas pelo desvio-padrão da amostra para cada série macroeconômica. Nos momentos em que não ocorre divulgação de dados, é atribuído o valor 0 para a variável macroeconômica $mac^{u}_{i,t}$.

Os indicadores controlados na análise empírica são: inflação (IPCA e CPI Core), Produção (PIB, Produção Industrial Mensal brasileira e GDP), meta da taxa Selic, taxa de desemprego (Pesquisa Mensal de Emprego no Brasil e U-3 nos EUA) e *Nonfarm Payrolls*, que é um dado de criação de empregos dos EUA de grande relevância para os participantes do mercado financeiro. Todos os indicadores são divulgados mensalmente, a exceção do PIB dos dois países, que são divulgados trimestralmente, e da meta da taxa Selic, que é divulgada pelo BC após as reuniões do COPOM em intervalo entre 1 e 2 meses. Como o Banco Central americano (FED) não alterou a taxa de juros durante o período analisado e em nenhum momento houve divergência na decisão do FED em relação às expectativas do mercado, a taxa de juros americana não será incorporada no trabalho, por não haver surpresa nesta variável.

Além das variáveis macroeconômicas citadas, também consideraremos no estudo o impacto da comunicação do FED e do BCB, através da divulgação dos *statements* e das minutas das reuniões do FED, assim como dos relatórios de inflação e atas divulgadas pelo COPOM.

Todas as informações (data e horário da divulgação, valor efetivo e mediana das expectativas dos participantes do mercado) referentes aos indicadores macroeconômicos e aos comunicados do FED e do BCB foram obtidas na Bloomberg.

3. EFEITOS DAS INTERVENÇÕES CAMBIAIS SOBRE A TAXA DE CÂMBIO FUTURA

Grande parte da discussão na literatura sobre as intervenções cambiais dos bancos centrais é se seus efeitos são permanentes ou transitórios e se os participantes do mercado se antecipam a atuação dos bancos centrais. Para tentar responder a essas perguntas, vamos analisar como a taxa de câmbio se comporta imediatamente antes e depois das intervenções para verificar se, de fato, o mercado se antecipa à atuação do BCB e se existe persistência dos movimentos após as mesmas. Para isso, será utilizada uma abordagem padrão de estudo de eventos, semelhante à adotada por Payne & Vitale (2003) e Pasquariello (2007).

Apesar da metodologia de estudo de eventos ter a limitação da simultaneidade, ou seja, a possibilidade das intervenções e das taxas de câmbio serem definidas ao mesmo tempo, esse problema pode ser atenuado sob duas condições, de acordo com Neely (2005): se o momento exato das intervenções for conhecido e se a frequência de decisão dos bancos centrais for menor que a frequência dos dados usados. Em outras palavras, usando um intervalo de 5 minutos, o banco central deve demorar pelo menos 5 minutos para reagir ao desenvolvimento do mercado e tomar a decisão de intervir. Como as autoridades monetárias tendem a basear suas decisões em objetivos de médio e longo prazo e não nos movimentos intradiários, a simultaneidade não parece ser um problema relevante em nosso estudo.

Como o retorno e a volatilidade do câmbio são calculados a partir da taxa do contrato futuro com vencimento no primeiro dia útil do mês seguinte, é plausível supor que o risco embutido nessa cotação seja maior no início do mês em comparação ao final. Além disso, o valor da taxa futura de câmbio é afetado por outros elementos além da taxa de câmbio à vista, como variações da taxa de juros futura e do cupom cambial, e quanto maior for o prazo até o vencimento, maior será o impacto dessas alterações sobre os retornos. É possível que a utilização de dados com alta frequência possa reduzir a influência desse efeito sobre os retornos.

A análise empírica será feita em três etapas. Primeiramente, será avaliado o impacto intradiário da sinalização de intervir, sem considerar os volumes das intervenções. Em um segundo momento, será feita uma análise similar à primeira, porém considerando os volumes. Por último, serão analisados os efeitos diários das intervenções.

3.1. Efeitos intradiários das intervenções cambiais na taxa de câmbio futura

Nesta primeira etapa do estudo serão avaliados os efeitos das intervenções cambiais sobre o retorno do dólar futuro (r_t) e sobre o quadrado do retorno (r_t^2), com o objetivo de verificar o impacto intradiário da atuação do BCB sobre o nível e a volatilidade da taxa de câmbio, respectivamente. De modo a tentar isolar esses efeitos, foram incluídas no modelo variáveis para capturar o efeito de surpresas na divulgação de indicadores econômicos. Além disso, acrescentamos à equação a ser estimada uma variável *dummy* para indicar se a variável dependente é referente à abertura do dia. O motivo é que como não há negociações na BM&F entre os horários de 18:00 às 9:00 do dia útil seguinte, o retorno referente a abertura reflete um período maior de informações. Por fim, incluímos três *lags* da variável dependente e uma constante, que pode capturar uma eventual tendência. Todas as equações do trabalho foram estimadas por mínimos quadrados ordinários e as estimativas são baseadas em erro padrão robusto à heterocedasticidade e autocorrelação pelo método Newey–West (HAC).

A equação (3) a seguir descreve o modelo padrão a ser estimado. Os efeitos das intervenções são estimados no intervalo de 10 minutos antes delas ocorrerem até 25 minutos depois.[4]

$$X_t = \alpha + \sum_{l=-3}^{-1} \delta_l X_{t+l} + \sum_{i=-5}^{2} \beta_i I_{t+i} + \sum_{k=1}^{11} \sum_{j=-3}^{0} \gamma_{k,j} M_{k,t+j} + \Omega A_t + \varepsilon_t, \tag{3}$$

$$M_{k,t+j} = \frac{D_{k,t+j} - E_{k,t+j}}{\sigma_k}, \tag{4}$$

onde

X_t é o retorno ou quadrado do retorno da taxa de câmbio no instante t.

α é uma constante.

I_{t+i} é uma variável dummy que assume os valores -1 para intervenções de venda, 1 para intervenções de compra e 0 na ausência de intervenções, no instante $t+i$.

$M_{k,t+j}$ é um vetor de surpresas macroeconômicas padronizadas k no instante $t+j$, medida pela equação (4).

$D_{k,t+j}$ é o valor divulgado para o indicador macroeconômico k no instante $t+j$.

[4] Os resultados obtidos foram qualitativamente similares quando considerado um número maior de *lags* e *leads* nas regressões. Foram testados os impactos até uma hora antes e uma hora depois das intervenções, porém a maioria dos coeficientes não foi estatisticamente significante.

$E_{k,t+j}$ é a expectativa do mercado para o valor do indicador macroeconômico k divulgado no instante $t+j$.

σ_k é o desvio padrão da série $D_{k,t+j} - E_{k,t+j}$.

A_t é uma variável dummy que assume os valores 1 ou -1, dependendo do sinal de r_t, se o instante t é a abertura do dia.[5]

ε_t é o resíduo da regressão no instante t.

A equação (3) pode ser interpretada da seguinte forma:

(i) se $i > 0$, o coeficiente β_i é uma medida de antecipação, ou seja, mede o impacto da intervenção na variável X_t, i intervalos de 5 minutos antes que ela ocorra.

(ii) se $i = 0$, o coeficiente β_i é uma medida do impacto contemporâneo da intervenção na variável X_t.

(iii) se $i < 0$, o coeficiente β_i é uma medida de persistência, ou seja, mede o impacto da intervenção na variável X_t, i intervalos de 5 minutos depois que ela ocorra.

A Tabela 3 apresenta os coeficientes β_i estimados da equação (3) para o retorno e o retorno ao quadrado da taxa de câmbio futura BRL/USD em termos percentuais. Apesar de vários coeficientes serem estatisticamente significantes, inclusive ao nível de 1%, a maioria deles possui valores pouco representativos. A exceção foram os coeficientes referentes aos 15 minutos posteriores aos anúncios surpresa de swap cambial cujos impactos foram mais relevantes.

O somatório dos coeficientes β_i pode ser interpretado como o impacto acumulado das intervenções cambiais na variável X_t. A Figura 1 mostra o efeito acumulado sobre o retorno do dólar futuro 10 minutos antes até 25 minutos após cada tipo de intervenção cambial.

O pequeno impacto das intervenções através do programa de swap cambial e de sua rolagem sobre o retorno da taxa de câmbio — inferior a 0,10% — está alinhado com as expectativas. Como o BCB já havia comunicado anteriormente a realização destes leilões de swap cambial, não houve surpresas nestes leilões.

Nos casos de anúncios surpresas de leilões de swap cambial observou-se um impacto próximo a 0,5% sobre os retornos. Esse resultado era esperado, já que o BCB surpreendeu o mercado ao realizar estes leilões, e com tamanhos relevantes.

Já o pequeno efeito dos leilões no mercado à vista sobre o retorno da taxa de câmbio — inferior a 0,2% — é surpreendente quando comparado ao impacto dos leilões surpresas de swap cambial. Como esses dois tipos de intervenção ocorreram de maneira inesperada, esperava-se que ambos tivessem um impacto relevante sobre o mercado. Porém, o tamanho das intervenções é algo que pode justificar essa diferença. Enquanto o primeiro tipo teve um volume médio aproximado de 300 milhões de dólares, o segundo teve um volume em módulo médio de 1,4 bilhões de dólares. Ou seja, o volume das intervenções no mercado à vista pode não ter sido grande o suficiente para gerar grandes impactos na taxa de câmbio. Na próxima seção, testaremos se o tamanho das intervenções de fato importa.

Outro ponto que pode explicar o pequeno impacto dos leilões no mercado à vista quando comparado ao swap cambial é que, possivelmente, as intervenções no mercado de dólar à vista não surpreenderam o mercado. No período compreendido pela base de dados, todos os leilões de dólar à vista ocorreram no início de 2012 em um período curto de tempo, inferior a 3 meses, com intervalo entre cada intervenção inferior a 2 dias na média. Apesar de não ter havido nenhuma comunicação com antecedência do BCB de que realizaria os leilões, eles ocorreram em um momento em que o governo tentava evitar uma apreciação adicional do real. Naquela ocasião, o Ministério da Fazenda já havia anunciado impostos

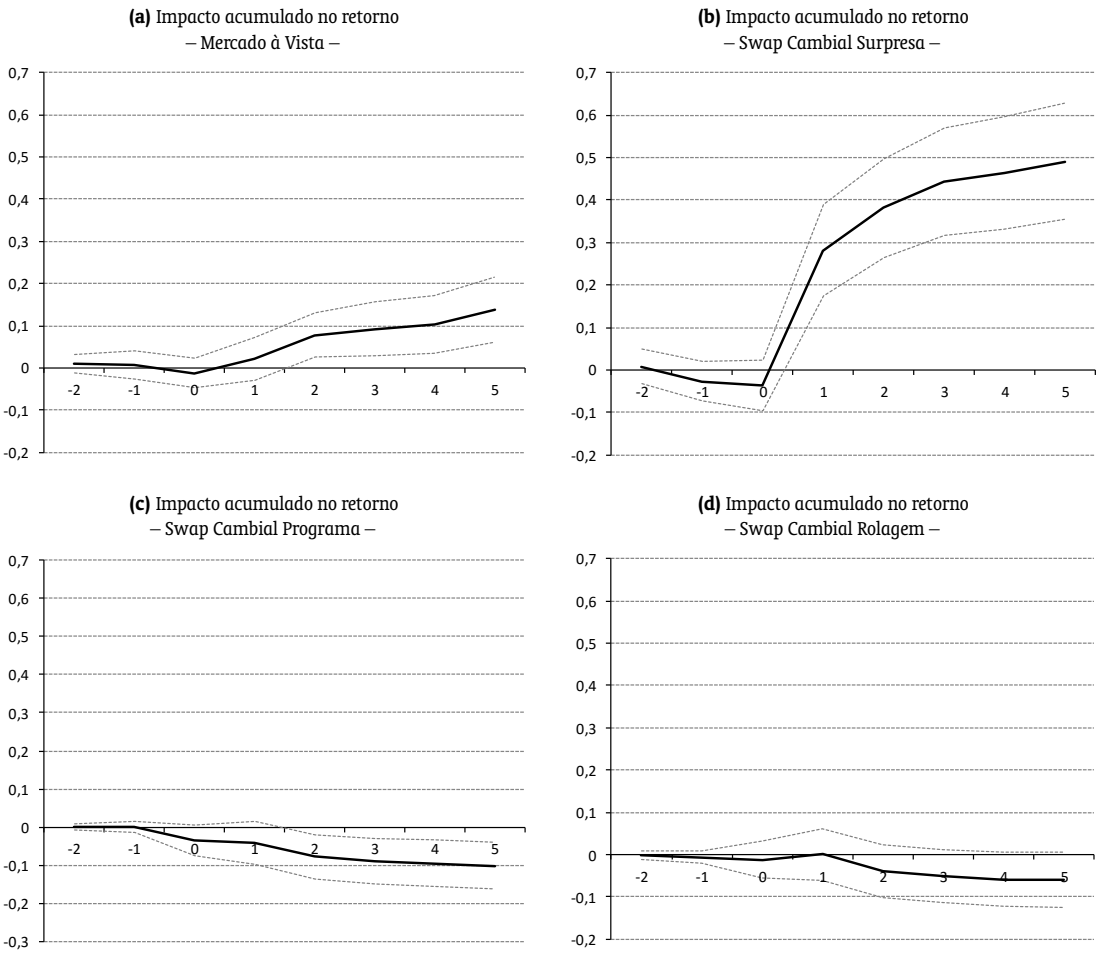
[5] Quando a variável dependente for o quadrado do retorno (r_t^2), as variáveis I_{t+i}, $M_{k,t+j}$ e A_t serão utilizadas em módulo.

Tabela 3. Efeitos intradiários das intervenções na taxa de câmbio futura.

	Retorno (r_t)				Quadrado do Retorno (r_t^2)			
	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem
β_{-5}	0,03491**	0,02767	−0,00584	−0,00238	−0,00191	0,01249	0,00694**	0,00261
β_{-4}	0,01082	0,02021*	−0,00544	−0,00763	0,00158	−0,00661	0,00307	0,00244
β_{-5}	0,01469	0,06163***	−0,01271**	−0,01113*	−0,00439***	−0,00321	−0,00995**	−0,01101**
β_{-5}	0,05603***	0,10105***	−0,03586***	−0,04007***	−0,00437***	0,02175	0,03309***	0,03553***
β_{-5}	0,03397**	0,31840***	−0,00521	0,01341	0,00095	0,19519***	−0,03363**	−0,01524
β_{-5}	−0,01982**	−0,01123	−0,03523*	−0,00678	−0,00487***	0,00491	0,10251***	0,05170
β_{-5}	−0,00317	−0,03468**	−0,00145	−0,00510	−0,00734***	0,00863	0,00062	−0,00063
β_{-5}	0,01088	0,00826	0,00047	−0,00110	−0,00306**	0,01391*	−0,00203	−0,00118
R_a^2	0,12788	0,13341	0,12856	0,12856	0,12985	0,13267	0,13408	0,13408

Notas: Esta tabela apresenta os coeficientes estimados β_i da equação (3), que medem os efeitos intradiários das intervenções cambias sobre o retorno e o retorno ao quadrado no intervalo de 10 minutos antes da intervenção até 30 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). O modelo é estimado pelo método de mínimos quadrados ordiários com desvios padrões robustos a heteroscedasticidade e aurocorrelação pelo método de Newey–West. Não estão reportados na tabela os coeficientes estimados das 3 defasagens da variável dependente, das surpresas macroeconômicas e da variável dummy A_t que assume os valores 1 ou −1, dependendo do sinal do retorno, se o instante t é a abertura do dia. As intervenções cambias (I_t) são variáveis dummies com valor +1 em caso de intervenção de compra de dólares, −1 para intervenção de venda de dólares e 0 caso contrário. R_a^2 é o R^2 ajustado.
Níveis de significância: ***significante a 1%; **significante a 5%; *significante a 10%.

Figura 1. Efeitos acumulados intradiários das intervenções no retorno da Taxa de Câmbio Futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o retorno da taxa de câmbio em termos percentuais no intervalo de 10 minutos antes da interveção até 25 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95% (dois desvios padrões) para o efeito acumulado das intervenções.

sobre posição vendida de derivativos e sobre a entrada de capital estrangeiro no país para alguns tipos de aplicações.

Uma das principais justificativas dadas pelos bancos centrais para intervir nos mercados é tentar reduzir a volatilidade da taxa de câmbio em momentos de estresse. Mas nem sempre os bancos centrais são explícitos quanto a seus objetivos e horizonte da política de intervenções. Com o intuito de avaliar os efeitos intradiários das intervenções cambiais do BCB sobre a volatilidade, mostramos na Figura 2 o efeito acumulado das intervenções sobre o retorno ao quadrado da taxa de câmbio futura 10 minutos antes até 25 minutos após cada tipo de intervenção cambial.

Para os leilões no mercado à vista houve uma pequena redução da volatilidade, quase nula, no momento das intervenções. Esse resultado também pode ser explicado pelo fato de que essas intervenções não tinham volumes relevantes e possivelmente eram esperadas pelo mercado. No caso das intervenções do programa e da rolagem de swaps cambiais, observaram-se variações pequenas ou sem significância da volatilidade cambial, resultado alinhado com as expectativas já que estas intervenções já eram esperadas pelo mercado. Já para as intervenções surpresas do BCB através de swaps cambiais nota-se um aumento significativo da volatilidade no período imediato após a intervenção cujos valores variam de 0,1 a 0,4% considerando um intervalo de confiança de 95%. Esse resultado de que as intervenções geram no curto prazo o efeito inverso ao desejado pelo BC também foi encontrado por Dominguez (2003). Portanto, não encontramos evidências de que a atuação do BCB reduz a volatilidade da taxa de câmbio e acalma mercados disfuncionais no curto prazo, embora deva ser ressaltado que as intervenções do BCB através de swaps cambiais tiveram por objetivo fornecer hedge para o mercado e não especificamente reduzir a volatilidade da taxa de câmbio.

3.2. Efeitos Intradiários do Volume das Intervenções Cambiais na Taxa de Câmbio Futura

Nesta subseção analisaremos se o volume das intervenções tem impacto na taxa de câmbio ou se apenas a sinalização que o BCB passa para o mercado ao intervir já é suficiente para gerar alterações significativas na cotação do dólar futuro. Também será avaliado se o impacto do volume sobre o câmbio é linear ou não, ou seja, se as intervenções com volumes mais elevados impactam a taxa de câmbio mais fortemente que as intervenções menores. A nova equação a ser estimada está descrita a seguir. As únicas duas mudanças em relação ao modelo descrito na seção anterior são a substituição da variável indicadora de intervenção por uma variável que mede o volume da intervenção e a inclusão do quadrado do volume para testar a não linearidade dos efeitos sobre o câmbio:

$$X_t = \alpha + \sum_{l=-3}^{-1} \delta_l X_{t+l} + \sum_{n=-5}^{0} \theta_i V_{t+n} + \sum_{n=-5}^{0} \frac{\lambda_i |V_{t+n}| V_{t+n}}{10000} + \sum_{k=1}^{11} \sum_{j=-3}^{0} \gamma_{k,j} M_{k,t+j} + \Omega A_t + \varepsilon_t, \qquad (5)$$

onde:

X_t é o retorno ou quadrado do retorno da taxa de câmbio no instante t.

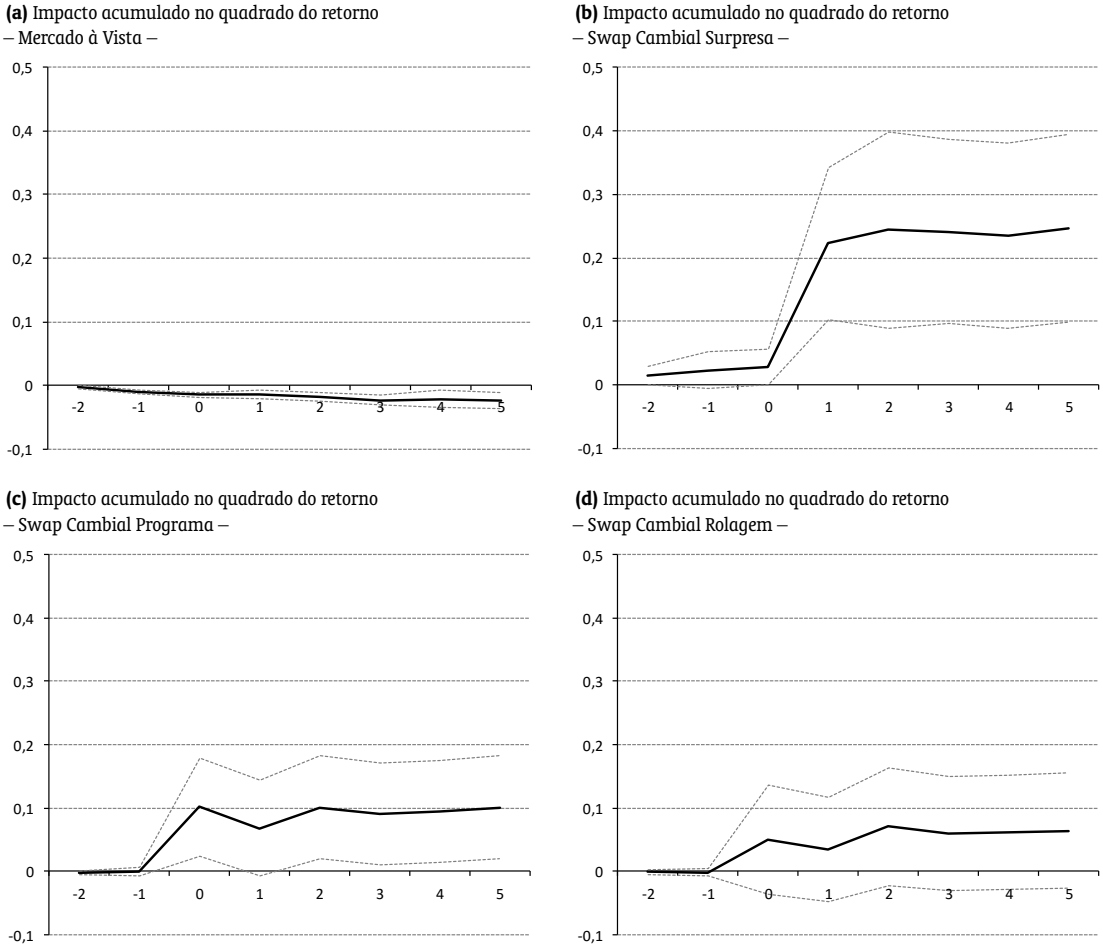
α é uma constante.

V_{t+n} é uma variável que mede o volume da intervenção em milhões de dólares no instante $t+n$. Possui o mesmo sinal que a intervenção e o seu valor é 0 se não houver intervenção no instante $t+n$.

$|V_{t+n}|V_{t+n}$ é o quadrado do volume com sinal de positivo ou negativo, dependendo do sinal da intervenção. Este termo testa os efeitos não lineares do volume sobre o câmbio.

$M_{k,t+j}$ é um vetor de surpresas macroeconômicas padronizadas k no instante $t+j$, medida pela equação (4).

Figura 2. Efeitos acumulados intradiários das intervenções no quadrado do retorno da Taxa de Câmbio Futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o retorno da taxa de câmbio em termos percentuais no intervalo de 10 minutos antes da interveção até 25 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95% (dois desvios padrões) para o efeito acumulado das intervenções.

A_t é uma variável dummy que assume os valores 1 ou -1, dependendo do sinal de r_t, se o instante t é a abertura do dia.

ε_t é o resíduo da regressão no instante t.

A Tabela 4 apresenta os coeficientes θ_i e λ_i estimados da equação (5) para o retorno e o retorno ao quadrado percentual da taxa de câmbio futura. Nota-se que, no caso dos leilões de dólar no mercado à vista e dos swaps cambiais surpresas, uma intervenção com volume maior amplificou o impacto na taxa de retorno do dólar futuro. No entanto, o fato dos sinais dos coeficientes λ_i serem opostos aos sinais dos coeficientes θ_i indica que essa relação é não linear.

A Figura 3 mostra o efeito acumulado do volume das intervenções cambiais sobre o retorno em até 25 minutos após a intervenção. Foram considerados os valores dos percentis 25%, 50% e 75% da distribuição do volume das intervenções em módulo. A exceção foi o programa de swaps cambiais cujos valores dos volumes descritos na figura foram os únicos três tamanhos das intervenções feitas.

Percebe-se que há um aumento relevante do impacto acumulado dos swaps cambiais surpresas ao compararmos as intervenções com volumes de USD 800 milhões e USD 1.350 milhões. Porém, quando aumentado ainda mais o tamanho, para USD 1.850 milhões, o impacto fica praticamente inalterado. Esse resultado corrobora a ideia de que a diferença encontrada anteriormente entre a relevância do impacto entre os leilões de dólar no mercado à vista e de swaps cambias surpresa pode ser explicada em parte pelo fato de o volume das intervenções no mercado à vista ter sido bem inferior ao volume das intervenções surpresas de swap cambial no período analisado.

Para os leilões do programa e da rolagem de swaps cambiais, o volume das intervenções teve muito pouca influência sobre o retorno da taxa de câmbio. Esse resultado era esperado, já que os resultados da subseção anterior mostraram um pequeno impacto desses tipos de intervenção.

Esses resultados sugerem que a autoridade monetária tem condições de afetar o retorno da taxa de câmbio e alterar o sentimento dos participantes com as intervenções. Porém, para isso é necessário realizar intervenções não esperadas com tamanhos significantes para convencer o mercado a seguir na mesma direção. No entanto, vale ser ressaltado que se não houver reservas internacionais grande o suficiente para lastrear as intervenções de venda de moeda estrangeira através de derivativos, estas podem não ter o efeito esperado, dado que o tamanho das reservas serve para dar credibilidade a essas intervenções. Por exemplo, se um banco central vendesse através de swaps cambiais uma quantidade de dólares maior que as reservas internacionais, os agentes poderiam pensar que o banco central não teria recursos suficientes para honrar seus compromissos no caso de uma desvalorização acentuada da moeda e com isso passariam a ficar desacreditados em relação à atuação do banco central. Segundo Volpon & Garcia (2014), as intervenções através de swaps cambiais funcionam enquanto os participantes do mercado acreditarem que o risco de conversibilidade é desprezível, ou seja, enquanto acreditarem que podem trocar a posição de derivativos por dólar à vista.

Em relação ao impacto sobre a volatilidade, a Figura 4 mostra que o volume das intervenções a impactou mais fortemente apenas no caso dos leilões surpresas de swap cambial e de forma não linear. O resultado encontrado para as intervenções no mercado à vista ou através do programa ou rolagem de swaps cambiais corrobora a ideia de que estas eram esperadas pelo mercado ou que o tamanho delas não era grande o suficiente para gerar impactos relevantes.

3.3. Efeitos diários das intervenções na taxa de câmbio futura

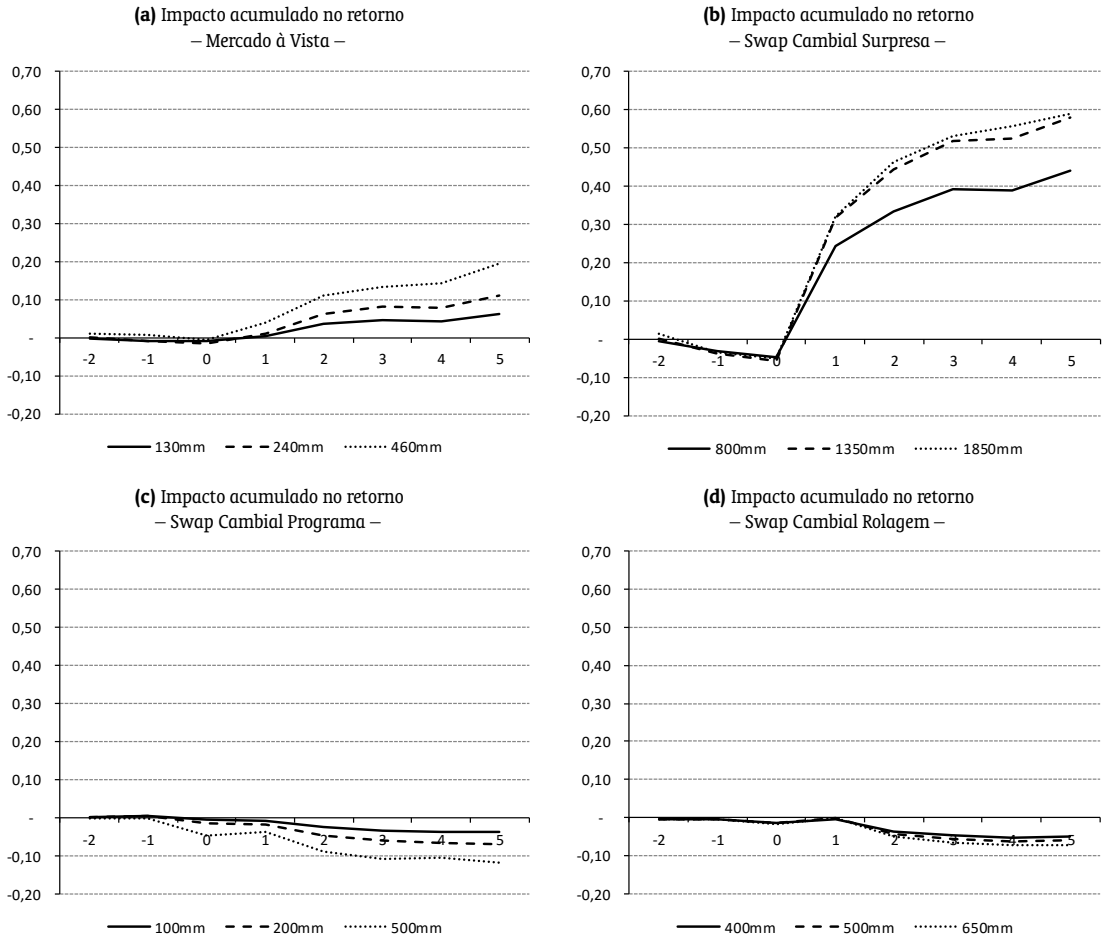
Nesta parte do estudo será avaliado o impacto das intervenções sobre o retorno e a volatilidade diária da taxa de câmbio futura. O objetivo é verificar o comportamento da taxa de câmbio um dia

Tabela 4. Efeitos intradiários do volume das intervenções na taxa de câmbio futura.

	Retorno (r_t)				Quadrado do Retorno (r_t^2)			
	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem
θ_{-5}	0,00016*	0,00010***	−0,00002	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00003**
θ_{-4}	−0,00005	−0,00002	−0,00004	−0,00002	0,00000	−0,00002**	0,00001	0,00002
θ_{-3}	0,00010	0,00010***	−0,00008***	−0,00003**	−0,00003***	0,00000	−0,00003**	−0,00005**
θ_{-2}	0,00030***	0,00014**	−0,00019***	−0,00010***	−0,00001	0,00004	0,00008***	0,00017***
θ_{-1}	0,00010	0,00048***	−0,00004	0,00002	0,00000	0,00034***	−0,00003	−0,00017**
θ_0	0,00000	−0,00003	−0,00009	−0,00003	−0,00004***	0,00000	0,00009	0,00040*
θ_1	−0,00008*	−0,00004	0,00002	0,00000	−0,00003***	0,00001	0,00000	0,00001
θ_2	−0,00003	−0,00002	0,00001	−0,00001	−0,00003***	0,00002*	0,00000	−0,00001
λ_{-5}	−0,00106	−0,00044***	0,00004	−0,00011	−0,00015	0,00004	−0,00001	−0,00023*
λ_{-4}	0,00144	0,00018	0,00095***	0,00008	0,00009	0,00011*	−0,00004*	−0,00012
λ_{-3}	−0,00113	−0,00035**	0,00077**	0,00007	0,00032**	0,00000	0,00009*	0,00053*
λ_{-2}	−0,00313***	−0,00034	0,00178***	0,00039***	0,00000	−0,00012	−0,00034***	−0,00184**
λ_{-1}	0,00009	−0,00153***	0,00108	0,00010	0,00003	−0,00121**	0,00012	0,00203*
λ_0	−0,00062	0,00009	0,00009	0,00010	0,00045***	0,00000	−0,00032	−0,00490
λ_1	0,00146**	0,00007	−0,00055	−0,00003	0,00021**	−0,00003	0,00001	−0,00009
λ_2	0,00113	0,00013	−0,00024	0,00006	0,00039**	−0,00006	0,00001	0,00007
R_a^2	0,12784	0,13344	0,12834	0,12833	0,12977	0,13252	0,13070	0,13211

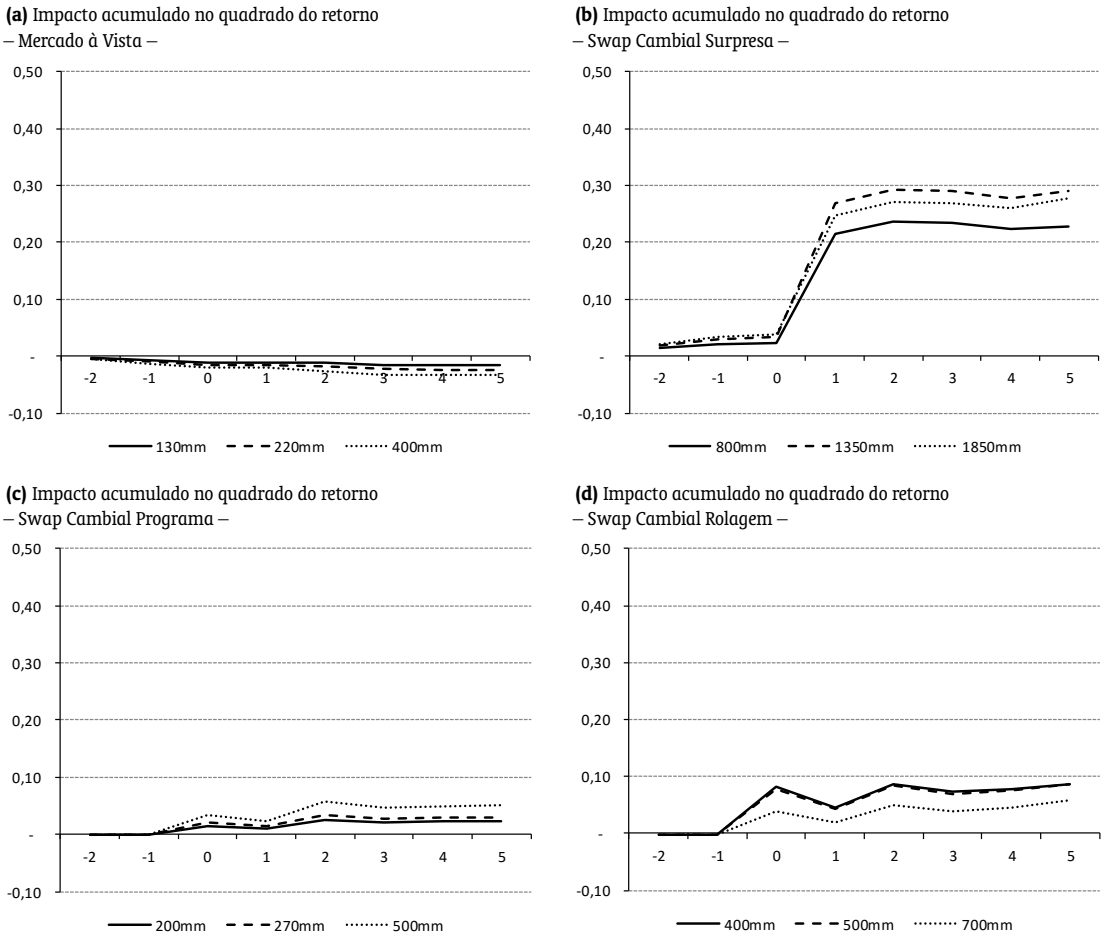
Notas: Esta tabela apresenta os coeficientes estimados θ_i e λ_i da equação (5), que medem os efeitos intradiários dos volumes das intervenções cambias sobre o retorno e o retorno ao quadrado no intervalo de 10 minutos antes da intervenção até 25 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). O modelo é estimado pelo método de mínimos quadrados ordiários com desvios padrões robustos a heteroscedasticidade e aurocorrelação pelo método de Newey–West. Não estão reportados na tabela os coeficientes estimados das 3 defasagens da variável dependente, das surpresas macroeconômicas e da variável dummy A_t que assume os valores 1 ou −1, dependendo do sinal do retorno, se o instante t é a abertura do dia. As intervenções cambias (I_t) são variáveis dummies com valor +1 em caso de intervenção de compra de dólares, −1 para intervenção de venda de dólares e 0 caso contrário. R_a^2 é o R^2 ajustado.
Níveis de significância: ***significante a 1%; **significante a 5%; *significante a 10%.

Figura 3. Efeitos acumulados intradiários do volume das intervenções no retorno da taxa de câmbio futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o retorno da taxa de câmbio em termos percentuais no intervalo de 10 minutos antes da interveção até 25 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). Os três valores escolhidos para o volume das intervenções foram os percentis 25%, 50% e 75% da distribuição do volume das intervenções em módulo, exceto para o programa de swaps cambiais cujos valores escolhidos foram os únicos três tamanhos de intervenção.

Figura 4. Efeitos acumulados intradiários do volume das intervenções no quadrado do retorno da taxa de câmbio futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o quadrado do retorno da taxa de câmbio em termos percentuais no intervalo de 10 minutos antes da interveção até 25 minutos após a intervenção. O tempo é medido em intervalos de 5 minutos em relação ao momento da intervenção ($t = 0$). Os três valores escolhidos para o volume das intervenções foram os percentis 25%, 50% e 75% da distribuição do volume das intervenções em módulo, exceto para o programa de swaps cambiais cujos valores escolhidos foram os únicos três tamanhos de intervenção.

antes, no dia e um dia após as atuações do BCB.[6] A equação a ser estimada descrita a seguir é análoga à equação (3), exceto que as variáveis dependentes serão R_d e R_d^2, que são os somatórios de r_t e r_t^2 no dia d. Também foram incluídas no modelo variáveis para capturar o efeito de surpresas na divulgação de indicadores econômicos no dia da intervenção e um *lag* da variável dependente:

$$X_d = \alpha + \delta X_{d-1} + \sum_{i=-1}^{1} \beta_i I_{d+i} + \sum_{k=1}^{11} \gamma_k M_{k,d+j} + \varepsilon_d, \tag{6}$$

onde:

X_d é o retorno ou o quadrado do retorno da taxa de câmbio no dia d.

α é uma constante.

I_{d+i} é uma variável dummy que assume os valores -1 para intervenções de venda, 1 para intervenções de compra e 0 na ausência de intervenções, no dia $d+i$.

$M_{k,d}$ é um vetor de surpresas macroeconômicas padronizadas k que ocorreram no dia d, medida pela diferença entre o valor realizado da variável e a mediana das expectativas de mercado, dividida pelo desvio-padrão da amostra.[7]

ε_d é o resíduo da regressão no dia d.

A Tabela 5 apresenta os coeficientes β_i estimados da equação (6) para o retorno e o retorno ao quadrado percentual diário da taxa de câmbio futura. Os resultados mostram que apenas os efeitos das intervenções no mercado à vista de dólar e dos anúncios surpresa de swap cambial apresentam alguma persistência sobre o retorno da taxa de câmbio, sendo que o impacto significativo dos leilões no mercado à vista se deu apenas no dia seguinte à realização destes. Isso pode ter ocorrido pelo fato das intervenções deste tipo terem ocorrido em um pequeno intervalo de tempo, inclusive em dias subsequentes. Como utilizamos um *lag* e um *lead*, pode acontecer que o retorno diário da taxa de câmbio esteja sendo afetado simultaneamente pela intervenção do dia e do dia anterior.

Já nos leilões de swap cambial surpresa, o coeficiente referente ao dia anterior possui um valor negativo estatisticamente significante ao nível de 1%, ou seja, não há evidências de que o mercado tenha se antecipado ao anúncio das intervenções, que parecem mais uma reação do BCB para tentar conter uma trajetória de valorização ou desvalorização cambial. Por exemplo, o real estava desvalorizando (valorizando) no dia anterior e para conter esse movimento o BC entra no mercado vendendo (comprando) dólares com o intuito de frear ou reverter o movimento anterior, ou seja, que o real se valorize (desvalorize).

Avaliando os coeficientes referentes ao quadrado do retorno, mais uma vez o impacto dos anúncios surpresa de swap cambial são os de maior relevância. Nos dias com intervenções deste tipo há um aumento da volatilidade, resultado em linha com o encontrado nas seções anteriores. Já para as intervenções no mercado à vista, nota-se uma redução da volatilidade no dia seguinte à realização dos leilões, resultado em linha com os objetivos de um banco central.

Em relação aos leilões do programa e de rolagem de swap cambial, faz mais sentido olhar apenas para os efeitos acumulados até o dia seguinte da intervenção ao invés de olhar para os coeficientes individuais. O motivo é que esses tipos de intervenção ocorreram de maneira diária a partir do anúncio do programa em 23 de agosto de 2013, de modo que a variável dummy de intervenção terá o valor

[6] Testamos até 5 *lags* e 2 *leads* e os resultados obtidos das estimações do modelo foram qualitativamente similares e os coeficientes dos *lags* e *leads* adicionais incluídos não tiveram significância.

[7] Quando a variável dependente for o quadrado do retorno (R_d^2), as variáveis I_{d+i} e $M_{k,d}$ são utilizadas em módulo.

Tabela 5. Efeitos diários das intervenções na taxa de câmbio futura.

	Retorno (r_t)				Quadrado do Retorno (r_t^2)			
	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem	Mercado à vista	Swap Cambial Surpresa	Swap Cambial Programa	Swap Cambial Rolagem
β_{-1}	0,39719***	0,11468	0,01803	−0,06664	−0,47429***	−0,19344	0,52769**	0,55747***
β_0	−0,10958	0,26270	−0,08423	0,09019	−0,04287	0,79986***	0,24621	0,34532
β_1	−0,05114	−0,60784***	0,01747	−0,03906	−0,01571	0,07846	−0,50786	−0,61509**
R_a^2	0,00144	0,01793	−0,00164	−0,00189	0,05097	0,06213	0,06138	0,07399

Notas: Esta tabela apresenta os coeficientes estimados β_i da equação (6), que medem os efeitos intradiários das intervenções cambias sobre o retorno e o retorno ao quadrado no intervalo de 1 dia antes até 1 dia após a intervenção. O modelo é estimado pelo método de mínimos quadrados ordiários com desvios padrões robustos a heteroscedasticidade e aurocorrelação pelo método de Newey–West. Não estão reportados na tabela os coeficientes estimados da defasagem da variável dependente e das surpresas macroeconômicas. As intervenções cambias (I_d) são variáveis dummies com valor +1 em caso de intervenção de compra de dólares, −1 para intervenção de venda de dólares e 0 caso contrário. R_a^2 é o R^2 ajustado.
Níveis de significância: ***significante a 1%; **significante a 5%; *significante a 10%.

igual a 1 após essa data e 0 antes disso. As figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, que esses tipos de intervenção não impactaram significativamente o retorno acumulado, mas provocaram um pequeno aumento da volatilidade dos retornos no acumulado até o dia seguinte da intervenção.

Os resultados acumulados para as intervenções no mercado à vista e através dos leilões de swap cambial surpresa se mantiveram em linha com os observados na Tabela 5. O impacto significativo dos leilões no mercado à vista sobre o retorno e a volatilidade se deu apenas no dia seguinte à realização destes e as atuações do BCB de forma não anunciada através de leilões de swaps cambiais conseguiram reduzir o movimento de valorização ou desvalorização cambial do dia anterior, mas provocaram um aumento persistente da volatilidade cambial.

4. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise sobre os impactos das intervenções do BCB sobre o nível e a volatilidade dos retornos da taxa de câmbio BRL/USD usando dados intradiários. O objetivo foi verificar se a sinalização passada pelo BCB ao intervir e o tamanho das intervenções afetam a dinâmica do mercado de câmbio. Para isso também se levou em consideração o impacto da surpresa na divulgação de indicadores macroeconômicos.

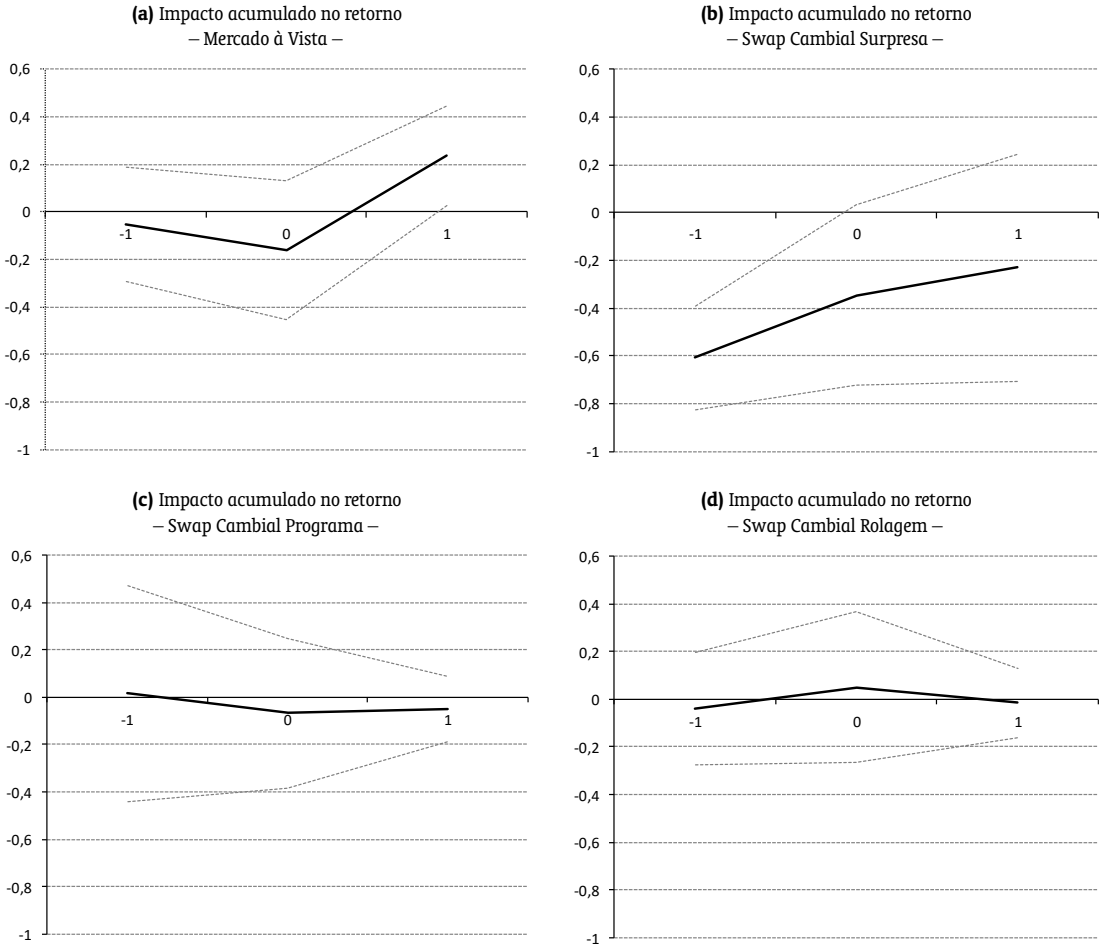
Os resultados encontrados sobre os efeitos das intervenções cambiais do BCB sobre a dinâmica da taxa de câmbio podem ser resumidos em:

(i) As intervenções, quando feitas de maneira inesperada pelo mercado, impactam o nível da taxa de câmbio mais fortemente do que as intervenções antecipadas, e de maneira persistente;
(ii) Não há evidências de antecipação do mercado em relação às intervenções não anunciadas;
(iii) As intervenções parecem ser uma resposta do BCB a um determinado movimento da taxa de câmbio (compras de dólar ocorrem após um período de apreciação do real e vendas de dólar ocorrem após um período de depreciação do real);
(iv) Não há evidência de que a atuação do BCB reduz a volatilidade cambial no curto prazo; e
(v) O tamanho das intervenções afeta a amplitude dos impactos, porém essa relação não é linear.

Baseado nestes resultados, podemos concluir que o BCB tem capacidade de afetar as condições do mercado e o sentimento dos participantes quando as intervenções são realizadas surpreendendo o mercado e com tamanho adequado, ou seja, intervenções muito grandes ou muito pequenas podem não ter o efeito esperado.

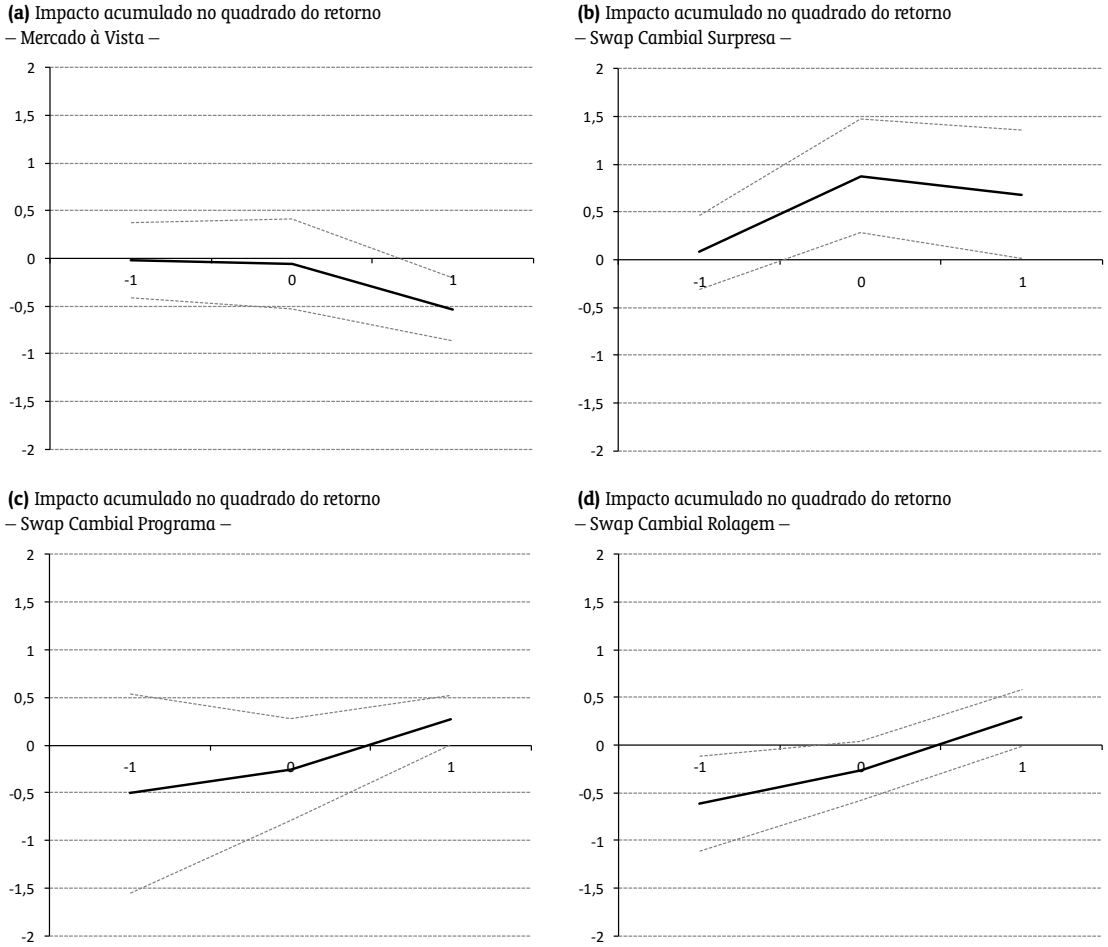
Um tema relevante a ser abordado em trabalhos futuros é analisar se as condições do mercado no momento das intervenções cambiais do BCB influenciam a eficácia destas operações, ou seja, se intervenções que ocorrem em horários de elevado volume de negócios tendem a impactar mais o mercado de câmbio.

Figura 5. Impacto acumulado diário das intervenções no retorno da taxa de câmbio futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o retorno da taxa de câmbio. O tempo é medido em intervalos diários em relação ao dia da intervenção. As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95% (dois desvios padrões) para o efeito acumulado das intervenções.

Figura 6. Acumulado das intervenções no quadrado do retorno diário da taxa de câmbio futura.



Nota: A figura mostra o impacto acumulado das intervenções sobre o quadrado do retorno da taxa de câmbio. O tempo é medido em intervalos diários em relação ao dia da intervenção. As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95% (dois desvios padrões) para o efeito acumulado das intervenções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araujo, J. D. P. d. (2004). *Suavizando movimentos na taxa de câmbio ou adicionando volatilidade? Um estudo empírico sobre intervenções do banco central no mercado de câmbio* (dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro). Disponível em: http://www.econ.puc-rio.br/biblioteca.php/trabalhos/show/967

Borges, R. d. R., & Rossi, J. L., Jr. (2010). Intervenções do Banco Central do Brasil (BCB) e previsibilidade da taxa de câmbio: Evidências a partir da utilização de regras de negociação baseadas em análise técnica. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, *40*(3), 349–366. Disponível em: http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/1281

Chamon, M., Garcia, M. & Souza, L. (2015, Fevereiro). *Fx interventions in Brazil: A synthetic control approach* (Texto para Discussão Nº 630). Rio de Janeiro: PUC-Rio. Disponível em: http://www.econ.puc-rio.br/uploads/adm/trabalhos/files/td630.pdf

Dominguez, K. M. E. (2003). The market microstructure of central bank intervention. *Journal of International Economics*, *59*(1), 25–45. doi: 10.1016/S0022-1996(02)00091-0

Dominguez, K. M. E. (2006). When do central bank interventions influence intra-daily and longer-term exchange rate movements? *Journal of International Money and Finance*, *25*(7), 1051–1071. doi: 10.1016/j.jimonfin.2006.08.009

Kohlscheen, E., & Andrade, S. C. (2014). Official FX interventions through derivatives. *Journal of International Money and Finance*, *47*, 202–216. doi: 10.1016/j.jimonfin.2014.05.023

Menkhoff, L. (2012, April). *Foreign exchange intervention in emerging markets: A survey of empirical studies* (Diskussionspapiere Nº 498). Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Leibniz Universität Hannover. Disponível em: http://diskussionspapiere.wiwi.uni-hannover.de/index.php?number=498

Meurer, R., Teixeira, F. W. & Tomazzia, E. C. (2010). Effects of intervention in the spot currency market on the BRL/USD exchange rate from 1999 to 2008: An event study. *Revista Brasileira de Finanças*, *8*(2), 229–254. Disponível em: http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbfin/article/view/1496

Nakashima, P. M. F. (2012). *Análise empírica das intervenções cambiais do Banco Central do Brasil usando dados de alta frequência* (dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro). Disponível em: http://www.econ.puc-rio.br/biblioteca.php/trabalhos/show/1120

Neely, C. J. (2005). An analysis of recent studies of the effect of foreign exchange intervention. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, *87*(6), 685–717. doi: https://research.stlouisfed.org/publications/review/2005/11/01/an-analysis-of-recent-studies-of-the-effect-of-foreign-exchange-intervention/

Nogueira, L. R. (2014). *As intervenções do Banco do Central do Brasil no mercado de câmbio e seus efeitos no nível intradiário da taxa de câmbio* (dissertação de mestrado, EPGE/FGV, Rio de Janeiro). Disponível em: http://hdl.handle.net/10438/12051

Novaes, W., & Oliveira, F. N. d. (2007, July). *Interventions in the foreign exchange market: Effectiveness of derivatives and other instruments* [research paper]. ResearchGate. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/5104904_Interventions_in_the_Foreign_Exchange_Market_Effectiveness_of_Derivatives_and_Other_Instruments

Oliveira, F. N., & Plaga, A. R. (2011). Eficácia das intervenções do Banco Central do Brasil sobre a volatilidade da taxa de câmbio nominal. *Revista Brasileira de Economia*, *65*(1), 71–92. Disponível em: http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/1469

Pasquariello, P. (2007). Informative trading or just costly noise? An analysis of central bank interventions. *Journal of Financial Markets*, *10*(2), 107–143. doi: 10.1016/j.finmar.2006.11.001

Payne, R., & Vitale, P. (2003). A transaction level study of the effects of central bank intervention on exchange rates. *Journal of International Economics*, *61*(2), 331–352. doi: 10.1016/S0022-1996(03)00012-6

Sarno, L., & Taylor, M. P. (2001). Official intervention in the foreign exchange market: Is it effective and, if so, how does it work? *Journal of Economic Literature*, *39*(3), 839–868. doi: 10.1257/jel.39.3.83

Ventura, A., & Garcia, M. G. P. (2012). Mercados futuro e à vista de câmbio no Brasil: O rabo balança o cachorro. *Revista Brasileira de Economia*, *66*(1), 21–48. Disponível em: http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/1907

Vervloet, W. T. d. F. (2010). *Efeitos de intervenções esterilizadas do Banco Central do Brasil sobre a taxa de câmbio* (dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro). Disponível em: http://www.econ.puc-rio.br/biblioteca.php/trabalhos/show/1009

Volpon, T., & Garcia, M. G. P. (2014, May). *DNDFs: A more efficient way to intervene in FX markets?* (Texto para Discussão Nº 621). Rio de Janeiro: PUC-Rio. Disponível em: http://www.econ.puc-rio.br/biblioteca.php/trabalhos/show/1421

r b e

ISSN 0034-7140
DOI 10.5935/0034-7140.20160025
Revista Brasileira de Economia, **70**(4), 481–486

A Note on Auctions with Compulsory Partnership*

Paulo K. Monteiro†, Aloisio Araujo‡, Clara Costellini§, Otávio Damé¶

Contents: **1. Introduction; 2. The common value model; 3. The compulsory participation model; 4. Discussion; 5. Conclusions.**

Keywords: **Pre-Salt Auction, Production Share, Equilibrium Existence.**

JEL Code: **D44.**

We study a symmetric, profit share, common value auction with a twist: One (fixed) Bidder, if not winning the auction, has to enter a partnership with the winner, sharing both expenses and revenue at rate (say) $0 < \lambda < 1$. We show that it doesn't have an equilibrium in pure-strategies.

Nós estudamos um leilão de valor comum, simétrico com uma mudança: Um determinado licitante, se não vencer o leilão, deve entrar numa parceria com o vencedor, dividindo tanto receitas quanto despesas a uma taxa pré-determinada. Demonstramos que não há equilíbrio em estratégias puras

1. INTRODUCTION

Suppose we plan a mineral rights auction and we have a preferred Bidder. However we want to have some competition. If our preferred Bidder is the highest bidder okay. However if he is not the highest bidder we require that he shares with the winner the earnings and expenses at some fixed rate $\lambda \in (0,1)$. Thus a compulsory partnership. Is this a sensible approach? We would ask that a minimum requirement is, under usual assumptions, that equilibrium bidding strategies exist. The model we study is motivated by the 2013 Brazil's Libra oil field pre-salt auction. We refer to Araujo, Costellini, Damé, & Monteiro (2016) for more details. There are three main ingredients: (i) A fixed cash bonus; (ii) A profit share/revenue share auction, and (iii) compulsory partnership. Considering two firms, we establish—in the usual manner—the equilibrium bidding functions differential equations. However we show that, in general, there is no such equilibrium. The possible existence of equilibrium bidding functions that are not "nice" is not studied here.

*We thank the comments of Flávio Menezes, Sérgio Parreiras and seminar participants at SAET 2016 and IWGTS 2014. The financial support of CNPq-Brazil is gratefully acknowledged.

†Escola Brasileira de Economia e Finanças / Fundação Getúlio Vargas (FGV/EPGE). Praia de Botafogo 190, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 22250-900.

‡FGV/EPGE.

§FGV/EPGE.

¶FGV/EPGE.

2. THE COMMON VALUE MODEL

A contract to explore a resource with random return $V \geqq 0$, is to be awarded through an auction. We suppose[1] that there are two firms, $i = 1,2$. Each bidder i receives a random estimate S_i. We suppose (S_1,S_2,V) has a distribution with density $f(s,v) = f(s_1,s_2,v)$, $0 \leqq s_1,s_2,v \leqq \overline{v}$.

Assumption 5. *(i) The density $f(s,v)$, can be written in the form*

$$f(s,v) = h(v)g(s_1\,|\,v)g(s_2\,|\,v); \tag{DA}$$

(ii) $g(u|v)$ has monotone likelihood ratio, $\int g(u|v)\,\mathrm{d}u = 1$;
(iii) $h(u) > 0$ and $\int g(u|v)h(v)\,\mathrm{d}v > 0$, $0 < u < \overline{v}$.

From $h(v) = \int f(s,v)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2$ we see that $h(\cdot)$ is the density of V. The condition (DA) says that S_1,S_2 is conditionally independent given V. If $f_{(S_i,V)\,|\,S_j}$ denote the conditional density of (S_i,V) given S_j $(i \neq j)$ we have

$$f_{(S_i,V)\,|\,S_j}\big((s_i,v)\,\big|\,s_j\big) = \frac{g(s_1\,|\,v)g(s_2\,|\,v)h(v)}{\int g(s_j\,|\,v)h(v)\,\mathrm{d}v}. \tag{DC}$$

3. THE COMPULSORY PARTICIPATION MODEL

The auction is a profit share auction. The winner incurs a cost $f \geqq 0$ and pays the cash bonus $B > 0$. We suppose $\mathbb{E}[V] > f + B$. Bidder's 2 compulsory share is $0 < \lambda < 1$. If Bidder 1 bids share $b \in [0,1]$ and Bidder 2 bids $c \in [0,1]$ we have the following payoffs:

$$\begin{aligned}
\pi_1(b,c) &= \begin{cases} 0 & \text{if } b < c, \\ (1-\lambda)\big(v - f - b(v-f)^+ - B\big) & \text{if } b \geq c. \end{cases} \\
\pi_2(b,c) &= \begin{cases} \lambda\big(v - f - b(v-f)^+ - B\big) & \text{if } c \leq b, \\ v - f - c(v-f)^+ - B, & \text{if } c > b. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

Thus if $c > b$ Bidder 1 gets nothing and Bidder 2 pays the bonus B and from the revenue $v - f$ pays royalties $c(v-f)^+$. Thus $\pi_2(b,c) = v - f - c(v-f)^+ - B$. This is the usual payoff formula. If Bidder 1 wins, he pays the share $(1-\lambda)$ of the bonus and from the revenue $v-f$ he gets $(1-\lambda)(v-f-b(v-f)^+)$. Bidder 2 pays the share λ of the bonus B and gets $\lambda(v - f - b(v-f)^+)$. Auction participants will be willing to enter bids if the expected payoff is non-negative. Given that $f + B > 0$ if signal s_i is low enough[2] Bidder i will not participate.

Definition 5. An equilibrium is a 4–uple $(s_1^*,s_2^*,b_1(\cdot),b_2(\cdot))$ such that for $i = 12$:

(i) Bidder i participate if and only if $s_i \geqq s_i^*$;
(ii) If i participates he bids $b_i(s_i)$;
(iii) $b_i\colon [s_i^*,\overline{v}] \to [0,1]$ is strictly increasing and differentiable, $b_i(s_i^*) = 0$.

Let $b := b_1$ and $c = b_2$. Let $f^* = f + B$.

[1] Our theorem on the non-existence of pure strategy equilibrium is reasonably general. There is little gain to consider an arbitrary number of firms.

[2] That is if $\mathbb{E}[V\,|\,S_i = s_i] < f + B$.

3.1. Equations for (s_1^*, s_2^*).

We suppose that if both bidders do not participate nothing is paid and nothing is received. If Bidder 1 participate and bids 0 his expected payoff is $\mathbb{E}\left[(V-B)1_{S_2<s_2^*}\,|\,S_1=s_1\right]$. Thus we get the equation

$$\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_2<s_2^*}\Big|S_1=s_1^*\right]=0. \tag{2}$$

If Bidder 2 does not participate the expected payoff is

$$\mathbb{E}\left[\lambda(V-f^*-b(S_1)(V-f)^+)1_{S_1\geq s_1^*}\Big|S_2=s_2\right].$$

If Bidder 2 participate and bids 0 his expected payoff is

$$\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_1<s_1^*}\Big|S_2=s_2^*\right]+\mathbb{E}\left[\lambda(V-f^*-b(S_1)(V-f)^+)1_{S_1\geq s_1^*}\Big|S_2=s_2\right].$$

At $S_2=s_2^*$ he is indifferent between participating or not. Thus

$$\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_1<s_1^*}\Big|S_2=s_2^*\right]=0.$$

Summing up we have the system,

$$\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_2<s_2^*}\Big|S_1=s_1^*\right]=0, \tag{3}$$

$$\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_1<s_1^*}\Big|S_2=s_2^*\right]=0. \tag{4}$$

We introduce a new assumption:

Assumption 6. *The system* (3) *and* (4) *has a unique solution* $s_1^*=s_2^*=s^*$.

The following example satisfy both assumptions 5 and 6:

Example 1. Let $f(s_1,s_2,v)=\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(s_1)1_{[0,v]}(s_2)$ and $\overline{v}=1$. Let $s_1^*=x$ and $s_2^*=y$ solve (3) and (4). Without loss of generality $0<x\leqq y$. Suppose $x<y$. Then $g(y|v)=0$ if $v<y$.

$$\int_y^1\int_{s_1=0}^{x}(v-f^*)\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(s_1)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}v=\mathbb{E}\left[(V-f^*)1_{S_1<x}\Big|S_2=y\right]=0.$$

Since $1_{[0,v]}(s_1)=1$ we have

$$x\int_y^1(V-f^*)\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v=0\implies\int_y^1(V-f^*)\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v=0.$$

In particular $y<f^*$. Now

$$\int\int_{s_2=0}^{y}(V-f^*)\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(x)1_{[0,v]}(s_2)\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}v=0$$

implies

$$\int_{v=x}^{y}\int_{s_2=0}^{y}(V-f^*)\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(s_2)\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}v=\int_{v=x}^{y}\int_{s_2=0}^{y}(V-f^*)\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(s_2)\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}v+\int_{v=y}^{1}y(V-f^*)\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v=0.$$

An impossibility since $v-f^*<0$ if $v<y$ implies

$$\int_{v=x}^{y}\int_{s_2=0}^{y}(V-f^*)\frac{1}{v^2}1_{[0,v]}(s_2)\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}v\neq 0.$$

Finally if s^* is such that $\int_{s^*}^1\frac{v-f^*}{v^2}1\,\mathrm{d}v=0$ then $s_1^*=s_2^*=s^*$ is the unique solution.

Remark 1. For the symmetric distributions case we are studying, the assumption above is quite natural.

Remark 2. We remark for later use that $b(\overline{v}) = c(\overline{v})$. This is true since no one will bid more than just enough to win the auction.

3.2. Equations for $b(\cdot), c(\cdot)$.

To shorten the equations below we suppose from now on $f = 0$. Thus $f^* = B$. For example now $(v - f)^+ = v$. The problem of Bidder 1 is to choose, for every realization $S_1 = x$, a bid b, $0 \le b \le 1$, maximizing

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(V - f^* - bV)1_{b>c(s_2)} \,\middle|\, S_1 = x\right] &= \int_{u<c^{-1}(b)} \int (v - f^* - bv)h(v)g(x|v)g(u|v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int (v - f^* - bv)h(v)g(x|v)G\left(c^{-1}(b)\,\middle|\,v\right)\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{R}$$

Analogously, the problem of Bidder 2 is to choose, for each realization $S_2 = y$, a bid $0 \le c \le 1$ maximizing

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(V - f^* - c\cdot V)1_{c>b(s_1)} + \lambda(V - f^* - c\cdot V)1_{c<b(s_1)} \,\middle|\, S_2 = y\right] \\ &\quad= \int \left((v - f^* - cv)1_{c>b(u)} + \lambda\left(v - f^* - b(u)v\right)1_{c<b(u)}\right)h(v)g(u|v)g(y|v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &\quad= \int (v - f^* - cv)h(v)G\left(b^{-1}(c)\,\middle|\,v\right)g(y|v)\,\mathrm{d}v \\ &\qquad+ \int_{u>b^{-1}(c)} \lambda\left(v - f^* - b(u)v\right)h(v)g(u|v)g(y|v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{C}$$

3.3. First–order conditions

Differentiating in b the expression (R) and making it equal to zero:

$$(c^{-1})'(b)\int (v - f^* - bv)f\left(x, c^{-1}(b), v\right)\mathrm{d}v - \int vg(x|v)G\left(c^{-1}(b)\,\middle|\,v\right)h(v)\,\mathrm{d}v = 0.$$

Here we used that $f(x, c^{-1}(b), v) = g(x|v)g(c^{-1}(b)\,|\,v)h(v)$. In equilibrium, $b = b(x)$:

$$(c^{-1})'(b(x)) = \frac{\int vh(v)g(x|v)G\left(c^{-1}(b(x))\,\middle|\,v\right)\mathrm{d}v}{\int \left(v - f^* - b(x)v\right)f\left(x, c^{-1}(b(x)), v\right)\mathrm{d}v}.$$

Differentiating in c the problem of (C):

$$\begin{aligned}&-\int vh(v)G\left(b^{-1}(c)\,\middle|\,v\right)g(y|v)\,\mathrm{d}v \\ &\quad+ (b^{-1})'(c)\int (v - f^* - cv)h(v)G\left(b^{-1}(c)\,\middle|\,v\right)g(y|v)\,\mathrm{d}v \\ &\qquad- (b^{-1})'(c)\int \lambda(v - f^* - cv)h(v)G\left(b^{-1}(c)\,\middle|\,v\right)g(y|v)\,\mathrm{d}v = 0.\end{aligned}$$

Simplifying,

$$(b^{-1})'(c)(1-\lambda)\int (v - f^* - cv)f\left(y, g\left(b^{-1}(c)\right), v\right)\mathrm{d}v = \int vh(v)G\left(b^{-1}(c)\,\middle|\,v\right)g(y|v)\,\mathrm{d}v.$$

In equilibrium $c = c(y)$ and therefore we get the system

$$(c^{-1})'(b(x)) = \frac{\int vh(v)g(x|v)G\Big(c^{-1}(b(x))\,\Big|\,v\Big)\,\mathrm{d}v}{\int \Big(v - f^* - b(x)v\Big)f\Big(x,c^{-1}(b(x)),v\Big)\,\mathrm{d}v},$$
$$(b^{-1})'(u) = \frac{\int vh(v)G\Big(b^{-1}(u)\,\Big|\,v\Big)g(y|v)\,\mathrm{d}v}{(1-\lambda)\int (v - f^* - c(y)v)f\Big(y,b^{-1}(u),v\Big)\,\mathrm{d}v}.$$

In equilibrium $\text{range}\,(b(\cdot)) = \text{range}\,(c(\cdot))$. Thus we may rewrite the system, changing variables to $u = b(x) = c(y)$ and get

$$\begin{aligned}(c^{-1})'(u) &= \frac{\int vh(v)g(b^{-1}(u)\,|\,v)G(c^{-1}(u)\,|\,v)\,\mathrm{d}v}{\int (v - f^* - uv)f\Big(b^{-1}(u),c^{-1}(u),v\Big)\,\mathrm{d}v},\\ (b^{-1})'(u) &= \frac{\int vh(v)G(b^{-1}(u)\,|\,v)g(c^{-1}(u)\,|\,v)\,\mathrm{d}v}{(1-\lambda)\int (v - f^* - uv)f\Big(c^{-1}(u),b^{-1}(u),v\Big)\,\mathrm{d}v}.\end{aligned} \tag{5}$$

We have $b^{-1}(0) = s^*$ and $c^{-1}(0) = s^*$. We now reformulate system (5) in such a way that the second equation does not depend on first equation. So, defining $k(w) = c^{-1}(b(w))$, and using that $(b^{-1})'(b(w)) = \frac{1}{b'(w)}$, we obtain

$$b'(w) = (1-\lambda)\frac{\int \Big(v - f^* - b(w)v\Big)f\Big(w,k(w),v\Big)\,\mathrm{d}v}{\int vh(v)G(w|v)g(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v}. \tag{6}$$

Then,

$$\begin{aligned}k'(w) &= (c^{-1})'(b(w))b'(w)\\ &= \frac{\int vh(v)g(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int \Big(v - f^* - b(w)v\Big)f\Big(w,k(w),v\Big)\,\mathrm{d}v} \times (1-\lambda)\frac{\int \Big(v - f^* - b(w)v\Big)f\Big(w,k(w),v\Big)\,\mathrm{d}v}{\int vh(v)G(u|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}\\ &= (1-\lambda)\frac{\int vh(v)g(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int vh(v)G(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}.\end{aligned} \tag{7}$$

Therefore, we have the following system, where the last equation is independent:

$$b'(w) = (1-\lambda)\frac{\int \Big(v - f^* - b(w)v\Big)f\Big(w,k(w),v\Big)\,\mathrm{d}v}{\int vh(v)G(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}, \tag{8}$$

$$k'(w) = (1-\lambda)\frac{\int vh(v)g(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int vh(v)G(w|v)G(k(w)\,|\,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}. \tag{9}$$

Theorem 1. *There is no equilibrium.*

Proof. We have $k(s^*) = c^{-1}(b(s^*)) = c^{-1}(0) = s^*$. Therefore,

$$k'(s^*) = (1-\lambda)\frac{\int vh(v)g(s^*\,|\,v)G(s^*\,|\,v)\,\mathrm{d}v}{\int vh(v)G(s^*\,|\,v)g(s^*\,|\,v)\,\mathrm{d}v} = 1-\lambda < 1. \tag{10}$$

Whenever $k(w) = w$, we have

$$k'(w) = (1-\lambda)\frac{\int v h(v) g(w|v) G(w|v)\,\mathrm{d}v}{\int v h(v) G(w|v) g(w|v)\,\mathrm{d}v} = 1-\lambda. \tag{11}$$

Necessarily $k(\overline{v}) = c^{-1}(b(\overline{v})) = c^{-1}(c(\overline{v})) = \overline{v}$. Let $x = \inf X$ where $X = \{z \in (s^*, \overline{v}] : k(z) = z\}$. Note that $\overline{v} \in X$. Since $k'(s^*) < 1$ and $k(s^*) = s^*$ we have $k(w) < w$ is $s^* < w$ if w is sufficiently near s^*. Thus $x > s^*$. However, $k(x) = x$ implies $k'(x) < 1$ and there is some $z < x$ sufficiently near x such that $k(z) > z$. But using the intermediate value theorem, this contradicts the definition of x. □

4. DISCUSSION

Existence The existence of monotonic bidding strategies is studied in great generality in Reny & Zamir (2014). A key condition is that only the winner pays and gets the good. In the compulsory partnership the compulsory partner bid may lose but he still shares with the winner the common value object and pays proportionally. Non-existence results as in Landsberger & Tsirelson (2000) rely on participation costs. In our paper participation is costless. So what drives non-existence? Once we are in the region with positive expected profits (i.e. $s_i > s^*$) the non compulsory Bidder gets a lower profit (at the rate $1-\lambda$) than the compulsory Bidder. This leads to $k(w) < w$ and thus, $b(w) < c(w)$. However if $b(w) = c(w)$ as it should be at least if $w = \overline{v}$ then $k'(w) = 1-\lambda < 1$. This conflict apparently drives the non-existence. Could there be a monotonic non-differentiable equilibrium? Discontinuous equilibria? Or one that is not increasing? Those are fair questions that we do not address.

Asymmetry Asymmetry might help existence. However if the asymmetry is such that participation cutoff $s_1^* > s_2^*$ the same proof as above works, since $k(s_1^*) = c^{-1}(b(s_1^*)) = s_2^* < s_1^*$. Thus $k(s_1^*) < s_1^*$ and the non-existence proof works fine.

5. CONCLUSIONS

The compulsory partnership model is an intriguing possibility. How would bidders play their strategies? We mention that, regretfully, Brazil's pre-salt auction wasn't successful. Bidders could form consortia (even including the compulsory partner Petrobras) and only one consortium was formed and bid the reserve price. Could it do better forbidding the consortia?

REFERENCES

Araujo, A., Costellini, C., Damé, O., & Monteiro, P. K. (2016). Shortcomings of the Brazilian pre-salt auction design. *Revista Brasileira de Economia*, *70*(4), 379–398. doi: 10.5935/0034-7140.20160025

Landsberger, M., & Tsirelson, B. (2000, April). *Correlated signals against monotone equilibria.* SSRN. doi: 10.2139/ssrn.222308

Reny, P., & Zamir, S. (2014). On the existence of pure strategy monotone equilibria in asymmetric first-price auction. *Econometrica*, *72*(4), 1105–1125.