Modelando a Estrutura a Termo da Taxa de Juros: Dinâmica e Avaliação de Contratos Derivativos

Cícero Augusto Vieira Neto*
Pedro L. Valls Pereira**

Resumo
O tema deste artigo é a modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e a avaliação de contratos derivativos diretamente dependentes dela. O trabalho possui natureza teórica e lida, exclusivamente, com modelos em tempo contínuo, fazendo farto uso de resultados advindos do cálculo estocástico. Apresentamos contribuições originais que julgamos relevantes para o desenvolvimento da modelagem do mercado de renda fixa onde desenvolvemos um novo modelo multifatorial sobre a estrutura a termo da taxa de juros. O modelo se baseia na "decomposição" da curva de juros nos "fatores" nível, inclinação, curvatura, dupla curvatura, etc e no tratamento da dinâmica conjunta dos mesmos. Mostramos que o modelo desenvolvido se aplica a diversos fins: análise da dinâmica dos preços dos títulos de renda fixa, avaliação de contratos derivativos e também a gerenciamento de risco de mercado e formulação de estratégias de operação que será apresentada em um outro artigo.

Abstract
This article deals with a model for the term structure of interest rates and the valuation of derivative contracts directly dependent on it. The work is of a theoretical nature and deals, exclusively, with continous time models, making ample use of stochastic calculus results and presents original contributions that we consider relevant to the development of the fixed income market modelling. We develop a new multifactorial model of the term structure of interest rates. The model is based on the "decomposition" of the yield curve into the "factors" level, slope, curvature, double curvature, ..., and the treatment of their collective dynamics. We show that this model may be applied to serve various objectives: analysis of bond price dynamics, valuation of derivative contracts and also market risk management and formulation of operational strategies which is presented in another article.

***Palavras-chave*:** estrutura a termo da taxa de juros; dinâmica; apreçamento de contratos derivativos.

Código JEL: C13.

Submetido em Maio de 2005. Revisado em Junho de 2005. Este artigo é uma versão de um capítulo da tese de doutorado do primeiro autor, defendida no Departamento de Economia da Universidade de São Paulo. Os autores agradecem os comentários do editor adjunto desta revista, Ricardo Brito. O segundo autor agradece ao CNPq e ao Projeto Pronex-Temático CNPq-Fapesp número 2003/10105/2.

*Diretor da Clearing de Derivativos da BM&F

**Ibmec São Paulo, Rua Maestro Cardim 1170, 01323-001 São Paulo, S.P., Brazil, Tel: 55 11 4504 2300, Fax: 55 11 4504 2315. E-mail: pvalls@ibmec.br

©2004 Sociedade Brasileira de Finanças

1. Introdução

A pesquisa acadêmica sobre a Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) divide-se em duas grandes áreas que possuem poucos pontos de ligação . A primeira delas relaciona-se ao problema da estimação da ETTJ numa determinada data. Exemplos são os trabalhos de McCulloch (1971, 1975), Shaefer (1981), Vasicek e Fong (1982) e Duarte et alii (1998). A segunda grande área, por sua vez, relaciona-se aos assim chamados modelos de equilíbrio ou não arbitragem da ETTJ, cuja principal função é a avaliação de contratos derivativos diretamente dependentes das taxas de juros. Exemplos são os trabalhos de Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox et alii (1985) e Heath et alii (1992).

Este trabalho lida com as duas áreas de forma conjunta. Utiliza idéias oriundas da literatura de estimação da ETTJ para desenvolver um modelo original que se enquadra na literatura dos modelos de não arbitragem sobre a ETTJ. Conforme será visto ao longo do artigo, o modelo desenvolvido se aplica a diversos fins: análise do comportamento dinâmico da estrutura a termo e avaliação de contratos derivativos. Usando este modelo é também possível usa-lo para: gerenciamento de risco e formulação de estratégias de operação, que serão apresentados em outro artigo. O artigo encontra-se organizado da seguinte maneira:

Na seção 2 fazemos uma discussão preliminar, isto é, abordamos algumas técnicas que são utilizadas para a estimação da estrutura a termo. Em especial, mostramos que a representação da curva de juros sob a forma de uma combinação linear de polinômios permite decompô-la nos fatores nível, inclinação, curvatura, dupla curvatura, etc.

Na seção 3 apresentamos a versão mais geral do modelo. Nesta, a evolução da estrutura a termo é dada pela evolução, em tempo contínuo, dos fatores nível, inclinação, curvatura, dupla curvatura, etc. Criamos dois casos particulares a partir do modelo geral. Chamamos o primeiro deles de Modelo Simplificado e o segundo de Modelo Standard. Com o primeiro objetivamos ganhar maior intuição sobre a nova técnica de modelagem proposta e com o segundo pretendemos uma caracterização mais realista dos dados reais.

Na seção 4 analisamos vários aspectos ligados ao Modelo Simplificado.

Na subseção 4.1 derivamos a equação diferencial estocástica seguida pelo preço dos títulos de renda fixa e mostramos como interpretá-la. Em particular, observamos que o retorno instantâneo esperado dos títulos depende da forma de toda a estrutura a termo, ao invés de depender somente da taxa de juros instantânea, o que é o caso dos modelos unifatoriais analisandos em Vieira Neto e Valls Pereira (1999).

Na subseção 4.2 estabelecemos as condições sob as quais o mercado descrito pelo Modelo Simplificado é livre de arbitragens e completo. Supondo que estas condições são atendidas, derivamos fórmulas para o preço de opções sobre títulos de renda fixa, utilizando o conceito de medida de probabilidade martingal a termo. Antes de ser utilizado para a obtenção das fórmulas, no entanto, este conceito é extensamente discutido dentro de uma perspectiva mais geral, independente das

hipóteses específicas do modelo.

Na subseção 4.3 obtemos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo.

A seção 5 repete a análise feita sobre o Modelo Simplificado para o Modelo Standard. Conforme veremos, a maior parte do que é discutido sobre o primeiro modelo também se aplica ao segundo. Em razão disso, a análise é mais curta e se atém apenas ao que é específico ao segundo caso considerado.

A seção 6, por fim, faz uma breve conclusão do artigo.

2. Discussão Preliminar

Seja $P(t,T)$ o preço, na data t, de um título de renda fixa que paga uma unidade monetária na data de vencimento $T \geq t$. Definimos a taxa de rendimento do título ou seu *yield to maturity* por meio da expressão:

$$R(t,T-t) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \tag{1}$$

ou

$$P(t,T) = \exp\left[-R(t,T-t)\cdot(T-t)\right] \tag{2}$$

A ETTJ na data t é definida como sendo a função que relaciona $R(t,\tau)$ a τ.

Alguns autores como, por exemplo, McCulloch (1971), Shaefer (1981) e Duarte et alii (1998), estimam $R(t,\tau)$ (com t fixo e único) por meio de uma combinação linear de polinômios em τ. De fato, se as taxas de juros forem uma função relativamente "suave" do termo, este tipo de aproximação pode funcionar bem.

Seja $A_j(\tau)$ um polinômio de grau j em τ. A ETTJ na data t pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R(t,\tau) &= a_0(t)\cdot A_0(\tau) + a_1(t)\cdot A_1(\tau) + ... + a_n(t)\cdot A_n(\tau) + \varepsilon(t,\tau) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\cdot A_j(\tau) + \varepsilon(t,\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

onde os termos $a_0(t), ..., a_n(t)$são os coeficientes da combinação linear e $\varepsilon(t,\tau)$ denota o erro de aproximação do ajuste polinomial em relação a $R(t,\tau)$.

Existem várias escolhas possíveis para a função $A_j(\tau)$. McCulloch (1971), por exemplo, discute o uso de $A_j(\tau) = \tau^j$. Shaefer (1981) utiliza polinômios de Bernstein:

$$A_j(\tau) = \begin{cases} 1 \text{ se } j = 0 \\ \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^{r+1} \binom{n-j}{r} \frac{\tau^{j+r}}{j+r} \text{ se } j = 1, ..., n \text{ com } \tau \in [0,1] \end{cases}$$

Duarte et alii (1998), por sua vez, utilizam polinômios de Legendre:

$$A_j(\tau) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d}{d\tau^j} \left[\left(\tau^2 - 1\right)^j \right] \text{ com } \tau \in [-1, 1]$$

Vale notar que, nos dois últimos casos, as condições $\tau \in [0,1]$ e $\tau \in [-1,1]$ não implicam perda de generalidade, uma vez que a unidade de tempo pode ser redimensionada.

Na sequência deste artigo, por razões ligadas à simplicidade e à interpretação dos resultados, consideraremos apenas o conjunto de polinômios $A_j(\tau) = b_0$ para $j = 0$ e $A_j(\tau) = b_j \cdot \tau^j$ para $j = 1, ..., n$. A escolha das constantes $b_0, ..., b_n$ está ligada à questão da precisão dos métodos numéricos utilizados. Os principais resultados do trabalho, no entanto, se repetiriam, com ligeiras modificações, caso utilizássemos outros conjuntos de polinômios.

Substituindo $A_0(\tau) = b_0$ e $A_j(\tau) = b_j \cdot \tau^j$ $(j = 1, ..., n)$ em (3) obtemos a seguinte representação da ETTJ:

$$R(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \cdot b_j \cdot \tau^j + \varepsilon(t,\tau) \tag{4}$$

Na expressão (4) é possível perceber que o vetor de coeficientes $a = [a_0, a_1, ..., a_n]$ possui uma interpretação econômica importante: a_0 representa o nível da ETTJ, a_1 a inclinação, a_2 a curvatura, a_3 a dupla curvatura, e assim por diante.

Para ilustrar este ponto, desenhamos o gráfico da estrutura a termo numa determinada data t utilizando $A_j(\tau) = 10^j \cdot \tau^j$ e supondo, por exemplo, $n = 3$, $a = [18,1250; 2,2974; -0,1135; 0,0019]$ e $\varepsilon(t,\tau) = 0$ para todo τ. Depois disso, variamos os coeficientes a_0, a_1, a_2 e a_3, um por vez, e redesenhamos a ETTJ em cada uma das situações. O resultado final foram os quatro gráficos apresentados a seguir. Cada um deles compara a curva de juros original (linha marcada) com a nova curva (linha lisa) produzida a partir da variação de apenas um dos coeficientes:

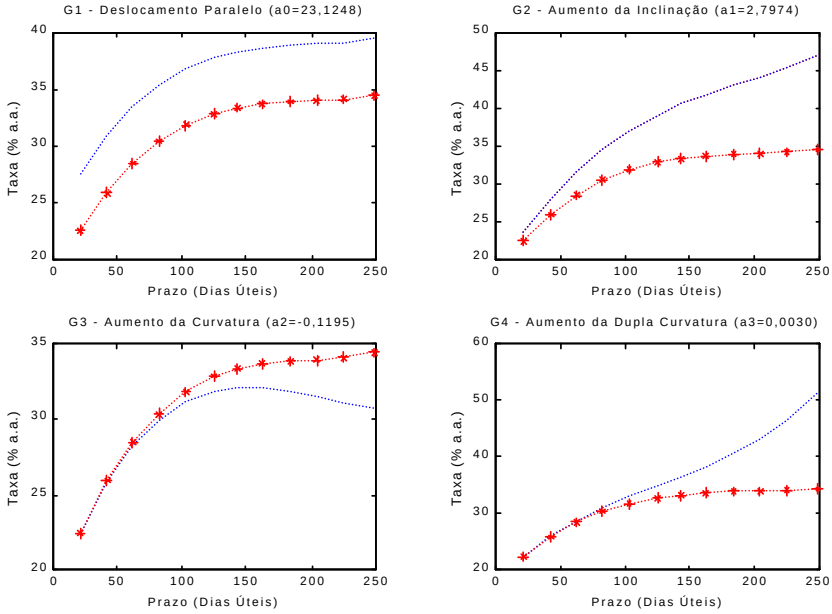


Figura 1

Como observamos nos gráficos, cada coeficiente a_i captura um aspecto diferente da curva de juros. Nesse sentido, dizemos que a representação polinomial decompõe os movimentos da estrutura a termo nos fatores nível, inclinação, curvatura, etc. Se todos eles se modificarem simultaneamente, a curva resultante pode ser radicalmente distinta da original.

Supondo que a aproximação polinomial de (4) seja suficientemente boa e, por consequência, que a magnitude de $\varepsilon(t,\tau)$ seja desprezível para todo τ, o vetor $a(t) = [a_0(t), ..., a_n(t)]$ definirá toda a estrutura a termo (e o preço de um continuum de títulos) numa determinada data t. Por um lado, este tipo de especificação pode ser útil quando da avaliação de uma carteira de intrumentos pré-fixados mas, por outro, não diz nada sobre o comportamento dinâmico da ETTJ. Consequentemente, não constitui um modelo capaz de auxiliar a definição de estratégias e o gerenciamento de risco de uma carteira pré-fixada e, menos ainda, um modelo capaz de gerar fórmulas para a avaliação e o hedge de contratos derivativos diretamente ligados às taxas de juros.

Este trabalho parte da constatação desta deficiência, generaliza a idéia da representação da ETTJ por meio de uma combinação linear de polinômios e obtém um modelo que propicia uma análise integrada da estrutura a termo e seus derivativos. A noção básica que permeia todo o desenvolvimento do trabalho é simples: uma vez que a ETTJ evolui de acordo com a evolução conjunta dos fatores

nível, inclinação, curvatura,..., uma estratégia plausível para a modelagem de sua dinâmica é a própria modelagem do vetor $a(t) = [a_0(t), ..., a_n(t)]$.

De fato, a partir da relação $R(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \cdot A_j(\tau)$, observamos que a definição do processo estocástico seguido por $a(t)$ implica, implicitamente, o processo estocástico seguido por $R(t,\tau)$.

A estratégia de modelagem proposta possui aspectos atraentes. Em primeiro lugar, os fatores nível, inclinação, curvatura, ..., são termos intuitivos para todos aqueles que possuem algum tipo de contato com o mercado de renda fixa. Tanto isso é verdade que, entre traders, é comum ouvir frases do tipo: "Elevações do nível da estrutura a termo tendem a ser acompanhadas por pequenas elevações na inclinação". E entre risk-managers: "É importante que os cenários de taxa de juros utilizados nos modelos de stress-testing incluam tanto deslocamentos paralelos (nível) como também não paralelos (inclinação, curvatura,...) da curva de juros".

Um outro aspecto importante, por sua vez, relaciona-se ao fato de que a suposição $R(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \cdot A_j(\tau)$ implica, logo de início, a imposição de uma estrutura inicial sobre a forma da ETTJ e sobre os preços dos títulos. Uma situação completamente diferente e potencialmente mais complicada seria aquela na qual a análise e a estimação do processo estocástico seguido pelos preços dos títulos não contasse com nenhuma estrutura preliminar, tendo que partir do "zero". A estrutura inicial imposta pode ser justificada na medida em que auxilia a obtenção de resultados teóricos importantes, é simples e intuitiva e também na medida em que é compatível com as observações empíricas sobre a estrutura a termo.

3. O Modelo

A incerteza da economia é descrita por meio do espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \xi, \{\xi_t\}, P)$, onde Ω é o espaço amostral, ξ a sigma-álgebra, ξ_t uma filtração crescente de ξ e P a medida de probabilidade.

Como anteriormente definido, $P(t,T)$ é o preço, na data t, de um título que paga uma unidade monetária na data de vencimento $T \geq t$. Sua taxa de rendimento ou *yield to maturity* é dado por (1) ou (2) acima.

Supomos que a estrutura a termo obedeça à seguinte relação:

$$\begin{aligned} R(t,\tau,\omega) &= a_0(t,\omega) \cdot A_0(\tau,\omega) + a_1(t,\omega) \cdot A_1(\tau,\omega) \\ &+ \ ... + a_n(t,\omega) \cdot A_n(\tau,\omega) \text{ para } \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{5}$$

com $a(t,\omega)$ um processo de Itô $n+1$ dimensional:

$$\begin{bmatrix} da_0(t,\omega) \\ ... \\ da_n(t,\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0(t,\omega) \\ ... \\ \mu_n(t,\omega) \end{bmatrix} dt + \tag{6}$$
$$\begin{bmatrix} \sigma_{00}(t,\omega) & ... & \sigma_{0n}(t,\omega) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_{n0}(t,\omega) & ... & \sigma_{nn}(t,\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_0(t,\omega) \\ ... \\ dW_n(t,\omega) \end{bmatrix}$$

onde $\mu_i(t,\omega)$ e $\sigma_{ij}(t,\omega)$ $(i,j = 0,1,...,n)$ satisfazem às condições técnicas de integrabilidade necessárias e $W(t,\omega) = [W_0(t,\omega),...,W_n(t,\omega)]$ é um vetor contendo processos de Wiener independentes em (Ω, ξ, ξ_t, P).

É importante notar que $a_0, a_1, ..., a_n$ serão correlacionados quando a matriz Σ for não diagonal. Uma correlação positiva entre a_0 e a_1 indica, por exemplo, que elevações do nível da estrutura a termo normalmente serão acompanhadas por elevações na sua inclinação. A correlação entre os demais coeficientes possui interpretação análoga. A matriz Σ contém, portanto, informações valiosas, especialmente para portfólios com títulos longos ou com opções embutidas.

Supondo τ fixo e aplicando o Lema de Itô em (6), obtemos a equação diferencial estocástica que descreve a evolução da estrutura a termo:

$$dR(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n} A_j(\tau) \cdot da_j(t) \tag{7}$$

Em (7) é nítido que a dinâmica de $R(t,\tau)$, para um τ constante, está sendo dada pela dinâmica de $a_j(t)(j = 0,...,n)$.

Quando analisamos o rendimento de um título ao longo de toda a sua existência, o termo $\tau = T - t$ deixa de ser fixo e a dinâmica de $R(t,\tau) = R(t,T-t)$ passa a ser:

$$dR(t,T-t) = \sum_{j=0}^{n} \left[-a_j(t) \cdot \dot{A_j}(T-t) + A_j(T-t) \cdot da_j(t) \right] \tag{8}$$

onde $\dot{A_j}(\tau)$ denota a derivada de $A_j(\tau)$ em relação a τ.

A expressão (8) espelha o fato de que quando o termo $\tau = T - t$ deixa de ser tratado como uma constante, passando a decrescer com t, a taxa $R(t,T-t)$ passa a se "mover" sobre a curva de juros, fazendo sua dinâmica depender tanto da evolução dos coeficientes da combinação linear de polinômios como também da sensibilidade de $R(t,T-t)$ em relação a t.

A taxa *forward*, na data t, referente a um empréstimo de duração de tempo infinitesimal em T $(f(t,T))$ é definida, implicitamente, por meio da expressão:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_{t}^{T} f(t,v)dv \right) \tag{9}$$

Igualando (2) e (9) obtemos:

$$\int_t^T f(t,v)dv = R(t,T-t)\cdot(T-t) \tag{10}$$

Tomando a derivada parcial de (10) em relação a T:

$$f(t,T) = \frac{\partial R(t,T-t)\cdot(T-t)}{\partial T} \tag{11}$$

Finalmente, substituindo (6) (com τ livre) em (11) obtemos:

$$f(t,T) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\cdot\left[A_j(T-t) + A_j^{\cdot}(T-t)\cdot(T-t)\right] \tag{12}$$

A equação (12) é importante pois provê um meio para a comparação do presente modelo com outros que se baseiam inteiramente sobre a taxa *forward*. O principal exemplo é, sem dúvida, o modelo de Heath et alii (1992). Caso necessário, é possível aplicar o Lema de Itô sobre (12) para obter a equação diferencial estocástica seguida por $f(t,T)$.

Além da possibilidade de comparação com outros modelos, (10) também é utilizada para a definição da taxa de juros de curto prazo, que é dada por $r(t) = f(t,t)$. Dessa forma,

$$r(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\cdot A_j(0) \tag{13}$$

Substituindo $A_0(\tau) = b_0$ e $A_j(\tau) = b_j\cdot\tau^j$ $(j = 1,...,n)$ em (13) obtemos $r(t) = a_0(t)\cdot b_0$. Este resultado é interessante pois mostra que o nível da estrutura a termo está sendo dado pela taxa de juros de curto prazo.

Por fim, o resultado da aplicação de uma unidade monetária na taxa de juros de curto prazo (*money market account*) ao longo de $[0,t]$ é definido da maneira usual:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \tag{14}$$

Na próxima seção, propomos duas especificações distintas para o processo estocástico do vetor $a = [a_0, a_1, ..., a_n]$ e analisamos ambas em separado. Chamamos a primeira de **Modelo Simplificado** e a segunda de **Modelo Standard**. Com a primeira especificação objetivamos adquirir maior intuição sobre as propriedades e o funcionamento do modelo. Trabalhamos apenas com os fatores nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo, todos não correlacionados e não estacionários. A segunda especificação objetiva oferecer uma caracterização mais realista da estrutura a termo. Trabalhamos com os fatores nível, inclinação, curvatura e dupla curvatura, todos correlacionados e estacionários.

Primeiramente analisaremos as propriedades do **Modelo Simplificado** e depois do **Modelo Standard**. Apesar das diferenças entre as duas versões, muitos aspectos da análise da primeira também se aplicam à segunda. Por esse motivo, o estudo do primeiro modelo será mais extenso, enquanto que o do segundo se preocupará apenas em realçar os pontos divergentes.

4. O Modelo Simplificado

Definimos o polinômio $A_j(\tau)$ da seguinte maneira:

$$A_0(\tau) = b_0,\ A_1(\tau) = b_1 \cdot \tau,\ A_2(\tau) = b_2 \cdot \tau^2,\ A_j(\tau) = 0 \text{ para } j > 2$$

onde $b_0, b_1, b_2 \in \Re^+$.

As constantes b_0, b_1, b_2 são escolhidas de forma a tornar a estimação do vetor a numericamente mais precisa.[1]

A taxa de rendimento ou *yield to maturity* de um título com vencimento em T é dada por:

$$R(t, T-t) = a_0(t) \cdot b_0 + a_1(t) \cdot b_1 \cdot (T-t) + a_2(t) \cdot b_2 \cdot (T-t)^2 \qquad (15)$$

O vetor $a = [a_0, a_1, a_2]$ obedece à seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{bmatrix} da_0(t) \\ da_1(t) \\ da_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_0(t) \\ dW_1(t) \\ dW_n(t) \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Com σ_0, σ_1 e $\sigma_2$constantes e diferentes de zero e $W_0(t)$, $W_1(t)$ e $W_2(t)$ processos de Wiener independentes em $(\Omega, \xi, \{\xi_t\}, P)$.

Em (16) notamos que $a_i(t) = \sigma_i \cdot W_i(t)$, o que significa que o nível, a inclinação e a curvatura da estrutura a termo evoluem segundo passeios aleatórios, com as respectivas variâncias tendendo ao infinito. Conforme já salientado, o **Modelo Simplificado** possui caráter apenas heurístico e não se pretende uma descrição fiel dos dados empíricos.

A taxa de juros de curto prazo é $r(t) = f(t,t) = b_0 \cdot a_0(t)$ e o ativo instantâneamente livre de risco é definido da maneira usual, isto é, como em (14).

4.1 Dinâmica dos títulos de renda fixa

O preço, na data t, de um título que paga 1$ na data de vencimento T é dado por:

[1] Por estimação queremos dizer, simplesmente, a obtenção do vetor a que minimiza a soma dos quadrados dos erros de aproximação do ajuste polinomial, tal como feito no apêndice A deste artigo. A método numérico ao qual nos referimos é tão somente a inversão da matriz $A\prime(\tau, n)A(\tau, n)$, definida no mesmo apêndice.

$$P(t,T) = \exp\left(-R(t,T-t)\cdot(T-t)\right) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\big(-a_0(t)\cdot b_0\cdot(T-t) + a_1(t)\cdot b_1\cdot(T-t)^2 \\ &+ a_2(t)\cdot b_2\cdot(T-t)^3\big) \end{aligned} \tag{18}$$

Pelo Lema de Itô, $P(t,T)$ obedece à seguinte equação diferencial estocástica:

$$dP(t,T) = \frac{\partial P(t,T)}{\partial t}dt + \sum_{j=0}^{2}\frac{\partial P(t,T)}{\partial a_j}da_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial a_j \partial a_i}da_j da_i \tag{19}$$

Computando as derivadas parciais a partir de (19) e os termos que envolvem da_i e da_j e substituindo em (19) obtemos:

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[\mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)\right] \tag{20}$$

com

$$\mu(t,T) = b_0\cdot a_0(t) + 2b_1\cdot(T-t)\cdot a_1(t) + 3b_2\cdot(T-t)^2\cdot a_2(t) + \frac{1}{2}|\sigma(t,T)|^2 \tag{21}$$

$$\sigma(t,T) = -\left[b_0\cdot\sigma_0\cdot(T-t),\ b_1\cdot\sigma_1\cdot(T-t)^2,\ b_2\cdot\sigma_2\cdot(T-t)^3\right] \tag{22}$$

$$dW(t) = [dW_0(t),\ dW_1(t),\ dW_2(t)] \tag{23}$$

O **Modelo Simplificado** possui caráter heurístico devido à forma assumida pelo processo estocástico do vetor $a(t)$. Apesar disso, a representação da estrutura a termo sob a forma de uma função quadrática, como em (15), permite a obtenção de resultados e insigths importantes. Em (20), (21) e (22) observamos que:

- O retorno instantâneo esperado dos títulos é uma **função crescente** da volatilidade instantânea dos mesmos. Esta característica do modelo é importante pois reproduz evidências empíricas fundamentais: investidores avessos ao risco demandam um retorno esperado maior sempre que o risco também for maior.
- Um aumento no valor de a_0, a_1 ou a_2 aumenta o retorno instantâneo esperado dos títulos. A interpretação disso é simples: o aumento de qualquer uma destas variáveis causa um deslocamento para cima da curva de juros,

o que reduz o preço dos títulos e, por consequência, aumenta o retorno esperado dos mesmos. Ao contrário dos modelos unifatoriais, o retorno instantâneo esperado dos títulos depende não só do valor corrente da taxa de juros de curto prazo mas sim da forma completa da estrutura a termo, isto é, do seu nível (a_0), sua inclinação (a_1) e sua curvatura (a_2). Esta característica provê ao modelo um grau de realismo inexistente no modelos unifatoriais.

- Alterações do nível (a_0) da estrutura a termo afetam o retorno instantâneo dos títulos de forma homogênea. No entanto, quanto maior for o prazo para o vencimento dos mesmos, tanto maior o efeito de alterações da inclinação (a_1) e da curvatura (a_2) sobre seus retornos instantâneos esperados.

- A volatilidade instantânea dos títulos decresce conforme se aproxima a data de vencimento e, em tal data, ela é igual a zero. Este resultado é natural e desejado, uma vez que, na data de vencimento, o título possui um valor não aleatório. Além disso, vale notar que, em (20), a convergência do preço para o valor de face é garantida devido à forma como a equação foi construída: ela provém de (17), onde se tem $P(T,T) = 1$.

4.2 Avaliação de contratos derivativos

Para que o modelo proposto possa ser estendido e utilizado na avaliação e *hedge* de contratos derivativos, é fundamental estabelecer as condições sob as quais o mesmo é livre de arbitragens e completo.

Teorema 4.2.1 *O mercado descrito pelo **Modelo Simplificado** será livre de arbitragens se forem negociados títulos de renda fixa com, no máximo, 3 datas de vencimento distintas.*

Prova Para demonstrar o resultado enunciado, inicialmente demonstramos que existe o processo adaptado tal que $\lambda(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \Re^3$ tal que $\sigma(t,T) \cdot \lambda(t) = \mu(t-T) - r(t)$ para todo $T \in \{T_1, T_2, T_3\}$ com $T_1 \neq T_2 \neq T_3$. Para tanto, é necessário provar que existe uma solução $\lambda(t)$ para o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \sigma(t,T_1) \\ \sigma(t,T_2) \\ \sigma(t,T_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t-T_1) - r(t) \\ \mu(t-T_2) - r(t) \\ \mu(t-T_3) - r(t) \end{bmatrix} \tag{24}$$

Substituindo (23) em (21)

$$\begin{bmatrix} -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_1 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_1 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_1 - t)^3 \\ -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_2 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_2 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_2 - t)^3 \\ -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_3 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_3 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_3 - t)^3 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t - T_1) - r(t) \\ \mu(t - T_2) - r(t) \\ \mu(t - T_3) - r(t) \end{bmatrix} \tag{25}$$

Como $T_1 \neq T_2 \neq T_3$, as linhas da primeira matriz do sistema (25) são o linearmente independentes e o sistema possui a solução o:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_1 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_1 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_1 - t)^3 \\ -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_2 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_2 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_2 - t)^3 \\ -b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_3 - t) & -b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_3 - t)^2 & -b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T_3 - t)^3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mu(t - T_1) - r(t) \\ \mu(t - T_2) - r(t) \\ \mu(t - T_3) - r(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Definimos a medida de probabilidade $Q(\omega)$ em (Ω, ξ_T) por meio de:

$$dQ(\omega) = \exp\left(- \int_0^T \lambda(t, \omega)\, dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T |\lambda(t, \omega)|^2\, dt \right) dP(\omega) \tag{27}$$

De acordo com o teorema de Girsanov o processo

$$W^Q(t) = \int_0^t \lambda(s, \omega)\, ds + W(t) \text{ ou } dW^Q(t) = \lambda(t)\, dt + dW(t) \tag{28}$$

é um processo de Wiener sob a medida de probabilidade Q.

Substituindo (28) em (20) e utilizando $\sigma(t, T) \cdot \lambda(t) = \mu(t - T) - r(t)$ obtemos:

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r(t) dt + \sigma(t, T) dW^Q(t) \right] \tag{29}$$

Definimos o processo de preço normalizado pela taxa de juros de curto prazo como $\overline{P}(t, T) = P(t, T) \cdot B^{-1}(t)$. Utilizando (29) e notando que $dB(t) = r(t) \cdot B(t) \cdot dt$, a aplicação do Lema de Itô sobre $\overline{P}(t, T)$ produz:

$$d\overline{P}(t,T) = \overline{P}(t,T) \cdot \sigma(t,T) \cdot dW^Q(t) \tag{30}$$

Em (30) observamos que os preços dos títulos normalizados pela taxa de juros de curto prazo são martingais sob Q.[2] Dessa forma, Q é uma medida de probabilidade martingal equivalente e, portanto, não existem arbitragens. Isso conclui a demonstração.

Para tornar a avaliação de contratos derivativos plenamente viável, além da inexistência de arbitragens é necessário estabelecer as condições sob as quais o mercado é completo. Resumidamente, é possível demonstrar que um mercado onde são negociados títulos com vencimentos $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ será completo se, e somente se, a matriz

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(t,T_1) \\ \sigma(t,T_2) \\ \sigma(t,T_3) \end{bmatrix}$$

possuir inversa. Como a prova deste resultado é bastante longa e técnica, é apresentada no apêndice A.

A existência da medida de probabilidade Q e o fato do mercado ser completo possuem como consequência imediata a fórmula de precificação:

$$\pi_t(X) = B(t) \cdot E^Q(X \cdot B^{-1}(T) \mid \xi_t) \tag{31}$$

onde $\pi_t(X)$ denota o preço livre de arbitragem de um contrato derivativo do tipo europeu X com data de vencimento T.

Nosso objetivo seguinte é a obtenção de uma fórmula para o preço de uma opção sobre um título de renda fixa no contexto do **Modelo Simplificado**. Para tanto, utilizaremos o conceito de medida de probabilidade martingal a termo, tal qual exposto em Musiela e Rutkowski (1998).

Para entendermos a relevância do novo conceito num ambiente de taxas de juros estocásticas, atentamos para a fórmula de precificação (31) e como é possível observar, a resolução da integral, implícita no operador esperança de (31), envolve o conhecimento da função densidade de probabilidade condicional conjunta de X e B_T^{-1}. A derivação dessa função pode ser uma tarefa complicada, dificultando a obtenção de soluções analíticas para os preços dos derivativos.

Naturalmente, num ambiente de taxa de juros determinista, como é o caso do modelo de Black & Scholes, este problema não se coloca, uma vez que, sob esta hipótese, (31) pode ser reescrita como:

$$\pi_t(X) = B(t) \cdot B^{-1}(T) \cdot E^Q(X \mid \xi_t) = \exp\left(-r(T-t)\right) \cdot E^Q(X \mid \xi_t) \tag{32}$$

[2] Mais especificamente, (30) permite observar que o preço descontado é uma integral de Itô sob Q. Como esta integral é martingal, segue a conclusão do texto.

Como veremos nas subseções seguintes, a medida de probabilidade martingal a termo, especialmente desenvolvida para um ambiente de taxas de juros estocásticas, possibilita a solução de (31) sem a necessidade de derivação da função densidade de probabilidade condicional conjunta de X e B_T^{-1}.

A próxima subseção introduz a nova medida de probabilidade, enquanto que a seguinte utiliza o novo conceito para a derivação do preço de opções sobre títulos de renda fixa no contexto do **Modelo Simplificado**.

A maior parte das duas subseções seguintes é completamente independente das hipóteses do **Modelo Simplificado**, constituindo uma análise geral que se aplica a um grande número de modelos de finanças onde as taxas de juros são estocásticas. Em razão disso, os mesmos conceitos poderão ser utilizados quando da análise do **Modelo Standard**.

4.2.1 Medida de probabilidade martingal a termo

Sejam as datas $0 \leq t \leq U \leq T$. Um contrato a termo firmado na data t, para a entrega, na data U, de um ativo com preço $X(t)$, é equivalente ao título contigente $G(U)$ que paga a quantidade $G(U) = X(U) - F_X(t,U)$ na data U e atende às seguintes condições: (a) $F_X(t,U)$ é uma variável aleatória ξ_t-mensurável, chamada de **preço a termo** de X e (b) o preço livre de arbitragem de $G(U)$ na data t é zero, isto é, $B(t) \cdot E^Q(G(U) \cdot B^{-1}(U) \mid \xi_t) = 0$.

Notamos o seguinte:

$$\pi_t(G(U)) = B(t) \cdot E^Q((X(U) - F_X(t,U)) \cdot B^{-1}(U)|\xi_t) = 0 \qquad (33)$$

A partir de (33) e utilizando o fato de que $F_X(t,U)$ é ξ_t-mensurável, é possível perceber que:

$$F_X(t,U) = \frac{B(t) \cdot E^Q(X(U) \cdot B^{-1}(U)|\xi_t)}{P(t,U)} = \frac{\pi_t(X(U))}{P(t,U)} \qquad (34)$$

Dois são os casos mais típicos. O primeiro deles, quando X se refere ao preço de uma ação $(X(t) = S(t))$ e o segundo quando X se refere ao preço de um título de renda fixa $(X(t) = P(t,T))$. Dessa forma, temos as seguintes relações:

$$F_S(t,U) = \frac{S(t)}{P(t,U)} \qquad (35)$$

e

$$F_{P(t,T)}(t,U) = \frac{P(t,T)}{P(t,U)} \qquad (36)$$

Para introduzir a medida de probabilidade martingal a termo definimos o seguinte processo estocástico:

$$\eta(t) = \frac{P(t,U)}{B(t) \cdot P(0,U)} = \frac{\overline{P}(t,U)}{P(0,U)} \qquad (37)$$

Lembrando que $\mathrm{d}\overline{P}(t,U) = d\big(P(t,U)\cdot B^{-1}(t)\big) = \overline{P}(t,U)\cdot\sigma(t,U)\cdot dW^{Q}(t)$, a aplicação do Lema de Itô em (37) produz:

$$d\eta(t) = \eta(t)\cdot\sigma(t,U)\cdot dW^{Q}(t) \tag{38}$$

E aplicando o Lema de Itô, novamente, sobre $ln(\eta(t))$ obtemos o resultado desejado:

$$\eta(t) = \exp\left(\int_0^t \sigma(s,U)\cdot dW^{Q}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma(s,U)|^2 ds\right) \tag{39}$$

A medida de probabilidade F em (Ω,ξ_U) equivalente a Q, definida por $dF = \eta(U)dQ$, é chamada de medida martingal a termo. Pelo teorema de Girsanov, o processo:

$$W^{F}(t) \equiv W^{Q}(t) - \int_0^t \sigma(s,U)ds \tag{40}$$

é um processo de Wiener sob F.

Para entendermos porque F é chamada de **medida martingal a termo** notamos que, pela regra de Bayes e pelo fato de $\eta(t)$ ser martingal sob Q (equação (38)) podemos escrever o seguinte:

$$E^{F}(X(U)\mid\xi_t) = \frac{E^{Q}(\eta(U)\cdot X(U)\mid\xi_t)}{E^{Q}(\eta(U)\mid\xi_t)} = E^{Q}(\eta(U)\cdot\eta^{-1}(t)\cdot X(U)\mid\xi_t) \tag{41}$$

E substituindo (37) em (41):

$$E^{F}(X(U)\mid\xi_t) = \frac{B(t)\cdot E^{Q}(X(U)\cdot B^{-1}(U)\mid\xi_t)}{B(t)\cdot E^{Q}(B^{-1}(U)\mid\xi_t)} = \frac{\pi_t(X(U))}{P(t,U)} \tag{42}$$

Finalmente, substituindo (34) em (42) obtemos:

$$F_X(t,U) = E^{F}(X(U)\mid\xi_t) \tag{43}$$

Em (43) observamos que o preço a termo na data t, para entrega em U, de um ativo X, pode ser obtido tomando-se a esperança condicional de $X(U)$ sob a medida de probabilidade F. Como $F_X(U,U) = X(U)$, temos $F_X(t,U) = E^{F}(F_X(U,U)\mid\xi_t)$, de onde é possível concluir que o preço a termo $F_X(t,U)$ é martingal sob F, o que justifica seu nome.

Por último, o resultado que nos auxiliará na derivação de preços de opções num ambiente de taxas de juros estocásticas é obtido por meio da combinação de (43) com (34):

$$\pi_t(X(U)) = P(t,U) \cdot E^F(X(U) \mid \xi_t) \tag{44}$$

Em (44) observamos que a operação de integração, implícita no operador esperança, não envolve o conhecimento da função densidade de probabilidade condicional conjunta de $X(U)$ e $B^{-1}(U)$. Ao invés disso, passa a ser necessário o conhecimento da distribuição de probabilidade condicional de $X(U)$ sob F. Em muitas situações, a obtenção de soluções para o preço de derivativos ligados à estrutura a termo torna-se uma tarefa mais simples.

4.2.2 Derivação de uma fórmula para o preço de opções sobre títulos de renda fixa no contexto do modelo simplificado

Supomos uma opção de compra européia sobre o título $P(t,T)$, com preço de exercício E e data de vencimento $U < T$.

Em sua data de vencimento a opção vale:

$$c(U) = \max(0, P(U,T) - E) \tag{45}$$

Na data $t \leq U$ seu preço livre de arbitragem é:

$$c(t) = B(t) \cdot E^Q \left[\max(0, P(U,T) - E) \cdot B^{-1}(U) \mid \xi_t)\right] \tag{46}$$

ou

$$c(t) = P(t,U) \cdot E^F \left[\max(0, P(U,T) - E) \mid \xi_t)\right] \tag{47}$$

Para simplificar a notação, seja $F(t,U,T)$ o preço a termo, na data t, para a entrega, na data U, de um título que vence em T. Então, pela equação (35),

$$F(t,U,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,U)} \tag{48}$$

e

$$F(U,U,T) = P(U,T) \tag{49}$$

Utilizando (49), a expressão (47) pode ser escrita como:

$$c(t) = P(t,U) \cdot E^F \left[\max(0, F(U,U,T) - E) \mid \xi_t)\right] \tag{50}$$

Para podermos solucionar (50), primeiramente estabelecemos a dinâmica de $F(t,U,T)$ sob F. Isto é feito por meio da relação (29), isto é:

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[r(t) \cdot dt + \sigma(t,T) \cdot dW^Q(t)\right]$$

da fazendo $T = U$ na expressão acima temos:

$$dP(t,U) = P(t,U)\left[r(t) \cdot dt + \sigma(t,U) \cdot dW^Q(t)\right] \tag{51}$$

e a expressão (40), isto é,

$$W^F(t) \equiv W^Q(t) - \int_0^t \sigma(s,U)ds$$

De fato, sendo $g(P(t,T),P(t,U)) = \frac{P(t,T)}{P(t,U)}$, a aplicação do Lema de Itô sobre (48) produz:

$$\begin{aligned} dF(t,U,T) \quad = \quad & \tfrac{\partial g}{\partial t}dt + \tfrac{\partial g}{\partial P(t,T)}dP(t,T) + \tfrac{\partial g}{\partial P(t,U)}dP(t,U) + \\ & \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 g}{[\partial P(t,T)]^2}\left(dP(t,T)\right)^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 g}{[\partial P(t,U)]^2}\left(dP(t,U)\right)^2 + \\ & \tfrac{\partial^2 g}{\partial P(t,T)\partial P(t,U)}dP(t,T)dP(t,U) \end{aligned} \tag{52}$$

Computando as derivadas parciais e os termos que envolvem $dP(t,T)$ e $dP(t,U)$ e substituindo em (52), obtemos a expressão que descreve a dinâmica de $F(t,U,T)$ sob Q:

$$\begin{aligned} dF(t,U,T) \quad = \quad & F(t,U,T)\big(\left(|\sigma(t,U)|^2 - \sigma(t,T)\cdot\sigma(t,U)'\right)dt \\ + \quad & (\sigma(t,T)-\sigma(t,U))\cdot dW^Q(t)\big) \end{aligned} \tag{53}$$

Finalmente, substituindo (40) em (53) obtemos a expressão que descreve a dinâmica de $F(t,U,T)$ sob F:

$$dF(t,U,T) = F(t,U,T)\cdot\left((\sigma(t,T)-\sigma(t,U))\cdot dW^F(t)\right) \tag{54}$$

Em (54) observamos que $F(t,U,T)$ é martingal sob F, conforme já demonstrado. Para solucionar esta expressão, aplicamos o Lema de Itô sobre $ln(F(t,U,T))$ e obtemos:

$$\begin{aligned} F(t,U,T) \quad = \quad & F(0,U,T)\cdot\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\int_0^t |\sigma(s,T)-\sigma(s,U)|^2 ds \\ + \quad & \int_0^t (\sigma(s,T)-\sigma(s,U))\cdot dW^F(s)\Big) \end{aligned} \tag{55}$$

Até este ponto, não utilizamos nenhuma propriedade específica do Modelo Simplificado, exceto o fato de ser livre de arbitragens e completo quando são negociados títulos com apenas 3 datas de vencimento distintas. De agora em diante, a análise deixa de possuir caráter geral, retornando para o modelo em questão.

No Modelo Simplificado, as funções $\sigma(s,T)$ e $\sigma(s,U)$ são deterministas e, em decorrência disso, notamos em (55) que a distribuição condicional de $F(U,U,T)$ sob F é:

$$F(U,U,T) \mid \xi_t \overset{F}{\sim} \log \text{ normal } (m, v^2) \tag{56}$$

A seguir mostraremos como determinar m e $v2$. Usando a propriedade da média da distribuição lognormal e o fato de $F(t,U,T)$ ser martingal sob F obtemos:

$$E^F\left(F(U,U,T) \mid \xi_t\right) = F(t,U,T) = \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \tag{57}$$

Substituindo (48) em (57) somos capazes de obter a média m como função da variância v^2 e dos preços $P(t,T)$ e $P(t,U)$:

$$m = \ln\frac{P(t,T)}{P(t,U)} - \frac{v^2}{2} \tag{58}$$

Substituindo (58) em (56) eliminamos o parâmetro não observável m da distribuição condicional de $F(U,U,T)$ sob F, em troca da aparição dos preços observáveis $P(t,T)$ e $P(t,U)$:

$$F(U,U,T)|\xi_t \overset{F}{\sim} \log normal(\ln\frac{P(t,T)}{P(t,U)} - \frac{v^2}{2}, v^2) \tag{59}$$

A variância condicional v^2 pode ser calculada utilizando-se (55):

$$\begin{aligned}
v^2 &= Var^F(\ln(F(U,U,T) \mid \xi_t) \\
&= Var^F(\ln(F(0,U,T) - \tfrac{1}{2}\int_0^U \mid \sigma(s,T) - \sigma(s,U) \mid^2 ds \\
&+ \int_0^U (\sigma(s,T) - \sigma(s,U) \cdot \ dW^F(s) \mid \xi_t) \\
&= Var^F(\int_t^U (\sigma(s,T) - \sigma(s,U) \cdot dW^F(s) \mid \xi_t) \\
&= E^F\left[\left(\int_t^U (\sigma(s,T) - \sigma(s,U) \cdot dW^F(s)\right)^2 \mid \xi_t\right] \\
&= E^F\left(\int_t^U |\sigma(s,T) - \sigma(s,U)|^2 ds | \xi_t\right) = \int_t^U \mid \sigma(s,T) \\
&- \sigma(s,U) \mid^2 ds
\end{aligned} \tag{60}$$

Na segunda passagem utilizamos o fato de $\sigma(s,T)$ e $\sigma(s,U)$) serem deterministas e também a propriedade martingal da integral de Itô. Na passagem em que a integral de Itô foi eliminada utilizamos a Isometria de Itô. Utilizando a equação (22) com $t = s$, isto é,

$$\sigma(s,T) = -\left[b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T-s),\ b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T-s)^2,\ b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (T-s)^3\right]$$

e

$$\sigma(s,U) = -\left[b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (U-s),\ b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (U-s)^2,\ b_2 \cdot \sigma_2 \cdot (U-s)^3\right] \quad (61)$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \int_t^U \Big[b_0^2 \cdot \sigma_0^2 \cdot ((T-s)-(U-s))^2 + b_1^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \left((T-s)^2-(U-s)^2\right)^2 \\ &+ b_2^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \left((T-s)^3-(U-s)^3\right)^2\Big] ds \end{aligned}$$

Finalmente, conforme demonstrado no apêndice B, a integral acima apresentada resulta em:

$$v^2 = \frac{1}{30}(U-t)(T-U)^2\left(k_0(t)\cdot b_0^2\cdot\sigma_0^2 + k_1(t)\cdot b_1^2\cdot\sigma_1^2 + k_2(t)\cdot b_2^2\cdot\sigma_2^2\right) \quad (62)$$

com

$$k_0(t) = k_0 = 30$$

$$k_1(t) = 30T^2 - 60Tt + 10U^2 + 40t^2 - 20Ut$$

$$\begin{aligned} k_2(t) &= 30T^4 - 30T^3U - 90T^3t - 30T^2Ut + 60T^2U^2 - 21U^3t + \\ &+ 105Tt^2U - 75U^2Tt - 135Tt^3 - 15U^3T + 9U^4 + 150T^2t^2 + \\ &+ 69U^2t^2 - 81Ut^3 + 54t^4 \end{aligned}$$

Uma vez que derivamos a distribuição condicional de $F(U,U,T)$ sob F, definimos $y \sim N(m, v^2)$ e o problema de precificação se resume à resolução da integral:

$$\begin{aligned} c_t &= P(t,U)\cdot E^F(\max(0\ ,\ F(U,U,T)-E)\mid \xi_t) = \\ &= P(t,U)\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \max(0\ ,\ e^y - E)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}\exp\left(-\tfrac{(y-m)^2}{2v^2}\right) dy \end{aligned} \quad (63)$$

A integração não envolve dificuldades e é apresentada no apêndice C. O preço livre de arbitragem da opção de compra é:

$$\begin{aligned} c_t &= P(t,U)\cdot N(h_1(P(t,T),P(t,U),v,E)) \\ &- E\cdot P(t,U)\cdot N(h_2(P(t,T),P(t,U),v,E)) \end{aligned} \quad (64)$$

com

$$h_1 = \frac{\ln(P(t,T)/P(t,U)E) + v^2/2}{v} \text{ e } h_2 = h_1 - v \tag{65}$$

$$v^2 = \int_t^U \mid \sigma(s,T) - \sigma(s,U) \mid^2 ds$$

Utilizando a paridade entre *puts* e *calls*, obtemos o preço da opção de venda (p_t). Sejam duas carteiras, A e B:

A : uma opção de compra sobre $P(t,T)$ (com vencimento U e preço de exercício E) mais E unidades do título $P(t,U)$, isto é, uma carteira com valor total igual a $c_t + E \cdot P(t,U)$.

B : uma opção de venda sobre $P(t,T)$ (com vencimento U e preço de exercício E) mais uma unidade do título $P(t,T)$, istoé, uma carteira com valor total igual a $p_t + P(t,T)$.

Na data de vencimento das duas opções, tanto A como B valem $\max(P(U,T),E)$. Consequentemente, para que não ocorram arbitragens, as duas carteiras devem possuir o mesmo valor na data inicial t:

$$c_t + E \cdot P(t,U) = p_t + P(t,T) \tag{66}$$

A substituição de (64) em (66) produz:

$$\begin{array}{rcl} p_t & = & E \cdot P(t,U) \cdot N(-h_2(P(t,T),P(t,U),v,E)) \\ & - & P(t,T) \cdot N(-h_1(P(t,T),P(t,U),v,E)) \end{array} \tag{67}$$

4.3 Estimação dos parâmetros do modelo

Nesta seção derivamos uma fórmula para a estimação dos parâmetros do **Modelo Simplificado** por máxima verossimilhança.

Conforme já discutido, a hipótese fundamental do modelo é a de que a estrutura a termo pode ser representada por meio de uma combinação linear de polinômios. Em outras palavras, supomos que o conhecimento da estrutura a termo $\{R(t,\tau)\}_{\tau=0}^{\tau^*}$ implica o conhecimento do vetor $a(t) = [a_1(t),...,a_n(t)]$ e vice-versa.

No Modelo Simplificado temos:

$$R(t,\tau) = a_0(t) \cdot A_0(\tau) + a_1(t) \cdot A_1(\tau) + a_2(t) \cdot A_2(\tau)$$

com $A_j(\tau) = b_j \cdot \tau^j$, $a_j(t) = \sigma_j \cdot W(t)$ $(j = 0,1,2)$.

Como é possível observar, os únicos parâmetros desconhecidos são σ_0, σ_1 e σ_2. Estes três termos também são os únicos fatores não observáveis que constam das fórmulas de precificação de opções já derivadas.

Supomos que observamos a estrutura a termo nas datas $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, o que significa que observamos os vetores $\{a(t_1), a(t_2), ..., a(t_n)\}$. Não é necessário que as datas sejam regularmente espaçadas entre sí.

Como os termos do vetor $a(t_i)$ são independentes, trataremos a distribuição de probabilidade de cada um deles individualmente. Notamos o seguinte:

$$a_j(t_i)|a_j(t_{i-1})N(a_j(t_{i-1}), \sigma_j^2(t_i - t_{i-1})) \tag{68}$$

A função densidade de probabilidade conjunta de $\{a_j(t_1), a_j(t_2), ..., a_j(t_n)\}$ é:

$$f(a_j(t_1), a_j(t_2), ..., a_j(t_n)) = \prod_{i=1}^{n} f(a_j(t_{n-i+1})|a_j(t_{n-i}) \tag{69}$$

com

$$\begin{array}{c} f(a_j(t_{n-i+1}) \mid a_j(t_{n-i})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2(t_{n-i+1}-t_{n-i})}} \\ \exp\left(-\frac{(a_j(t_{n-i+1}) \mid a_j(t_{n-i}))^2}{2\sigma_j^2(t_{n-i+1}-t_{n-i})}\right) \end{array} \tag{70}$$

com $t_0 \equiv 0$ e $a_j(t_0) \equiv 0$.

A partir de (69) e (70), a função de log-verossimilhança do modelo pode ser computada, resultando em:

$$\begin{array}{rcl} \ell(\sigma_j^2 \mid \{a_j(t_1), a_j(t_2), ..., a_j(t_n)\}) & = & -\frac{n}{2}\ln(\sigma_j^2) + \frac{n}{2}\ln(2\pi) \\ +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln(t_{n-i+1} - t_{n-i}) & - & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_j(t_{n-i+1}) \mid a_j(t_{n-i}))^2}{\sigma_j^2(t_{n-i+1}-t_{n-i})} \end{array} \tag{71}$$

Tomando a derivada de (71) em relação a σ_j^2 e igualando a zero, encontramos o estimador de máxima verossimilhança:

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_j(t_{n-i+1}) \mid a_j(t_{n-i}))^2}{(t_{n-i+1} - t_{n-i})} \tag{72}$$

Como o estimador dado por (72) possui uma distribuição de probabilidade, os preços de opções que forem calculados a partir do mesmo também estarão sujeitos à variabilidade amostral. Este pode ser um tema interessante para uma pesquisa futura.

5. O Modelo Standard

Nesta seção apresentamos outro caso particular criado a partir do modelo geral da seção 3, chamado de **Modelo Standard**. Este objetiva oferecer uma caracterização mais realista dos dados empíricos sobre a estrutura a termo.

No **Modelo Simplificado**, a curva de juros é descrita por meio dos fatores nível, inclinação e curvatura. Além disso, esses fatores possuem distribuição de probabilidade normal, são não estacionários e não correlacionados.

No **Modelo Standard**, por sua vez, a curva de juros passa a ser descrita pelos fatores nível, inclinação, curvatura e dupla curvatura, este último denotando um polinômio de grau três. Todos os fatores são correlacionados e estacionários. Conforme demonstraremos, a estacionariedade permite a identificação de uma curva de juros esperada no longo prazo ou, em outros termos, de uma curva de juros de "equilíbrio".

Apesar de todas as diferenças citadas, o **Modelo Standard** preserva uma característica fundamental do primeiro caso analisado: todos os fatores possuem distribuição de probabilidade normal. Em razão disso, a maior parte dos resultados do primeiro modelo também pode ser obtida, com ligeiras modificações, no segundo.

A apresentação que fazemos do **Modelo Standard** é resumida. Primeiramente, estabelecemos a dinâmica dos preços dos títulos de renda fixa. Depois disso, utilizando resultados já demonstrados, determinamos as condições para que o mercado seja livre de arbitragens e completo e obtemos fórmulas para o preço de opções sobre títulos. Em relação a estimação dos parâmetros fazemos apenas rápidos comentários.

Definimos o polinômio $A_j(\tau)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_0(\tau) &= b_0, A_1(\tau) = b_1 \cdot \tau, A_2(\tau) = b_2 \cdot \tau^2, \\ A_3(\tau) &= b_3 \cdot \tau_3, A_j(\tau) = 0 \text{ para } j > 3 \end{aligned}$$

onde b_0, b_1, b_2, $b_3 \in \Re$, b_0, b_1, b_2, $b_3 > 0$.

O *yield to maturity*, na data t, de um título com vencimento em T é dado por:

$$R(t, T-t) = a_0(t) \cdot b_0 + a_1(t) \cdot b_1 \cdot (T-t) + a_2(t) \cdot b_2 \cdot (T-t)^2 + a_3(t) \cdot b_3 \cdot (T-t)^3 \tag{73}$$

O vetor $a(t) = [a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)]$ obedece à seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{bmatrix} da_0(t) \\ da_1(t) \\ da_2(t) \\ da_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_0(\theta_0 - a_0(t)) \\ \kappa_1(\theta_1 - a_1(t)) \\ \kappa_2(\theta_2 - a_2(t)) \\ \kappa_3(\theta_3 - a_3(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{00} & ... & \sigma_{03} \\ ... & ... & ... \\ \sigma_{30} & ... & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_0(t) \\ dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{bmatrix} \tag{74}$$

com κ_i, θ_i e σ_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ constantes ($\kappa_i > 0$) e $W_0(t), ..., W_3(t)$ processos de Wiener independentes em $(\Omega, \xi, \{\xi_t\}, P)$.

Na expressão (73), a estrutura a termo esta sendo decomposta nos fatores nível, inclinação, curvatura e dupla curvatura. A dinâmica dos fatores é dada por (74), que é um processo de Ornstein-Uhlenbeck multivariado com reversão à média.

De acordo com (74), o processo estocástico seguido pelo vetor $a(t)$ é estacionário com média de longo prazo dada por $\theta = [\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3]$. A constante

κ_i é a velocidade de reversão à média do i-ésimo fator. Sempre que $a_i(t)$ estiver acima de sua média de longo prazo θ_i, teremos $(\theta_i - a_i(t)) < 0$ e o termo "$\kappa_i(\theta_i - a_i(t)) \cdot dt$" "forçará" $a_i(t)$ para baixo. Ocorrerá exatamente o oposto quando $a_i(t)$ for inferior a θ_i. **O vetor θ, consequentemente, possui a interpretacão de curva de juros esperada no longo prazo ou, em outros termos, de curva de juros de "equilíbrio".**

Também é possível notar, em (74), que o fato da matriz σ poder ser não diagonal implica que as variações dos 4 fatores que regem a dinâmica da estrutura a termo podem ser correlacionadas.

Aplicando o Lema de Itô sobre a função $g_i(t, a_i(t)) = e^{\kappa_i t}\kappa_i(\theta_i - a_i(t))$ somos capazes de solucionar (74):

$$a_i(T) = \theta_i(1 - e^{-\kappa_i \tau}) + a_i(t)e^{-\kappa_i \tau} + \int_t^T e^{\kappa_i(s-T)}\sigma_i dW(s) \text{ para } i = 0, 1, 2, 3 \tag{75}$$

onde $\tau = T - t \geq 0$, $\sigma_i = \left[\sigma_{i0}, \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}\right]$ e $W(t) = \left[W_0(t), W_1(t), W_2(t), W_3(t)\right]$.

Em (75) notamos que o valor do i-ésimo fator na data T $(a_i(T))$ é igual a uma combinação linear entre seu valor na data t $(a_i(t))$ e seu valor de longo prazo (θ_i) mais um termo aleatório que possui média zero condicional ao conjunto de informação ξ_t (a integral de Itô). Também é possível verificar que:

- O vetor $a(T) \mid \xi_t$ possui distribuição normal multivariada;
- Se $\kappa_i = 0$, então $a_i(T) = a_i(0) + \sigma_i W(T)$, isto é, o i-ésimo fator deixa de ser estacionário e passa a seguir um passeio aleatório. Além disso, se também tivermos $\sigma_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, reproduziremos o **Modelo Simplificado**.
- Se $\kappa_i > 0$, a influência de choques passados sobre a_i é ponderada por um fator que decresce exponencialmente com o tempo. Além disso, $\lim_{\kappa_i \to \infty} a_i(T) = \theta_i$.

A esperança e a variância condicionais de $a_i(T)$ podem ser obtidas a partir de (75), e elas são dadas por:

$$E^P(a_i(T) \mid \xi_t) = \theta_i(1 - e^{-\kappa_i \tau}) + a_i(t)e^{-\kappa_i \tau} \tag{76}$$

$$Var^P(a_i(T) \mid \xi_t) = \sigma_i \sigma_i' \frac{1}{2\kappa_i}(1 - e^{-2\kappa_i \tau}) \tag{77}$$

É importante notar que o limite, com T tendendo ao infinito, de (76) e (77) é dado por θ_i e $\frac{\sigma_i \sigma_i'}{2\kappa_i}$, respectivamente. Ao contrário do **Modelo Simplificado**, a variância dos fatores que regem a estrutura a termo não explode com o tempo.

Utilizando a observação de Arnold (1973), é possível obter a covariância condicional entre $a_i(T)$ e $a_j(T)$:

$$Cov^P(a_i(T)\, a_j(T) \mid \xi_t) = \sigma_i \sigma_j{}' \frac{1}{\kappa_i + \kappa_j}(1 - e^{-2(\kappa_i+\kappa_j)\tau}) \tag{78}$$

Observando (78) é possível perceber de que forma os parâmetros da equação (74) determinam a correlação entre variações do nível, da inclinação, da curvatura e da dupla curvatura da estrutura a termo.

As equações (76), (77) e (78) especificam, completamente, a distribuição de probabilidade condicional do vetor $a(T)$.

A taxa de juros de curto prazo $r(t)$ e o investimento instantâneamente livre de risco $B(t)$ são definidos como no modelo anterior.

5.1 Dinâmica dos títulos de renda fixa

O preço, na data t, de um título que paga uma unidade monetária na data de vencimento T é dado por:

$$P(t,T) = exp(-R(t,T-t)\cdot(T-t)) \tag{79}$$

Pelo Lema de Itô, $P(t,T)$ obedece à seguinte equação diferencial estocástica:

$$dP(t,T) = \frac{\partial P(t,T)}{\partial t}dt + \sum_{j=0}^{3}\frac{\partial P(t,T)}{\partial a_j}da_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial a_j \partial a_i}da_j da_i \tag{80}$$

Computando as derivadas parciais a partir de (79) e os termos que envolvem da_i e da_j e substituindo em (80) obtemos:

$$dP(t,T) = P(t,T)\,[\mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)] \tag{81}$$

com

$$\mu(t,T) = \mu_1(t,T) + \mu_2(t,T) + \mu_3(t,T)$$

$$\mu_1(t,T) = \sum_{i=0}^{3}(1+i)(T-t)^i b_i a_i(t)$$

$$\mu_2(t,T) = -\sum_{i=0}^{3}(T-t)^{i+1} b_i \kappa_i(\theta_i - a_i(t))$$

$$\mu_3(t,T) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(T-t)^{i+j+2} b_i b_j \sigma_i \sigma_j{}'$$

$$\sigma(t,T) = -\sum_{i=0}^{3}(T-t)^{i+1}b_i\sigma_i$$

Apesar de ser aparentemente mais complexa, a interpretação de (81) é muito semelhante à da expressão (20), que descreve a dinâmica dos títulos no **Modelo Simplificado**.

O retorno instantâneo esperado μ foi decomposto em três partes (μ_1, μ_2, μ_3) para facilitar sua interpretação. O termo μ_1 é exatamente igual ao que aparece na primeira parte da expressão (21), acrescido de um componente cúbico que não existe no **Modelo Simplificado**. Através de μ_1 o retorno instantâneo esperado dos títulos depende da forma completa da estrutura a termo, ao invés de depender somente da taxa de juros de curto prazo, como é o caso dos modelos unifatoriais.

O termo μ_2 não existe no **Modelo Simplificado** pois neste temos $\kappa_i = 0$. Sua interpretação é simples e interessante. Conforme já discutido, sempre que $a_i(t)$ se encontrar acima de θ_i, o drift "$\kappa_i(\theta_i - a_i(t))dt$" será negativo e "empurrará" $a_i(t)$ para baixo. No caso de $a_i(t)$ se encontrar abaixo de θ_i ocorrerá exatamente o oposto. Supomos, por exemplo, $a_i(t) > \theta_i$ para todo i, o que implica $\mu_2 > 0$. O fato de termos $a_i(t) > \theta_i$ para todo i significa que a curva de juros se encontra acima de seu valor esperado no longo prazo, o que implica títulos de renda fixa com retornos esperados maiores e explica a contribuição positiva do termo μ_2 sobre o retorno instantâneo μ. No caso de termos $a_i(t) < \theta_i$ para todo i ocorrerá exatamente o oposto e isto se refletirá no retorno instantâneo esperado dos títulos por meio de um μ_2 negativo. Em termos mais gerais, μ_2 assumirá sinal positivo ou negativo dependendo da posição de cada um dos fatores a_0, a_1, a_2 e a_3 em relação aos valores de longo prazo θ_1, θ_2, θ_3 e θ_4. **Como o vetor $a(t)$ tende a convergir para o vetor θ, a esperança incondicional de μ_2 é igual a zero**.

O termo μ_3 é semelhante à última parte da expressão (21). Ele contém a própria volatilidade instantânea do título e também outros componentes que refletem a existência de correlação entre os fatores que determinam a dinâmica da estrutura a termo.

Por fim, notamos que, como no **Modelo Simplificado**, a volatilidade instantânea dos títulos $\sigma(t,T)$ converge para zero conforme se aproxima a data de vencimento T.

5.2 Avaliação de contratos derivativos

Para que o modelo proposto possa ser estendido e utilizado na avaliação e *hedge* de contratos derivativos, é fundamental estabelecer as condições sob as quais o mesmo é livre de arbitragens e completo.

Teorema 5.2.1 *O mercado descrito pelo Modelo Standard será livre de arbitragens se forem negociados títulos de renda fixa com, no máximo, 4 datas de vencimento distintas.*

Prova A demonstração do teorema é idêntica àquela do teorema 4.2.1 da subseção 4.2. Ela se baseia na existência do processo adaptado $\lambda(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \Re^4$ tal que $\sigma(t,T) \cdot \lambda(t) = \mu(t,T) - r(t)$ para todo $t \geq 0$ e todo $T \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ com $T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq T_4$. A existência desse processo é garantida devido à possibilidade de inversão da matriz

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma(t,T_1) \\ ... \\ \sigma(t,T_4) \end{bmatrix}$$

Com base em $\lambda(t,\omega)$, definimos a medida de probabilidade Q e utilizamos o teorema de Girsanov para mostrar que ela é uma medida martingal equivalente. A existência de Q equivale à inexistência de arbitragens, o que conclui a demonstração.

De maneira análoga ao **Modelo Simplificado**, o **Modelo Standard** é completo devido à possibilidade de inversão de $\Sigma(t)$ (ver o apêndice B, onde desenvolvemos a prova deste resultado).

O fato de ser completo e não possuir arbitragens (quando são negociados títulos com apenas 4 datas de vencimento distintas) possui como conseqüência a fórmula de avaliação de derivativos:

$$\pi_t(X) = B(t) \cdot E^Q(X \cdot B^{-1}(T) \mid \xi_t)$$

onde $\pi_t(X)$ denota o preço livre de arbitragem de um contrato derivativo do tipo europeu X com data de vencimento T.

5.2.1 Derivação de uma fórmula para o preço de opções sobre títulos de renda fixa no contexto do modelo standard

Grande parte da discussão sobre a *medida martingal a termo* das subseções 4.2.1 e 4.2.2 possui caráter geral e, em decorrência disso, também se aplica ao *Modelo Standard*. A partir da fórmula (56) da subseção 4.2.2, no entanto, a análise passou a depender de uma propriedade específica do Modelo Simplificado, isto é, a de que a volatilidade instantânea dos títulos é uma função determinista.

No **Modelo Standard**, a volatilidade instantânea dos títulos possui uma forma diferente e mais complexa que no **Modelo Simplificado**, devido à possibilidade dos fatores a_0, a_1, a_2 e a_3 serem correlacionados. Não obstante isso, ela continua a ser determinista. Em decorrência dessa propriedade, os preços dos títulos nesse modelo possuem distribuição lognormal e a fórmula para o preço de opções européias sobre títulos é semelhante àquela obtida no Modelo Simplificado. A única diferença é forma da volatilidade condicional v^2.

Seja uma opção de compra européia sobre o título $P(t,T)$, com preço de exercício E e data de vencimento $U < T$. Seu preço livre de arbitragem no **Modelo Standard** é:

$$\begin{aligned} c_t &= P(t,T)\cdot N(h_1(P(t,T),P(t,U),v,E) \\ &- E\cdot P(t,U)\cdot N(h_2(P(t,T),P(t,U),v,E) \end{aligned} \tag{82}$$

com

$$h_1 = \frac{\ln(P(t,T)/P(t,U)E) + v^2/2}{v} \quad \text{e} \quad h_2 = h_1 - v \tag{83}$$

$$v^2 = \int_t^U |\sigma(s,T) - \sigma(s,U)|^2 ds \tag{84}$$

$$\sigma(s,T) = -\sum_{i=0}^{3}(T-s)^{i+1} b_i \sigma_i$$

$$\sigma(s,U) = -\sum_{i=0}^{3}(U-s)^{i+1} b_i \sigma_i$$

$$\sigma_i = [\sigma_{i0}, \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}]$$

A obtenção de uma solução analítica para $v = v(t,T,U)$ é extremamente trabalhosa. Acreditamos ser mais produtivo solucionar (84) numericamente, o que pode ser feito com grande rapidez e precisão utilizando um software matemático como, por exemplo, MatLab, Mathematica ou Maple.

6. Conclusão

Conforme enfatizado na introdução, a literatura sobre a estrutura a termo da taxa de juros pode ser dividida em duas grandes áreas que possuem poucos pontos de ligação. A primeira delas relaciona-se ao problema de estimação da curva de juros enquanto que a segunda refere-se aos assim chamados modelos de equilíbrio ou não arbitragem. Este trabalho utiliza idéias oriundas da literatura de estimação da ETTJ para desenvolver um modelo original que se enquadra na literatura dos modelos de equilíbrio ou não arbitragem.

São vários os aspectos atraentes da nova técnica proposta: (i) os fatores que regem a dinâmica da curva de juros, isto é, nível, inclinação, curvatura, ..., possuem significado simples e intuitivo para todos aqueles em contato com o mercado de renda fixa; (ii) conforme demonstrado no texto, a dinâmica dos títulos de renda fixa depende da forma completa da estrutura a termo, ao invés de ser função somente da taxa de juros de curto prazo, como no caso dos modelos unifatoriais. Esta propriedade confere ao modelo uma dose maior de realismo, o que se expressa, por exemplo, no fato de títulos com datas de vencimento distintas possuírem correlação diferente de 1; (iii) devido à hipótese simplificadora de que os fatores nível, inclinação, curvatura, ..., possuem distribuição de probabilidade

normal multivariada, as duas versões do modelo desenvolvidas são capazes de produzir fórmulas fechadas para o preço de opções. Se pesquisas empíricas futuras indicarem que esta hipótese tem de ser relaxada, pode ser necessário recorrer a métodos numéricos.

Certamente, ainda há muita pesquisa a ser feita no âmbito das idéias apresentadas. Dentre os principais temas estão:

- Estimação dos parâmetros e avaliação econométrica do modelo.

- Dependendo dos resultados do ítem anterior, pode ser necessário postular processos estocásticos distintos para os fatores a_1, a_2, a_3,...a_n e depois investigar as propriedades do novo modelo resultante.

- Ajustes polinomiais não são a única maneira de se aproximar uma determinada curva. As idéias presentes neste artigo poderiam ser desenvolvidas no âmbito de aproximações não lineares como, por exemplo, a exponencial.

- Nas duas versões do modelo desenvolvidas ao longo do texto, os modelos resultantes não são livres de arbitragem quando existem títulos com um número ilimitado de datas de vencimento distintas. Uma extensão à pesquisa que julgamos de grande relevância se refere à tentativa de se definir um modelo totalmente livre de arbitragens. Este poderia ser aplicado à avaliação de derivativos sem qualquer espécie de restrição. A definição de um modelo totalmente livre de arbitragens pode passar pela modificação do processo estocástico do vetor $a(t)$ ou mesmo pela utilização de algum outro tipo de função de aproximação, diferente das funções polinomiais.

Referências

Arnold, L. (1973). *Stochastic Differential Equations*. Wiley & Sons, New York.

Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–408.

Dothan, L. U. (1978.). On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6:59–69.

Duarte, A. M., Almeida, C. I., & Fernandes, C. A. (1998). Decomposing and simulating the movements of term structure of interest rates in emerging eurobond markets. *Journal of Fixed Income*, 8(1):21–21.

Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60:77–105.

McCulloch, J. H. (1971). Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, XLIV:19–31.

McCulloch, J. H. (1975). The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance*, XXX(3):811–830.

Musiela, M. & Rutkowski, M. (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Berlin.

Shaefer, S. M. (1981). Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for british government securities. *The Economic Journal*, 91:415–438.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188.

Vasicek, O. A. & Fong, H. G. (1982). Term structure modelling using exponential splines. *Journal of Finance*, XXXVII(2):339–356.

Vieira Neto, C. A. & Valls Pereira, P. L. (1999). Derivação de uma fórmula para o cálculo do preço livre de arbitragem para as opções sobre o índice de depósitos interfinanceiros de 1 dia – IDI. *Resenha da BM&F*, 136:37–53.

Apêndice A

Neste apêndice estabelecemos as condições sob as quais o mercado descrito pelo **Modelo Simplificado** é completo. Supomos a inexistência de oportunidades de arbitragem, o que equivale a supor que são negociados títulos com apenas três vencimentos distintos ($T_1 \neq T_2 \neq T_3$). Dessa forma, já trabalhando com a medida de probabilidade martingal equivalente, o modelo é composto pelas seguintes relações:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt \tag{A.1}$$

$$dP(t,T_i) = P(t,T_i)\left[r(t)dt + \sigma(t,T_i)dW^Q(t)\right] \tag{A.2}$$

$$\sigma(t,T_i) = -(b_0 \cdot \sigma_0 \cdot (T_i - t)\ ,\ b_1 \cdot \sigma_1 \cdot (T_i - t)^2\ ,\ b_3 \cdot \sigma_3 \cdot (T_i - t)^3 \tag{A.3}$$

com $i = 1, 2, 3$.

Para podermos dar continuidade à discussão, necessitamos de algumas definições que são usuais na literatura de finanças.

Definição A.1 *Um mercado, no contexto do modelo sob consideração, é um processo de Itô quadridimensional, ξ_t-adaptado, dado por $X(t) = [B(t),\ P(t,T_1),\ P(t,T_2),\ P(t,T_3)]$, onde os termos de $X(t)$ são dados por (A.1), (A.2) e (A.3).*

Definição A.2 *Um portfólio no mercado $X(t)$ é um processo estocástico quadridimensional, ξ_t-adaptado, dado por $\theta(t) = [\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)]$.*

Definição A.3 *O valor, na data t, de um portfólio $\theta(t)$ no mercado $X(t)$ é definido como:*

$$V(t) = V^\theta(t) = \theta(t) \cdot X(t) = \sum_{i=0}^{3} \theta_i(t) \cdot X_i(t) \tag{A.4}$$

Definição A.4 *O portfólio $\theta(t)$ é dito autofinanciável se $V^\theta(t) = V(0) + \int_0^T \theta(s)\ dX(s)$.*

Definição A.5 *Um contrato derivativo do tipo europeu com data de vencimento T é uma variável aleatória ξ_T-mensurável $F(\omega)$.*

Definição A.6 *O contrato derivativo $F(\omega)$ é atingível (no mercado $X(t)$) se existir um portfólio $\theta(t)$ autofinanciável e um número $z \in \Re$ tais que:*

$$F(\omega) = V_z^{\theta}(T) \equiv z + \int_0^T \theta(s) dX(s) \tag{A.5}$$

Se tal portfólio $\theta(t)$ existir, diremos que ele replica o contrato derivativo $F(\omega)$.

Definição A.7 *O mercado $X(t)$ é dito completo se todo contrato derivativo do tipo europeu for atingível.*

A seguir enunciaremos um conjunto de resultados simples que serão importantes para a seqüência deste apêndice.

Lema A.1 *Invariância em Relação ao Numeraire:*

a) Seja $\overline{X}(t) \equiv X(t)B^{-1}(t)$ o mercado normalizado pela taxa de juros de curto prazo. Suponha que $\theta(t)$ seja um portfólio autofinanciável no mercado $X(t)$, com valor dado por $V^{\theta}(t) = \theta(t) \cdot X(t)$. Então $\theta(t)$ também é autofinanciável no mercado e seu valor é dado por $\overline{V}^{\theta}(t) = \theta(t) \cdot \overline{X}(t) = B^{-1}(t)V(t)$, isto é,

$$V^{\theta}(t) = V(0) + \int_0^T \theta(s) dX(s) \Leftrightarrow B^{-1}(t)V^{\theta}(t) = \overline{V}^{\theta}(0) + \int_0^T \theta(s) d\overline{X}(s) \tag{A.6}$$

b) O contrato derivativo do tipo europeu $F(\omega)$ é atingível no mercado $X(t)$ se, e somente se, $B^{-1}(t)F(\omega)$ for atingível no mercado$\overline{X}(t)$.

c) O mercado $X(t)$ é completo se, e somente se, $\overline{X}(t)$também for.

d) No mercado normalizado $\overline{X}(t)$ as relações (A.1) e (A.2) tornam-se:

$$d\overline{B}(t) = 0 \;\; (\overline{B}(t) = B(t)B^{-1}(t) = 1 \tag{A.1'}$$

$$d\overline{P}(t, T_i) = B^{-1}(t)P(t, T_1)\sigma(t, T_i)DW^{Q}(t) \tag{A.2'}$$

O Lema seguinte é conhecido, na literatura, como decomposição de Doob-Meyer e é a base da prova do teorema que estabelece as condições sob as quais o mercado $X(t)$ é completo. Maiores detalhes sobre a decomposição de Doob-Meyer num contexto de modelos de finanças podem ser obtidos em Dothan (1990, seções 5.6 e 10.8).

Lema A.2 *Decomposição de Doob-Meyer: Um contrato derivativo do tipo europeu $F(\omega)$ com data de vencimento T possui a representação única:*

$$F(\omega) = E^q(F(\omega)) + \int_0^T \phi(s) dW^Q(s) \tag{A.7}$$

com $\phi(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \Re^3$, $\phi(t,\omega)$ *é* ξ_t *-adaptado e* $E^q\left[\int_0^T \phi^2(s)ds\right] < \infty$.

Teorema A.1 *Possibilidade Plena de Hedge - O mercado* $X(t)$*é completo se a matriz*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(t,T_1) \\ \sigma(t,T_2) \\ \sigma(t,T_3) \end{bmatrix}$$

possuir inversa.

Prova Supomos que existe Σ^{-1} tal que $\Sigma^{-1}\Sigma = I_3$. Seja $F(\omega)$ um contrato derivativo do tipo europeu. Temos de provar que existem o portfólio $\theta(t)$ autofinanciável e a constante $z \in \Re$ tais que:

$$V_z^\theta(T) \equiv z + \int_0^T \theta(s) dX(s) = F(\omega) \tag{A.8}$$

Pelo Lema A.1, partes a) e b) a condição (A.8) é equivalente a uma condição idêntica no mercado normalizado:

$$\overline{V}_z^\theta(T) \equiv z + \int_0^T \theta(s) d\overline{X}(s) = B^{-1}(T)F(\omega) \tag{A.9}$$

Utilizando a parte d) do Lema A.1, reescrevemos (A.9) como:

$$\begin{aligned} B^{-1}(T)F(\omega) &= \overline{V}_z^\theta(T) = z + \int_0^T B^{-1}(s) \sum_{i=1}^3 \theta_i(s) P(s,T_i)\sigma(s,T_i) dW^Q(s) \\ &= z + \int_0^T B^{-1}(s) \sum_{i=1}^3 \theta_i(s) P(s,T_i)(\sigma_1(s,T_i) dW_0^Q(s) \\ &+ \sigma_2(s,T_i) dW_1^Q(s) + \sigma_3(s,T_i) dW_2^Q(s)) \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde $\sigma_1(s,T_i)$, $\sigma_2(s,T_i)$ e $\sigma_3(s,T_i)$ denotam o primeiro, segundo e terceiro termos do vetor $\sigma(s,T_i)$, respectivamente. Pelo Lema 2, existe a representação única:

$$\begin{aligned} B^{-1}(T)F(\omega) &= E^Q\left[B^{-1}(T)F(\omega)\right] + \int_0^T \phi(s)dW^Q(s) = \\ &= E^Q\left[B^{-1}(T)F(\omega)\right] + \int_0^T \sum_{i=1}^{3} \phi_i(s)dW_i^Q(s) \end{aligned} \tag{A.11}$$

Como (A.10) tem de ser igual a (A.11) caso o teorema seja correto, fazemos $z = E^Q\left[B^{-1}(T)F(\omega)\right]$ e tentamos definir $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ tais que as integrais estocásticas de (A.10) e (A.11) sejam idênticas. De fato, para que tais integrais sejam iguais, os termos que multiplicam $dW_i^Q(s)$ $(i = 0, 1, 2)$ devem ser iguais, isto é:

$$B^{-1}(t)\sum_{i=1}^{3}\theta_i(t)P(t,T_i)\sigma_j(t,T_i) = \phi_j(t) \text{ com } j = 1,2,3 \tag{A.12}$$

Na expressão (A.12), o termo $\theta_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ é a incógnita. Tal expressão implica o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(t,T_1) & \sigma_1(t,T_2) & \sigma_1(t,T_3) \\ \sigma_2(t,T_1) & \sigma_3(t,T_1) & \sigma_4(t,T_1) \\ \sigma_3(t,T_1) & \sigma_3(t,T_2) & \sigma_3(t,T_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}(t)\theta_1(t)P(t,T_1) \\ B^{-1}(t)\theta_2(t)P(t,T_2) \\ B^{-1}(t)\theta_3(t)P(t,T_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

Em (A.13) notamos que a primeira matriz do sistema é a transposta de Σ. Como estamos supondo que existe Σ^{-1}, existe também a inversa da transposta e as incógnitas $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ podem ser determinadas de tal forma que exista um portfólio que replique o contrato derivativo $F(\omega)$ no mercado normalizado . No mercado não normalizado $X(t)$, $\theta_0(t)$ é escolhido de forma a tornar o portfólio $\theta(t)$ autofinanciável. Finalmente, pela parte b) do Lema A.1, $\theta(t)$ replica $F(\omega)$ em $X(t)$, isto é, $F(\omega)$ é atingível em $X(t)$. Como o contrato derivativo $F(\omega)$ foi escolhido arbitrariamente, o mercado $X(t)$ é completo, o que conclui a demonstração.

Corolário A.1 *O mercado descrito pelo Modelo Simplificado com datas de vencimento $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ é completo.*

Prova Basta substituir (A.3) em Σ. Como , Σ possui inversa e o teorema pode ser aplicado.

Apêndice B

Neste apêndice monstramos de que forma o valor de v^2 foi obtido no **Modelo Simplificado**.

A variância v^2 é a solução da seguinte integral:

$$\begin{aligned} v^2 &= \int_t^U \Big[b_0^2 \cdot \sigma_0^2 \cdot ((T-s)-(U-s))^2 + b_1^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \left((T-s)^2-(U-s)^2\right)^2 \\ &+ b_2^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \left((T-s)^3-(U-s)^3\right)^2 \Big] ds \end{aligned}$$

A resolução da integral acima é um problema simples porém tedioso. Por esse motivo, decidimos utilizar o software Maple, que resolve problemas matemáticos de forma simbólica.

O fator que está sendo integrado foi representado no Maple por meio da expressão:

$$z0^2(T-U)^2 + z1^2((T-s)^2-(U-s)^2)^2 + z2^2((T-s)^3-(U-s)^3)^2$$

O comando $int(f(s), s = t..U)$ integrou a expressão acima entre t e U e o comando $factor(.)$ fatorou o resultado, produzindo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{30}(U-t)(T-U)^2(30T^4z2^2 - 30UT^3z2^2 - 90T^3z2^2t \\ &+150T^2z2^2t^2 - 30T^2z2^2tU + 60U^2T^2z2^2 \\ &+30z1^2T^2 + 105Tz2^2t^2U - 75Tz2^2tU^2 - 135Tz2^2t^3 \\ &-15U^3Tz2^2 - 60tz1^2T + 1 - z1^2U^2 \\ &+69z2^2U^2t^2 - 81z2^2t^3U + 9z2^2U^4 + 30z0^2 + 54z2^2t^4 \\ &+40z1^2t^2 - 21z2^2tU^3 - 20z1^2Ut) \end{aligned}$$

Finalmente, colocando $z0^2$, $z1^2$ e $z2^2$ em evidência na expressão acima, obtemos o resultado apresentado no texto.

Apêndice C

Neste apêndice apresentamos a resolução de

$$c_t = P(t,U) \cdot E^F(\max(0\ ,\ F(U,U,T) - E) \mid \xi_t) \tag{C.1}$$

com

$$ln(F(U,U,T))|\xi_t \overset{F}{\sim} N(m, v^2) \tag{C.2}$$

e

$$m = \ln \frac{P(t,T)}{P(t,U)} - \frac{v^2}{2} \tag{C.3}$$

Seja $F(U,U,T) = e^y$. Então

$$\begin{aligned} & E^F(\max(0, F(U,U,T) - E)|\xi_t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, e^y - E) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{(y-m)^2}{2v^2}\right) dy \\ &= \int_{\ln(E)}^{\infty} (\ e^y - E) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{(y-m)^2}{2v^2}\right) dy \end{aligned} \tag{C.4}$$

Seja $z = \frac{y-m}{v}$. Fazendo a troca de variáveis em (C.4) e usando a propriedade de simetria da normal padrão obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-h_2}^{\infty} (e^{vz+m} - E) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{z^2}{2}\right) v dz = \\ & \int_{-h_2}^{\infty} e^{vz+m} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{z^2}{2}\right) v dz - \int_{-h_2}^{\infty} E \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{z^2}{2}\right) v dz \\ &= \int_{-h_2}^{\infty} e^{vz+m} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\tfrac{z^2}{2}\right) v dz - E \cdot N(h_2) \\ & e^{m+v^2/2} \int_{-h_2}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{(z-v)^2}{2}\right) dz - E \cdot N(h_2) \end{aligned} \tag{C.5}$$

onde $h_2 = \frac{m - \ln(E)}{v}$.

Seja $u = z - v$. Fazendo a troca de variáveis em (C.5) e usando, novamente, a propriedade de simetria da normal padrão obtemos:

$$e^{m+v^2/2} \int_{-h_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) dz - E \cdot N(h_2) = e^{m+v^2/2} \cdot N(h_2 + v) - E \cdot N(h_2) \tag{C.6}$$

Finalmente, substituindo (C.3) em (C.6) e o resultado em (C.1), obtemos a fórmula final para o preço da opção:

$$c_t = P(t,T) \cdot N(h_1) - P(t,U) \cdot N(h_2) \text{ com } h_2 = h_1 - v$$