Avaliação de Opções Americanas com Barreiras Monitoradas de Forma Discreta

Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza*
Carlos Patrício Samanez**

Resumo

Este artigo apresenta uma abordagem e modelo para avaliar opções americanas com barreiras monitoradas de forma discreta. O modelo desenvolvido consiste em uma adaptação do método de Grant et alii (1997), de modo a permitir incorporar as barreiras. O método Quase-Monte Carlo Híbrido foi usado nas simulações realizadas, e o método de Bisseção na definição das curvas de gatilho das opções. Os resultados encontrados na aplicação do modelo desenvolvido foram comparados com aqueles estimados pelo Adaptive Mesh Model de Ahn et alii (1999), observando-se uma boa aderência entre os resultados de ambos os modelos. Adicionalmente, avaliou-se a sensibilidade do preço das opções frente a mudanças nos parâmetros de entrada, confirmando-se a consistência do modelo.

***Palavras-chave*:** derivativos; opções; métodos numéricos.

Códigos JEL: G1; G13.

Abstract

This article presents an approach and a model to valuing discrete barrier American options. The developed model consists of an adaptation of the method of Grant et al (1997), in order to allow to incorporate the barriers. The Hybrid Quasi-Monte Carlo method was used in the simulations and the Bisection method in the definition of the options trigger curves. The results found in the application of the developed model were compared with the estimated by the Adaptive Mesh Model, developed by Ahn et al (1999). In addition, the sensitivity of the options price relative to changes in inputs parameters was analyzed, confirming the consistence of the model.

***Keywords*:** derivatives; options; numerical methods.

Submetido em Março de 2009. Aceito em Setembro de 2009. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além se de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Eduardo Facó Lemgruber

*VALE International SA-Global Risk Management Department – Switzerland.
E-mail: giuliano.carrozza@vale.com

**Professor do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio. E-mail: cps@puc-rio.br

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146
©2009 Sociedade Brasileira de Finanças

1. Introdução

As opções com barreira são negociadas no mercado de balcão desde os anos 60 e tornaram-se populares especialmente em função do seu custo reduzido em relação à opção *vanilla* equivalente. A primeira solução analítica para o apreçamento desses derivativos foi proposta por Merton (1973) e considerava a avaliação de opções de compra com barreira de monitoramento contínuo do tipo *down-and-out*.

Não obstante, constatou-se que a fórmula encontrada também seria válida para avaliação de opções de compra americanas, já que o exercício antecipado não seria justificável.

Ressalte-se que, mesmo considerando as opções européias, pode haver diferenças substancias nos preços entre opções com barreira de monitoramento contínuo e aquelas com monitoramento discreto, ainda que se considere o monitoramento discreto com base diária, conforme demonstrado por Chance (1994). Outros autores, como Flesaker (1992), Kat e Verdonk (1995), e Kat e Heynen (1996), chegaram à mesma conclusão, desenvolvendo fórmulas fechadas para avaliação de opções européias com barreira discreta, em que a barreira muda ao longo da vida útil da opção (*stepped barrier options*).

Heynen e Kat (1994) e Armstrong (2001) derivaram uma solução fechada para um caso intermediário entre as opções com monitoramento contínuo e aquelas com monitoramento discreto (as chamadas opções européias com barreira válida somente em uma janela de tempo específica, ou *window barrier options* ou *partial barrier options*). Já Broadie et alii (1999) propuseram uma correção de um modelo para apreçamento de opções européias com barreira contínua para estimar o preço de opções com barreira discreta em que, dependendo da frequência do monitoramento, a barreira é deslocada de forma a ajustar o modelo para o caso discreto. Entretanto, os resultados obtidos indicam que a aproximação não é adequada quando o preço de barreira é definido em valor próximo ao do ativo subjacente.

Assim, conclui-se que os preços obtidos por soluções fechadas para opções com monitoramento contínuo não se estendem para as opções com monitoramento discreto. Adicionalmente, constata-se que, quando as barreiras recebem monitoramento discreto, torna-se mais difícil a obtenção de uma solução fechada ou mesmo a solução do problema por meio de métodos numéricos.

Como usual, mesmo no caso das opções com barreira de monitoramento contínuo, as opções americanas eliminam quase sempre a possibilidade de solução por meio de fórmulas analíticas fechadas. Por conseguinte, em paralelo ao desenvolvimento de soluções numéricas, aplicadas somente ao caso europeu, diversos métodos foram desenvolvidos para avaliação desses derivativos, seja no caso de monitoramento contínuo ou discreto. Nessa linha, desde o trabalho clássico de Cox et alii (1979), entre as adaptações de modelos *lattice* destinadas à avaliação de vários tipos de opção, inclui-se aquelas direcionadas à avaliação de opções com barreira.

Boyle e Lau (1994) propuseram um método lattice que força os preços do ativo subjacente nos nós da árvore a coincidirem com os preços de barreira. Entretanto, a metodologia empregada pode tornar a árvore impraticável em função do número elevado de discretizações. Seguindo a linha de Boyle e Lau (1994), vários outros autores desenvolveram adaptações do método *lattice* para avaliação de opções com barreira – Derman et alii (1995), Ritchken (1995) e Cheuk e Vorst (1996) –, porém, o problema de convergência persistia, principalmente nos casos de avaliação de opções com monitoramento discreto da barreira.

Na esteira dos modelos *lattice* aplicados à avaliação de opções com barreira, Figlewski e Gao (1999) introduziram o Adaptive Mesh Model (AMM), que se destaca pela flexibilidade e melhora na eficiência das árvores trinomiais aplicadas à avaliação de opções européias ou americanas com barreira de monitoramento contínuo. Já no caso das opções européias ou americanas com barreira de monitoramento discreto, Ahn et alii (1999) foram os primeiros a propor uma solução baseada no *Adaptive Mesh Model* (AMM), apesar da dificuldade ainda maior para avaliação destes derivativos por meio dos métodos *lattice*.

O presente artigo considera a avaliação de opções americanas com barreiras monitoradas de forma discreta – o caso mais complexo – a partir de uma adaptação do modelo GVW (Grant et alii, 1997) de forma a considerar a presença de barreiras discretas. Cabe destacar que o modelo GVW foi desenvolvido originalmente para avaliação de opções americanas *vanilla* e opções Asiáticas. O trabalho comprova a flexibilidade dos modelos de simulação de Monte Carlo para avaliação de derivativos com maior complexidade. Além do apreçamento da opção, o modelo desenvolvido permite a identificação da curva de gatilho levando em conta a presença das barreiras, parâmetro que pode ser interessante para os negociadores desse derivativo. Uma vantagem adicional do modelo, em relação ao *Adaptive Mesh Model* de Ahn et alii (1999), é a possibilidade de sua aplicação sem dificuldades às opções com monitoramento contínuo da barreira.

O artigo está dividido em cinco seções. Após a presente introdução, o item 2 apresenta uma descrição do *Adaptive Mesh Model* (AMM) de Ahn et alii (1999), utilizado como parâmetro de comparação. No item 3 é apresentada a adaptação do método GVW (Grant et alii, 1997). No item 4 são apresentadas as aplicações e comparações realizadas dos dois modelos, onde foram consideradas opções americanas com barreiras discretas do tipo *knock-out-and-down*, comparando-se os resultados encontrados por cada metodologia empregada. Finalmente, o item 5 é dedicado aos comentários e conclusões finais.

2. O Adaptive Mesh Model (AMM) para Avaliação de Opções Americanas com Barreira de Monitoramento Discreto

Desde o trabalho clássico de Cox et alii (1979), diversas adaptações de modelos *lattice* tem sido desenvolvidas, incluindo-se aquelas direcionadas à avaliação de opções com barreira. A vantagem desses modelos normalmente é a relativa simplicidade e a reconhecida eficiência quando aplicados aos mais variados casos.

Figlewski e Gao (1999) introduziram o *Adaptive Mesh Model* (AMM), um modelo flexível que aumenta consideravelmente a eficiência dos modelos *lattice* trinomiais aplicados à avaliação de opções européias ou americanas com barreira de monitoramento contínuo. De acordo com essa metodologia, a árvore básica (*coarse mesh*) é usada em todos os instantes de tempo discretizados, mas um maior número de discretizações (*fine mesh*) é construído nas áreas em que os cálculos são mais críticos, ou seja, onde o preço do ativo subjacente é próximo ao preço de barreira.

Ahn et alii (1999) propuseram uma solução baseada no *Adaptive Mesh Model* para o caso das opções européias ou americanas com barreira de monitoramento discreto. Nesse caso, as áreas mais críticas, em que um maior número de discretizações é construído (*fine mesh*), são aquelas em que a barreira discreta é válida e o preço do ativo subjacente é próximo ao preço de barreira. Como o caso de monitoramento discreto da barreira é mais complexo, a descrição a seguir trata justamente do modelo proposto por Ahn et alii (1999).

No modelo de Figlewski e Gao (1999) e no modelo de Ahn et alii (1999) é importante que a malha fina seja isomórfica, o que possibilita que malhas ainda mais finas sejam adicionadas a partir do mesmo procedimento aplicado para construção da primeira árvore fina. Assim, torna-se possível melhorar a resolução em determinada área da árvore sem a necessidade de aumentar a discretização em todos os pontos da mesma.

2.1 Construção da árvore trinomial básica (*coarse mesh*)

Para construção da árvore trinomial básica, assume-se que o preço do ativo subjacente (S) segue o seguinte processo de difusão:

$$d\ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dZ \tag{1}$$

onde:
r é a taxa de juros livre de risco;
σ é a volatilidade do ativo subjacente e
dZ é um processo de Wiener.

Definindo $X = lnS$ e $\alpha = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$, temos que:

$$dX = \alpha dt + \sigma dZ \tag{2}$$

Esse processo é discretizado e aproximado pelo seguinte processo trinomial:[1]

$$X_{t+k} - X_t = \left\{ \begin{array}{l} u = \alpha k + \sigma h, \text{ com pobabilidade: } p_u = \frac{k}{2h^2} \\ m = \alpha k, \text{ com pobabilidade: } p_m = 1 - \frac{k}{h^2} \\ d = \alpha k - \sigma h, \text{ com pobabilidade: } p_d = \frac{k}{2h^2} \end{array} \right\} \tag{3}$$

[1] Para maiores detalhes, ver Figlewski e Gao (1999) e Ahn et alii (1999).

onde k representa a discretização do tempo e h a discretização do preço do ativo subjacente. As probabilidades de que haja um movimento de alta, intermediário e de baixa, são p_u, p_m e p_d, respectivamente.

Assim, como em qualquer método *lattice*, o valor da opção para um determinado instante de tempo (t), e o valor do ativo subjacente (X), $V(X,t)$, é computado a partir dos valores obtidos nos nós do período seguinte.

$$\begin{aligned} V(X,t) &= \exp(-rk)[p_u V(X+\alpha k+\alpha h, t+k) \\ &+ p_m V(X+\alpha k, t+k) + p_d V(X+\alpha k-\alpha h, t+k)] \end{aligned} \tag{4}$$

O modelo funciona para qualquer valor positivo de h e k. Para que o processo discretizado por meio do modelo trinomial possua os mesmos primeiros cinco momentos do processo contínuo lognormal, representado na equação 12, e que se deseja aproximar, os valores encontrados para h, p_u , p_d e p_m devem ser, respectivamente: $\sigma(\sqrt{3k})$, $1/6$, $1/6$ e $2/3$.[2] Além das datas em que a barreira é válida, pode-se melhorar significativamente o modelo ao se considerar que mesmo uma opção com a complexidade das opções com barreira podem ser avaliadas como se fossem opções européias no instante de tempo imediatamente anterior ao vencimento. De acordo com Figlewski e Gao (1999), usando-se uma fórmula fechada para opções européias elimina-se o erro de não-linearidade produzido pela discretização da árvore ao redor do preço de exercício da opção na data de vencimento. Uma alternativa para eliminar o erro de não-linearidade é adotar na data de vencimento da opção o mesmo procedimento de discretizações adicionais utilizado nos pontos em que a barreira é válida. Este foi o procedimento utilizado na aplicação do método realizada no presente trabalho, ou seja, optou-se pela construção de um maior número de discretizações (*fine mesh*) para avaliação da opção em sua data de vencimento, conforme proposto por Figlewski e Gao (1999).

A seguir são descritas as duas etapas para construção da árvore fina. Na primeira constroem-se as discretizações adicionais entre a data anterior à barreira e a data da barreira, aplicando-se ramificações de árvores trinomiais. Na segunda, definem-se as discretizações adicionais entre a data da barreira e a data seguinte à data da barreira, quando são aplicadas tanto ramificações trinomiais quanto quadrinomiais.

2.2 Construção da árvore fina entre a data anterior à barreira discreta e a data da mesma

Considerando que a árvore trinomial básica (*coarse mesh*) tenha N períodos, a discretização do tempo é $k = T/N$, onde T representa o prazo da opção. Para construção da árvore fina, os nós da árvore passam a serem definidos com base em mudanças no preço do ativo subjacente, equivalentes a $\frac{1}{2}$ das mudanças no

[2]Esses valores são encontrados a partir de um sistema de quatro equações, tendo essas quatro variáveis como incógnitas. Para detalhes, ver Figlewski e Gao (1999).

preço na árvore anterior (considerando a primeira árvore fina – modelo AMM1, a árvore anterior é a árvore básica). Adicionalmente, de forma a reduzir a mudança no preço à metade, mantendo-se a mesma relação entre o tempo e o tamanho da mudança no preço do ativo subjacente, o intervalo de tempo deve ser reduzido para $\frac{1}{4}$ do tamanho do intervalo de tempo da árvore anterior. Assim, se M é o nível da árvore, sendo a árvore básica aquela em que M é igual a zero, então: $h^M = h/2^M$ e $k^M = k/4^M$.

Por conseguinte, para reduzir a mudança no preço à metade, o número de intervalos de tempo será quadruplicado, e o número total de nós na árvore será 16 vezes maior entre a data anterior a cada barreira discreta e a data da mesma. Finalmente, para construção de cada árvore fina, basta substituir os valores $h_M = h/2^M$ e $k_M = k/4^M$ na equação 13.

2.3 Conectando cada árvore fina

O próximo passo é conectar a árvore fina à árvore anterior (no caso do AMM1, à árvore original, para o AMM2, à árvore fina do AMM1, e assim por diante). Assim, considerando a árvore anterior, o procedimento começa com a divisão, em dois intervalos, do período que se inicia na data da barreira discreta e termina na data posterior à mesma, sendo o primeiro intervalo de tamanho igual a $k/4$ e o segundo de tamanho $3k/4$. Assim sendo, o primeiro subperíodo da árvore fina equivale a $\frac{1}{4}$ do intervalo de tempo da árvore anterior, e o segundo período equivale a $\frac{3}{4}$.

Após a construção dos nós no primeiro subperíodo a partir da árvore trinomial ($h_M = h/2^M$ e $k_M = k/4^M$), chega-se a dois tipos de nós no instante da barreira. Para aqueles em que o preço do ativo subjacente coincide com o preço da árvore do AMM anterior, aplica-se a árvore trinomial novamente, substituindo-se a mudança no preço do ativo subjacente por h e o intervalo de tempo por $3k/4$. Isso leva às probabilidades $p_u = p_d = 1/8$ e $p_m = 3/4$. Para os nós em que o preço do ativo subjacente situa-se entre os preços da árvore do AMM anterior, aplica-se a árvore quadrinomial para definição dos valores da opção. Assumindo-se $k^{'} = 3k/4$ e adotando-se o mesmo procedimento apresentado para construção da árvore trinomial, pode-se definir os três primeiros momentos da árvore quadrinomial como sendo iguais aos da distribuição lognormal que se deseja aproximar. Encontrando-se a média, a volatilidade e a curtose, chega-se então a quatro equações com quatro incógnitas (as probabilidades devem somar 1). A solução do problema resulta em uma árvore binomial, com apenas os dois nós intermediários da árvore quadrinomial, conforme apresentado nas equações 15.

$$X_{t+1} - X_{t+1/4} = \left\{ \begin{array}{l} uu = \alpha k' + 3\sigma h/2, \text{ com probabilidade: } p_{uu} = 0 \\ u = \alpha k' + \sigma h/2, \text{ com probabilidade: } p_u = 1/2 \\ d = \alpha k' - \sigma h/2, \text{ com probabilidade: } p_d = 1/2 \\ dd = \alpha k' - 3\sigma h/2, \text{ com probabilidade: } p_{dd} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

A estrutura isomórfica da árvore fina permite desenvolver as próximas árvores finas a partir do mesmo procedimento descrito anteriormente. Por exemplo, para o modelo AMM2, a mudança no preço e no intervalo de tempo da árvore fina final passa a ser $h_2 = h/4$ e $k_M = k/16$ nos intervalos iniciais, e $h_2 = h/4$ e $k^{'} = 3k/64$ no último intervalo após a barreira.

3. O modelo de Grant, Vora e Weeks (GVW)

O modelo GVW (Grant et alii, 1997) é dividido basicamente em duas etapas principais. Na primeira, a partir de simulações realizadas recursivamente, determina-se a curva de gatilho, que consiste nos preços críticos do ativo subjacente em cada instante de tempo discretizado. Esses preços representam aqueles nos quais o proprietário da opção permanece indiferente entre o exercício imediato ou a postergação do mesmo até ao menos a data seguinte, quando nova decisão deverá ser tomada.

De forma a identificar o preço de exercício crítico para cada instante de tempo, inicia-se um processo de otimização a partir de um primeiro conjunto de trajetórias simuladas para o ativo subjacente, realizadas a partir do instante anterior ao vencimento. Após estas primeiras simulações, são realizadas então novas simulações de período a período, sempre caminhando em direção à data anterior, até que se chegue à data seguinte à de emissão. Assim, as simulações iniciais definem o preço crítico do ativo subjacente no instante anterior ao vencimento da opção, $T-1$. As simulações seguintes, realizadas a partir de $T-2$, geram como resultado o preço crítico do ativo subjacente no instante $T-2$. Nas simulações realizadas em sequência, define-se o preço crítico do ativo subjacente no instante $T-3$, e assim por diante.

Uma vez que o preço crítico para todos os instantes de tempo tenha sido identificado, a etapa seguinte do modelo consiste na realização de novas simulações a partir do instante inicial, e o valor da opção americana será a média aritmética dos fluxos de caixa obtidos em cada trajetória descontados para a data de emissão. Esse procedimento é análogo à estimação do valor de uma opção européia, mas levando-se em conta que, em qualquer data, será ótimo exercer a opção sempre que o preço do ativo subjacente for superior ao preço crítico obtido na etapa anterior do modelo.

3.1 A curva de gatilho no modelo GVW

O procedimento para determinação da curva de gatilho e apreçamento de uma opção de compra americana a partir do modelo GVW pode ser resumido por meio das seguintes etapas:

1ª etapa – Divide-se o período até o vencimento da opção em um número finito de intervalos, adotando-se como preço crítico do ativo subjacente (S) um valor igual ao preço de exercício da opção no vencimento (T), X_T.

2ª etapa – Para o instante imediatamente anterior ao vencimento da opção ($T-1$), adota-se como preço inicial do ativo subjacente um valor igual ou próximo

ao preço de exercício da opção, ou seja, $S^*_{T-1} = S^*_T = X$. Iniciam-se então as simulações chegando-se a diversos valores para a opção no instante T. O valor final da opção em $T-1$ é estimado pela média desses valores descontados por um período. Se o respectivo ponto atender à condição de indiferença entre exercer a opção ou mantê-la viva, ou seja, se atender à equação: $S^*_{T-1} - X - e^{-r}E_{T-1}[C_T(S^*_T)|S_{T-1} = S^*_{T-1}] < D$, ter-se-á o valor crítico do ativo objeto no instante $T-1$, onde D representa a tolerância aceitável entre os dois valores para que se assuma o preço crítico. Caso a condição anterior não seja atendida, deve-se realizar um acréscimo no valor de S^*_T e reiniciar o processo de busca:[3] $S^{**}_{T-1} = S^*_{T-1}+k$ onde: $E_{T-1}\left[C_T(S^*_T)|S_{T-1} = S^*_{T-1}\right]$ representa o valor esperado em $T-1$ do valor da opção de compra dado o preço crítico do ativo subjacente em $T-1$; S^*_{T-1} e k são constantes.

3ª etapa – Encontrado o valor crítico do ativo objeto em $T-1$, S^*_{T-1}, deve-se então continuar o processo de busca de preços críticos, repetindo o 2° passo recursivamente até o instante inicial, ou seja, refazendo-o desde o instante $T-2$ até a data de emissão da opção. Para o instante $T-2$, a opção deverá ser avaliada em cada momento posterior ao tempo em questão, ou seja, nos instantes $T-1$ e T, respeitando sempre o processo decisório de exercer a opção quando o preço simulado do ativo ultrapassar a curva de gatilho. Após iniciadas as simulações em $T-2$, partindo de um preço crítico em $T-2$ igual àquele encontrado para $T-1$ ($S^*_{T-2} = S^*_{T-1}$), o valor final da opção em $T-2$ será a média dos valores encontrados da opção em cada simulação, descontados para a data $T-2$. Assim, se o respectivo ponto atender à condição de indiferença entre exercer a opção ou mantê-la viva, ter-se-á o valor crítico do ativo objeto no instante $T-2$. Caso a condição anterior não seja atendida, deve-se realizar um acréscimo no valor de S^*_{T-2} e reiniciar o processo de busca: $S^{**}_{T-2} = S*_{T-2} + k$.

4ª etapa – Após a construção da curva de gatilho a partir dos três passos anteriores, o passo seguinte consiste em realizar novas simulações a partir da data de emissão da opção, considerando o preço inicial do ativo objeto, S_0. O preço final da opção será o valor médio de cada trajetória trazido a valor presente.

3.2 Definição das trajetórias de preço do ativo subjacente

Admitindo-se que o preço do ativo subjacente siga um Movimento Geométrico Browniano, pode-se demonstrar que o modelo discreto apropriado de evolução do logaritmo *neperiano* do preço da ação subjacente é:

$$S_t = S_{t-1}e^{\left(\mu-\sigma^2/2\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \tag{6}$$

onde S_t representa o preço do ativo subjacente no instante t, μ é a expectativa de retorno do investimento no ativo subjacente, σ é o desvio-padrão do retorno logarítmico do ativo subjacentes, e ϵ é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padronizada.

[3] Para opção de venda, deve-se realizar um decréscimo no valor de S^*_T.

Em uma avaliação neutra ao risco, a expectativa de retorno do investimento na ação subjacente já está embutida no seu preço, de forma que não se torna necessário conhecê-la. Desta forma, antes de iniciar as simulações, deve-se substituir μ pela taxa de juros livre de risco na equação (6). Assim, a partir da simulação de valores para ϵ, são definidas as possíveis trajetórias a serem percorridos pelo valor do ativo subjacente ao longo do tempo.

3.3 Avaliação de opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira através do modelo GVW

Para avaliação de opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira, o modelo GVW deve sofrer algumas modificações. Na primeira alteração, realizada na etapa de construção da curva de gatilho (etapa 1 do modelo), deve haver a incorporação da barreira do tipo *knock-out-and-down* nas datas em que a mesma é válida. Esse procedimento implica em valores distintos para a nova curva de gatilho em relação àqueles que seriam obtidos para a curva de gatilho da opção vanilla equivalente, já que nas simulações em que o preço do ativo subjacente atingir o preço de barreira em uma data em que a mesma é válida, terão valor distinto daquele que seria observado caso a barreira fosse inexistente. Cabe observar que nas aplicações do modelo realizadas no presente trabalho, o valor da opção em cada trajetória simulada que atinja o preço de barreira será igual ao valor presente do rebate.[4]

Outra alteração necessária no modelo GVW refere-se às simulações realizadas a partir da data inicial, após a curva de gatilho já ter sido determinada. Da mesma forma que na etapa de construção da curva de gatilho, as barreiras também deverão estar presentes nessas últimas simulações realizadas. Assim, além da curva de preços críticos do ativo subjacente, representando aqueles preços que, caso atingidos, resultariam no exercício imediato da opção, há ainda um vetor de preços críticos do ativo subjacente (caso o monitoramento da barreira seja contínuo, haveria uma nova curva – barreira móvel – ou uma linha reta – barreira fixa), representado pelos preços de barreira nas datas em que a mesma é válida. Assim, para que cada trajetória percorra a vida útil da opção até atingir o vencimento, torna-se necessário que os preços gerados em cada instante de tempo situem-se dentro de um túnel de preços cujos limites superior e inferior são representados pela curva de gatilho e pelos preços de barreira nas datas em que a mesma é válida, respectivamente. Caso o limite inferior do túnel de preços seja atingido, o valor da opção na trajetória será o valor presente do rebate. Já no caso do limite superior ser atingido, o valor da opção na trajetória será o valor presente do exercício da opção na data em que o limite foi extrapolado.

[4] Consideraram-se opções em que o investidor recebe o valor de rebate assim que o preço do ativo subjacente iguala-se ao preço de barreira em uma data em que a mesma é válida.

3.4 Técnicas de aceleração de convergência

Sabe-se que o valor de alguns parâmetros utilizados no modelo GVW podem exercer influência direta na precisão dos resultados. Por exemplo, dependendo da maneira com que se realiza a estimação dos preços críticos para o ativo subjacente, pode-se incorrer em erros significativos para o valor da opção. Uma primeira medida para redução desses erros é adotar-se maior discretização para as mudanças no preço do ativo subjacente, ou ainda aumentar-se o número de simulações utilizadas na estimativa de cada preço crítico.

Outro parâmetro que pode determinar a precisão do modelo é o número de datas de exercício antecipado (número de preços críticos em cada curva de gatilho), que no limite será representado pelo número de instantes de tempo discretizados. Quando este número é restrito, o modelo também pode apresentar valores tendenciosos para a opção. Portanto, torna-se crítico utilizar um número suficientemente grande de datas de exercício para que o resultado não seja tendencioso.

A seguir, são descritas duas técnicas de aceleração de convergência aplicadas no modelo GVW desenvolvido no presente trabalho. O objetivo da aplicação das mesmas é melhorar a precisão dos resultados, assim como otimizar o tempo computacional a partir principalmente da redução do número de simulações necessárias para determinação da curva de gatilho.

Sequências quase-aleatórias

Enquanto a simulação de Monte Carlo (SMC) gera uma sequência de números pseudo-aleatórios, a simulação de Quase-Monte Carlo (SQMC) gera uma sequência de números quase-aleatórios, em que as amostras são selecionadas de modo a preencherem de forma uniforme todo o domínio da simulação, evitando agrupamentos e vazios. Em função da maior uniformidade das sequências obtidas, estas são também denominadas sequências de baixa discrepância.

Dependendo do ativo analisado, o uso de SQMC pode trazer ganhos em eficiência e precisão em relação à SMC. Todavia, um problema conhecido das sequências de baixa discrepância é que as mesmas perdem a uniformidade conforme se aumenta o número de dimensões do problema (Frota, 2003). Por conseguinte, caso não seja trabalhada adequadamente, pode-se concluir que a SQMC é inadequada para a avaliação de opções americanas, onde o número de dimensões é dado pelo número de datas de exercício.

O modelo Quase-Monte Carlo (QMC) híbrido surge como alternativa à SMC e à SQMC tradicional para avaliação de problemas com altas dimensões, mantendo as mesmas propriedades de baixa discrepância das sequências quase-aleatórias aplicadas a problemas de poucas dimensões. O algoritmo do modelo QMC híbrido permuta aleatoriamente uma sequência básica de números quase-aleatórios, de modo a gerar novas sequências independentes para cada dimensão do problema. Assim, para montar uma matriz de números quase-aleatórios de tamanho $M \times N$, onde M representa o número de simulações e N o número de dimensões, o primeiro passo é gerar uma sequência de números quase-aleatórios de tamanho

N – as sequência de Van der Corpus, Halton e Sobol são as mais conhecidas nas aplicações em finanças –, que representará a primeira coluna da matriz $M \times N$. Para elaborar as demais colunas da matriz, basta permutar os valores da primeira coluna, ou seja, todas as colunas possuirão os mesmos elementos, mas organizados em ordem aleatória. Para se obter independência ao longo de cada trajetória (linha da matriz $M \times N$), deve-se adotar M maior do que N, já que esta medida facilita a redução da correlação que pode existir em sequências quase-aleatórias. De qualquer forma, mesmo para $N = D$, a sequência pode ser suficientemente independente na prática.

Assim, como o objetivo do modelo desenvolvido no presente trabalho é a avaliação de opções *down-and-out* do tipo americana, representando um problema de altas dimensões, optou-se por adotar o modelo QMC híbrido com sequências de Halton tomadas como base para construção das matrizes de números quase-aleatórios. Ressalte-se que, após gerar a matriz $M \times N$, composta por sequências de números com distribuição uniforme, o passo seguinte é obter as sequências de números com distribuição normal padrão, necessárias para definir as trajetórias de preços do ativo subjacente, conforme a equação (6). Esta nova sequência é obtida a partir da inversa da função cumulativa de probabilidades da distribuição normal, que converte cada número da matriz de distribuição uniforme em um número da nova matriz de sequências com distribuição normal padrão.

O método de bissecção

Conforme visto, no método de GVW, o valor crítico no instante $T - \Delta t$ pode ser definido como o valor que iguala os termos da seguinte equação:

$$S^*_{T-\Delta t} - X = e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t} \left[C_T(S^*_T) | S_{T-\Delta t} = S^*_{T-\Delta t} \right] \tag{7}$$

Considerando a lógica de programação, encontrar o valor crítico $S^*_{T-\Delta t}$ significa encontrar o valor de $S^*_{T-\Delta t}$ que anula a equação 17, ou seja, encontrar o zero da seguinte função:

$$f(g) = g - X - e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t} \left[C_T(S^*_T) | S_{T-\Delta t} = g \right] \tag{8}$$

Para isso, primeiramente estima-se $[e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t} [C_T(S^*_T)|S_{T-\Delta t} = g]$ através de simulações de trajetórias para o ativo subjacente partindo de g. Em seguida, utiliza-se um método numérico de aceleração de convergência, como o método de bissecção, para encontrar a raiz de $f(g)$. Esse procedimento foi utilizado então no modelo apresentado neste trabalho em substituição à 2ª etapa do modelo GVW original descrita no item 3.

Assim, considerando um intervalo $[a, b]$, em que $f(a) \times f(b) < 0$, ou seja, onde existe pelo menos um zero da função f, o método da bissecção consiste em subdividir, sucessivamente, este intervalo à metade, considerando o subintervalo onde se verifica a condição de mudança de sinal dos extremos. Este processo pode ser repetido até o intervalo ser tão pequeno quanto o desejado. Assim, geralmente

será necessário escolher uma tolerância ou intervalo no qual a raiz de $f(g)$ estará confinada e, possivelmente, definir um número máximo de iterações para o algoritmo de busca.

O algoritmo descrito a seguir, baseado no método de bissecção, pode melhorar sensivelmente a velocidade de convergência do modelo GVW. Deve haver cuidado especial na escolha dos valores iniciais da curva de gatilho de modo a não ultrapassarem os valores críticos das respectivas datas de exercício antecipado. Escolhidos valores iniciais adequados, que por sua vez dependem da escolha do intervalo de busca para o preço crítico do ativo subjacente, tem-se:

- 1° ponto de busca: $(S^*_{T-t})_1 = \frac{S^*_T + (S^*_{T-1})_{\max}}{2}$
  Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $\left[S^*_T, (S^*_{T-1})_{\max}\right]$
- 2° ponto de busca: Se $S^*_{T-t} - X < e^{-r} E_{T-t}\left[C_T(S^*_T)\right]$:

  Então, o 2° ponto de busca será: $(S^*_{T-t})_2 = \frac{S^*_T + (S^*_{T-1})_1}{2}$
  Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $\left[S^*_T, (S^*_{T-1})_1\right]$
  Se $S^*_{T-t} - X > e^{-r} E_{T-t}\left[C_T(S^*_T)\right]$:

  Então, o 2° ponto de busca será: $(S^*_{T-t})_2 = \frac{(S^*_{T-1})_1 + (S_{T-1})_{\max}}{2}$
  Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $\left[(S^*_{T-t})_1, (S_{T-t})_{\max}\right]$

Novos pontos de busca são encontrados até que o intervalo de busca para o preço crítico do ativo subjacente seja menor que a tolerância adotada, quando então o mesmo procedimento é adotado para encontrar o preço crítico do ativo subjacente na data imediatamente anterior.

4. Aplicação e Comparação dos Modelos

Para avaliar a sua consistência, o modelo desenvolvido neste trabalho foi usado na estimação de preços de opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira. Para tanto, utilizou-se um número de datas de exercício sempre equivalente ao número de intervalos de tempo discretizados. Além disso, foram adotados, em cada caso, ao menos 10 vezes mais caminhos (n1) para o cálculo dos valores críticos do ativo subjacente do que o número de datas discretizadas. Finalmente, o número de simulações definido para o cálculo do valor final da opção (n2) foi de 50.000.

O julgamento da acurácia do modelo foi realizado a partir da comparação dos prêmios estimados, com aqueles obtidos por meio da aplicação do modelo *Adaptive Mesh Model* (AMM) de Ahn et alii (1999), considerando a construção de oito árvores finas para cada data de barreira (AMM8). Em relação às opções usadas, foram avaliados diversos cenários, onde se alternou o número de datas em que a barreira é monitorada (m) e o valor da barreira. As datas consideradas em $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$ foram 61 dias, 30 e 61 dias e 20, 30 e 62 dias, respectivamente. Assim, como o modelo desenvolvido é baseado em simulações, para

cada cenário foram gerados cinquenta valores para a opção, obtendo-se a média e o desvio-padrão dos mesmos.

Para opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira, a tabela 1 apresenta e compara os resultados obtidos com o modelo desenvolvido (adaptação do método de GVW), com os obtidos usando o *Adaptive Mesh Model* (AMM) construído com oito árvores finas para cada data de barreira (AMM8). Além dos parâmetros das simulações descritos anteriormente, os demais parâmetros utilizados foram: preço do ativo subjacente na data inicial: $S = 100$; preço de exercício da opção: $X = 102$; preço de rebate: $R = 5$ (pago no momento em que a barreira é atingida); desvio-padrão diário do retorno do ativo subjacente: $\sigma = 1,89329\%$; taxa de juros livre de risco anual: $r = 13,81143\%$; prazo da opção: $T = 61$ dias.

Tabela 1
Comparação dos resultados dos modelos GVW e AMM8

m	Barreira	GVW adaptado	Desvio-padrão	AMM8	Erro (%) = (GVW–AMM8)/AMM8
1	92	6,7881	0,0211	6,8787	-1,32%
	94	7,0165	0,0226	7,1063	-1,26%
	96	7,2398	0,0244	7,3188	-1,08%
	98	7,4325	0,021	7,5127	-1,07%
3	92	7,2873	0,0219	7,3745	-1,18%
	94	7,5169	0,0219	7,5912	-0,98%
	96	7,6587	0,0299	7,7055	-0,61%
	98	7,6616	0,024	7,7234	-0,80%
6	92	7,487	0,0234	7,5866	-1,31%
	94	7,6585	0,0245	7,7544	-1,24%
	96	7,7027	0,0281	7,7722	-0,89%
	98	7,5639	0,0275	7,6032	-0,52%

Pode-se notar que há aderência entre os preços estimados pelos dois modelos, embora o modelo GVW adaptado tenha gerado valores ligeiramente abaixo daqueles determinados pelo modelo AMM8. O erro relativo absoluto médio foi de 1,02%. Por exemplo, considerando apenas uma data de monitoramento de barreira e o preço de barreira igual a 92, o modelo GVW adaptado gerou um preço para o derivativo 1,317% inferior ao preço gerado pelo modelo AMM8. Esse foi o maior erro relativo verificado nos exemplos analisados. Já o desvio-padrão ficou entre 0,0210 e 0,0299, representando, respectivamente, 0,003% e 0,006% da média das 50 simulações utilizadas como estimativa para o preço do derivativo.

Há ainda um fato interessante a se destacar na tabela 1. Considerando-se as opções com barreiras monitoradas em apenas uma data ($m = 1$) e aquelas com barreiras monitoradas em 3 datas ($m = 3$), o preço estimado aumenta na medida em que o preço de barreira é maior. Porém, o mesmo não ocorre com as opções com barreiras monitoradas em 6 datas. Neste caso, embora a opção com o menor preço estimado seja aquela que possui o menor preço de barreira, a que possui o

maior preço estimado não é a de maior preço de barreira, mas a que possui preço de barreira igual a 96.

Embora possa parecer estranho em um primeiro momento, é natural que a mudança no preço da opção nem sempre ocorra na mesma direção da mudança no preço de barreira. Esse fato ocorre, pois além do preço de barreira, o impacto no preço da opção depende ainda de outros fatores, como o preço de rebate, as datas em que a barreira é monitorada, entre outros. Por exemplo, tomando-se por base trajetórias geradas por um modelo de simulação, a presença de uma barreira em uma data qualquer aumentará o valor de uma opção *vanilla* equivalente, somente caso consiga capturar na barreira trajetórias cujo valor presente dos *payoffs* que seriam gerados ao se desconsiderar a barreira (VP_{payoff}), sejam inferiores ao valor presente do rebate gerado na data de barreira (VP_{Rebate}). Como a diferença entre VP_{payoff} e VP_{Rebate} é afetada por diversos fatores, conclui-se que a adoção de mais uma data de barreira ou a alteração do preço de barreira pode influenciar o valor final da opção de diversas maneiras.

No exemplo analisado, considera-se uma barreira no valor de 98 monitorada somente na data imediatamente anterior ao vencimento da opção. Essa barreira capturaria todas as trajetórias simuladas com preços do ativo subjacente naquela data iguais ou inferiores ao preço de barreira. Como o preço de exercício no exemplo analisado é de 102 e, na data de barreira as opções estariam a apenas um passo do vencimento, essas trajetórias teriam alto potencial de atingirem o vencimento deixando a opção *out-the-money*, o que significa que dificilmente gerariam *payoffs* positivos para a opção de compra sem a barreira. Fica claro, então, que a implementação da barreira nessa data teria como impacto transformar um conjunto de trajetórias com valor presente nulo em trajetórias com valor equivalente ao valor presente do preço de rebate, gerando impacto positivo sobre o preço da opção. Por outro lado, se fossem alterados a data de monitoramento da barreira (por exemplo, estabelecendo-a logo após a emissão da opção), o preço de barreira ou ainda o preço de rebate (por exemplo, para zero), obviamente o efeito poderia ser bem diferente.

4.1 Análise de sensibilidade

De forma a verificar a aderência entre os resultados apresentados pelos dois modelos (GVW adaptado e AMM8), é avaliado a seguir o comportamento do preço das opções com 3 datas de monitoramento da barreira (analisadas no item 4) frente às seguintes mudanças em determinados parâmetros: (i) redução de 100% no preço de rebate; (ii) aumento de 100% no preço de rebate; (iii) redução de 50% na volatilidade diária do ativo subjacente; e (iv) aumento de 50% na volatilidade diária do ativo subjacente. Os resultados são apresentados na tabela 2.

Tabela 2
Análise de sensibilidade - opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira (3 datas de monitoramento da barreira)

Alteração	Barreira	GVW adaptado	Diferença (%) em relação à opção original	AMM8	Diferença (%) em relação à opção original	Erro Relativo (%) = (GVW-AMM8)/AMM8
Redução de 100% no rebate	92	5,6862	-21,97%	5,7747	-21,69%	-0,74%
	98	4,7663	-37,78%	4,8018	-37,83%	-1,53%
Aumento de 100% no rebate	92	8,8715	21,74%	8,9743	21,69%	-1,15%
	98	10,5551	37,78%	10,645	37,83%	-0,85%
Redução de 50% na volatilidade	92	3,4193	-53,08%	3,4384	-53,37%	-0,55%
	98	4,9119	-35,88%	4,9206	-36,29%	-0,18%
Aumento de 50% na volatilidade	92	10,2396	41,51%	10,4245	41,36%	-1,77%
	98	9,9064	29,31%	10,0257	29,81%	-1,19%

Conforme esperado, o preço da opção muda no mesmo sentido das alterações realizadas sobre o preço de rebate. Por exemplo, aplicados na avaliação da opção com preço de barreira 98, o modelo GVW adaptado e o modelo AMM8 apresentam uma queda de 37,78% e de 37,83% em relação ao preço da opção original, respectivamente, quando é considerada uma redução de 100% no preço de rebate. Já a elevação de 100% no preço de rebate gerou um aumento de 37,78 % e de 37,83% no preço da opção, respectivamente. Note-se, portanto, que há um efeito simétrico das alterações no preço de rebate sobre o preço da opção. Verifica-se também que as opções com maior preço de barreira são mais sensíveis às alterações no preço de rebate. Esse fato era esperado, já que, neste caso, há uma maior probabilidade da barreira ser atingida do que na situação em que a barreira é definida em um patamar mais baixo.

As opções também apresentaram sensibilidade às mudanças realizadas na volatilidade do ativo subjacente. Este parâmetro gera dois efeitos sobre o preço do derivativo. Além de aumentar a chance da opção ficar *in-the-money*, torna também mais provável que a barreira seja atingida, gerando para o detentor da opção o recebimento do preço de rebate que, nos exemplos analisados, representam *payoffs* com impacto positivo sobre o preço da opção.

Finalmente, verifica-se, na última coluna da tabela 2, que os dois modelos utilizados apresentaram resultados semelhantes em relação às mudanças aplicadas nas variáveis, sendo a maior diferença entre os resultados apresentados pelo modelo GVW adaptado e pelo modelo AMM8 de -1,533%. O erro relativo absoluto médio foi de 0,99%.

Considerando as opções com preço de barreira igual a 92 apresentada na tabela 2, a figura 1 apresenta as curvas de gatilho, representando os preços do ativo subjacentes que, caso atingidos, resultariam no exercício imediato da opção. Ressalte-se que, conforme metodologia descrita no item 3, os preços de barreira são levados em conta para construção das mesmas. Além disso, da mesma forma que as curvas de gatilho, caso o preço do ativo subjacente atinja a barreira em uma data em que a mesma seja válida, o fluxo resultante da opção passa a ser o preço de rebate.

Por exemplo, pode-se notar na figura 1 que a redução de 50% na volatilidade gerou um deslocamento para cima na curva de gatilho. Por outro lado, o aumento de 50% na volatilidade gerou um deslocamento para baixo na curva de gatilho. Observa-se ainda que, ao se considerar as variações no preço de rebate, as curvas de gatilho ficaram bem próximas uma da outra, situando-se abaixo da curva de gatilho da opção original. Outro ponto a se destacar é que todas as curvas de gatilho convergem para o mesmo valor, terminando com valor igual a 102 na data de vencimento. Esse comportamento era esperado, já que esse valor representa na verdade o preço de exercício da opção. Por fim, cabe destacar que não existe relação entre a posição das curvas de gatilho e o preço final do derivativo, já que as simulações realizadas após a construção das curvas levam em consideração parâmetros diferentes em cada caso.

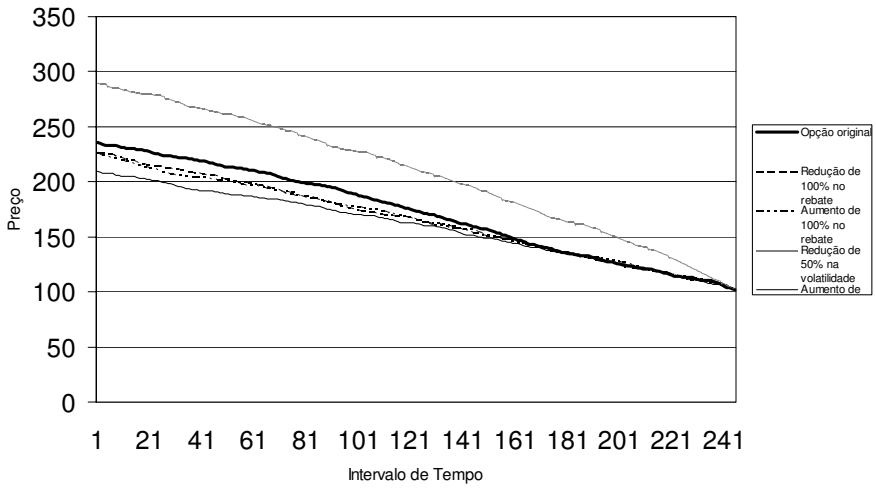

Figura 1
Curvas de gatilho (preço de barreira igual a 92)

5. Conclusões

As opções com barreira são contratos que envolvem certa complexidade, dentre outras coisas em função do seu *payoff* depender da trajetória seguida pelo ativo subjacente. Não obstante, representam alternativas interessantes para cobertura de posições em diversos ativos, normalmente a custos inferiores daqueles que seriam gerados a partir de posições em opções *vanilla*. Desse modo, a principal motivação do presente trabalho foi desenvolver uma nova ferramenta para avaliação adequada desses derivativos – em especial na situação em que as barreiras são monitoradas de forma discreta –, o que se torna imprescindível para melhor compreensão e uso adequado dos mesmos.

A adaptação do método de Grant, Vora e Weeks (GVW) desenvolvida neste trabalho, apresentou boa aderência em relação aos resultados obtidos a partir da aplicação do modelo *Adaptive Mesh Model* (AMM), de Ahn et alii (1999). Destaque-se que, embora as aplicações realizadas neste trabalho tenham se concentrado nas opções *knock-out-and-down*, o modelo pode ser ajustado para avaliação de outros tipos de opção, como as opções *knock-out-and-up*, *knock-in-and-down*, *knock-in-and-up*, *caps*, *floors*, ou ainda as opções com barreira de monitoramento contínuo. Por outro lado, destaque-se que, diferentemente ao modelo desenvolvido, o modelo Adaptive Mesh Model exige uma modelagem diferenciada na avaliação das opções com barreiras de monitoramento contínuo (Figlewski e Gao, 1999). Além disso, para avaliação das opções *knock-in*, o modelo AMM exige a construção de duas árvores (além de suas respectivas malhas finas), podendo ocasionar um aumento representativo nos custos computacionais (enquanto a primeira

árvore define o preço de uma opção *vanilla*, a segunda se baseia na primeira para definir o preço da opção *knock-in*).

Assim, acredita-se que a adaptação do modelo GVW aqui apresentada possa ser utilizado por participantes do mercado interessados em negociar esses títulos, permitindo, além de encontrar seus preços justos, a realização de análises de sensibilidade do valor dos mesmos frente a mudanças nos parâmetros de entrada dos modelos.

Outra informação que pode ser gerada sem dificuldades pelo modelo desenvolvido, são as probabilidades de exercício da opção e de que a barreira seja atingida ao longo de sua vida útil. O cálculo das probabilidades torna-se bastante simples após a definição da curva de gatilho. A probabilidade de que a barreira seja atingida pode ser encontrada pela razão entre o número de simulações e o número de trajetórias em que uma das barreiras for atingida em uma data em que a mesma seja válida. Analogamente, a probabilidade de exercício da opção pode ser encontrada pela razão entre o número de simulações e o número de trajetórias em que a curva de gatilho for atingida. A variável adicional a ser definida é o *drift* das simulações, pois ao contrário do procedimento de apreçamento, nesse caso devem-se realizar simulações reais, e não neutras ao risco. Uma abordagem semelhante para o cálculo de probabilidades de exercício de opções com base em simulações de Monte Carlo pode ser encontrada em Iorio et alii (2006).

Referências

Ahn, D.-H., Figlewski, S., & Gao, B. (1999). Pricing discrete barrier options with an adaptive Mesh model. Disponível em SSRN: `http://ssrn.com/abstract=162450`.

Armstrong, G. F. (2001). Valuation formulae for window barrier options. *Applied Mathematical Finance*, 8:197–208.

Boyle, P. & Lau, S. H. (1994). Bumping against the barrier with the binomial method. *Journal of Derivatives*, 1:6–14.

Broadie, M., Glasserman, P., & Kou, S. G. (1999). Connecting discrete and continuous path-dependent options. *Finance and Stochastics*, 3:55–82.

Chance, D. M. (1994). The pricing and hedging of limited exercise caps and spreads. *Journal of Financial Research*, 17(4):561–584.

Cheuk, T. H. F. & Vorst, T. C. F. (1996). Complex barrier options. *Journal of Derivatives*, 4(1):8–22.

Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263.

Derman, E., Kani, I., Ergener, D., & Bardhan, I. (1995). Enhanced numerical methods for options with barriers. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.

Figlewski, S. & Gao, B. (1999). The adaptive Mesh model: A new approach to efficient option pricing. *Journal of Financial Economics*, 53:313–351.

Flesaker, B. (1992). The design and valuation of capped stock index options. Working paper, Department of Finance, University of Illinois, Champaign, IL.

Frota, A. E. F. (2003). Avaliação de opções americanas tradicionais e complexas. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio.

Grant, D., Vora, G., & Weeks, D. (1997). Path-dependent options: Extending the Monte Carlo simulation approach. *Management Science*, 43(11):1589–1602.

Heynen, R. C. & Kat, H. M. (1994). Partial barrier options. *Journal of Financial Engineering*, 3:253–274.

Iorio, G., Samanez, C. P., & Raposo, G. S. (2006). Avaliação de títulos conversíveis com opções de compra e venda: Uma aplicação dos métodos GVW e MQMC. *Revista de Economia e Administração*, 5(4).

Kat, H. M. & Heynen, R. C. (1996). Discrete partial barrier options with a moving barrier. *Journal of Financial Engieneering*, 5(3).

Kat, H. M. & Verdonk, L. (1995). Tree surgery. *Risk*, 8:53–56.

Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–183.

Ritchken, P. (1995). On pricing barrier options. *Journal of Derivatives*, 3:19–28.