Teoria de Medidas de Risco: Uma Revisão Abrangente

(Risk Measures Theory: A Comprehensive Survey)

Marcelo Brutti Righi*
Paulo Sergio Ceretta**

Resumo

Um aspecto fundamental de uma correta gestão de risco é a mensuração, especialmente a previsão de medidas de risco. Inicialmente se considerava medidas de risco, como variância, volatilidade e Valor em Risco, como sendo válidas por sua intuição prática. Todavia, um sólido arcabouço teórico se fez necessário para garantir melhores propriedades para medidas de risco. Esse aporte é a teoria de medidas de risco. O presente trabalho apresenta uma revisão de literatura abrangente sobre teoria de medidas de risco, focando teoria básica e em extensões à essa estrutura fundamental. A apresentação é focada nas principais classes de medidas de risco da literatura, que são medidas de risco coerentes, medidas de risco convexas, medidas de risco espectrais e de distorção e medidas de desvio generalizado.

Palavras-chave: medidas de risco; teoria de medidas de risco; gestão de risco; classes de medidas de risco; revisão de literatura.

Códigos JEL: G10; G19; C6.

Abstract

A fundamental aspect of proper risk management is the measurement, especially forecasting of risk measures. Measures such as variance, volatility and Value at Risk had been considered valid because of their practical intuition. However, a solid theoretical framework it is important to ensure better properties for risk measures. Such background is the risk measures theory. This paper presents a comprehensive literature review on risk measures theory, focusing in basic theory and extensions to this fundamental outline. The paper is structured in order to cover the main risk measures classes from literature, which are coherent risk measures, con-

---

Submetido em 7 de janeiro de 2015. Reformulado em 15 de janeiro de 2015. Aceito em 20 de janeiro de 2015. Publicado on-line em 26 de maio de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Marcelo Fernandes.

*Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brazil. E-mail: `marcelobrutti@hotmail.com`

**Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brazil. E-mail: `ceretta10@gmail.com`

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

vex risk measures, spectral and distortion risk measures and generalized deviation measures.

***Keywords*:** risk measures; risk measures theory; risk management; risk measures classes; literature review.

1. Introdução

Após o trabalho marcante de Markowitz (1952), o risco de uma posição financeira passou a ser tratado de forma mais científica. Desse ponto se concretizou o uso de medidas de variabilidade, como variância, para representar o risco. Com a evolução e integração dos mercados financeiros foi consolidada a utilização da medida de risco baseada no quantil da distribuição dos resultados, conhecida como Valor em Risco (*Value at risk* – VaR), introduzido pela empresa Riskmetrics. Trabalhos que apresentam o VaR em detalhes incluem Duffie & Pan (1997) e Jorion (2007), por exemplo. Apesar deste amplo uso prático, havia uma falta de estudos que definissem quais características uma medida de risco desejável precisaria ter. Nesse sentido, surgiu toda uma corrente na literatura que discute, propõe e critica as propriedades teóricas que determinada medida de risco deve cumprir. Com base nessa discussão teórica, o uso indiscriminado do VaR passou a sofrer fortes críticas. O valor esperado de perdas que superam o VaR passou a ser defendido como medida de risco a ser utilizada. Diferentes autores (Acerbi, 2002, Rockafellar & Uryasev, 2002, Pflug, 2000, Artzner *et al.*, 1999, Longin, 2001, Föllmer & Knispel, 2011) propõem conceitos muito semelhantes sob nomes diferentes na literatura, como Perda Esperada (*Expected Shortfall* – ES), Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk* – CVaR), Expectativa Condicional da Cauda (*Tail Conditional Expectation* – TCE), Valor em Risco na Cauda (*Tail Value at Risk* – TVaR), Pior Expectativa Condicional (*Worst Conditional Expectation* – WCE), Além do Valor em Risco (*Beyond Value at Risk* – BVaR), Valor em Risco Médio (*Average Value at Risk* – AVaR).

Assim, é grande a importância da teoria de medidas de risco em finanças, tanto de um ponto de vista acadêmico, como prático, uma vez que definições teóricas mais consistentes levam a mudanças importantes na prática gerencial do risco em mercados e instituições. Todavia, não há trabalhos que apresentem de forma extensiva essa literatura específica. Assim, o presente trabalho visa expor de forma abrangente a literatura que dá suporte teórico aos estudos referentes à mensuração de risco em finanças, expondo as distintas classificações de medidas de risco, bem como trabalhos que discutem essas questões de ordem mais teórica. O foco dos trabalhos apresentados é para pesquisas que apresentem contribuição teórica, especificamente classes. Estudos que focam em contribuições empíricas, como estimação e aplicações em outros problemas financeiros, bem como métricas que não se encaixam em nenhuma classificação teórica, foram evitados devido à limitação de contribuição que poderiam representar, além da necessidade de se manter o escopo do trabalho. Dessa forma, o presente trabalho contribui servindo como uma revisão de literatura que pode ser vir como um guia dentro deste tópico de pesquisa.

Devido ao caráter técnico do trabalho, é necessário definir alguns termos. A menos que seja explicitado de modo diferente, o conteúdo se baseia na seguinte notação. Considere um mercado de período único, o que significa que existe a data atual 0 e uma data futura T. Nenhuma transação é possível entre 0 e T. Considere o resultado aleatório X de algum ativo ou portfólio, definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, F, \mathbb{P})$ sem átomos (*atomless*), onde Ω é o espaço amostral, F é o conjunto de eventos possíveis em Ω, e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade definida em Ω dos eventos contidos em F. Dessa forma, $E_{\mathbb{P}}[X]$ é o valor esperado de X sob P. Ainda, $\mathcal{P} = \{\mathbb{Q}|\mathbb{Q} \leq \mathbb{P}\}$ é um conjunto não vazio, pois $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, que representa medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ definidas em Ω que são absolutamente contínuas em relação a $\mathbb{P}$. Nesse sentido, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ é a densidade de $\mathbb{Q}$ relativa a $\mathbb{P}$, conhecida como derivada de Radon-Nikodym. Todas as igualdades e desigualdades são consideradas como quase certas em $\mathbb{P}$, ou $\mathbb{P}$ a.s. (*almost surely* – quase certamente). Tem-se que F_X é a função de probabilidade de X e F_X^{-1} sua inversa. Como $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ não tem átomos, é possível assumir F_X como sendo contínua, e é esta suposição que é feita ao longo do trabalho. Seja $L^p = L^p(\Omega, F, \mathbb{P})$ o espaço de variáveis aleatórias do qual X é um elemento, com $1 \leq p \leq \infty$, definido pela norma $||X||_p = (E_{\mathbb{P}}[|X|^p])^{1/p}$ com p finito, e $||X||_p = \inf\{k : |X| \leq k\}$ para p infinito. $X \in L^p$ significa que $||X||_p < \infty$, ou seja, o módulo de X à potência p é limitado e integrável. Nesse contexto, medir risco é equivalente a estabelecer uma função $\rho : L^p \to \mathbb{R}$, ou seja resumir em um número o risco da posição X.

A divisão feita aqui visa contemplar as principais classes de medidas de risco presentes na literatura. Assim, o restante do presente trabalho é subdividido em: i) Medidas de risco coerentes; ii) Medidas de risco convexas; iii) Medidas de risco espectrais e de distorção; iv) Medidas de desvio generalizado e v) Outras classes de medidas de risco. Para cada classe, o foco é na teoria básica e em extensões à essa estrutura fundamental.

2. Medidas de risco coerentes

2.1 Teoria básica

O primeiro trabalho sobre axiomas de medidas de risco em finanças foi o realizado por Artzner *et al.* (1999). Neste trabalho seminal, o termo apresentado pelos autores é o de coerência. Segundo esta classificação, uma medida de risco coerente deve satisfazer quatro axiomas. Dessa forma, temos por definição que uma medida de risco coerente, no sentido de Artzner *et al.* (1999), satisfaz os seguintes axiomas:

Invariância de Translação: $\rho(X + C) = \rho(X) - C, \forall\ X \in L^p, C \in \mathbb{R}$

Subaditividade: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall\ X, Y \in L^p$

Monotonicidade: se $X \leq Y,$ então $\rho(X) \geq \rho(Y), \forall\ X, Y \in L^p$

Homogeneidade Positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \forall\ X \in L^p, \lambda \geq 0$

O primeiro axioma quer dizer que se for adicionado um ganho certo a uma posição, o risco da mesma deve diminuir nessa exata quantidade. O segundo axioma implica em o risco de uma posição combinada ser menor que a soma dos riscos individuais, seguindo o princípio da diversificação. O terceiro axioma exige que se uma posição tem sempre resultados piores do que outra, então o risco da primeira deve ser maior que o da segunda. O quarto axioma é relacionado ao tamanho da posição, isto é, posições maiores aumentam o risco proporcionalmente, devido a problemas de liquidez e custos de corretagem.

Artzner *et al.* (1999) ainda consideram mais um axioma, além dos quatro que definem o conceito de coerência. Este axioma é o de relevância, como mostrado a seguir:

Relevância: se $X \leq 0$ e $X \neq 0$ então $\rho(X) > 0, \forall\ X \in L^p$

Tal propriedade, semelhante a monotonicidade, mostra que se uma posição sempre gera resultados negativos (perdas), então seu risco é positivo, isto é, existe risco.

Esta definição de medida de risco coerente está intimamente ligada à questão da regulação de uma instituição, porquanto é vinculada com o que Artzner *et al.* (1999) definem como sendo o conjunto de aceitação. Essa questão vem diretamente do axioma de invariância da translação, implicando em uma medida de risco coerente indicar quanto de capital deve ser adicionado a uma posição a fim de torná-la aceitável. Dada uma medida de risco ρ, o conjunto de aceitação definido como $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) \leq 0\}$, isto é, os resultados que levam a uma situação que não ocorram perdas, ou seja, sem risco positivo. Seja L^p_+ o cone de elementos não-negativos de L^p, e L^p_- sua contraparte negativa. Artzner *et al.* (1999) argumentam que todas as medidas de risco ρ plausíveis tem um conjunto de aceitação A_ρ que satisfaz as seguintes propriedades: contém L^p_+, não tem intersecção com L^p_-, e é um cone convexo.

Dessa forma, Artzner *et al.* (1999) formalmente definem que dado um conjunto de aceitação A, a medida de risco associada a esse conjunto é $\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A_\rho\}$, isto é, o mínimo de capital que precisa ser adicionado à posição X para torná-la aceitável. Um regulador deveria escolher um conjunto de aceitação e a medida de risco informaria quanto de capital é preciso ter em reserva para evitar desastres. Vale ressaltar que os autores demonstram que se um conjunto de aceitação preenche as propriedades definidas anteriormente, então a medida de risco associada a esse conjunto é coerente. Da mesma forma, se uma medida de risco é coerente, então o conjunto de aceitação vinculada com essa medida preenche as propriedades exigidas. Artzner *et al.* (1999) mostram que toda medida de risco coerente pode ser expressa por uma representação dual da forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_\rho} E_\mathbb{Q}[-X]$, podendo ser entendida financeiramente como o pior resultado esperado de X dentre os cenários $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_\rho \subseteq \mathcal{P}$, para espaços de probabilidade discretos.

2.2 Extensões: expansão na representação

Com a consolidação dessas propriedades teóricas, o sucesso dos axiomas de coerência se tornou ainda maior. Conforme tais axiomas foram sendo mais estudados, novas discussões foram surgindo. Sobre extensão na representação, Delbaen (2002) apresenta todo o corpo teórico de medidas de risco coerentes para espaços gerais de probabilidade, não apenas os discretos. Os resultados são derivados para o espaço de variáveis limitadas, isto é, L^{∞}, assim como para o espaço de todas as variáveis aleatórias, ou seja, L^{0}. Axiomas, conjunto de aceitação, representação dual, e todas as características presentes em Artzner *et al.* (1999) são generalizados. Esta extensão é possível com base na caracterização $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{\sigma}} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, onde $\mathcal{P}_{\sigma} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : E_{\mathbb{Q}}[X] < \infty\}$ são espaços convexos fechados de medidas de probabilidade que satisfazem a propriedade de que toda variável aleatória X é integrável para pelo menos uma medida de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\rho}$. O autor mostra que tal representação é equivalente a medida de risco coerente ρ apresentar a propriedade de continuidade de Fatou, ou seja, se $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$ é uniformemente limitado, e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, isto é, converge para X em probabilidade, então $\rho(X) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$. Inoue (2003) estende a teoria de medidas de risco coerentes para espaços mais gerais L^{p}, com $1 \leq p < \infty$, não considerando os espaços L^{0} e L^{∞}. O autor supõe que as medidas coerentes ρ são contínuas, chegando na representação dual $\rho(X) = \sup\limits_{g\in G} E_{\mathbb{P}}[(-X)g]$, onde $G = \{g : g \geq 0, E_{\mathbb{P}}[g] = 1, ||g||_q < \infty\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. G pode ser entendido como conjunto de medidas de probabilidade $\mathcal{P}_G = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} \cap L^{q}\}$. Por sua vez, Kountzakis (2009) considera medidas de risco coerentes para posições X definidas em espaços vetoriais ordenados com norma. O autor adapta axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual para o caso analisado.

Outra extensão é referente a questão da taxa de juros utilizada. No trabalho seminal de Artzner *et al.* (1999), tem-se que $\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A_{\rho}\}$ é uma medida de risco definida com base no conjunto de aceitação A_{ρ}. Se existisse apenas uma taxa de juros r, considerando posições futuras se teria $\rho_r(X) = \inf\{m : X + mr \in A_{\rho}\}$. Artzner *et al.* (2009), visando elucidar a ligação entre mensuração de risco e eficiência de capital, introduzem a noção de custo mínimo para uma posição tornar-se aceitável quando existem diversas taxas de juros no mercado. A motivação é que podem existir no mercado posições que utilizam taxas de juros domésticas e estrangeiras, como no caso de investimentos internacionais. Assim, o conceito de representação fica sendo da forma $\rho_S(X) = \inf\{m : X + S \in A_{\rho}, S \in \mathcal{S}, S_0 = m\}$, onde $\mathcal{S}$ são portfólios compostos por diferentes taxas de juros e S é o subconjunto de L^{0} que contem valores futuros de S. Sob certas suposições, os autores mostram que essas medidas de risco tem propriedades similares as de coerência.

Dando sequência, se tem na literatura de medidas de risco coerentes a proposição de algumas representações, sem necessariamente debater novos axiomas. Tais representações podem ser entendidas como subclasses de medidas de risco coerentes. Sobre esse respeito, Föllmer & Knispel (2011) estudam uma versão coerente de medidas entrópicas, tanto em situações de invariância de lei como de ambiguidade de modelo. Tais medidas entrópicas coerentes têm representação na forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_c} E_{\mathbb{Q}}[-X], \mathcal{P}_c = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : H(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \leq c\}$, onde $H(\mathbb{Q}/\mathbb{P})$ representa e entropia relativa de Q em relação a P. Em particular, os autores discutem o comportamento dessas medidas no caso de riscos independentes e sua conexão com limites. Para exercer melhor controle na cauda inferior e facilmente descrever a atitude em relação ao risco por parte do investidor, Chen & Wang (2007) propõe uma nova classe de medidas coerentes de risco minimizando p-normas, ou seja $(E_{\mathbb{P}}[|X^p|])^{\frac{1}{p}}$, das perdas mais relevantes, dado um nível de significância α, com relação a algum ponto de referência s. Essas medidas tem a forma $\rho_(\alpha, p)(X) = \inf_{s\in\mathbb{R}}(\frac{E_{\mathcal{P}}[((X-s)^-)^p]^{\frac{1}{p}}}{\alpha} - s)$. Os autores demonstram que essa nova classe de medidas tem propriedades matemáticas satisfatórias, e que resultados empíricos suportam as conclusões teóricas e a praticidade do uso dessas medidas. O uso mais comum quando do desenvolvimento de uma classe de medidas coerentes é a alocação de recursos em uma carteira de investimentos.

Nesse sentido, Fischer (2003) propõe propriedades de diferenciação para medidas de risco que garantem sua utilização em estratégias de portfólio. O autor mostra que essas propriedades são atendidas por uma ampla classe de medidas de risco coerentes baseadas em semi-desvios, diferentemente do que ocorre com o VaR. Tais medidas, se valendo do conceito de p-norma e com $0 \leq a \leq 1$, possuem uma representação matemática com forma $\rho_{a,p}(X) = -E_{\mathbb{P}}[X] + \alpha\|\max\,(0, E_{\mathbb{P}}\,[X] - X)\,\|_p$. Inserido neste escopo, Chen & Yang (2008) constroem uma classe de medidas de risco coerentes bilaterais em que desvios baseados no conceito de p-normas positivos e negativos são considerados simultaneamente, conforme $\rho_{a,p}\,(X) = -E_{\mathbb{P}}\,[X] + \alpha\|\max\,(0, X - E_{\mathbb{P}}[X])\,\|_1 + (1-\alpha)\big\|\max\Big(0, E_{\mathbb{P}}\big[X\big] - X\Big)\,\big\|_p$. Essa inovação torna simples descrever e controlar assimetrias e caudas pesadas, que são características de retornos financeiros, permitindo descrever corretamente a atitude em relação ao risco do investidor. Também com foco em p-normas, porém analisando valores nas caudas, Krokhmal (2007) apresenta medidas de risco coerentes para momentos maiores como soluções de problemas de otimização do tipo $\rho_{a,p}(X) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\alpha} ||(X-\eta)^-||_p - \eta \right\}$, com $p \geq 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. O autor mostra que o CVaR é um caso especial dessa definição, e que sua utilização em problemas de alocação de recursos é vantajosa. Complementando, Dentcheva *et al.* (2010) derivam representações de medidas de risco coerentes com lei invariante de ordens maiores. Dessa forma, uma representação dual é obtida conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_q} \int_0^1 AV\alpha R^{\alpha}(X)\mathbb{Q}$ $(d\alpha)$, onde $\mathcal{P}_q = \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1)} : \int_0^1 | \int_\alpha^1 \frac{\mathbb{Q}(dt)}{t} |^q d\alpha \leq \frac{1}{\alpha}^q \right\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.3 Extensões: novos axiomas

Uma corrente teórica que ganha corpo é a inclusão de outros axiomas para medidas de risco coerentes. Talvez o axioma de extensão que tem maior destaque na literatura seja o de Invariância de Lei, proposto por Kusuoka (2001). Seja F_X a lei (ou função) de probabilidade que governa X. Tal axioma é definido como:

Invariância de Lei: se $F_X = F_Y$, então $\rho(X) = \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$

Alguns estudos ampliam os resultados sobre o axioma de Invariância de Lei, como Leitner (2005), que prova um resultado que garante que medidas de risco coerentes com a propriedade de Fatou são lei invariantes se e somente se preservam a dominância estocástica de segunda ordem. Por sua vez, Shapiro (2013) discute representações de medidas de risco coerentes com lei invariante como integrais da ES, mostrando que essa representação existe se e somente se o conjunto da representação dual é gerado por um de seus elementos. Essa representação é definida de forma única. Porém, a usual representação como o supremo dessas integrais não é única. Ziegel (2014) investiga uma propriedade mais estrita do que Invariância de Lei, a Elicitabilidade. Elicitabilidade é a propriedade de previsões serem avaliadas e classificadas. Autores mostram que medidas com Aditividade Comonótona não tem essa propriedade, com exceção para o negativo da média. Além disso, é provado que as únicas medidas coerentes com lei invariante que possuem elicitabilidade são os expectis.

A questão de continuidade e obtenção de limites para medidas de risco coerentes é também um campo que apresenta evolução, e é diretamente ligado com a questão da Invariância de Lei. Sob esse prisma, Konovalov (2010) obtém limites e uma analogia com a lei de grandes números para medidas de risco coerentes. Com base em suposições do tipo propriedade de Fatou, convergência dominada, monotoniciadade dominada, entre outros, o autor chega aos seguintes resultados: $\lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{S_n - E_{\mathbb{P}}[S_n]}{\sigma(S_n)}\right) = \rho(\epsilon)$, onde $S_n = X_1 + \cdots X_n$ e $\epsilon \sim N(0,1)$. Assim, algumas características, bem como testes de hipóteses em amostras convergentes se tornam possíveis. De forma semelhante, Konovalov (2011) estuda essa convergência para o caso em que o foco é na contribuição ao risco de X de determinado Y. Os resultados de convergência anteriores são praticamente os mesmos para a representação $\rho(X|Y) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in P|Y} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, onde $P|Y = \{E_{\mathbb{Q}}[\cdot|Y] : \mathbb{Q} \in P\}$.

Dhaene *et al.* (2002), estuda o conceito de Comonotonicidade, que pode ser entendida como sendo dependência positiva perfeita entre variáveis. Essa propriedade leva a medidas de risco que respeitam o axioma de Aditividade Comonotônica, definido como:

Aditividade Comonotônica : $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in L^p$ com X e Y comonótonos

Esse axioma de Aditividade Comonotônica pode ser entendido como o pior caso para medidas que possuem o axioma de Subaditividade.

Stoica (2006) introduz o axioma de Relevância em um espaço vetorial, estendendo o axioma de Relevância comum, mostrando que este é equivalente à condição especial de não arbitragem. Tal axioma está ligado com medidas de probabilidade. Com base na notação estabelecida no presente trabalho, o axioma de Relevância proposto tem a seguinte representação:

$$\mathbb{P} - \text{Relevância : se } \rho(X) \leq 0 \text{ e } \rho(-X) \leq 0, \text{ então } E_{\mathbb{P}}[X] = 0$$

O autor ainda apresenta uma solução para o problema de *hedging* no preço e estuda o relacionamento WCE e VaR. Por sua vez, Leitner (2004) apresenta o axioma de Monotonicidade Dilatada, estendendo o axioma de Monotonicidade comum para medidas de risco coerentes que possuem a propriedade de Fatou. Seja $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, onde $\tilde{\mathcal{G}}$ é a família de todos os subespaços de eventos possíveis $\mathcal{F}$. Pode se dizer que Y é uma dilatação balayage de $X, X \leq^b_G Y$, se existe $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}$ de tal modo que $E_{\mathbb{P}}[X|\tilde{\mathcal{F}}] \leq Y$. Assim, se tem o axioma:

$$\text{Monotonicidade Dilatada} \quad : \quad \text{se } X \leq_G^b Y, \text{ então } \rho(X) \geq \rho(Y), \quad \forall\, X, Y \in L^p$$

A extensão se dá pelo condicionamento a um subespaço de eventos possíveis $\tilde{\mathcal{F}}$, e não mais a todo o espaço $\mathcal{F}$. Esse axioma implica em $\rho(X) \geq \rho(E_{\mathbb{P}}[X|\tilde{\mathcal{F}}])$, ou seja, o risco de uma posição não é menor que o risco de seu valor esperado. Complementando, Grigoriev & Leitner (2006) apresentam alguns resultados relacionando medidas coerentes que possuem propriedade de Fatou com os axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada. Os autores mostram que se ume medida coerente com propriedade de Fatou respeita os axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada, então ela deve respeitar o de Invariância de Lei, podendo ser representada conforme $\rho(X) = -\gamma \text{ess} \inf X + (1-\gamma)\rho_c(X), 0 \leq \gamma \leq 1$, onde ρ_c é uma medida coerente contínua com axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada.

A inclusão de axiomas pode também ser necessária quando outro enfoque é dado ao problema. Nessa perspectiva, Jarrow & Purnanandam (2005) estendem o conceito de medida de risco coerente de modo a torná-lo mais consistente com a perspectiva da firma, e não do regulador. Para isso, eles excluem o axioma de Invariância de Translação e incluem os axiomas de Relevância e Caminho Mais Curto, considerando que a medida de risco só pode assumir valores não negativos. Esse último axioma mantém que:

$$\text{Caminho Mais Curto} : \rho(X + \lambda \cdot u) = \rho(x) - \lambda, 0 \leq \lambda \leq \rho(X), \quad u = \frac{X^* - X}{||X^* - X||}, \rho(X^*) = 0, \forall X, X^* \in L^p$$

Esse axioma exibe redução de risco de forma linear ao longo do caminho mais curto para o conjunto de aceitação da medida. Ainda, ativo u adicionado à posição são precisa ser capital, mas qualquer investimento de risco. Desse modo, o conjunto de aceitação é adaptado para $A_\rho = X \in L^p \rho(X) = 0$. Ainda, os autores mostram que medidas que satisfazem esse conceito tem a forma $\rho(X) = \inf_{X^* \in L^0_+} \{||X - X^*||\}$, com L^0_+ sendo o conjunto de todas as variáveis não negativas.

2.4 Extensões: abordagem multivariada

Outra possibilidade de extensão de medidas coerentes é levar a definição para o campo multivariado. A esse respeito, Jouini *et al.* (2004) definem medidas de risco como sendo funções $\rho(d, n) : L_d^p \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem versões vetoriais dos axiomas de coerência. O argumento para a utilização destas medidas é que questões como taxas de câmbio e custos de transação são relevantes em grandes portfólios, mas desprezadas na versão padrão de medidas de risco coerentes. Questões como conjuntos de aceitação e representação dual dessas medidas vetoriais são expostos como extensões do caso padrão de medidas coerentes de risco. O caso de agregação de risco, onde $d < n$, é discutido, onde condições necessárias e suficientes para coerência são apresentadas. Complementando essa extensão multivariada, Kulikov (2008) define também medidas de risco coerentes vetoriais, mas permitindo que os custos de transação e taxas de câmbio sejam estocásticos. Os axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são também estendidos com base em teoremas. Exemplos de aplicação com versões multivariadas do TVaR e WVaR são investigados e problemas de alocação e contribuição de risco são analisados.

Ainda com foco multivariado, Cascos & Molchanov (2007), considerando uma estrutura topológica de cones e conjuntos, definem medidas de risco vetoriais. A relação dessas medidas com regiões truncadas é feita, com exemplos para VaR, ES e perda máxima. Molchanov & Cascos (2014) apresentam medidas de risco coerentes multivariadas definidas em conjuntos vetoriais com base em seleções, isto é, posições que são aceitaveis em todas as marginais. Resultados de definições, continuidade e representação são provados, assim como extensões para os casos de mercado cônico e numeros reais são apresentadas. Ainda, estabelecimento de limites e meio de computar tais meddias são apresentados. Focando em medidas coerentes com lei invariante, Ekeland *et al.* (2012) propõem uma extensão multivariada como funções de correlação máxima, que é uma adaptação da noção de comonotonicidade. Os autores generalizam então a questão de coerência com lei invariante e aditividade comonótona para o que chamam de coerência forte. Uma medida de risco $\rho : L_d^2 \to R$ tem a característica de coerência forte se, além de contínua e convexa, se ela satisfaz a igualdade $\rho(X) + \rho(Y) = \sup\left\{\rho(\tilde{X} + \tilde{Y}) : F_{\tilde{X}} = F_X, F_{\tilde{Y}} = F_Y, \forall X, Y \in L_d^2\right\}$. Os autores estendem alguns resultados de Kusuoka (2001) para o caso multivariado.

2.5 Extensões: abordagem dinâmica

Uma abordagem é considerar a coerência em medidas de risco que vão além da estrutura de período único. Cvitanic & Karatzas (1999) estudam medidas dinâmicas de risco no sentido de mercados completos, incorporando uma filtração em L^p, ou seja, $L^p(\Omega, \mathcal{F}; \mathcal{F}_t, P)$ ou $L^p(\mathcal{F}_t)$ com $\mathcal{F}_t = (X_1, \cdots, X_t)$, $t = 1, \cdots, T$. Esse tipo de medida é definido sobre uma estratégia de otimização max-min sobre distribuição de probabilidades e carteiras aceitáveis compostas por ativos negociáveis em um intervalo de tempo, conforme a representação $\rho(X_T) = \sup_{\mathbb{Q} \in P} \inf_{X \in A_\rho} E_{\mathbb{Q}}$ $[\max \frac{X_T}{r_T}^-]$, com r_T sendo o valor da taxa de juros. Tal classe de medidas é dinâmica no sentido de que acompanharia a evolução dos preços dos ativos em questão. Outro estudo sobre medidas de risco coerentes dinâmicas é o realizado por Siu & Yang (1999), onde, primeiramente, uma representação dual é apresentada conforme a formulação $\rho(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \left\{ E_{\mathbb{Q}}[-\frac{X_{t+1}}{r_t}|\mathcal{F}_t] \right\}$, mostrando que tal medida é coerente. Em seguida, considerando a perspectiva bayesiana uma definição subjetiva para a medida é apresentada, em que formulas fechadas para alguns casos podem ser obtidas. Mazzoleni (2004) mostra como elementos unilaterais e intertemporais tem que ser explicitamente incluídos na definição de uma medida de risco, a fim de proporcionar instrumentos flexíveis para gestores de risco. Uma nova medida dinâmica unilateral é definida de acordo com um relaxamento das condições de coerência, com representação $\rho_L(X_t) = \sup_{X_t} E\left[\left(\frac{L(-X_t)}{r_t}\right)^+\right]$, onde L é uma função de perda.

Também sobre medidas dinâmicas, Riedel (2004) argumenta que para esta classe de medidas o axioma de Invariância de Translação deve ser adaptado para levar em conta a chegada de nova informação. Em adição aos axiomas de coerência, esse autor acrescenta o axioma de Consistência Dinâmica, representado como:

Consistência Dinâmica: $\rho(X_{t+1}) = \rho(Y_{t+1})$ implica em
$$\rho(X_t) = \rho(Y_t), \forall X_t, Y_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$$

Tal axioma requer que julgamentos baseados em uma medida de risco não sejam contraditórios ao longo do tempo, ou seja, se duas posições possuem o mesmo julgamento sobre todos os cenários possíveis no futuro, então o risco delas hoje deve ser o mesmo. Uma medida de risco com essas propriedades deve possuir uma representação dual baseada em valores futuros de X com a forma $\rho_t(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in P} E_{\mathbb{Q}}[-\sum_{s=t}^{T} \frac{X_s}{(1+r)^{s-t}}|\mathcal{F}_t]$, onde r é uma taxa de juros de desconto.

De forma um pouco distinta, Artzner *et al.* (2007) abordam a questão de multiperíodos, ao invés da relação dinâmico/estático. Os autores estendem a teoria de medidas de risco coerentes para um processo ao invés de um único período, abordando questões de recursividade e consistência dinâmica. De modo complementar, Roorda *et al.* (2005) estendem a teoria de medidas de risco coerentes para o caso multiperíodo com base no axioma de Consistência Dinâmica. Axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são adaptados para a estrutura proposta pelo autor. A utilização de combinação multiplicativa de medidas de probabilidade é utilizada. Delbaen (2006) relaciona tal questão com base na estabilidade de medidas de probabilidade. Assim, o autor apresenta conjuntos de probabilidade em que densidades relativas são multiplicáveis para formar informação acerca de tempos intermediários. A relação desses conjuntos com medidas de risco dinâmicas é estabelecida de modo a respeitar axiomas de Consistência Dinâmica e Recursividade. De modo mais detalhado, Roorda & Schumacher (2007) diferencia definições de consistência sequencial, condicional e dinâmica. Para o autor, tem-se que:

$$\text{Consistência Sequencial} : \rho(X_{t+s}) \geq (\leq) 0 \text{ implica em } \rho(X_t) \geq (\leq) 0, \forall X_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq 0$$

$$\text{Consistência Condicional} : \rho(X_t) = \rho(E_{\mathbb{P}}[\rho(X_{t+s})|\mathcal{F}_t]), \forall X_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq$$

$$\text{Consistência Dinâmica} : \rho(X_{t+s}) = \rho(Y_{t+s}) \text{ implica em } \rho(X_t) = \rho(Y_t), \forall X_t, Y_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq 0$$

Com base nesses axiomas, os autores derivam resultados para medidas de probabilidade com estabilidade que satisfazem a usual representação dual. Ainda, os autores estudam o TVaR, adaptando sua definição dual para cada caso de consistência, restringindo seu conjunto de medidas de probabilidade para satisfazer as propriedades desejadas. Complementando, Katsuki & Matsumoto (2014) estudam medidas de risco coerentes considerando um esquema multi-período. O papel do axioma de Consistência Dinâmica é investigado e tido como fundamental no trabalho. Todavia em sua forma estrita tal axioma penaliza muito o risco, medido pelo TVaR, então formas mais amenas são apresentadas pelos autores. Já Kusuoka (2007) apresentam medidas de risco coerentes multiperíodo que são lei invariante. Com suposições de movimento browniando e demais restrições, uma representação dual e propriedades de recursividade são provadas, por meio de equações diferenciais parciais. Diversas propriedades da classe são provadas, embora sem intuição financeira. Por sua vez, Tahar & Lépinette (2014) estendem a representação de medidas coerentes multivariadas de Jouini *et al.* (2004) para o caso multiperíodo, considerando tempo contínuo. Com base na Consistência Dinâmica, os autores derivam teoria para os axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual.

3. Medidas de Risco Convexas

3.1 Teoria básica

O conceito de medidas de risco convexas foi proposto de forma concomitante por Föllmer & Schied (2002) e Frittelli & Gianin (2002). Esses autores introduzem a noção de medida de risco convexa como uma extensão do conceito de coerência de Artzner *et al.* (1999). O argumento é que em muitas situações o risco de uma posição pode aumentar de maneira não linear com o tamanho do portfólio. Por exemplo, um risco de liquidez adicional pode surgir se uma posição é multiplicada por um fator de aumento. Os autores em questão sugerem relaxar os axiomas de Homogeneidade Positiva e Subaditividade por um axioma mais fraco de Convexidade. Se tem por definição que uma medida de risco convexa no sentido de Föllmer & Schied (2002) e Frittelli & Gianin (2002) satisfaz os seguintes axiomas:

Invariância de Translação: $\rho(X + C) = \rho(X) - C, \forall X \in L^p, C \in R$

Monotonicidade: se $X \leq Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y), \forall X, Y \in L^p$

Convexidade: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$, $\forall X, Y \in L^p, 0 \leq \lambda \leq 1$

Convexidade significa que diversificação não aumenta o risco, isto é, o risco de uma posição diversificada é menor ou igual à média ponderada dos riscos individuais. A questão do axioma de Normalização também é apresentada. Esse axioma garante que:

Normalização: $\rho(0) = 0$

Em termos de representação dual, os autores mostram que medidas de risco convexas podem ser apresentadas conforme $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q}))$, onde $\alpha\mathcal{P} \rightarrow (-\infty, \infty]$ é uma função de penalização convexa e inferiormente semi contínua, com $\alpha(\mathbb{Q}) \geq -\rho(0)$. Essa função de penalização pode ser representada matematicamente como $\rho(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{X\in A_\rho}(E_{\mathbb{Q}}[-X])$, onde $A_\rho = X \in L^p : \rho(X) \leq 0$ é um conjunto de aceitação similar a aquele definido para as medidas coerentes de risco. Assim, A_ρ contém L^p_+, não tem intersecção com L^p_-, e é convexo. Como Subaditividade e Homogeneidade Positiva implicam Convexidade, toda medida de risco coerente é uma medida de risco convexa, embora o contrário não seja verdadeiro.

3.2 Extensões: expansão na representação

Assim como o ocorrido com o conceito de coerência, a definição de medidas de risco convexas também teve extensões discutidas na literatura. A definição padrão garante que medidas de risco convexas podem ser representadas por medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ se a medida respeitar certas propriedades de continuidade (propriedade de Fatou). Krätschmer (2005) prova em seu trabalho o caminho contrário desse resultado, se medidas de risco convexas podem ser representadas por medidas de probabilidade então essas medidas de risco convexas possuem certas propriedades de continuidade. O autor consegue isso com uma forma de representação dual menos restrita, conforme $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^*}(E_P[-X] - \alpha(\mathbb{Q}))$, onde $\mathcal{P}^*$ é um conjunto que permite medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ com propriedades menos restritivas de continuidade. O autor verifica que se a medida convexa possui representação dual então ela é contínua acima, ou seja, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow X$, isto é, converge para X por valores maiores, então $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$. Ainda, o autor prova que se a medida convexa é contínua abaixo, isto é, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow X$, isto é, converge para X por valores menores, então $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$, então as medidas de probabilidade utilizadas na representação dual possuem função de penalidade que são próprias.

Ainda sobre a representação de medidas de risco convexas, Kaina & Rüschendorf (2009) investigam em detalhes a questão da continuidade e propriedades dessa representação em espaços gerais de probabilidade, isto é, L^p, com p finito. Os autores encontram que a representação dual tem a forma $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_p} (E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q}))$, com $\mathcal{P}_p = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^q\right\}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, além de verificar verificam que as diversas propriedades de continuidade podem ser interpretadas como propriedades de robustez sendo úteis para aplicações. Mais especificamente, se a medida convexa é finita, então ela é contínua no sentido de Lipschitz, ou seja existe constante C tal que $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq C||X - Y||$, é contínua no sentido de Fatou, é contínua no sentido de Lebesgue, ou seja, se $X_{n n=1}^{\infty}$ é uniformemente limitado e $X_n \overset{\rightarrow}{\mathbb{P}} X$, então $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$, é continua acima, é contínua abaixo e é sigma (L^p, L^q) inferiormente semicontínua. Ainda nesse tópico, Delbaen (2009) mostra que se uma medida de risco convexa é definida em um espaço sólido e invariante de variáveis aleatórias, então tal medida possui a propriedade de continuidade inferior e o espaço é composto por variáveis aleatórias integráveis. Como consequência, medidas de risco para determinadas distribuições podem precisar assumir valores infinitos.

Ainda sobre extensões na representação, Cheridito & Li (2009) estudam medidas de risco convexas, com coerentes como caso especial, quando retornos incertos são modelados por variáveis aleatórias limitadas em espaços definidos por corações de Orlicz, ligada com a questão de variáveis não limitadas de espaços L_p. Os autores provam que medidas convexas representadas nesses espaços admitem uma representação robusta com respeito a diferentes medidas de probabilidades, conforme $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\psi}} (E_Q[-X] - \alpha(P))$, com $\mathcal{P}^{\psi}$ sendo um coração de Orlicz. Cheridito & Li (2008) expandem esses resultados apresentando condições para que medidas de risco convexas definidas nesses espaços apresentem propriedades de continuidade, monotonicidade e convexidade estritas, bem como relações de dominância estocástica. Tais condições são baseadas na representação dual e na função de penalidade. Complementando essa representação, Orihuela & Ruiz Galán (2012) apresentam um resultado que mostra que uma representação robusta para medidas de risco convexas em espaços de Orlicz garante a propriedade de Fatou e continuidade. Biagini & Frittelli (2010) estendem o teorema de continuidade de funções lineares e crescentes (Namioka-Klee) para medidas de risco convexas, além de mostrar que a representação dual é mantida se tais medidas tiverem a propriedade de Fatou. Extensivo estudo em espaços de Orlicz é apresentado, relacionando com conjuntos de aceitação, através de uma propriedade de convergência de sequências convexas.

Filipovic & Kupper (2007), considerando espaços vetoriais, apresentam resultados para funções convexas serem monótonas e com invariância de translação, logo medidas de risco convexas. O resultado principal é que, dada qualquer função f, os autores apresentam a maior função que serve como medida de risco convexa que é majorada por f. Resultados para tipos de medidas bastante consideradas, mas que não respeitam as propriedades são mostrados, explicitando intervalos em que tais medidas são convexas. Por sua vez, Fertis *et al.* (2012) definem o conceito de medida de risco convexa robusta quando as medidas de probabilidade da definição padrão não são totalmente conhecidas. Para tanto, é acrescentado na definição de medidas de risco convexas um conjunto de medidas possíveis onde as probabilidades podem ser representadas. Os autores estudam como essas medidas se relacionam com os conceitos previamente apresentados, introduzindo uma versão robusta do CVaR e da medida entrópica. De maneira parecida, Bion-Nadal & Kervarec (2012) consideram um espaço onde não há medida de probabilidade de referência para representar medidas de risco convexas com base num conjunto de medidas de probabilidades de um espaço Borel. Essa discussão é feita através do conceito de capacidades, inclusive fazendo uma aplicação para g-expectativas. Não obstante, Vicig (2008) em seu trabalho generaliza definições de classes de medidas já existentes, discutindo suas propriedades de consistência através do conceito de probabilidades imprecisas. Segundo o autor, medidas de risco podem ser entendidas como limites superiores ou inferiores de previsões. Dessa forma, considerando previsões convexas, medidas de risco convexas são generalizadas, inclusive para os casos condicionais.

Corroborando com extensão de medidas de risco convexas, Laeven & Stadje (2013) introduzem medidas de risco convexas entrópicas. Diferentemente da versão clássica que computa o risco baseada na expectativa probabilística de perda, a versão entrópica considera a expectativa normalizada de perda. Essa subclasse pode ser representada como $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in P} \{C_\varphi(X,\mathbb{Q}) - \theta(\mathbb{Q})\}$, com $C_\varphi(X,Q) = \gamma \log(E_{\mathbb{Q}}[-X/\gamma]), 0 < \gamma < \infty$, e θ é uma função de penalização definida para medidas de probabilidade Q. Se θ for uma função indicativa de $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, então a medida se torna coerente entrópica. Os autores provam outras propriedades desse tipo de medida, como sua relação com axiomas já mencionados e conjuntos de aceitação, bem como sua relação com questões de tomada de decisão e aversão ao risco. Frittelli & Scandolo (2006) propõem uma generalização com base em um novo formato do requerimento de capital como medida de risco conforme $\rho_{A,C,\Pi}(X) = \min \{\Pi(Y) \in \mathbb{R} : Y \in M, X+Y \in A\}$, onde M representa todas as posições possíveis de serem obtidas com *heding*, Π representa o custo inicial de um elemento $Y \in M$, e A é um conjunto de aceitação. Nesse contexto, uma alteração no axioma de invariância de translação é apresentada como $\rho(X+z) = \rho(X) - \Pi(z)$. Resultados para representação dual são obtidos dividindo a função de penalização em duas partes, uma para A e outra para M e Π. Esse arcabouço é adaptado um contexto com vários períodos, tornado, de certa forma, a abordagem dinâmica. Farkas *et al.* (2014) generalizam essa representação composta do requerimento de capital considerando que o conjunto M é composto por posições possíveis de serem obtidas se utilizando múltiplos ativos de referência. Se tal conjunto for composto por apenas 1 ativo, então a representação volta a ser aquela proposta em Frittelli & Scandolo (2006). Toda teoria de medidas convexas é apresentada para essa estrutura, desde a relação dos axiomas com espaços de aceitação e representação dual.

Um item que muitas vezes é deixado subentendido é a taxa de juros. Konstantinides & Kountzakis (2011) usam ferramentas da teoria de espaços lineares regulados parcialmente ordenados, principalmente cones, para estender resultados sobre medidas de risco coerentes e convexas. O foco principal é substituir a taxa de juros livre de risco por algum ponto pertencente ao cone do espaço de ativos com risco. Ainda a esse respeito, Filipovic (2008) mostra que utilizar uma taxa de juros superior a aquela livre de risco não reduz os requerimentos de capital. Muito embora o valor presente possa ser reduzido, devido a uma taxa maior, seu maior risco compensa a diferença. De fato, o autor mostra que, sob algumas condições, não existe taxa de juros ótima no sentido de levar a menores requerimentos de capital.

3.3 Extensões: novos axiomas

De forma mais conceitual, El Karoui & Ravanelli (2009) relaxam o axioma de Invariância de Translação para uma forma subaditiva, com o intuito de verificar o risco de uma posição futura. Autores argumentam que quando há incerteza sobre taxas de juros, o axioma de Invariância de Translação se torna problemático. Assim, a versão relaxada do axioma, com S_T sendo a taxa de juros em T, é:

Transação Subaditiva: $\rho(X - CS_T) \leq \rho(X) + C, \forall X \in L^p, C \in \mathbb{R}$

A lógica dessa relação é que uma posição descontada de um valor futuro não pode ter seu risco atual aumentado em mais que este valor. Exemplos são apresentados para situações onde o axioma de Invariância de Translação padrão não é aplicável. A representação dual tem a forma $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^f} \{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}$, com $P^f = \Big\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \mathbb{Q}$ é fintamente aditivo$\Big\}$, e função de penalidade $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{X\in L^p} \{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X)\}$. Ainda, exemplos para o caso dinâmico são expostos.

Corroborando, Cerreia-Vioglio *et al.* (2011) argumentam a favor desse relaxamento subaditivo da translação, mas mostram que a equivalência entre convexidade e diversificação não se mantém. Apenas a relação entre diversificação e quase convexidade, isto é, $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \sup \rho(X), \rho(Y)\ \forall X, Y \in L^p, \lambda \in [0,1]$ é que fica garantida. Os autores estudam medidas que respeitam o axioma de quase convexidade no caso da versão subaditiva do axioma de translação. Assim, os autores provêm uma representação dual para este tipo de medida da forma $\rho(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} R(E_{\mathbb{Q}}[-X], \mathbb{Q})$, onde $R : \mathbb{R} \times \mathcal{P} \to [-\infty, \infty]$, com $R(t, \mathbb{Q}) = \inf \{\rho(X) : E_{\mathbb{Q}}[X] = t\}$, é um função semi contínua superior que é crescente e não expansiva no primeiro componente, de tal modo que $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} R(t, \cdot)$ é constante. Os autores estabelecem condições necessárias para o axioma de Invariância de Lei, e o relacionamento com outros axiomas de medidas de risco. Drapeau & Kupper (2013) analisam a pluralidade de interpretações da noção subjetiva de risco, através de uma representação que permite uma interpretação diferenciada dependendo do contexto. Essa representação permite entender o efeito de variáveis aleatórias, percepção de risco e risco do modelo. Tal representação tem a forma matemática conforme $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} R(\mathbb{Q}, E_{\mathbb{Q}}[-X])$, com $R(\mathbb{Q}, s) = \min\Big\{m \in$

$\mathbb{R} : s \leq \alpha(\mathbb{Q}, m)\Big\}$, onde a função de penalidade é $\alpha(\mathbb{Q}, m) = \sup_{X \in A^{\rho}} \{E_{\mathbb{Q}}[-X]\}$. Autores mostram que a percepção de risco pode ser vista como risco de escolher a distribuição $\mathbb{Q}$ errada.

Complementando, Frittelli & Gianin (2011) focam em uma interpretação alternativa para a função de penalização na representação dual, baseada na quase convexidade. Além disso, propriedades de continuidade de medidas de risco convexas comonótonas são investigadas, de modo que se verifica que devido à perda de convexidade, continuidade local e global não são mais equivalentes. Desse modo, muitas propriedades que são verdadeiras para medidas de risco convexas deixam de ser válidas. Farkas *et al.* (2015) consideram o caso em que taxas de juros são levadas em conta de um período para o outro, oferecendo uma variedade de resultados de finitude e continuidade, conforme o espaço de variáveis e conjunto de aceitação utilizado. Nessa situação, a medida de risco convexa fica definida pelo conjunto de aceitação como $\rho(X) = \inf\left\{m : X + \frac{m}{S_0} S_T \in A_{\rho}\right\}$, onde S_0 e S_T são os valores da taxa de juros em 0 e T. Ainda, uma versão diferente do axioma de Invariância de Translação é dado, conforme $\rho(X + CS_T) = \rho(X) - CS_0, \forall X \in L^p, C \in \mathbb{R}$. Exemplos com VaR e TVaR são apresentados. Casos em que a taxa de juros é um título de dívida ou um ativo com baixa liquidez são expostos. O caso da Translação Subaditiva é considerado, e uma representação dual é fornecida.

Da mesma forma que para medidas coerentes, o axioma de Invariância de Lei é bastante estudado na literatura de medidas de risco convexas. O conceito foi adaptado para essa classe de medidas por Frittelli & Gianin (2005), os quais mostram que a adaptação se dá pela inclusão de uma função e penalidade na representação original. A representação fica sendo $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]}} \left\{\int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right\}$, onde $G : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$, com $\inf G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = 0$ e $G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \left\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(-X) - \rho(X)\right\}$. Complementando esse resultado, Jouini *et al.* (2006) mostram que medidas de risco convexas com lei invariante, definidas em espaços padrão, possuem automaticamente a propriedade de continuidade de Fatou. Os autores provam alguns resultados para a propriedade de Lebesgue. Visando unificar esses resultados, Kusuoka (2007) apresenta uma prova simples da representação de medidas de risco convexas com lei invariante juntando as provas de Kusuoka (2001), Frittelli & Gianin (2005) e Jouini *et al.* (2006). Svindland (2010) generaliza o resultado de Jouini *et al.* (2006), que mostra que medidas de risco convexas com lei invariante tem a propriedade de Fatou, relaxando a suposição que o espaço de probabilidade é padrão, mantendo apenas a necessidade de ser não atômico. Ainda, o autor leva o resultado para medidas de risco quase convexas.

Complementando, Filipovic *et al.* (2012) estabelecem uma correspondência entre medidas de risco convexas com lei invariante em L^∞ e L^1. Autores provam que o espaço canônico para esta classe de medidas é L^1, isto é, com valor esperado finito. Svindland (2009) apresenta um subgradiente (conjunto de medidas de probabilidade que otimizam a representação dual) generalizado para medidas de risco convexas com lei invariante fechadas em L^1. Resultados relacionando esse subgradiente com outras representações são apresentados, implicações para alocações e exemplos de medidas específicas são dados. Estendendo, Angelsberg *et al.* (2011) consideram a classe de medidas de risco convexas com lei invariante, no caso em que a função de ponderação é contínua e pode ser computada de diversas maneiras. A representação dual tem a forma $\rho_{h,p}(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}\cap L^p(h)} \int_0^1 \left[AVaR^\alpha(X)\mathbb{Q}(\alpha) - \mathbb{Q}^p(\alpha)h(\alpha)\right] d\alpha$, onde $h\ : (0,1] \rightarrow (0,\infty)$ é uma função positiva e estritamente decrescente, e $1 < p < \infty$. Os autores provêm condições necessárias e suficientes para que uma posição seja representada por essa classe de medidas, além de fornecer dois exemplos de medidas nessas classes. Drapeau *et al.* (2011) apresentam representações robustas para medidas de risco quase convexas com lei invariante que respeitam o axioma de Monotonicidade, mostrando que essas medidas possuem a propriedade de Fatou. A representação dual obtida tem a forma matemática $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^\infty} \left\{\int_0^1 AVaR^\alpha(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - \alpha_{\min}(\mathbb{Q})\right\}$, com $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^\infty} \left\{\int_0^1 AVaR^\alpha(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - \rho(X)\right\}$, $\mathcal{P}^\infty = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \int_0^1 \mathbb{Q}(\alpha)d\alpha \leq 1, P \text{ é limitado}\right\}$ e $X \in L^\infty$. Extensão para o caso dinâmico com Consistência Dinâmica é apresentado, bem como exemplos.

Bäuerle & Müller (2006) utilizam o conceito de Invariância de Lei para estabelecer relação entre medidas de risco e ordens de dominância estocástica. Autores mostram que medidas de risco com axiomas de Monotonicidade e Invariância de Lei, definidas em espaços padrão respeitam a dominância estocástica de primeira ordem, ou seja, se $X \leq_{1std} Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Ainda, medidas de risco com axiomas de Monotonicidade, Convexidade e Invariância de Lei, além de possuir a propriedade de Fatou, definidas em espaços padrão respeitam a dominância estocástica de segunda ordem, isto é $X \leq_{2std} Y$ implica em $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Assim, para medidas de risco convexas com lei invariante se t que $\rho(E_{\mathbb{P}}[X|Y]) \leq \rho(X)$. Complementando, Cherny & Grigoriev (2007) mostram que toda medida de risco convexa, definida em espaço de probabilidade não atômico, com axioma de Monotonicidade Dilatada é lei invariante e vice-versa. Nesse caso, medidas convexas com lei invariante respeitam a dominância estocástica de segunda ordem. Também relacionando com o axioma de Invariância de Lei, Acciaio & Svindland (2013) mostram que a propriedade de convexidade, que é tão desejada para medidas de risco, não é interessante quando se consideram as distribuições de probabilidade na definição das medidas, uma vez que é a concavidade de distribuições é que está conectada com a convexidade das medidas. Resultados nesse sentido são provados num contexto de invariância de lei, inclusive para o caso comonótono.

3.4 Extensões: abordagem multivariada

Trazendo a discussão para o campo multivariado, Hamel & Heyde (2010) apresentam definições, axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual de medidas de risco convexas no L^p_D com resultados vetoriais, semelhantes ao de Jouini *et al.* (2004) para o caso de medidas coerentes. De forma complementar, Hamel *et al.* (2011) abordam o mesmo problema, porém o caso estudado é o de mercados cônicos considerando a atualização de informação de forma dinâmica. Por sua vez, Labuschagne & Offwood-Le Roux (2014) estendem a teoria de medidas de risco convexas multivariadas considerando produtos de espaços vetoriais, ao invés do espaço L^p_D. A questão de axiomas, representação dual e conjuntos de aceitação é estabelecida e propriedades de continuidade determinadas. Já Ekeland & Schachermayer (2011) apresentam resultados de representação de medidas de risco convexas multivariadas com lei invariante no espaço L^∞_D, através de definições de comonotonicidade e coerência forte.

De modo um pouco diferente, Burgert & Rüschendorf (2006) apresentam resultados para medidas de risco convexas multivariadas que resultam em um número e não um vetor, considerando posições do tipo $X = (X_1 + \cdots + X_N) \in L^p_N$. Os autores apresentam definição de composição com base nos riscos marginais, esclarecendo a relação com axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual de medidas convexas. Em seguida, abordam a questão de invariância de lei e continuidade de Fatou para determinar resultados de dominância. De modo complementar, Rüschendorf

(2006) adapta os resultados de medidas convexas com lei invariante para o caso multivariado. Com base no conceito de medida de risco de máxima correlação, representação dual de medidas convexas com lei invariante são determinadas, do mesmo jeito que são baseadas no AVaR para o caso univariado. Wei & Hu (2014) complementam essa abordagem considerando casos independentes de modelo, convertendo axiomas, conjunto de aceitação e representação dual.

3.5 Extensões: abordagem dinâmica

Assim como ocorre com medidas coerentes, também existe uma corrente de estudos que leva as medidas de risco convexas para uma estrutura dinâmica. A raiz desse conceito é o de risco condicional. A esse respeito, Ruszczynski & Shapiro (2006) derivam os resultados de medidas de risco convexas (coerentes) condicionais a informação anterior, adaptando todos os resultados conhecidos. A questão da multiplicidade de medidas de probabilidade é abordada para obter muitos dos resultados. Representação em função de expectativas condicionais, exemplos de medidas condicionais e sua utilização em problemas de otimização são discutidos. Kovacevic (2012) apresenta resultados sobre medidas de risco convexas condicionais em espaços L^1 generalizados. Todo o corpo é baseado na representação dual, se valendo da questão de composições através da junção de medidas de probabilidade. Medidas dinâmicas são então compostas por medidas estáticas. Cheridito *et al.* (2004), considerando espaços de processos càdlàg (contínuos à direita e limitados à esquerda) com tempo contínuo, estendem a teoria de medidas de risco convexas. Resultados para processos limitados R^∞ são a base do estudo, mas uma extensão para espaços R^p é apresentada. Teoremas similares a aqueles tradicionais em espaços L^psão apresentados, estabelecendo resultados para a relação entre axiomas e conjuntos de aceitação, bem como representação dual. Complementando, Cheridito *et al.* (2005) generalizam todos os resultados para o espaço de processos cádlág ilimitados, ou seja, consideram o espaço R^0. Resultados para o espaço L^0 são generalizados, e exemplos são fornecidos. Estendendo, Penner & Réveillac (2015) consideram medidas de risco convexas para processos cádlág, incorporando maiores detalhes nas medidas de probabilidade da representação dual e incerteza de taxas de juros, e relaxando o axioma de Invariância de Translação para a Transação Subaditiva. Adaptação para o conceito de g-expectativas com equações diferenciais estocásticas recursivas também é feita, se valendo dos detalhes da etapa anterior.

Por sua vez, Frittelli & Maggis (2014) estudam medidas de risco quase convexas condicionais definidas em módulos do espaço L^0, obtendo a seguinte representação dual $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^G} R\left(E_{\mathbb{Q}}\left[-X|\mathcal{G}\right], \mathbb{Q}\right)$, onde $\mathcal{P}^{\mathcal{G}} = \left\{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}\ : E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right] = 1\right\}$ e a função de perda tem a forma $R(Y,\mathbb{Q}) = \inf_{\xi\in L^p(\mathcal{G})}\{\rho(\xi) : E_{\mathbb{Q}}[-X|\mathcal{G}] = Y\}$. No caso de Translação Subaditiva, a função muda para $R(Y,\mathbb{Q}) = \inf_{\xi\in L^p(\mathcal{G})}\{\rho(\xi) : E_{\mathbb{Q}}\left[-X|G\right] \geq Y\}$. Filipovic *et al.* (2012) consideram medidas condicionais oriundas de espaços L^p ou baseadas em módulos para definir medidas de risco convexas com invariância ou subvariancia de translação. Representação dual com base em teoria convexa é o centro do trabalho. De modo análogo, Guo *et al.* (2014) apresentam resultados teóricos de como relacionar as definições de medidas de risco convexas condicionais definidas em espaços L^p ou em módulos. Tal relação se dá pela concatenação do envoltório convexo de espaços L^p, de tal modo que é possível unificar as definições. A representação dual baseada na teoria de convexidade é o centro do trabalho.

De modo a trazer para o campo dinâmico, Detlefsen & Scandolo (2005) abordam um contexto em que informação adicional é disponível, caracterizando essas medidas através de conjuntos de aceitação. A representação dual tem a forma $\rho(X) = \text{ess.}\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\left(E_{\mathbb{Q}}\left[-X|G\right] - \alpha(\mathbb{Q})\right)$, com $\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}\ : \mathcal{P} = \mathbb{Q} \text{ em } \mathcal{G}\}$, sendo $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$. Não obstante, um axioma de regularidade é discutido. Seja I_A uma função indicadora se determinado elemento pertence ao conjunto A. Tal axioma diz que:

$$\text{Regularidade :}\qquad \begin{array}{l}\text{se } XI_A = YI_A, \text{ então } \rho(X)I_A = \rho(Y)I_A,\\ \forall X,Y\in L^\infty, A\in G\end{array}$$

Tal axioma implica em $\forall X,Y\in L^\infty, A\in G$, $\rho(X)I_A = \rho(X)I_A$ e $\rho(XI_A + YI_A^C) = \rho(X)I_A + \rho(Y)I_A^C$, onde A^C é o complemento de A. Ainda, os autores mostram que medidas convexas dinâmicas são cunhadas como uma sucessão de medidas convexas condicionais utilizando uma filtração $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}$, satisfazendo axiomas de Consistência Dinâmica (no sentido de Riedel (2004)), Recursividade e *Supermartingale*. Os dois últimos axiomas podem ser entendidos como:

$$\text{Recursividade: } \rho(X_t) = \rho(-\rho(X_{t+1})), \forall\ X_t\in L^\infty(\mathcal{F}_t)$$

$$\textit{Supermartingale}: \ \rho(X_t) \geq E_{\mathbb{P}}\left[\rho(X_{t+1})|\mathcal{F}_t\right], \forall\ X_t \in L^{\infty}(\mathcal{F})_t$$

Recursividade implica em se poder obter o risco atual através do risco futuro, enquanto *Supermartingale* faz o risco atual ser maior que o risco esperado do período seguinte, dada a informação atual.

Kovacevic & Pflug (2009) discutem o axioma de Consistência Dinâmica de medidas de risco convexas, levando em conta os resultados da literatura. A relação com outros axiomas como Recursividade e Monotonicidade de Informação é investigada em um arcabouço multiperíodo. Para o autor, tais axiomas são definidos como:

$$\begin{aligned}&\text{Consistência Dinâmica}: \ \rho\left(X_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1}\right) \geq (\leq)\rho\left(Y_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1}\right)\\ &\quad\text{implica em } \rho\left(X_t|\mathcal{F}_t\right) \geq (\leq)\,\rho\left(Y_t|\mathcal{F}_t\right),\ \forall\ X_t, Y_t \in L^p\left(\mathcal{F}_t\right)\end{aligned}$$

$$\text{Recursividade}: \rho\left(X_t|\mathcal{F}_t\right) = \rho\left(-\rho\left(X_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1}\right)|\mathcal{F}_t\right), \forall\ X_t \in L^p\left(\mathcal{F}_t\right)$$

$$\begin{aligned}&\text{Monotonicidade de Informação}: \ \text{se } \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, \text{ então } \rho\left(X_t|\mathcal{G}_t\right)\\ &\qquad \geq \rho\left(X_t|\mathcal{F}_t\right), \forall\ X_t \in L^p\left(\mathcal{G}_t\right) \subseteq L^p\left(\mathcal{F}_t\right)\end{aligned}$$

Monotonicidade de Informação implica em um volume maior de informação não aumentar o risco em relação a um volume menor de informação. Resultados obtidos pelos autores mostram que a Consistência Dinâmica pode ser conflitante com a Monotonicidade de Informação.

Cheridito *et al.* (2006) derivam resultados de axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual para medidas de risco convexas dinâmicas a tempos de parada de processos estocásticos. Esses conceitos são baseados na colagem de medidas estáticas condicionais e seus conjuntos de probabilidade da representação dual. Isso é realizado devido ao axioma de Consistência Dinâmica exposto, que possui a forma:

$$\begin{aligned}&\text{Consistência Dinâmica}: \ \rho\left(X_{t,T}\right) = \rho\left(X_{t,s} - \rho\left(X_{s,T}\right)\right),\\ &\qquad \forall\ X_t \in L^p\left(\mathcal{F}_t\right), t \leq s \leq T\end{aligned}$$

Diversos resultados são provados com base nessa noção. Acciaio *et al.* (2012) ampliam esses resultados utilizando uma estrutura em que a incerteza advém da medida de probabilidade e da taxa de juros. Os autores apresentam um corpo teórico para medidas de risco convexas dinâmicas, apresentando toda a questão de axiomas, espaços de aceitação e representação dual. O caso de translação subaditiva é investigado e exemplos para AVaR e medida entrópica são analisados.

Ainda sobre medidas convexas dinâmicas, Föllmer & Penner (2006) apresentam definições e conceitos com base em resultados oriundos do axioma de Consistência Dinâmica no sentido de Riedel (2004). Fundamentalmente, os autores apresentam resultado que mostra que a evolução conjunta da medida de risco e sua função de penalidade formam um *supermartingale* sob as condições de Fatou e de Consistência Dinâmica. Por sua vez, Jobert & Rogers (2008) analisam medidas de risco convexas dinâmicas através da noção de uma família de operadores côncavos que satisfazem axiomas, ao invés da usual abordagem de conjuntos de aceitação. Já Klöppel & Schweizer (2007) apresentam resultados para medidas de risco convexas dinâmicas com algumas diferenças sobre outras abordagens existentes, como a generalização da representação dual, espaços de aceitação e Consistência Dinâmica, não exigindo o tradicional axioma de Normalização.

Tutsch (2008) discute como atualizar medidas de risco convexas, classificando a questão de Consistência dinâmica em forte e fraca, de modo a provar alguns resultados. Ainda, uma ordem reversa de consequência é apresentada, similar a implicação contrária do axioma de Monotonicidade de Informação. Resultados provados mostram que nem sempre tal ordem reversa coincide com a Consistência Dinâmica comum. Stadje (2010) estende medidas de risco convexas dinâmicas de tempos discretos para contínuos, utilizando equações diferenciais e tomando limites de diferenças entre um período e outro. Resultados de representações dual são demonstrados e discutidos, com exemplos de algumas medidas como VaR. Ainda sobre esse tópico, Cheridito & Kupper (2011) apresentam medidas de risco convexas dinâmicas com o axioma de Consistência Dinâmica como composição de medidas estáticas através de uma função dinâmica geradora. Bion-Nadal (2008) apresenta resultados para medidas de risco convexas dinâmicas com base na propriedade de estabilidade de medidas de probabilidade, refletidas na estabilidade das funções de penalização. O autor chama essa estabilidade de condição co-cíclica. Com base nessa condição, o autor constrói medidas de risco dinâmicas através de *martingales*. Já Bion-Nadal (2009) apresenta uma representação de composição de funções de penalidade que leva à Consistência Dinâmica de medidas de risco convexas continuas acima. A relação dessa propriedade com outros axiomas, como outras versões da Consistência Dinâmica e Regularidade é investigada. Construções de famílias de medidas desse tipo são também feitas com *martingales*.

Uma corrente de estudos visa definir medidas de risco utilizando expectativas não lineares, uma vez que toda medida de risco é de certa forma uma expectativa em relação a uma medida de probabilidade (representação dual). Nesse sentido, Gianin (2006) utiliza g-expectativas, que são baseadas em funções não lineares de equações diferenciais estocásticas, para definir medidas de risco convexas estáticas e dinâmicas. Por meio de correspondências entre axiomas das g-funções e axiomas de medidas de risco, os resultados habituais sobre axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são provados. A questão da Consistência Dinâmica é debatida em detalhes. Complementando, Jiang (2008) estende os resultados da relação entre g-expectativas e medidas de risco convexas, com resultados sobre Convexidade, Subaditividade e Invariância de Translação sem supor necessariamente a continuidade da função geradora g. Delbaen *et al.* (2010) apresentam representações para a função de penalidade no caso de medidas convexas dinâmicas considerando g-expectativas sob uma série de suposições. As representações são obtidas para tempo contínuo, verificando axiomas e conjunto de aceitação. Mais além, Xu (2014) estende g-expectativas condicionais para o caso multivariado, obtendo medidas de risco convexas multivariadas dinâmicas. Resultados para axiomas, conjunto de aceitação e representação dual são apresentados, bem como aplicações para problemas financeiros. Kromer & Overbeck (2014) consideram g-expectativas, vinculadas com equações diferenciais estocásticas recursivas, em problemas de alocação, mostrando que são diretamente ligadas com medidas de risco. Rerpesentaçao dual para medidas de risco convexas é apresentada, com medidas coerentes como caso especial. Exemplo da medida entrópica dinâmica é investigado para ilustração.

Por sua vez, Weber (2006) caracteriza conjuntos medidas de risco convexas com lei invariante por medidas de probabilidade, que são do tipo $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sendo o conjunto de medidas de probabilidade definidas na reta dos números reais. Autor mostra a relação entre esse conceito e o habitual para variáveis aleatórias, conforme $\rho : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, é $\rho(X) = \Theta(\mathbb{Q}(X))$, com $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ainda, é provado que essas medidas estão relacionadas com a noção de utilidade, possuindo caracterização dual ligada e conjunto de aceitação ligado a uma função de perda convexa ℓ, com a forma $A_\Theta = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \Theta(\mathbb{Q}) \leq 0\} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \int \ell(-x)\mathbb{Q}(dx) \leq z \in \mathbb{R}\right\}$. O autor define uma caracterização axiomática para o caso dinâmico, apresentando propriedades de Consistência Dinâmica. O autor mostra que medidas dinâmicas desse tipo podem ser representadas por vetores de medidas estáticas, dadas algumas condições. Kupper & Schachermayer (2009) mostram que se uma medida de risco tem propriedade de Fatou, é contínua, e possui axiomas de Normalização, Invariância de Lei e Monotonicidade, então ela é um equivalente certo negativo. Assim, tal medida tem a forma $\rho(X_t) - u^{-1} \circ E_{\mathbb{P}}[u(X_t)]$, onde u é uma função contínua, estritamente crescente. Complementando, a única medida de risco dinâmica com axiomas de Invariância de Lei, Relevância e Consistência Dinâmica é a entrópica, sendo convexa ou coerente conforme o valor assumido pelo parâmetro de aversão ao risco. De forma complementar, Föllmer (2014) confirma resultados de que medidas convexas com axiomas de Invariância de Lei e Consistência Dinâmica são entrópicas. Resultados para o caso espacial, quando o condicionamento é por etapa numa rede ao invés do tempo, são apresentados.

Feinstein & Rudloff (2013) estendem a teoria de medidas de risco convexas multivariadas definidas em conjuntos vetoriais para o campo dinâmico. Extensões de axiomas, conjunto de aceitação e representação dual são deduzidas em detalhes. Especial atenção é dada para a Consistência Dinâmica. Alguns exemplos vão ilustrando a abordagem ao longo das etapas do trabalho. Já Feinstein & Rudloff (2015) apresentam um corpo teorico para medidas de risco convexas multivariadas vetoriais definidas em conjuntos que são consistentes no tempo. Axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são expostos em detalhes, mostrando que a questão da consistência dinâmica, ligada com recursividade, é baseada na representação das funções de penalização e sua propriedade de co-ciclicidade. Para o caso coerente, representação dual é baseada na colagem de medidas de probabilidade.

4. Medidas de risco espectrais e de distorção

4.1 Medidas de risco espectrais

Outra categoria de medidas de risco são as medidas espectrais. Ao contrário de outras classes de medidas de risco, as medidas espectrais levam em conta a função de aversão ao risco de cada indivíduo. Mais especificamente, a ES pondera todos os cenários igualmente, ao passo que medidas espectrais tendem a dar mais peso para piores cenários. O conceito de medidas espectrais de risco é proposto por Acerbi (2002). A ideia fundamental é que toda medida de risco coerente pode ser representada por uma soma ponderada convexa de medidas de risco coerentes. Nesse contexto, considere uma medida do tipo $\rho(X) = -\int_0^1 F_X^{-1}(\alpha)d\alpha$, onde F_X^{-1} é a função inversa da distribuição de probabilidade de X, representando o quantil dos dados e ϕ é uma função de ponderação definida do agente com domínio sobre toda amplitude de probabilidades cumulativas $0 \leq \alpha \leq 1$. ρ define a classe de medidas de risco baseadas em quantis, e cada medida de risco individual nessa classe é caracterizada por sua própria função de ponderação ϕ. Um agente que é avesso ao risco pode preferir trabalhar com uma medida de risco que considere sua aversão. Exatamente neste ponto que se encaixam as medidas de risco espectrais. ϕ reflete a aversão ao risco do agente.

Acerbi (2002) define que medidas de risco espectrais, são aquelas medidas que possuem funções geradoras ϕ que atendem as propriedades, para $0 \leq \alpha \leq 1$, de não negatividade ($\phi(\alpha) \geq 0$), normalização ($\int_0^1 \phi(\alpha)d\alpha = 1$) e não crescimento ($\phi^{'}(\alpha) \leq 0$). A primeira propriedade requer que os pesos sejam não negativos, garantindo o axioma de Monotonicidade da medida, ao passo que a segunda exige que as ponderações somassem a unidade, garantindo o axioma de Invariância de Translação. Mas a propriedade chave é a terceira, que requer que os pesos atribuídos a maiores perdas não seja menor que os pesos atribuídos a perdas menores, a fim de refletir a aversão ao risco. Por depender diretamente da função de probabilidade dos dados, essa classe de medidas possui automaticamente ao axioma de Invariância de Lei.

Complementando, Inui & Kijima (2005) mostram que qualquer medida de risco espectral que seja coerente é uma combinação convexa da ES, e que a ES fornece o valor mínimo de risco entre a classe de medidas coerentes. Kusuoka (2001) mostra que essa representação é válida para medidas de risco coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonotônica, coincidindo com $\rho(X) = \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha)$, com $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]}$. Cherny (2006), chamando esse tipo de medidas de WVaR, mostra que esse tipo de medidas possui boas propriedades, sendo estritamente subaditiva, isto é, $\rho(X+Y) < \rho(X) + \rho(Y)$ se X e Y não são comonotônicos. A conexão entre essas representações é pela igualdade $\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathbb{Q}(d\alpha)$. Pichler (2013) cria uma norma associada à medida de risco em questão, definida como $||X||_\rho = \rho(|X|)$, e gera um espaço L^ρ onde a medida é contínua com respeito a essa norma. Tem-se que $L^\infty \subset L^\rho \subset L^1$, de modo que considerar espaços maiores que o e espaços maiores que o L^1 não faz sentido. Tal caracterização se dá conforme o espaço onde a função espectral é definida. Resultados comprovando a ideia são apresentados, bem como espaços duais são derivados.

Conforme apontado por Dowd *et al.* (2008), um ponto fraco dessa definição é a terceira propriedade, pois ela não exclui medidas que são neutras ao risco. Esse autor cita como exemplo a ES, que se encaixa nas condições mas não acomoda essa aversão crescente. Para eliminar esses casos, Dowd *et al.* (2008) substituem a terceira propriedade por algo mais forte, o decrescimento ($\phi^{'}(\alpha) < 0$). Essa nova condição garante que os pesos aumentam conforme as perdas aumentam. Dessa forma, se nota que VaR e ES não são medidas espectrais no sentido estrito, porquanto a ponderação deles é, respectivamente, todo o peso no valor do quantil e igualmente ponderado entre todos os valores após o quantil. Demais valores possíveis assumem peso zero. Em casos bem comportados, os autores esperariam que os pesos aumentassem de forma suave ao passo que aumentariam de forma mais brusca para indivíduos muito avessos ao risco. Essa classe de medidas, com a propriedade de decrescimento, conforme Acerbi (2002), não é atrativa apenas porque leva em consideração a aversão ao risco do indivíduo, mas também porque tais medidas são coerentes no sentido de Artzner *et al.* (1999).

Csóka *et al.* (2007) mostram que uma medida de risco é coerente com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona se e somente se ela for uma medida de risco espectral no sentido estrito, respeitando a propriedade de decrescimento. Entretanto, apesar dessas propriedades teóricas interessantes, ainda resta um grande problema para aplicações práticas: a escolha da função ϕ. Não há como estimar o modo que um indivíduo reage ao risco com precisão, caindo em um problema muito semelhante com o de funções de utilidade. Ainda assim, Dowd *et al.* (2008) investigam situações com funções exponenciais e de potências. Os seus resultados indicam que embora essas funções tenham características interessantes, tais como suavidade na evolução do grau de aversão, elas podem levar a resultados indesejados dependendo da parametrização escolhida. Todavia, Brandtner (2014) rebate essas críticas feitas em relação a funções espectrais exponenciais e de potências, mostrando que elas levam a respeitar graus de aversão ao risco.

4.2 Medidas de risco de distorção

Intimamente relacionada com o conceito de medidas espectrais está a classe de medidas de distorção, introduzidas por Wang (1996) visando problemas de seguros, que podem ser definidas basicamente como o retorno esperado sob uma transformação da função de probabilidade, nomeada função de distorção. Tal função de distorção $g : [0,1] \to [0,1]$, com $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, é crescente, definindo as medidas de distorção como sendo $\rho(X) = \int_0^1 F_{-X}^{-1}(u)dg(u)$. Como é originalmente para seguros, se trabalha com perdas, ou seja $-X$ ao invés de X. Wang *et al.* (1997) discute as medidas de risco de distorção, argumentando em favor de questões de continuidade e mostrando que as propriedades da medida são intimamente ligadas com as da função g. Assim, a escolha dessa função de distorção vai definir a medida de risco e suas propriedades. Wirch & Hardy (2000) mostram que medidas de distorção com função g côncava são coerentes, e respeitam a dominância estocástica de segunda ordem se e somente se forem estritamente côncavas.

Gzyl & Mayoral (2008) estabelecem relacionamento direto entre medidas de risco de distorção e medidas de rico espectrais através da relação $g^{'}(\alpha) = \phi(\alpha)$, se g for côncava. Assim como as medidas espectrais, as medidas de distorção caem no problema da definição de g. Assim, para g côncava, as medidas de risco de distorção são coerentes e possuem axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona. Nesse sentido, Pflug (2006a) mostra que medidas de distorção podem ser representadas como combinações da ES, de modo similar a representação de Kusuoka (2001). Tal representação é da forma $\rho(X) = \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)g(d\alpha)$. Pode se estabelecer que existe uma conexão direta entre medidas de distorção com função g côncava, medidas espectrais e medidas coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona com base no integrador da representação dual conforme $g^{'}(\alpha) = \phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{1-a}^{1} \mathbb{Q}(d\alpha)$.

Song & Yan (2009a) apresentam em maiores detalhes as representações duais destes e de outros tipos de medidas de risco. Dhaene *et al.* (2012) discutem a questão da representação de medidas de distorção por quantis, com teoremas que mostram que cuidado precisa ser tomado na definição de quantil usada no caso de distribuição de probabilidade não contínua. Por sua vez, Belles-Sampera *et al.* (2013) mostram que ordenadores de lógica *fuzzy* são intimamente ligados com o conceito de medidas de distorção devido a integral de Choquet na sua representação dual. Resultados nesse sentido são provados e exemplos para VaR e TVaR são oferecidos pelos autores. Balbás *et al.* (2009) estudam propriedades que uma medida de risco deve satisfazer a fim de evitar escolhas de portfólio inadequadas. Duas novas propriedades são apresentadas, a completude, que exige que a medida use toda a informação sobre a distribuição dos dados, e a adaptabilidade, que força a medida a usar a informação adequadamente. Autores mostram que essas propriedades são satisfeitas quando o crescimento estrito da função de distorção existe.

Uma possibilidade, assim como nas outras classes de medidas de risco, é a proposição de novos tipos de medidas de distorção, como o trabalho de Tsukahara (2009), que introduz famílias paramétricas de medidas de distorção, precisamente com um parâmetro, como extensão da representação da ES, investigando suas propriedades e discutindo seu uso. A derivação dessas medidas é baseada na representação de medidas de risco coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona. A abordagem do autor é visando comparações com a ES por meio de exemplos numéricos, discutindo sua estimação empírica e sua utilização na gestão de risco. Já Hürlimann (2006) apresenta uma classe de medidas de distorção, não necessariamente coerentes, que são potencias de potencias medias do valor esperado de diferenças de uma posição distorcida X^g com relação a algum limiar, conforme a expressão $\rho(X) = E_{\mathbb{P}}\left[\left|X^{\eth} - b\right|^{a}\right]^{\theta}$, onde $\alpha, \theta \geq 0$ e $L \leq b \leq U$, com L e U são limiares. A variância é um caso especial dessa subclasse, por exemplo. Propriedades e representação da subclasse são apresentadas.

Zhu & Li (2012) introduzem o conceito de medida de risco de distorção na cauda, para verificar riscos de perdas excedentes ao VaR. Tais medidas têm representação conforme $\rho(X|X > VaR^{a}) = \int_0^1 F^{-1}_{(-X|-X>VaR^{a})}$ $(u)dg(u)$, ou seja, apenas se adapta a distribuição de probabilidade para captar informação da cauda. Ainda, os autores derivam relações lineares assintóticas com o VaR para casos de distribuições com caudas pesadas. Exemplos envolvendo distribuições invariantes a localização, escala e formato são apresentadas para ilustrar a abordagem. Fasen & Svejda (2012) estendem o conceito de medidas de risco de distorção para o campo dinâmico. Para tanto, os autores utilizam os conceitos de Roorda & Schumacher (2007) para definições de Consistência Sequencial, Condicional e Dinâmica para medidas de risco de distorção dinâmicas, as utilizando em resultados que ligam axiomas e representação dual.

5. Medidas de Desvio Generalizado

5.1 Teoria básica

As classes de medidas de risco apresentadas até aqui são diretamente ligadas com o valor esperado ou monetário de uma posição. Porém, em muitas situações há interesse em tratar o quanto um ativo fica longe de seu valor esperado ao invés de quanto ele excede algum limite proposto. É nessa lacuna, de variabilidade, que se encontram as medidas de desvio generalizadas. Essa classe de medidas de risco é proposta por Rockafellar *et al.* (2006). Uma justificativa dada pelo autor por seu interesse em criar tais medidas, é a limitação de medidas de dispersões habituais serem simétricas, isto é, considerarem ganhos e perdas como desvios similares.

Mantendo a notação empregada inicialmente, apresentamos formalmente o que Rockafellar *et al.* (2006) define como sendo uma medida de desvio. Assim, $\mathcal{D} : L^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma medida de desvio se atente aos seguintes axiomas:

$$\text{Insensibilidade a Translação}: \ \mathcal{D}(X+\mathcal{C}) = \mathcal{D}(X), \ \forall \ X \in L^p, C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\text{Homogeneidade Positiva} \quad : \quad & \mathcal{D}(0) = 0 \text{ e } \mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X), \\ & \forall X \in L^p, \lambda > 0\end{aligned}$$

$$\text{Subaditividade}: \ \mathcal{D}(X+Y) \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y), \ \forall \ X, Y \in L^p$$

$$\begin{aligned}\text{Não Negatividade} \quad : \quad & \mathcal{D}(X) \geq 0, \forall \ X \in L^p, \text{ com } \mathcal{D}(X) > 0 \\ & \text{para } X \text{ não constante}\end{aligned}$$

O primeiro axioma indica que o desvio em relação ao valor esperado não muda se for adicionada uma constante. O segundo axioma é a Homogeneidade Positiva, ao passo que o terceiro é a Subaditividade. Esses dois juntos implicam que uma medida $\mathcal{D}$ de desvio é convexa. O quarto axioma é similar ao conceito de relevância, que indica que qualquer posição não constante apresenta desvio, e este não é negativo. Dessa forma, se tem que

$\mathcal{D}$ captura o grau de incerteza em X, atuando como se fosse uma norma em L^p, exceto por não exigir simetria. Um outro axioma que é apresentado neste trabalho, é o de Dominância de Amplitude Inferior, definido como:

$$\text{Dominância de Amplitude Inferior}: \ \mathcal{D}(X) \leq E[X] - \inf X, \forall X \in L^p$$

Em seu trabalho, Rockafellar *et al.* (2006) apresentam alguns exemplos de medidas de desvio e exploram suas propriedades, como a variância e o semi-desvio. Os autores derivam ainda uma representação dual para as medidas de desvio generalizado, que possui forma matemática da ordem $\mathcal{D}(X) = E_{\mathbb{P}}[X] - \inf\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\mathcal{D}}} E_{\mathbb{Q}}[X]$, com $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \in L^2$ sendo um conjunto não vazio, fechado e convexo, de tal modo que para cada X não constante, existe $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ com $E_{\mathbb{Q}}[X] \leq E_{\mathbb{P}}[X]$. Dessa forma, é possível representar tal conjunto como $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} \ : E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \mathcal{D}\left(X\right) \geq E_{\mathbb{P}}[X] - E_{\mathbb{Q}}[X], \forall X \in L^p\right\}$. Se $\mathcal{D}$ possui o axioma de Dominância de Amplitude Inferior, então $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$. O conjunto $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ unicamente definido para uma medida de desvio generalizado $\mathcal{D}$ é chamado envelope de risco. Com base nessa notação, resultados mais gerais sobre operações com envelopes de risco são apresentados, bem como representações para diversos exemplos de medidas de risco.

Outra propriedade fundamental de medidas de desvio é que, conforme provado pelo autor, elas estão diretamente ligadas com medidas de risco coerentes no sentido de Artzner *et al.* (1999), e vice-versa. Formalmente, a relação entre essas duas classes de medidas é apresentada abaixo.

$$\mathcal{D}\left(X\right) = \rho(X - E_{\mathbb{P}}\left[X\right])$$

$$\rho\left(X\right) = E_{\mathbb{P}}\left[-X\right] + \mathcal{D}\left(X\right)$$

Essa relação se mantém desde que $\mathcal{D}(X) \leq E_{\mathbb{P}}\left[X\right] - \inf X$, isto é a medida de desvio generalizado possua o axioma de dominância de amplitude inferior e $\rho\left(X\right) \geq E_{\mathbb{P}}\left[-X\right]$ seja uma medida de risco coerente limitada pela expectativa. Os autores mostram que, em termos de representação dual se tem $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\mathcal{D}}} E_{\mathbb{Q}}[-X]$.

5.2 Extensões gerais

Pflug (2006b) investiga a relação entre a representação de subgradientes e as propriedades de medidas de desvio. Em particular, o autor mostra como propriedades de monotonicidade são refletidas pela representação de subgradiente. Mais além, o autor apresenta um corpo de representações duais para medidas de risco monetárias e de desvio, modificando em termos de notação aquelas representações clássicas propostas nos artigos seminais de cada classe de medidas. Uma lista de exemplos é fornecida. De maneira mais completa, Rockafellar & Uryasev (2013) apresentam um quadrangular teórico ligando medidas de risco, medidas de desvio, medidas de arrependimento e medidas de erro, através do que os autores chamam de uma estatística geradora. Conexões teóricas entre os quatro conceitos são propostas, bem como sua utilização em problemas de otimização e representação dual. Uma grande lista de exemplos é apresentada.

Assim como nas outras classes de medidas de risco, é possível estender a teoria principal para o axioma de Invariância de Lei. Grechuk *et al.* (2009), considerando espaços L^p ao invés de L^2, fazem essa expansão da teoria. O axioma diz que:

$$\text{Invariância de Lei: se } F_X = F_Y, \text{ então } \mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(Y), \ \forall\, X, Y \in L^p$$

Assim como no caso das outras classes de medidas, o axioma implica em posições financeiras com a mesma distribuição de probabilidade terem o mesmo risco. Além disso, é possível estimar as medidas de desvio generalizado a partir de dados reais. Mais além, os autores apresentam diversas representações duais equivalentes, inspiradas naquelas de medidas coerentes com Invariância de Lei, medidas espectrais e medidas de distorção. Tais representações são conforme as formulações matemáticas $\mathcal{D}(X) = \sup\limits_{1-\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\mathcal{D}}} \int_0^1 q_\alpha(\mathbb{Q}) q_\alpha(X) d\alpha$, $\mathcal{D}(X) = \sup\limits_{\phi(\alpha)\in\Lambda} \int_0^1 \phi(\alpha) q_\alpha(X) d\alpha$, $\mathcal{D}(X) = \sup\limits_{\phi(\alpha)\in\Lambda} \int_0^1 AVaR^a(X - E_{\mathbb{P}}[X]) d(\Psi(\alpha))$, $\mathcal{D}(X) = \sup\limits_{g(\alpha)\in G} \int_0^1 g(\alpha)$ $d(q_\alpha(X))$, onde Λ é um conjunto de funções não crescentes $\phi(\alpha) \in L^q$, $\int_0^1 \phi(\alpha) d\alpha = 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^a \psi(d\alpha)$, G é uma coleção de funções côncavas positivas $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g^{'}(\alpha) = -\phi(\alpha)$. Não obstante, os autores mostram que as funções $g : (0,1) \to [0,\infty)$ formam o envelope máximo de $\mathcal{D}$ lei invariante.

Tal envelope máximo tem a forma $G_M = \Big\{ g(\alpha) \in \mathfrak{G} : \int_0^1 g(\alpha)$

$d(q_\alpha(X)) \leq \mathcal{D}(X), \forall\ X, Y \in L^F \Big\}$, onde $\mathfrak{G}$ é o conjunto de funções côncavas $g : (0,1) \to [0,\infty)$ e $L^F \subset L^\infty$ é o espaço de variáveis finitas. Ainda, os autores apresentam o axioma de Aditividade Comonotônica, como sendo:

$$\text{Aditividade Comonotônica : } \mathcal{D}(X+Y) = \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y),$$
$$\forall\ X, Y \in L^p \text{ com } X \text{ e } Y \text{ comonótonos}$$

Da mesma forma que para o caso das outras classes, esse axioma representa o caso extremo da Subaditivade quando não há redução do risco pela diversificação quando duas posições têm associação positiva perfeita. As representações duais para medidas de desvio generalizado com axiomas de Lei Invariância e Aditividade Comonótona são as mesmas para o caso não comonótono aditivo, porém sem os operadores de supremo.

Trazendo para a ótica multivariada, Balbás *et al.* (2012) apresentam versões vetoriais de medidas de desvio generalizado, seguindo a abordagem de Jouini *et al.* (2004), bem como sua conexão com medidas coerentes vetoriais. Questões referentes aos axiomas e representação dual são debatidas. Já no caso dinâmico, Pflug (2006c) utiliza medidas de risco que consideram a informação multiperíodo. Tais medidas são compostas por um termo de expectativa e outro de desvio com base na medida de desvio generalizado $CVaR^a\,(X - E_{\mathbb{P}}\,[X])$. Os axiomas e representação dual do termo de desvio são ajustados para o caso dinâmico.

6. Outras Classes de Medidas de Risco

Existem algumas outras classes de medidas de risco com menor destaque na literatura de finanças do que aquelas anteriormente apresentadas. Joaquin (2009) identifica três axiomas que se aceitos em conjunto levam à aceitação do VaR como medida de risco. O autor argumenta que o VaR deve refletir fraca aversão a perdas, considerar apenas perdas realmente capazes de ocorrer, além de não ser afetado por possibilidades de ganhos. De forma complementar, Chambers (2009) caracteriza funções quantílicas como o VaR em um espaço de funções de distribuição de probabilidade. Dessa forma, o VaR deve respeitar axiomas de Covariância Ordinal, Monotonicidade com respeito a dominância estocástica de primeira ordem e semicontinuidade inferior. Já Frittelli & Maggis (2014), tentando se valer do conceito do VaR, determina medidas de risco definidas com funções de probabilidade nos números reais, da forma $\rho \ : \ \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\rho(\mathbb{Q}) = -\sup\left\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{Q} \in \mathcal{A}^{\mathcal{P}}\right\}$, com $\mathcal{A}^{\mathcal{P}} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} \ : \ F_{\mathbb{Q}} \leq F_m\}$, onde $F_m : \mathbb{R} \to [0,1]$. Essas medidas têm axiomas de Monotonicidade, Quase Convexidade, Invariância de Lei, e uma variante da Invariância de Translaçao. Representação dual é obtida conforme $\rho(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{f \in C_b} R(\int f d\mathbb{Q}, f)$, com C_b sendo o conjunto de funções contínuas e limitadas, e $R : \mathbb{R} \times C_b \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tem a forma $R(t,f) = \inf\limits_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \left\{\rho(\mathbb{Q}) : \int f d\mathbb{Q} \geq t\right\}$.

Com foco maior para seguros, cabe citar também a abordagem de limites markovianos de Goovaerts *et al.* (2003), que deriva medidas de risco baseadas na minimização de um regime markoviano para uma probabilidade na cauda. Uma abordagem mais flexível é adotada por Goovaerts *et al.* (2004), que argumentam que não há conjunto de axiomas que defina perfeitamente uma medida de risco. Os autores discutem medidas de risco de melhores práticas ou medidas de risco consistentes, onde cada situação deve ser analisada de forma a considerar suas necessidades e peculiaridades. Goovaerts *et al.* (2004) apresentam uma classe de medidas de risco que são aditivas para riscos independentes. Tais medidas possuem axiomas de Invariância de Translação e Monotonicidade com respeito a ordens de relação estocástica, além de propriedades de continuidade. A novidade é o axioma de Aditividade Independente, representado como:

$$\text{Aditividade Independente}: \ \rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p \text{ com } X \text{ e } Y \text{ independentes}$$

Tal axioma garante que posições independentes tem seu risco somado, como é o caso da variância e de certos prêmios exponenciais para seguros. Relações com conjuntos de axiomas para medidas aditivas comonótonas são apresentados. Ainda focando em seguros, Sordo (2008) considera medidas que generalizam o desvio de cauda proposto em Wang (1998). Essas medidas são a diferença entre expectativas distorcida e não distorcida de uma variável, ou seja $\rho(X) = E_{\mathbb{P}}[X^g] - E_{\mathbb{P}}[X]$ onde X^g é uma posição X distorcida pela função de distorção g. Esse tipo de medida possui axiomas de Insensibilidade a Translação, Homogeneidade Positiva, Não Negatividade e Aditividade Comonotônica, além de respeitar dominância estocástica de ordens dispersa e valor excedente. Sordo (2009) considera medidas de cauda do tipo $\rho_{\varphi,\alpha}(X) = E_{\mathbb{P}}\big[\varphi\left(X - E_{\mathbb{P}}\left[X | X < F_X^{-1}(a)\right]\right) | X < F_X^{-1}(\alpha)\big]$, onde f é uma função convexa. A CTE e a variância na cauda são casos especiais. Autor mostra que esse tipo de medida respeita a dominância estocástica de ordem de valor excedente.

Kou *et al.* (2013) apresentam as medidas de risco naturais, que incorporam a robustez com respeito a erros de especificação de modelo e pequenas mudanças nos dados. O conjunto de axiomas dessa classe de medidas não exige a Subaditividade estrita, de tal modo que medidas de requerimento de capital que são baseados no VaR são incluídos. Os axiomas que essa classe de medidas deve respeitar, além dos usuais de Homogeneidade Positiva e Monotonicidade, são os seguintes:

$$\text{Translação Escalonada}: \ \rho\left(X+C\right)=\rho\left(X\right)-sC, \\ \forall\ X\in L^p, C\in\mathbb{R}, s>0$$

$$\text{Subaditividade Comonotônica}: \ \rho\left(X+Y\right)\leq\rho\left(X\right)+\rho\left(Y\right), \\ \forall\ X,Y\in L^p\ \text{com} X \text{ e } Y \text{ comonótonos}$$

$$\text{Invariância de Lei Empírica}: \ F_X=F_Y, \text{ então } \rho\left(\tilde{X}\right)=\rho\left(\tilde{Y}\right), \\ F_{\tilde{X}}=F_X,\ F_{\tilde{Y}}=F_Y, \forall X,Y\in L^p.$$

O primeiro axioma é uma versão escalonada da Invariância de Translação. O segundo é um relaxamento da Subaditividade comum, exigindo respeitar o princípio de diversificação apenas no caso de variáveis comonótonas. O terceiro axioma é uma versão empírica da Invariância de Lei, abrangendo qualquer permutação nos dados utilizados. Essa classe de medidas possui representação dual da forma $\rho\left(X\right)=\sup\limits_{W\in\mathcal{W}}\left\{-\sum_{j=1}^{n}w_j x_{(j)}\right\}$, com $\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores de pesos do tipo $W=(w_1,\cdots,w_n)$, onde $X_{OS}=\left(x_{(1)},\cdots,x_{(n)}\right)$ são estatísticas de ordem de $X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)$. Complementando, Ahmed *et al.* (2008) mostram que $\rho\left(X\right)$ é uma medida de risco natural se e somente se $\rho^{'}\left(X_{OS}\right)$ é uma medida de risco coerente. Ainda, esses autores apresentam condições para que $\mathcal{W}$ seja convexo e fechado. Assa & Morales (2010) estendem a teoria de medidas de risco naturais para o espaço de sequencias infinitas, ou seja, quando há infinito dados para computação. Para tanto, uma extensão vetorial da teoria padrão para espaços com dimensao infinita é feito atraves das ponderações $W \in \mathcal{W}$. Resultados apra representação dual são provados, além de alguns exemplos fornecidos.

Ainda sobre esse tipo de medias de risco, Tian & Suo (2012) estende a teoria de relaxando a Subaditividade Comonotônica por Convexidade Comonotônica. Representação dual é apresentada e analisada, como tendo a forma $\rho(X) = \sup\limits_{W \in \mathcal{W}} \left\{ -\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)} - \gamma(W) \right\}$, onde $\gamma : W \rightarrow [-\infty, +\infty)$ é uma função de penalização. Mais além, Tian & Jiang (2015) estendem essa definição de medidas de risco naturais mudando a Subaditividade Comonotônica para uma Quase Convexidade Comonotônica. Com isso, é obtida a seguinte representação dual $\rho(X) = \sup\limits_{W \in \mathcal{W}} \left\{ R\left(-\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)}, W \right) \right\}$, onde $R : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função conforme $R(t, W) = \inf\limits_{X} \left\{ \rho(X) : -\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)} \geq t \right\}$. Outras representações nesse sentido para os casos coerentes e convexos com Invariância de Lei Empírica, bem como naturais com Subaditividade e Convexidade Comonotônicos são apresentados.

Por sua vez, Song & Yan (2009b) apresentam classes de medidas que não apenas são comonotônicas subaditivas ou convexas, mas também respeitam a dominância estocástica de primeira ordem. Os autores introduzem representações para essas medidas em termos de probabilidades distorcidas, mostrando que tais medidas têm lei invariante. A representação para o caso subaditivo é $\rho(X) = \sup\limits_{g \in g^{\rho}} (g \circ P)(-X)$, com $g^{\rho} = \left\{ g \in g : (g \circ P)(-X) \leq (X), \forall X \in L^p \right\}$, onde g é o conjunto de todas as funções de distorção g. Para o caso convexo a representação fica $\rho(X) = \sup\limits_{g \in g^{cc}} \{(g \circ P)(-X) - \alpha(g)\}$, com $g^{cc} = \{g \in g : g \text{ é côncava}\}$ e função de penalidade $\alpha(g) = \sup\limits_{\rho(X) \leq 0} (g \circ P)(-X)$. Autor mostra ainda que, no caso de Ω não ter átomos, essas definições coincidem com as de medidas de risco lei invariantes coerentes ou convexas.

Outra abordagem é a de Chen & Yang (2011), que propõe uma classe de medidas de risco que satisfazem os axiomas de Convexidade e Monotonicidade. Essas medidas podem ser representadas como uma Perda Esperada Ponderada (*Weighted Expected Shortfall* – WES), definida como $WES^a = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} w(F_X^{-1}(u)) F_X^{-1}(u)\, du$, onde w é uma função definida monotonicamente não crescente, sendo positiva e convexa para $X \leq 0$, e não negativa e côncava para $X \leq 0$. Através de uma ponderação não linear, essa classe de medidas pode flexivelmente refletir o grau de aversão ao risco do investidor, estabelecendo inclusive um modelo realista de seleção de portfólio. Resultados empíricos mostram que esse tipo de medida consegue refletir melhor as restrições do mercado, superando portfólios construídos com base na ES. Já Eichhorn & Römisch (2005) apresentam a classe de medidas de risco poliédricas que servem para a solução de problemas de otimização estocásticos. Representação dual para essas medidas e sua relação com espaços de aceitação é apresentada. Propriedades para garantir que sejam convexas ou coerentes são introduzidas, e relações com o CVaR são expostas. A extensão para o caso multiperíodo é abordada, bem como a questão teórica de sua utilização em problemas de otimização. Roorda & Schumacher (2011) apresentam uma classe de medidas de risco que, dentre um conjunto de medidas de risco, uma combinação que escolhe a mais otimista é apresentada. Embora não garanta convexidade, a medida é monetária e possui o axioma de Consistência Dinâmica no caso multiperíodo.

Cont *et al.* (2010) introduzem medidas que só consideram perdas, e não ganhos, da forma $\rho(X) = \rho(\min(X, 0))$ e tem axioma de Monotonicidade e Normalização. Versões convexas são também expostas, e a relação com medidas convexas tradicionais é apresentada, bem como a ligação com a Subaditivade de Translação. Representação dual e o caso com Invariância de Lei são estudados de modo a adaptar os resultados usuais de medidas de risco convexas. Staum (2013) introduz o axioma de Invariância do Excesso para medidas de risco, que implica em insensibilidade à quantidade que o valor de uma carteira excede seu *benchmark*. Esse axioma substitui o de Invariância de Translação. Mais formalmente, o axioma proposto pelo autor exige que:

$$\text{Invariância do Excesso: se } X^- = Y^-, \text{ então } \rho(X) = \rho(Y)\, \forall X, Y \in L^p$$

Em outras palavras, o axioma garante que o risco de duas posições é igual se sua perda em relação ao *benchmark* for igual, independentemente da relação entre X^+ e Y^+. Com base neste axioma, o autor define ainda uma classe de medidas de risco de perda que são úteis quando risco é associado apenas a resultados ruins, ignorando retornos excedentes positivos. Tais medidas possuem, além do axioma de Invariância de Excesso, propriedades de Monotonicidade, Não-Negatividade e Normalização.

Existem medidas utilizadas como métricas de performance para análise de investimentos que consideram o risco, muito embora são sejam exatamente medidas de risco. Cabe comentar aqui para a medida Ômega, proposta por Keating & Shadwick (2002), que é definida como a razão ponderada da probabilidade de ganhos e perdas para algum retorno alvo. Matematicamente, $\Omega_r(X) = \frac{\int_r^{\infty}(1-F_X(x))dx}{\int_{-\infty}^{r} F_X(x)dx}$, onde r é o retorno alvo. Nesse sentido, Cherny & Madan (2009) consideram métricas de performance que satisfazem axiomas, inspirados na teoria de medidas de risco coerentes. Resultados teóricos derivados pelos autores mostram que tais métricas se sobressaem em relação a concorrentes presentes na literatura.

Medidas de risco dinâmicas permeiam todas as classes de medidas de risco. O trabalho que iniciou essa corrente foi o elaborado por Wang (1999), que estende o VaR para uma abordagem multiperíodo criando uma classe de medidas de risco que respeita axiomas de Consistência Dinâmica e Recursividade, além de outras propriedades técnicas. Alguns teoremas de representação são apresentados, bem como argumentação em favor de sua utilização. Também com ótica dinâmica, Pflug & Ruszczynski (2005) apresentam medidas multiperíodos para entradas de dinheiro como problemas de otimização, considerando a diferença entre perdas máximas s de processos obtidos com informação *ex-ante* e *ex-post*. Sob certas situações, tais medidas de risco são coerentes, mas no geral não precisam ser. Ampliando esse resultado, Bäuerle & Mundt (2008) estendem essa medida de risco para entradas de dinheiro obtida como otimização incorporando a ambiguidade na definição com cenários bayesianos.

Referências

Acciaio, Beatrice, & Svindland, Gregor. 2013. Are Law-Invariant Risk Functions Concave on Distributions? *Dependence Modeling*, **1**, 54–64.

Acciaio, Beatrice, Föllmer, Hans, & Penner, Irina. 2012. Risk Assessment for Uncertain Cash Flows: Model Ambiguity, Discounting Ambiguity, and the Role of Bubbles. *Finance and Stochastics*, **16**, 669–709.

Acerbi, Carlo. 2002. Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1505–1518.

Ahmed, Shabbir, Filipovic, Damir, & Svindland, Gregor. 2008. A Note on Natural Risk Statistics. *Operations Research Letters*, **36**, 662–664.

Angelsberg, Gilles, Delbaen, Freddy, Kaelin, Ivo, Kupper, Michael, & Näf, Joachim. 2011. On a Class of Law Invariant Convex Risk Measures. *Finance and Stochastics*, **15**, 343–363.

Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy, Eber, Jean-Marc, & Heath, David. 1999. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy, Eber, Jean-Marc, Heath, David, & Ku, Hyejin. 2007. Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle. *Annals of Operations Research*, **152**, 5–22.

Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy, & Koch-Medina, Pablo. 2009. Risk Measures and Efficient Use of Capital. *ASTIN Bulletin*, **39**, 101–116.

Assa, Hirbod, & Morales, Manuel. 2010. Risk Measures on the Space of Infinite Sequences. *Mathematics and Financial Economics*, **2**, 253–275.

Balbás, Alejandro, Garrido, José, & Mayoral, Silvia. 2009. Properties of Distortion Risk Measures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **1**, 385–399.

Balbás, Alejandro, Balbás, Raquel, & Jiménez-Guerra, Pedro. 2012. Vector Risk Functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **9**, 563–574.

Bäuerle, Nicole, & Müller, Alfred. 2006. Stochastic Orders and Risk Measures: Consistency and Bounds. *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 132–148.

Bäuerle, Nicole, & Mundt, André. 2008. A Bayesian Approach to Incorporate Model Ambiguity in a Dynamic Risk Measure. *Statistics & Decisions*, **26**, 219–242.

Belles-Sampera, Jaume, Merigó, José M., Guillén, Montserrat, & Santolino, Miguel. 2013. The Connection Between Distortion Risk Measures and Ordered Weighted Averaging Operators. *Insurance: Mathematics and Economics*, **52**, 411–420.

Biagini, Sara, & Frittelli, Marco. 2010. On the Extension of the Namioka-Klee Theorem and on the Fatou Property for Risk Measures. *Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical*, 1–30.

Bion-Nadal, Jocelyne. 2008. Dynamic Risk Measures: Time Consistency and Risk Measures from BMO Martingales. *Finance and Stochastics*, **12**, 219–244.

Bion-Nadal, Jocelyne. 2009. Time Consistent Dynamic Risk Processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **119**, 633–654.

Bion-Nadal, Jocelyne, & Kervarec, Magali. 2012. Risk Measuring under Model Uncertainty. *The Annals of Applied Probability*, **22**, 213–238.

Brandtner, Mario. 2014. "Spectral Risk Measures: Properties and Limitations": Comment on Dowd, Cotter, and Sorwar. *Journal of Financial Services Research*.

Burgert, Christian, & Rüschendorf, Ludger. 2006. Consistent Risk Measures for Portfolio Vectors. *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 289–297.

Cascos, Ignacio, & Molchanov, Ilya. 2007. Multivariate Risks and Depth-Trimmed Regions. *Finance and Stochastics*, **11**, 373–397.

Cerreia-Vioglio, Simone, Maccheroni, Fabio, Marinacci, Massimo, & Montrucchio, Luigi. 2011. Risk Measures: Rationality and Diversification. *Mathematical Finance*, **4**, 743–774.

Chambers, Christopher P. 2009. An Axiomatization of Quantiles on the Domain of Distribution Functions. *Mathematical Finance*, **19**, 335–342.

Chen, Zhiping, & Wang, Yi. 2007. A New Class of Coherent Risk Measures Based on P-Norms and their Applications. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **23**, 49–62.

Chen, Zhiping, & Yang, Li. 2008. Two-Sided Coherent Risk Measures and their Application in Realistic Portfolio Optimization. *Journal of Banking & Finance*, **32**, 2667–2673.

Chen, Zhiping, & Yang, Li. 2011. Nonlinearly Weighted Convex Risk Measure and its Application. *Journal of Banking & Finance*, **35**, 1777–1793.

Cheridito, Patrick, & Kupper, Michael. 2011. Composition of Time-Consistent Dynamic Monetary Risk Measures in Discrete Time. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **14**, 137–162.

Cheridito, Patrick, & Li, Tianhui. 2008. Dual Characterization of Properties of Risk Measures on Orlicz Hearts. *Mathematics and Financial Economics*, **2**, 29–55.

Cheridito, Patrick, & Li, Tianhui. 2009. Risk Measures on Orlicz Hearts. *Mathematical Finance*, **19**, 189–214.

Cheridito, Patrick, Delbaen, Freddy, & Kupper, Michael. 2004. Coherent and Convex Monetary Risk Measures for Bounded Càdlàg Processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **112**, 1–22.

Cheridito, Patrick, Delbaen, Freddy, & Kupper, Michael. 2005. Coherent and Convex Monetary Risk Measures for Unbounded Càdlàg Processes. *Finance and Stochastics*, **9**, 369–387.

Cheridito, Patrick, Delbaen, Freddy, & Kupper, Michael. 2006. Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes. *Electronic Journal of Probability*, **11**, 57–106.

Cherny, Alexander, & Madan, Dilip. 2009. New Measures for Performance Evaluation. *Review of Financial Studies*, **22**, 2571–2606.

Cherny, Alexander S. 2006. Weighted V@R and its Properties. *Finance and Stochastics*, **10**, 367–393.

Cherny, Alexander S., & Grigoriev, Pavel G. 2007. Dilatation Monotone Risk Measures are Law Invariant. *Finance and Stochastics*, **11**, 291–298.

Cont, Rama, Deguest, Romain, & Scandolo, Giacomo. 2010. Robustness and Sensitivity Analysis of Risk Measurement Procedures. *Quantitative Finance*, **10**, 593–606.

Csóka, Peter, Herings, P. Jean-Jacques, & Kóczy, Laszlo A. 2007. Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective. *Journal of Banking & Finance*, **31**, 2517–2534.

Cvitanic, Jaksa, & Karatzas, Ioannis. 1999. On Dynamic Measures of Risk. *Finance and Stochastics*, **3**, 451–482.

Delbaen, Freddy. 2002. Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. *Advances in Finance and Stochastics*, 1–37.

Delbaen, Freddy. 2006. The Structure of M-Stable Sets and in Particular of the Set of Risk Neutral Measures. *Lecture Notes in Mathematics*, **1874**, 215–258.

Delbaen, Freddy. 2009. Risk Measures for Non-Integrable Random Variables. *Mathematical Finance*, **19**, 329–333.

Delbaen, Freddy, Peng, Shige, & Gianin, Emanuela Rosazza. 2010. Representation of the Penalty Term of Dynamic Concave. *Finance and Stochastics*, **14**, 449–472.

Dentcheva, Darinka, Penev, Spiridon, & Ruszczynski, Andrzej. 2010. Kusuoka Representation of Higher Order Dual Risk Measures. *Annals of Operations Research*, **181**, 325–335.

Detlefsen, Kai, & Scandolo, Giacomo. 2005. Conditional and Dynamic Convex Risk Measures. *Finance and Stochastics*, **9**, 539–561.

Dhaene, Jan, Denuit, Michel, Goovaerts, Marc J., Kaas, Rob, & Vyncke, David. 2002. The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 3–33.

Dhaene, Jan, Kukush, Alexander, Linders, Daniel, & Tang, Qihe. 2012. Remarks on Quantiles and Distortion Risk Measures. *European Actuarial Journal*, **2**, 319–328.

Dowd, Kevin, Cotter, Jonh, & Sorwar, Ghulam. 2008. Spectral Risk Measures: Properties and Limitations. *Journal of Financial Services Research*, **34**, 61–75.

Drapeau, Samuel, & Kupper, Michael. 2013. Risk Preferences and their Robust Representation. *Mathematics of Operations Research*, **38**, 28–62.

Drapeau, Samuel, Kupper, Michael, & Reda, Ranja. 2011. A Note on Robust Representations of Law-Invariant Quasiconvex Functions. *Advances in Mathematical Economics*, **15**, 27–39.

Duffie, Darrell, & Pan, Jun. 1997. An Overview of Value at Risk. *The Journal of Derivatives*, **4**, 7–49.

Eichhorn, Andreas, & Römisch, Werner. 2005. Polyhedral Risk Measures in Stochastic Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **16**, 69–95.

Ekeland, Ivar, & Schachermayer, Walter. 2011. Law Invariant Risk Measures on $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$. *Statistics & Risk Modeling*, **28**, 195–225.

Ekeland, Ivar, Galichon, Alfred, & Henry, Marc. 2012. Comonotonic Measures of Multivariate Risks. *Mathematical Finance*, **22**, 109–132.

El Karoui, Nicole, & Ravanelli, Claudia. 2009. Cash Subadditive Risk Measures and Interest Rate Ambiguity. *Mathematical Finance*, **19**, 561–590.

Farkas, Walter, Koch-Medina, Pablo, & Munari, Cosimo. 2014. Beyond Cash-Additive Risk Measures: When Changing the Numéraire Fails. *Finance and Stochastics*, **18**, 145–173.

Farkas, Walter, Koch-Medina, Pablo, & Munari, Cosimo. 2015. Measuring Risk with Multiple Eligible Assets. *Mathematics and Financial Economics*, **9**, 3–27.

Fasen, Vicky, & Svejda, Adela. 2012. Time Consistency of Multi-Period Distortion Measures. *Statistics & Risk Modeling*, **29**, 133–153.

Feinstein, Zachary, & Rudloff, Birgit. 2013. Time Consistency of Dynamic Risk Measures in Markets with Transaction Costs. *Quantitative Finance*, **13**, 1473–1489.

Feinstein, Zachary, & Rudloff, Birgit. 2015. Multi-Portfolio Time Consistency for Set-Valued Convex and Coherent Risk Measures. *Finance and Stochastics*, **19**, 67–107.

Fertis, Apostolos, Baes, Michael, & Lüthi, Hans-Jakob. 2012. Robust Risk Management. *European Journal of Operational Research*, **222**, 663–672.

Filipovic, Damir. 2008. Optimal Numeraires for Risk Measures. *Mathematical Finance*, **18**, 333–336.

Filipovic, Damir, & Kupper, Michael. 2007. Monotone and Cash-Invariant Convex Functions and Hulls. *Insurance: Mathematics and Economics*, **41**, 1–16.

Filipovic, Damir, Kupper, Michael, & Vogelpoth, Nicolas. 2012. Approaches to Conditional Risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **3**, 402–432.

Fischer, Tom. 2003. Risk Capital Allocation by Coherent Risk Measures Based on One-Sided Moments. *Insurance: Mathematics and Economics*, **32**, 135–146.

Föllmer, Hans. 2014. Spatial Risk Measures and their Local Specification: The Locally Law-Invariant Case. *Statistics & Risk Modeling*, **31**, 79–101.

Föllmer, Hans, & Knispel, Thomas. 2011. Entropic Risk Measures: Coherence Vs. Convexity, Model Ambiguity and Robust Large Deviations. *Stochastics and Dynamics*, **11**, 333–351.

Föllmer, Hans, & Penner, Irina. 2006. Föllmer, Hans and Penner, Irina. *Statistics & Decisions*, **24**, 61–96.

Föllmer, Hans, & Schied, Alexander. 2002. Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics*, **6**, 429–447.

Frittelli, Marco, & Gianin, Emanuela Rosazza. 2002. Putting Order in Risk Measures. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1473–1486.

Frittelli, Marco, & Gianin, Emanuela Rosazza. 2005. Law Invariant Convex Risk Measures. *Advances in Mathematical Economics*, **7**, 33–46.

Frittelli, Marco, & Gianin, Emanuela Rosazza. 2011. On the Penalty Function and on Continuity Properties of Risk Measures. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **14**, 163–185.

Frittelli, Marco, & Maggis, Marco. 2014. Complete Duality for Quasiconvex Dynamic Risk Measures on Modules of the L^p-Type. *Statistics & Risk Modeling*, **31**, 103–128.

Frittelli, Marco, & Scandolo, Giacomo. 2006. Risk Measures and Capital Requirements for Processes. *Mathematical Finance*, **16**, 589–612.

Gianin, Emanuela Rosazza. 2006. Risk Measures Via G-Expectations. *Insurance: Mathematics and Economics*, **39**, 19–34.

Goovaerts, Marc J., Kaas, Rob, Dhaene, Jan, & Tang, Qihe. 2003. A Unified Approach to Generate Risk Measures. *Astin Bulletin*, **33**, 173–191.

Goovaerts, Marc J., Kaas, Rob, Dhaene, Jan, & Tang, Qihe. 2004. A Comonotonic Image of Independence for Additive Risk Measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**, 581–594.

Grechuk, Bodgan, Molyboha, Anton, & Zabarankin, Michael. 2009. Maximum Entropy Principle with General Deviation Measures. *Mathematics of Operations Research*, **34**, 445–467.

Grigoriev, Pavel G., & Leitner, Johannes. 2006. Dilatation Monotone and Comonotonic Additive Risk Measures Represented as Choquet Integrals. *Statistics & Decisions*, **24**, 27–44.

Guo, Tiexin, Zhao, Shien, & Zeng, Xiaolin. 2014. The Relations Among the Three Kinds of Conditional Risk Measures. *Science China Mathematics*, **57**, 1753–1764.

Gzyl, Henryk, & Mayoral, Silvia. 2008. *On a Relationship Between Distorted and Spectral Risk Measures*. MPRA Paper.

Hamel, Andreas H., & Heyde, Frank. 2010. Duality for Set-Valued Measures of Risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **1**, 66–95.

Hamel, Andreas H., Heyde, Frank, & Rudloff, Birgit. 2011. Set-Valued Risk Measures for Conical Market Models. *Mathematics and Financial Economics*, **5**, 1–28.

Hürlimann, Werner. 2006. A Note on Generalized Distortion Risk Measures. *Finance Research Letters*, **3**, 267–272.

Inoue, Akihiko. 2003. On the Worst Conditional Expectation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 237–247.

Inui, Koji, & Kijima, Masaaki. 2005. On the Significance of Expected Shortfall as a Coherent Risk Measure. *Journal of Banking & Finance*, **29**, 853–864.

Jarrow, Robert A., & Purnanandam, Amiyatosh K. 2005. A Generalized Coherent Risk Measure: The Firm's Perspective. *Finance Research Letters*, **2**, 23–29.

Jiang, Long. 2008. Convexity, Translation Invariance and Subadditivity for G-Expectations and Related Risk Measures. *The Annals of Applied Probability*, **18**, 245–258.

Joaquin, Domingo Castelo. 2009. Value at Risk: Is a Theoretically Consistent Axiomatic Formulation Possible? *The Quarterly Review of Economics and Finance*, **49**, 725–729.

Jobert, Arnaud, & Rogers, L. Chris G. 2008. Valuations and Dynamic Convex Risk Measures. *Mathematical Finance*, **18**, 1–22.

Jorion, Philippe. 2007. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. Hardcover.

Jouini, Elyès, Meddeb, Moncef, & Touzi, Nizar. 2004. Vector-Valued Coherent Risk Measures. *Finance and Stochastics*, **8**, 531–552.

Jouini, Elyès, Schachermayer, Walter, & Touzi, Nizar. 2006. Law Invariant Risk Measures Have the Fatou Property. *Advances in Mathematical Economics*, **9**, 49–71.

Kaina, Maike, & Rüschendorf, Ludger. 2009. On Convex Risk Measures on L^p-Spaces. *Mathematical Methods of Operations Research*, **69**, 475–495.

Katsuki, Yuta, & Matsumoto, Koichi. 2014. Tail VaR Measures in a Multi-Period Setting. *Applied Mathematical Finance*, **21**, 270–297.

Keating, Con, & Shadwick, William F. 2002. A Universal Performance Measure. *The Journal of Performance Measurement*, **6**, 59–84.

Klöppel, Susanne, & Schweizer, Martin. 2007. Dynamic Indifference Valuation Via Convex Risk Measures. *Mathematical Finance*, **17**, 599–627.

Konovalov, Leonid. 2010. Coherent Risk Measures and a Limit Pass. *Theory of Probability & Its Applications*, **54**, 403–424.

Konovalov, Leonid. 2011. On One Limit Relation for Coherent Risk Measures. *Theory of Probability & Its Applications*, **55**, 144–153.

Konstantinides, Dimitrios G., & Kountzakis, Christos E. 2011. Risk Measures in Ordered Normed Linear Spaces with Non-Empty Cone-Interior. *Insurance: Mathematics and Economics*, **48**, 111–122.

Kou, Steven, Peng, Xianhua, & Heyde, Chris C. 2013. External Risk Measures and Basel Accords. *Mathematics of Operations Research*, **38**, 393–417.

Kountzakis, Christos E. 2009. Generalized Coherent Risk Measures. *Applied Mathematical Sciences*, **3**, 2437–2451.

Kovacevic, Raimund M. 2012. Conditional Risk and Acceptability Mappings as Banach-Lattice Valued Mappings. *Statistics & Risk Modeling*, **29**, 1–18.

Kovacevic, Raimund M., & Pflug, Georg. 2009. Time Consistency and Information Monotonicity of Multiperiod Acceptability Functionals. *Radon Series in Computational Applied Mathematics*, **8**, 347–369.

Krätschmer, Volker. 2005. Robust Representation of Convex Risk Measures by Probability Measures. *Finance and Stochastics*, **9**, 597–608.

Krokhmal, Pavlo A. 2007. Higher Moment Coherent Risk Measures. *Quantitative Finance*, **7**, 373–387.

Kromer, Eduard, & Overbeck, Ludger. 2014. Representation of BSDE-Based Dynamic Risk Measures and Dynamic Capital Allocations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **17**, 1450032–1450048.

Kulikov, Alexander. 2008. Multidimensional Coherent and Convex Risk Measures. *Theory of Probability & Its Applications*, **52**, 614–635.

Kupper, Michael, & Schachermayer, Walter. 2009. Representation Results for Law Invariant Time Consistent Functions. *Mathematics and Financial Economics*, **2**, 189–210.

Kusuoka, Shigeo. 2001. On Law Invariant Coherent Risk Measures. *Advances in Mathematical Economics*, **3**, 83–95.

Kusuoka, Shigeo. 2007. A Remark on Law Invariant Convex Risk Measures. *Advances in Mathematical Economics*, **9**, 91–100.

Labuschagne, Coenraad C. A., & Offwood-Le Roux, Theresa M. 2014. Representations of Set-Valued Risk Measures Defined on the L-Tensor Product of Banach Lattices. *Positivity*, **18**, 619–639.

Laeven, Roger J. A., & Stadje, Mitja. 2013. Entropy Coherent and Entropy Convex Measures of Risk. *Mathematics of Operations Research*, **38**, 265–293.

Leitner, Johannes. 2004. Balayage Monotonous Risk Measures. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **7**, 887–900.

Leitner, Johannes. 2005. A Short Note on Second-Order Stochastic Dominance Preserving Coherent Risk Measures. *Mathematical Finance*, **15**, 649–651.

Longin, François M. 2001. Beyond the VaR. *The Journal of Derivatives*, **8**, 36–48.

Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77–91.

Mazzoleni, Piera. 2004. Risk Measures and Return Performance: A Critical Approach. *European Journal of Operational Research*, **155**, 268–275.

Molchanov, Ignacio, & Cascos, Ilya. 2014. Multivariate Risk Measures: A Constructive Approach Based on Selections. *Mathematical Finance*.

Orihuela, José, & Ruiz Galán, Manuel. 2012. Lebesgue Property for Convex Risk Measures on Orlicz Spaces. *Mathematics and Financial Economics*, **6**, 15–35.

Penner, Irina, & Réveillac, Anthony. 2015. Risk Measures for Processes and BSDEs. *Finance and Stochastics*, **19**, 23–66.

Pflug, Georg Ch. 2000. Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. *Probabilistic Constrained Optimization*, **49**, 272–281.

Pflug, Georg Ch. 2006a. On Distortion Functionals. *Statistics & Decisions*, **24**, 45–60.

Pflug, Georg Ch. 2006b. Subdifferential Representations of Risk Measures. *Mathematical Programming*, **108**, 339–354.

Pflug, Georg Ch. 2006c. A Value-of-Information Approach to Measuring Risk in Multi-Period Economic Activity. *Journal of Banking & Finance*, **30**, 695–715.

Pflug, Georg Ch, & Ruszczynski, Andrzej. 2005. Measuring Risk for Income Streams. *Computational Optimization and Applications*, **32**, 161–178.

Pichler, Alois. 2013. The Natural Banach Space for Version Independent Risk Measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 405–415.

Riedel, Frank. 2004. Dynamic Coherent Risk Measures. *Stochastic Processes and their Applications*, **112**, 185–200.

Rockafellar, R. Tyrrell, & Uryasev, Stan. 2013. The Fundamental Risk Quadrangle in Risk Management, Optimization and Statistical Estimation. *Surveys in Operations Research and Management Science*, **18**, 33–53.

Rockafellar, R. Tyrrell, & Uryasev, Stanislav. 2002. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443–1471.

Rockafellar, R. Tyrrell, Uryasev, Stan, & Zabarankin, Michael. 2006. Generalized Deviations in Risk Analysis. *Finance and Stochastics*, **10**, 51–74.

Roorda, Berend, & Schumacher, Johannes M. 2007. Time Consistency Conditions for Acceptability Measures, with an Application to Tail Value at Risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, **40**, 209–230.

Roorda, Berend, & Schumacher, Johannes M. 2011. The Strictest Common Relaxation of a Family of Risk Measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, **48**, 29–34.

Roorda, Berend, Schumacher, Johannes M., & Engwerda, Jacob. 2005. Coherent Acceptability Measures in Multiperiod Models. *Mathematical Finance*, **15**, 589–612.

Rüschendorf, Ludger. 2006. Law Invariant Convex Risk Measures for Portfolio Vectors. *Statistics & Decisions*, **24**, 97–108.

Ruszczynski, Andrzej, & Shapiro, Alexander. 2006. Conditional Risk Mappings. *Mathematics of Operations Research*, **31**, 544–561.

Shapiro, Alexander. 2013. On Kusuoka Representation of Law Invariant Risk Measures. *Mathematics of Operations Research*, **38**, 142–152.

Siu, Tak Kuen, & Yang, Hailiang. 1999. Subjective Risk Measures: Bayesian Predictive Scenarios Analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*, **25**, 157–169.

Song, Yongsheng, & Yan, Jiaan. 2009a. An Overview of Representation Theorems for Static Risk Measures. *Science in China Series A: Mathematics*, **52**, 1412–1422.

Song, Yongsheng, & Yan, Jiaan. 2009b. Risk Measures with Comonotonic Subadditivity or Convexity and Respecting Stochastic Orders. *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 459–465.

Sordo, Miguel A. 2008. Characterizations of Classes of Risk Measures by Dispersive Orders. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42**, 1028–1034.

Sordo, Miguel A. 2009. Comparing Tail Variabilities of Risks by Means of the Excess Wealth Order. *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 466–469.

Stadje, Mitja. 2010. Extending Dynamic Convex Risk Measures from Discrete Time to Continuous Time: A Convergence Approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, **47**, 391–404.

Staum, Jeremy. 2013. Excess Invariance and Shortfall Risk Measures. *Operations Research Letters*, **41**, 47–53.

Stoica, George. 2006. Relevant Coherent Measures of Risk. *Journal of Mathematical Economics*, **42**, 794–806.

Svindland, Gregor. 2009. Subgradients of Law-Invariant Convex Risk Measures on L^1. *Statistics & Decisions*, **27**, 169–199.

Svindland, Gregor. 2010. Continuity Properties of Law-Invariant (Quasi-) Convex Risk Functions on L^∞. *Mathematics and Financial Economics*, **3**, 39–43.

Tahar, Imen Ben, & Lépinette, Emmanuel. 2014. Vector-Valued Coherent Risk Measure Processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **17**.

Tian, Dejian, & Jiang, Long. 2015. Quasiconvex Risk Statistics with Scenario Analysis. *Mathematics and Financial Economics*, **9**, 111–121.

Tian, Dejian, & Suo, Xinli. 2012. A Note on Convex Risk Statistic. *Operations Research Letters*, **40**, 551–553.

Tsukahara, Hideatsu. 2009. One-Parameter Families of Distortion Risk Measures. *Mathematical Finance*, **19**, 691–705.

Tutsch, Sina. 2008. Update Rules for Convex Risk Measures. *Quantitative Finance*, **8**, 833–843.

Vicig, Paolo. 2008. Financial Risk Measurement with Imprecise Probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, **49**, 159–174.

Wang, Shaun. 1996. Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, **26**, 71–92.

Wang, Shaun. 1998. An Actuarial Index of the Right-Tail Risk. *North American Actuarial Journal*, **2**, 88–101.

Wang, Shaun S., Young, Virginia R., & Panjer, Harry H. 1997. Axiomatic Characterization of Insurance Prices. *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, 173–183.

Wang, Tan. 1999. *A Class of Dynamic Risk Measures*. Working Paper, University of British Columbia.

Weber, Stefan. 2006. Distribution-Invariant Risk Measures, Information, and Dynamic Consistency. *Mathematical Finance*, **16**, 419–441.

Wei, Linxiao, & Hu, Yijun. 2014. Coherent and Convex Risk Measures for Portfolios with Applications. *Statistics & Probability Letters*, **90**, 114–120.

Wirch, Julia L., & Hardy, Mary R. 2000. *Distortion Risk Measures: Coherence and Stochastic Dominance*. Working Paper.

Xu, Yuhong. 2014. *Multidimensional Dynamic Risk Measure Via Conditional G-Expectation*. Mathematical Finance.

Zhu, Li, & Li, Haijun. 2012. Tail Distortion Risk and its Asymptotic Analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 115–121.

Ziegel, Johanna F. 2014. *Coherence and Elicitability*. Mathematical Finance.