Estratégias de investimento em portfólios com estimativas de alta e baixa do mercado financeiro

Strategies of portfolio investment with estimates of bull and bear markets

Pedro L. Valls Pereira[†]
André Barbosa Oliveira[‡]

Resumo O mercado financeiro possui não-linearidades, com comportamento dos retornos das ações diferente nos períodos de alta e baixa do mercado. Este artigo estuda portfólios com estimativas do modelo multivariado com mudança de regime e desenvolve estratégias de investimento nos portfólios na presença de incerteza quanto ao estado de alta ou baixa do mercado de ações. Os portfólios foram otimizados para as principais ações do Ibovespa. O portfólio tangente com estimativas com mudança de regime ofereceu o melhor desempenho entre as carteiras baseadas em otimização para o período analisado, tanto nas alocações com rebalanceamento semanal quanto mensal.

Palavras-chave: Otimização de portfólios; Cadeias de Markov; Modelos de série temporal multivariados com mudança de regime Markoviana.
Código JEL: G11, C61, C34.

Abstract The financial market has non-linear patterns, with different return behavior in bull versus bear markets. This article uses multivariate model estimates to study portfolios in changing conditions, and develops investment strategies for portfolios in light of uncertainty about the bear or bull status of the stock market. Portfolios were optimized for the main stocks listed on the Brazilian market index Ibovespa. The portfolios proposed with estimates of changing market status outperformed others over the analyzed period, with rebalancing adjustments made either weekly or monthly.

Keywords: Portfolio optimization; Markov Chain; Multivariate time series models with Markov switch.
JEL Code: G11, C61, C34.

1. Introdução

As decisões de investimento em ações no mercado financeiro estão sujeitas a incerteza, a diversificação em portfólios de investimento é um princípio de referência para controle de risco. Através da diversificação perdas em uma posição podem ser compensadas por ganhos em outras, pois as mudanças nas

Submitted on December 5, 2019. Revised on May 17, 2021. Accepted on August 05, 2021. Published online in December 2021. Editor in charge: João Frois Caldeira.
[†]Sao Paulo School of Economics, Brazil: pedro.valls@fgv.br.
[‡]Universidade Federal Fluminense, Brazil: aboliveira@id.uff.br.

©2021 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license

condições da economia impactam diferentes os setores, e reduzimos a exposição a riscos específicos das empresas.

A escolha ótima de investimento em ativos de risco na moderna teoria de carteiras deriva portfólios com base em soluções que dependem do retorno e riscos esperados, onde plugamos no problema de otimização as estimativas de média, variância e correlações. Erros amostrais das estimativas em relação aos retornos e riscos realizados vão implicar em baixa performance dos portfólios otimizados, que diferente da otimização dentro da amostra podem performar na análise fora da amostra de estimação com resultado abaixo do portfólio igualmente ponderado (DeMiguel et al., 2009).

Contudo a otimização do portfólio média variância tem mais risco frente a seu maior retorno implícito que amplifica o erro de estimação, a redução da exposição ao risco com retorno meta igual ao portfólio igualmente ponderado tende a apresentar desempenho superior a diversificação ingênua da carteira com pesos iguais entre os ativos (Kirby e Ostdiek, 2012). Uma alternativa a redução do retorno implícito é otimizar carteiras com estimativas aperfeiçoadas.

A literatura de investimentos possui diversas formas para controlar o erro das estimativas. Modelos fatoriais fornecem estimativas da média e variância parametrizada pelos fatores simplificando o processo de estimação e tornando robustas as estimativas de correlações a choques específicos a um ativo (Chan et al., 2015; Sharpe, 1963). Michaud e Michaud (2008) propõem o portfólio por re-amostragem, onde emprega-se simulações dos retornos possíveis para atenuar o erro das estimativas sobre os pesos dos portfólios otimizados. Outras abordagens propõem diferentes estimadores para a matriz de variância covariância (Ledoit e Wolf, 2004; DeMiguel e Nogales, 2009)

Os retornos das ações são séries temporais financeiras que apresentam comportamentos não lineares. Em determinados períodos de tempo o mercado está em alta e os preços se difundem suavemente com retornos de pouca dispersão, em outros períodos o mercado está em baixa e os preços possuem maior perturbação com maiores retornos (geralmente negativos) e mais dispersão. Diferentes modelos descrevem as características não lineares das séries financeiras, como os modelos de volatilidade GARCH (Tsay, 2010); os modelos para a previsão da média não lineares (Franses e Dijk, 2000); e modelos não lineares para média e variância (Hamilton, 1994).

Os modelos de série de tempo com mudança de regime descrevem a transição das séries temporais financeiras entre regimes de alta e baixa dos preços das ações, bem como dinâmica de dependência diferente durante os períodos de alta e baixa no mercado financeiro. No modelo de volatilidade ARCH

com mudança de regime - SWARCH (Hamilton e Susmel, 1994) a volatilidade muda ao longo do tempo entre os estados de baixa e alta volatilidade, onde a volatilidade aumenta de escala por um fator multiplicativo quando ocorre transição do estado de baixa para alta volatilidade. Os modelos de volatilidade com mudança de regime foram estendidos a variadas especificações GARCH (Klaassen, 2002; Haas et al., 2004).

Os modelos com mudança de regime também são aplicados em finanças para dependência entre series temporais na especificação de cópulas com mudança de regime (da Silva Filho et al., 2012) com estrutura de dependência entre as séries diferentes nos períodos de crise e normalidade no mercado financeiro. Outros estudos desenvolvem abordagens de regras técnicas de operação no mercado financeiro baseadas em estimativas com mudança de regime (Chang e Hu, 2009; Almeida e Valls Pereira, 2000) e com abordagens com dinâmica de dependência na duração dos estados com mudança de regime (Mendes et al., 2018).

O objetivo deste artigo é efetuar a otimização de carteiras com estimativas com mudança de regime e estudar estratégias de investimentos em portfólios quando media e variância possuem mudança de regime Markoviana. Queremos desenvolver estratégias de alocação de portfólio frente a incerteza quanto ao estado de alta ou baixa no mercado financeiro. A média e matriz de variância-covariância com mudança de regime são aplicados aos portfólios tradicionais da análise de alocação de ativos de risco: o portfólio de variância mínima global e o portfólio tangente.

Este trabalho é semelhante a Clarke e de Silva (1998), que aplicam estimativas de média e variância dependente dos estados para o problema de alocação em carteira de renda fixa e variável, porém consideramos investimentos em um portfólio formado apenas por ativos de risco. Neste estudo empregamos os portfólios padrão com estimativas de risco e retorno permitindo mudança de regime. Diferente de Oliveira e Valls Pereira (2018) que estudam as escolhas ótimas de portfólio quando o processo gerador dos dados possui mudança de regime Markoviana e Buckley et al. (2008) que avaliam portfólios ótimos para retornos dos ativos sob misturas de distribuições com diferentes especificações de função objetivo adaptados da análise média variância.

Os portfólios são executados com dados das principais ações brasileiras pertencentes ao índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa). Entre os portfólios baseados em modelos com mudança de regime se destacou o portfólio tangente, que apresentou melhor desempenho entre os portfólios otimizados nas alocações com frequência de rebalanceamento mensal e se-

manal.

Após esta introdução, a Seção 2 apresenta os modelos com mudança de regime multivariados para os retornos das ações. Na Seção 3 temos a descrição dos portfólios de referência empregados e das estratégias de investimento nos portfólios. Na Seção 4 são apresentados os dados e avaliadas as características empíricas de comportamento com mudança de regime para ações no mercado financeiro brasileiro. Na Seção 5 discute-se o efeito das estimativas com mudança de regime sobre o desempenho dos portfólios em termos de rendimento e risco. A Seção 6 encerra o artigo com as considerações finais.

2. Modelos de série temporal multivariados com mudança de regime

A escolha sobre ativos de risco envolve incerteza, com um conjunto de resultados possíveis para o retorno com uma dada probabilidade. A análise dos ativos de risco avalia os portfólios por sua média e variância que caracterizam suas distribuições. Desta forma a escolha ótima de portfólio é feita no espaço média variância.

Para seleção ótima de portfólios usamos estimativas do retorno esperado dos ativos, estimado por sua média, e do risco estimado pela sua variância. A abordagem tradicional aplica as estimativas da média, variância e covariância amostrais para implementar os portfólios. Diferentes estimadores para a média e variância podem minimizar o erro amostral das estimativas e aprimorar o desempenho dos portfólios.

Considerando a característica de mudança de regime para as séries temporais financeiras (Franses e Dijk, 2000; Hamilton e Susmel, 1994), com mudança de seu comportamento e dinâmica ao longo do tempo, vamos empregar os modelos com mudança de regime na otimização de portfólio. Os modelos de série de tempo com mudança de regime permitem alterações no tempo dos parâmetros de dependência autoregressiva e média móvel na equação da média e também da equação da variância em cada estado (Krolzig, 1997), descrevendo dinâmica de dependência da série temporal nos momentos de alta diferente dos períodos de baixa no mercado financeiro.

Como a dependência dos retornos das ações tende a ser reduzida, vamos considerar a distribuição conjunta dos retornos dos ativos por uma distribuição normal multivariada com mudança de regime Markoviana. Este modelo é caracterizado por dois processos estocásticos que descrevem os retornos dos ativos financeiros: uma distribuição normal multivariada com vetor de retornos esperados e matriz de variância covariância em cada estado; e um modelo probabilístico que descreve a realização dos estados ao longo do tempo por um processo de Markov de primeira ordem.

O modelo de distribuição normal multivariada com mudança de regime Markoviana é gerado por uma distribuição condicional aos estados

$$R_t \mid S_t \sim N\left(\mu\left(S_t\right), \Omega\left(S_t\right)\right),$$

onde o vetor de retornos esperados é $\mu(1)$ e a matriz de variância covariância $\Omega(1)$ quando o regime é o de alta, $S_t = 1$; e vetor de retornos esperados é $\mu(2)$ e matriz de variância covariância $\Omega(2)$ quando o regime é o de baixa, $S_t = 2$. Por sua vez, o estado ou regime é uma variável aleatória descrita por um processo de Markov. O modelo de distribuição normal multivariada com dois regimes é dado por:

$$R_t = \begin{cases} N(\mu(1), \Omega(1)), & \text{com probabilidade } \mathrm{P}\{S_t = 1\} \\ N(\mu(2), \Omega(2)), & \text{com probabilidade } \mathrm{P}\{S_t = 2\} \end{cases},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

onde $\mathrm{P}\{S_t = s\}$ é a probabilidade do regime s no tempo t e P é a matriz de probabilidade de transição.

O processo de Markov é um processo estocástico que se realiza sobre um conjunto de estados ao longo do tempo, onde a probabilidade do regime no próximo período depende apenas do regime corrente e independe de todos os estados passados, i.e. $P\{S_{t+1} \mid S_t, S_{t-1}, \ldots, S_0\} = P\{S_{t+1} \mid S_t\}$. Num processo de Markov a partir de um estado inicial ocorre uma sequência de estados, que descreve a evolução do estado não observável ao longo do tempo, com os retornos dos ativos transitando entre os regimes de alta e baixa. Como faremos a análise dos retornos sem dependência da série sobre a média e variância, a dependência temporal é exclusivamente oriunda da cadeia de Markov.

No modelo com mudança de regime os retornos transitam entre os estados de alta e baixa de acordo com a probabilidade de transição entre o estado i em um período para o estado j no período em sequência, $P_{ij} = P\{S_{t+1} = j \mid S_t = i\}$. Como as probabilidades são positivas as probabilidades de transição devem ser positivas; e a soma das probabilidades de transição entre o estado corrente i para todos os estados possíveis no período seguinte devem somar a unidade, $\sum_{j=1}^{2} P_{ij} = 1$. A partir da estimação dos parâmetros podemos fazer a inferência de que as observações dos retornos das ações estão no regime de alta ou de baixa, pela probabilidade do regime condicional as observações $P\{S_t\} = P\{R_t \mid S_t\}/P\{R_t\}$.

A estimação dos modelos com mudança de regime é feira a partir da sua densidade que é uma função das densidades de cada regime, $f(R_t) =$

$\sum_{s_t=1}^{2} f(R_t \mid S_t) P\{S_t\}$. Utilizando o algoritmo EM (Kim e Nelson, 2017), dada uma inicialização dos parâmetros θ_i são estimadas as probabilidades dos regimes e maximizada a função de log-verossimilhança iterativamente, até que o processo converge na n-ésima iteração $|\theta_n - \theta_{n-1}| < \delta$, para um desvio de tolerância δ. Também pode ser aplicada otimização não linear da função de máxima verossimilhança (Frühwirth-Schnatter, 2006).

No modelo de distribuição normal multivariada com mudança de regime as previsões do vetor de retornos esperado e da matriz de variância covariância são obtidas pela esperança dos retornos condicionais a informação corrente:

$$\mathrm{E}\{R_{t+1} \mid I_t\} = \sum_{s=1}^{2} \mu(s)\,\mathrm{P}\{S_{t+1} = s\} \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{VARCOV}\{R_{t+1} \mid I_t\} = &\sum_{s=1}^{2} \Omega(s) P\{S_{t+1} = s\} \\ &+ \sum_{s=1}^{2} \mu(s)\mu'(s) P\{S_{t+1} = s\} - E[R_{t+1} \mid I_t] E[R_{t+1} \mid I_t]',\end{aligned}$$

onde $\mathrm{P}\{S_{t+1}\}$ é a probabilidade prevista do regime para o próximo período.

No modelo com mudança de regime a matriz de variância covariância possui dois componentes, o valor esperado da variância e a variância do valor esperado (Frühwirth-Schnatter, 2006). O valor esperado da variância é descrito pelo primeiro somatório, enquanto a variância dos valores esperados está nos dois termos seguintes da equação da matriz de variância covariância.

No trabalho empírico também vamos considerar como estimador alternativo para matriz de variância covariância o valor esperado da matriz de variância covariância condicional aos estados. Nesse caso a variância e covariância entre os retornos dos ativos é descrita pela sua variação nos estados no tempo. Sendo o valor esperado da matriz de variância covariância condicional aos estados dado por:

$$\mathrm{E}[\mathrm{VARCOV}\{R_{t+1} \mid S_t\}] = \sum_{s=1}^{2} \Omega(s)\,\mathrm{P}\{S_{t+1} = s\} \tag{2}$$

Os modelos com mudança de regime possuem muitos parâmetros para modelos multivariados, em função da dependência dos estados. Em um modelo de distribuição normal multivariado para N ativos e S regimes possui NS médias e S$N(N+1)/2$ elementos na matriz de variância covariância. Em se tratando de análise de carteira com várias ações, adotou-se a decomposição de Cholesky que expressa a matriz de variância covariância pelo produto

de matriz triangular inferior fixa e matriz diagonal dependente do regime, $\Omega(s) = LD(s)L'$, reduzindo para $N(N-1)/2 + N$S parâmetros de variâncias e covariâncias. A mudança de regime na matriz de variância covariância será descrita por um fator de escala para cada ação, que aumenta ou diminui a volatilidade e correlação entre os retornos dos ativos de acordo com o regime.

3. Portfólios média variância e estratégias de investimento

Os portfólios ótimos na análise média-variância podem ser obtidos a partir das preferências dos investidores de acordo com a sua aversão ao risco, ou pela escolha ótima numa carteira com o ativo livre de risco e ativos arriscados. Os dois portfólios de referência considerados neste trabalho são o portfólio de variância mínima global e o portfólio tangente.

(a) Portfólio de variância mínima global (minimum variance portfolio, MVP): O portfólio de variância mínima global é o portfólio de mínimo risco entre todos os portfólios eficientes, sendo uma opção de portfólio conservador. Considerando que os investidores preferem maior retorno esperado a menor e são avessos ao risco, um investidor com aversão ao risco suficientemente grande escolheria otimamente investir sua riqueza em ativos arriscados de acordo com o portfólio de variância mínima. O portfólio de variância mínima global é a solução do problema de otimização:

$$\min_{w} w'\Omega w$$
$$s.a.\ w'\mathbf{1} = 1,$$

Onde w é um vetor coluna $N \times 1$ que representa o portfólio e define a porcentagem da riqueza que será investida em cada ação; Ω é a matriz de variância covariância; e $\mathbf{1}$ é um vetor coluna unitário.
O portfólio de variância mínima global possui poucas exigências de estimativas, sendo necessária apenas a estimação da variância e covariâncias dos retornos dos ativos. A variância possui melhor condições para convergência em amostras finitas do que a média.

(b) Portfólio tangente (tangency portfólio, Tan): O portfólio tangente é o portfólio que maximiza a razão de Sharpe, é a escolha ótima do problema de investimento em ativos de risco para uma carteira com o ativo livre de risco e o portfólio de ativos arriscados. O portfólio tangente é a expresso pelo

problema de otimização:

$$\max_{w} \frac{w'\mu - R_f}{\sqrt{w'\Omega w}}$$
$$s.a.\ w'\mathbf{1} = 1,$$

onde, como antes, w é o vetor coluna $N \times 1$ que define a escolha do portfólio; μ é um vetor $N \times 1$ dos retornos esperados; Ω é a matriz de variância covariância de dimensão $N \times N$; R_f é a taxa de juros livre de risco; e $\mathbf{1}$ um vetor coluna unitário.

Vamos estudar os portfólios com restrição de operação de venda a descoberto e limite de posição máxima sobre os ativos. Os portfólios frequentemente são otimizados com restrição de pesos não negativos, tal que não são permitidas operações de venda a descoberto que trazem mais risco a carteira. A restrição sobre os pesos é empregada frequentemente na literatura para reduzir excesso de exposição frente a mudança dos retornos.

Os portfólios média variância tendem a possuir excesso de concentração em alguns ativos, pois a condição de otimização estabelece maior alocação nos ativos de maior média e menor peso nos ativos de maior variância. A seleção de ativos por otimização de carteiras amplifica o erro das estimativas (Michaud, 1989), os ativos com maior peso serão os de maior retorno esperado, estimativas que tendem a ter maior erro amostral; e menor peso nas ações de maior volatilidade, que tende também a ter maior erro frente a outliers.

Para evitar a concentração das carteiras a prática de otimização de portfólio usa restrição de não negatividade e limite superior aos pesos que tem o mesmo efeito de considerar estimadores shrinkage para a matriz de variância covariância e retornos esperados (Jagannathan e Ma, 2003). O método Shrinkage combina um estimador estruturado com menor viés e um estimador amostral com maior sensibilidade a erro amostral, revertendo estimativas extremas em relação à média.

O portfólio de variância mínima global tende a possuir melhor rendimento e menor risco que o portfólio de mercado (Clarke et al., 2006). Também nos estudos empíricos possui melhor desempenho que o portfólio tangente em termos de razão de Sharpe (Jagannathan e Ma, 2003). A matriz de variância covariância pela abordagem shrinkage permite uma estimação com melhores propriedades estatísticas mesmo para grande número de ativos e aprimora o desempenho da carteira de mínimo risco (Ledoit e Wolf, 2004).

O portfólio de variância mínima teria vantagens em relação ao portfólio tangente na performance fora da amostra de estimação, porque não depende

da previsão do retorno esperado que é mais complexo de estimar e afetado pelas condições da economia e do mercado financeiro que alteram os fatores de desconto na precificação e o fluxo de caixa das empresas. O erro de estimação tem grande impacto no desempenho das carteiras baseadas em otimização, como encontrado por DeMiguel et al. (2009) o portfólio média variância apesar de apresentar melhor resultado de retorno ajustado ao risco dentro da amostra performa inferior a diversificação ingênua da carteira igualmente ponderada na análise fora da amostra de estimação.

Considerando ações brasileiras Thomé Neto et al. (2011) encontram que a carteira de variância mínima com restrição sobre os pesos possui melhor performance que o Ibovespa. O estudo de Rubesam e Beltrame (2013) avalia que o portfólio de variância mínima teve melhor resultado que o portfólio tangente e Ibovespa, considerando diferentes estimadores de matriz de variância covariância. No estudo empírico de Santos e Tessari (2012) o uso de estimadores da matriz de variância covariância alternativos melhorou o desempenho dos portfólios, em particular o método shrinkage.

A carteira da variância mínima direciona a alocação em ações de menor beta e risco idiossincrático, que estão associadas a estratégias de valor e baixa volatilidade. O portfólio de variância mínima está relacionado aos fatores de Fama-French, menor beta tem relação as ações de empresas maiores e com atuação diversificada e as ações de valor que seriam menos sensíveis ao baixo crescimento econômico (Scherer, 2011).

A escolha dos portfólios depende do vetor de retornos esperados e da matriz de variância covariância dos retornos das ações. Considerando os estimadores com mudança de regime, podemos desenvolver duas estratégias para investimento de portfólio:

(i) *Otimização do portfólio com estimativas do modelo com mudança de regime*, usando as expectativas da média e da matriz de variância do regime considerando a probabilidade prevista do regime.
(ii) *Otimização do portfólio com as estimativas do estado inferido do regime*, baseado na probabilidade prevista do regime. Assumindo o mercado financeiro apenas com os estados de alta e baixa, um o investidor pode inferir que o próximo estado será de alta sempre que a probabilidade prevista deste regime for maior ou igual a 50%. Desta forma otimizamos os portfólios apenas com a estimativa do vetor de retorno esperado e da matriz de variância e covariância no estado inferido para o próximo período.

Seja a distribuição dos retornos com dois estados, $S = \{1,2\}$, descrevendo os

regimes de alta e baixa do mercado financeiro. Então:

$$\text{se } \mathrm{P}\{S_{t+1} = 1\} \geq 0{,}50 \Rightarrow w^* = f(\mu(1), \Omega(1))$$
$$\text{se } \mathrm{P}\{S_{t+1} = 2\} > 0{,}50 \Rightarrow w^* = f(\mu(2), \Omega(2))$$

Assim como Hamilton (1989) essa estratégia usa como regra para identificação do regime quando a sua probabilidade se torna maior ou igual que 50%. O uso dos modelos com mudança de regime para inferir o estado da economia ou do mercado financeiro é uma aplicação derivada deste modelo não linear. Hamilton (1989) estuda os modelos com mudança de regime para taxa de crescimento do PIB com o objetivo de identificar os períodos de crise e expansão na economia americana, onde os estados de recessão e expansão são semelhantes com a datação oficial de crises do NBER.

4. Estimação do modelo com mudança de regime para ações da Bolsa de Valores de São Paulo

Para análise dos portfólios iremos considerar as principais ações negociadas na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (Bovespa) entre 02/01/2009 e 31/12/2019. O índice Ibovespa reúne as ações com maior volume de negociação na Bolsa em uma carteira ponderada pelo valor de mercado, com rebalançeamento trimestral da sua composição. Para a taxa de juros livre de risco foi considerado como referência a rentabilidade do cdi.

Nos estudos de desempenho dos portfólios um problema recorrente é o viés de seleção, quando efetuamos alocações sobre um conjunto de diferentes ações ao longo do tempo. Este viés é chamado de viés de sobrevivência na análise de desempenho de fundos, influenciamos o resultado do desempenho considerando apenas os fundos que permanecem no mercado. De forma semelhante eliminamos as ações de pior desempenho se, por exemplo, o conjunto de ações objeto de alocação varia incorporando apenas as componentes do índice de mercado em cada período.

Neste trabalho consideramos apenas as ações que permaneceram em todas as composições do Ibovespa entre o início 2009 e final de 2019. Desta forma controlamos o viés de seleção, pois mantemos fixo o conjunto de ações na otimização do portfólio. As alocações são realizadas sobre 25 ações: BBAS3, BBDC4, BRAP4, BRKM5, BVMF3, CCRO3, CMIG4, CPFE3, CPLE6, CSAN3, CSNA3, CYRE3, EMBR3, GGBR4, GOAU4, ITSA4, JBSS3, LAME4, LREN3, NATU3, PETR3, PETR4, SBSP3, USIM5, VALE5. Desta forma realizamos as alocações sobre o núcleo resistente de ações do Ibovespa, considerando 25 ações de 24 empresas que estiveram presentes em todas as

suas carteiras teóricas, enquanto no período analisado o Ibovespa continha ações de um número entre 55 e 68 empresas.

Pelas estimativas do modelo de distribuição normal multivariada com mudança de regime (Tabela 1), os retornos das ações são caracterizados por dois regimes: um primeiro regime, com maior retorno médio para maioria das ações e maior volatilidade; e um segundo regime, com predominância de menor retorno médio e menor volatilidade. Os critérios de informação indicam que o modelo com mudança de regime tem melhor ajuste do que o modelo linear.

O regime de baixa do mercado possui alta recorrência, uma vez que entramos no regime de baixa temos 90,17% de probabilidade de permanecer neste regime e expectativa de duração de 10,17 dias, e menor recorrência no regime de alta com 71,92% de probabilidade de permanecer em alta quando o mercado entra em alta. O mercado de ações Brasileiro passou por fortes quedas após a recuperação da crise sub-prime, com grande instabilidade decorrente de crises financeiras, econômica e política. Desta forma, a maior probabilidade de recorrência do regime de baixa do mercado financeiro é aderente ao registro dos dados históricos observados.

Os retornos das ações acompanham o desempenho do Ibovespa no período 2009-2019, que apresentou alta de 70,43% durante o ano de 2009 com a recuperação da crise sub-prime, crescimento de 5,40% em 2012, 42,92% em 2016, 28,22% em 2017, 12,83% em 2018 e 27,07% em 2019. Nos demais anos o Ibovespa apresenta quedas acumuladas: queda de 1,06% em 2010; queda de 18,88 % em 2011; queda de 17,65% em 2013; queda de 0,66% em 2014 e queda de 10,64% em 2015. Podemos observar pelo gráfico dos retornos (Figura 1) que os anos de alta mais expressivas, 2009 e 2016, as séries foram acompanhadas por maior volatilidade.

As probabilidades suavizadas (Figura 2) indica o estado de alta volatilidade e maior retorno com maior probabilidade em 2009 e no início de 2015, depois do final de 2015 a final de 2016. Também tivemos concentração de probabilidade do regime de alta no início de 2017 e de meados de 2018 a meados de 2019. Entre 2010 até o final de 2014 temos predominância da probabilidade do estado de baixa das ações. A grande incerteza no mercado de ações fica caracterizada pela grande sequência de períodos de baixa, e mesmo nos períodos com predominância de alta ocorrem transições para baixa.

Tabela 1
Estimativas: distribuição Normal multivariada com mudança de regime

Parâmetros	ABEV3	B3SA3	BBAS3	BBDC4	BRAP4	BRKM5	CCR03	CMIG4	CSAN3	CSNA3	CYRE3	EMBR3	GGBR4
Mean (1)	0.1756	0.4165	0.4279	0.2970	0.4001	0.4103	0.1681	0.1133	0.3604	0.7609	0.3244	0.1322	0.4423
Sigma (1)	1.8489	2.8102	3.3381	2.5143	3.8226	3.5976	2.6416	3.3598	2.8389	4.7270	3.1676	2.9782	3.6689
Mean (2)	0.0551	0.0031	−0.0098	0.0087	−0.0338	0.0004	0.0512	0.0564	0.0162	−0.1743	0.0025	0.0260	−0.0870
Sigma (2)	1.3161	2.0023	2.0073	1.6447	2.0366	2.0548	1.8171	1.9142	1.8934	2.5110	2.2341	1.7999	2.1442

Parâmetros	GOAU4	ITSA4	JBSS3	LAME4	LREN3	NTC03	PETR3	PETR4	SBSP3	TIMP3	USIM5	VALE3
Mean (1)	0.3220	0.3208	0.3456	0.2053	0.3255	0.2866	0.4134	0.3825	0.1866	0.2169	0.5227	0.4121
Sigma (1)	4.1255	2.4319	4.1041	2.6925	2.7077	2.7844	3.7212	3.7191	2.7145	3.1912	4.7795	3.6931
Mean (2)	−0.0862	0.0015	0.0278	0.0666	0.0798	0.0158	−0.0813	−0.0579	0.0747	0.0268	−0.1196	−0.0486
Sigma (2)	2.2544	1.6228	2.5909	1.9355	1.9314	1.8634	2.1269	2.1253	1.9104	1.8479	2.6404	1.9536

probabilidades de transição

	$S_{t+1}=1$	$S_{t+1}=2$
$S_t=1$	0.7192	0.2808
$S_t=2$	0.0984	0.9017

estatisticas de ajuste

Modelo com mudança de regime		Modelo linear	
AIC	964297	AIC	986390
SC	973037	SC	986933
log-likelihood	-130598	log-likelihood	-133976

Figura 1
Índice Ibovespa e retornos das ações selecionadas: 2009-2019

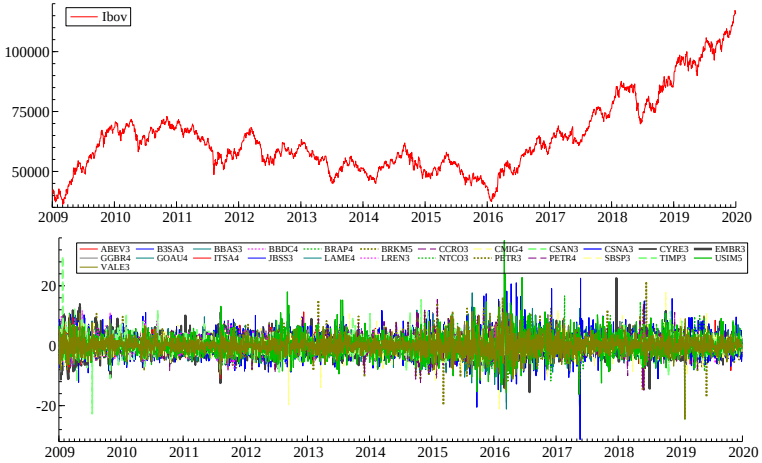
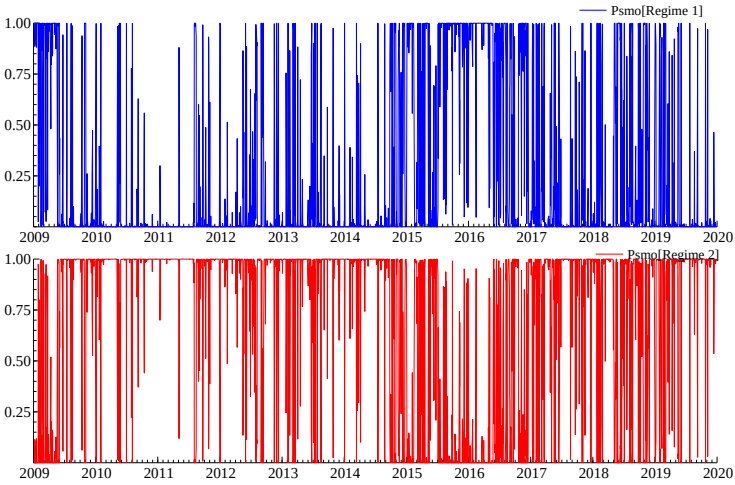


Figura 2
Probabilidade suavizada dos regimes



5. Desempenho dos portfólios

5.1 Metodologia de avaliação dos portfólios

Os portfólios são alocados para fora da amostra de estimação, considerando janela móvel de três anos de retornos diários, otimizados entre janeiro de 2012 a dezembro de 2019. São estudadas duas frequências de rebalanceamento: semanal, que resulta em 420 alocações; e mensal, com 96 alocações. Os portfólios são definidos sempre para a semana/mês seguinte com dados dos retornos diários de três anos imediatamente anteriores a última observação inclusive, usados na estimação do vetor de retornos esperados e matriz de variância-covariância. Cada portfólio é mantido durante uma semana/mês, no último dia da semana/mês apura-se o retorno realizado sobre o investimento e otimiza-se a carteira para o período seguinte.

São comparados o desempenho da carteira de variância mínima e do portfólio tangente, com e sem restrições de peso máximo. São avaliados os portfólios otimizados com estimativas com mudança de regime e com estratégia de probabilidade inferida, além das carteiras com estimativas amostrais. Duas carteiras utilizam estimativas amostrais: *Mvp*, portfólio de variância mínima com matriz de variância covariância amostral; *Tan*, portfólio tangente com vetor de médias e matriz de variância covariância com estimativas amostral. Seis carteiras utilizam estimativas com mudança de regime: *MvpP*, portfólio de variância mínima global com estimativas do estado inferido; *MvpMS*, portfólio de variância mínima global com estimativas com mudança de regime; *MvpMS2*, portfólio de variância mínima global com variância esperada condicional aos estados; *TanP*, portfólio tangente com estimativas do estado inferido; *TanMS*, portfólio tangente com estimativas com mudança de regime; *TanMS2*, portfólio tangente utilizando a média e variância esperada condicional aos estados.

As carteiras com restrição de posição máxima sobre os ativos individuais foram incluídas para limitar o excesso de posição em uma ação, com peso máximo de 20%. O portfólio média variância otimizado de acordo com as funções objetivo de minimização da variância ou maximização da razão de Sharpe pode resultar em excesso de exposição em um ativo dados os insumos de estimativas de retorno, risco e covariâncias. Tal como outros problemas de otimização, as características dos parâmetros podem implicar concentração em uma variável de decisão, porém como o risco se reduz com a diversificação através das características da correlação dos ativos são pouco frequentes soluções de canto. Também foi considerada restrição de operação de venda a descoberto em todos os portfólios.

Na avaliação de desempenho consideramos os retornos líquidos, descontando os custos de transação. Nos últimos anos os custos de transação vêm se tornando cada vez menores no mercado financeiro, hoje temos corretoras que não cobram taxa de corretagem por ordens de compra/venda de ações. Para efeitos de custo de transação as taxas de liquidação e negociação foram especificadas em 0,023125% proporcional a alteração da composição da carteira.

Os benchmarks para comparação são: o índice Ibovespa (IBOV); a carteira igualmente ponderada, como uma diversificação ingênua que apresenta bom desempenho em muitos trabalhos aplicados (DeMiguel et al., 2009); e o CDI como aproximação da taxa de juros livre de risco.

Os investidores são avessos ao risco, com preferências representadas por uma função utilidade esperada estritamente côncava. Para comparar as carteiras utilizamos a razão de Sharpe que descreve o desempenho de retorno penalizado pelo risco, expresso pelo excesso de retorno em relação a taxa de juros livre de risco dividido pelo desvio padrão:

$$SR = \frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p}.$$

Também consideramos a razão de informação, pois a razão de Sharpe não é adequada para ranquear portfólios quando fica negativa - para um retorno médio abaixo da taxa de juros livre de risco. Por exemplo, entre dois portfólios de igual excesso de retorno negativo a razão de Sharpe selecionaria como melhor o de maior risco.

A razão de informação é dada pela razão da média sobre desvio padrão do excesso de retorno em relação a um benchmark, geralmente o retorno da carteira de mercado. Porém nesse caso limita a comparação, pois tende a possuir um valor elevado para portfólios que apresentam baixo risco em relação ao benchmark, como no caso de portfólios que replicam o índice.

Utilizamos como medida de desempenho a razão de informação em relação a zero, para um investidor que tenha como meta ter retorno positivo, sendo a razão de informação expressa pelo retorno por unidade de risco. A razão de informação em relação a zero será critério de comparação auxiliar, adotada quando a razão de Sharpe for negativa.

$$IR_{[zero]} = \frac{\bar{R}_p}{\sigma_p}.$$

A razão de Sharpe dos portfólios foi comparada estatisticamente pelo teste de hipótese de igualdade a razão de Sharpe do Ibovespa. Também foi reali-

zado teste de igualdade da razão de informação dos portfólios e do Ibovespa. Empregamos o teste de hipótese robusto da razão de Sharpe (Ledoit e Wolf, 2008), um método de inferência robusta através de técnicas de bootstrap, com 4999 reamostragens e seleção ótima do tamanho do bloco de pares de observações entre 1, 3, 6 e 10 no bootstrap circular.

Os portfólios serão analisados de 2012 a 2019, porém também fazemos divisão em períodos de acordo com desempenho do rendimento acumulado anual do Ibovespa. Na subamostra de 2012 e 2016-2019 temos anos de alta do Ibovespa, onde o retorno anual do índice de mercado foi positivo. Na submamostra de 2013 a 2015 temos os anos de baixa do Ibovespa, com três anos consecutivos de retorno anual negativo.

5.2 Resultados da otimização de carteiras

No período completo de comparação, 2012 a 2019, para os portfólios com rebalanceamento semanal e restrição de posição máxima, o melhor desempenho foi do portfólio tangente com estratégia de probabilidade inferida do regime que possui maior razão de Sharpe (Tabela 2) seguido do portfólio tangente com mudança de regime. Os portfólios com razão de Sharpe com diferença estatisticamente significativa, pelo menos ao nível de significância de 10% em relação razão de Sharpe do Ibovespa, foram o portfólio tangente com probabilidade inferida do regime e a carteira igualmente ponderada. Os demais portfólios tangente com estimativa não linear tiveram razão de Sharpe estatisticamente diferente do portfólio de mercado com nível de significância de 20%. O portfólio tangente baseado em estratégia de probabilidade de regime apresentou o maior retorno esperado e rendimento acumulado, em termos de razão de Sharpe seria a melhor escolha de portfólio de ativos arriscados.

O portfólio de variância mínima global no mesmo período é o quinto melhor em termos de razão de Sharpe. Enquanto o portfólio tangente teve uma melhora com as estimativas com mudança de regime, o portfólio de variância mínima desempenhou pior. O portfólio de variância mínima global depende diretamente apenas das estimativas de variância e covariâncias, por outro lado o portfólio tangente depende também de estimativas da média. As estimativas da média possuem comportamento dinâmico e adaptativo nos modelos com mudança de regime, sendo particularmente aperfeiçoadas e explicando o aprimoramento do portfólio tangente em relação ao uso de estimativas do estimador da média amostral.

A carteira de variância mínima possui o menor risco entre todos os portfólios comparados e Ibovespa. Apesar do maior risco dos portfólios tangente

com estratégia e estimativas com mudança de regime, possuem aumento de rentabilidade mais pronunciado resultando em maior razão de Sharpe.

O desempenho dos portfólios acompanha os resultados do Ibovespa. No ano 2012 e 2016-2019 o Ibovespa apresentou alta e os rendimentos dos portfólios foram melhores. Nos anos 2013 a 2015 o Ibovespa apresentou queda e os rendimentos foram piores.

Considerando apenas os anos de alta do Ibovespa, na subamostra 2012 e 2015-2019, o melhor desempenho pela razão de Sharpe foi do portfólio igualmente ponderado, que apresenta o maior retorno médio acompanhado do maior risco comparando todas as carteiras. Entre os portfólios baseados em otimização a maior razão de Sharpe é para o portfólio tangente com estratégia de probabilidade inferida do regime, seguido pelos demais portfólios tangente com mudança de regime. Para a otimização com momentos amostrais o portfólio de variância mínima supera o portfólio tangente, resultado recorrente na literatura. Porém quando consideramos estimativas com mudança de regime o portfólio tangente supera o portfólio de variância mínima.

Os investimentos em ativos de risco são muito prejudicados na queda do mercado financeiro, com o conjunto das ações tendo queda de preço torna-se complexo compor uma combinação de ações em uma carteira para realizar ganho. Refletindo o desempenho ruim do mercado financeiro e a alta taxa de juros, todos os portfólios apresentaram retorno médio abaixo da taxa de juros livre de risco na subamostra 2013-2015. Nesta situação a razão de Sharpe torna-se negativa e não é adequado o uso para ranquear portfólios.

No período de queda do Ibovespa, 2013 a 2015, pela análise de retorno penalizado pelo risco através da razão de informação em relação a zero, o melhor portfólio foi o portfólio tangente com mudança de regime seguido pelo portfólio tangente com mudança de regime com estimativa da variância esperada. O maior retorno médio foi do portfólio tangente com mudança de regime e o menor risco foi do portfólio tangente com valor muito próximo da carteira de variância mínima, ambos com estimativas amostrais. Neste período de queda do Ibovespa o maior rendimento acumulado foi do portfólio tangente com estimativas com mudança de regime.

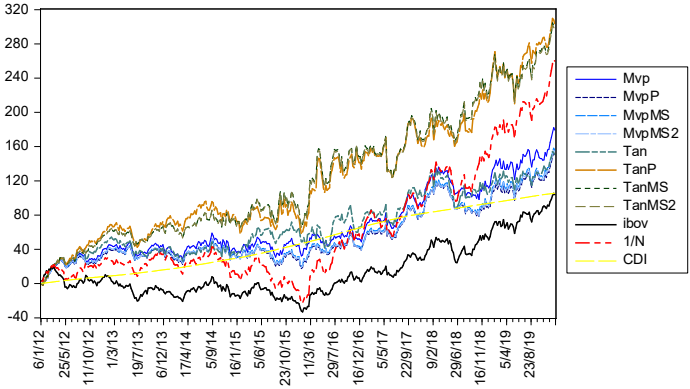
O portfólio igualmente ponderado teve bom desempenho de rendimento acumulado no período 2012-2019, porém superado pelos três tipos de portfólio tangente com mudança de regime. Quando o mercado esteve em alta na subamostra 2012 e 2016-2019 o portfólio igualmente ponderado teve o maior rendimento acumulado. Porém a diversificação ingênua tem maior exposição comparativamente aos portfólios otimizados quando o mercado cai, exibindo o segundo pior rendimento acumulado no período 2013-2015 entre todas as

Tabela 2
Estatísticas descritivas dos retornos líquidos (%) dos portfólios com rebalanceamento semanal e restrição de posição máxima

2012-2019	Mvp	MvpP	MvpMS	MvpMS2	Tan	TanP	TanMS	TanMS2	ibov	1/N
média	14.085	12.723	13.018	12.870	13.159	19.512	19.345	19266	10.977	18.430
sigma	16.492	16.595	16.687	16.691	18.823	21.079	21.065	21.073	20.875	22.790
SR	0.313	0.229	0.246	0.237	0.225	0.503***	0.495iv	0.491iv	0.099	0.417*
IR[zero]	0.854iv	0.767	0.780	0.771	0.699	0.926***	0.918***	0.914iv	0.526	0.809**
turnover	0.045	0.116	0.091	0.090	0.142	0.462	0.457	0.461		0.038
rend. acum.	179.18	149.80	155.50	152.47	150.63	303.30	298.15	295.56	103.77	259.86
2012 e 2016-2019	Mvp	MvpP	MvpMS	MvpMS2	Tan	TanP	TanMS	TanMS2	ibov	1/N
média	21.316	20.622	20.916	20.907	18.265	28.362	26.340	26.373	23.028	34.899
sigma	16.426	16.515	16.641	16.632	20.371	21.682	21.705	21.704	20.240	23.320
SR	0.787	0.740	0.752	0.752	0.484	0.921	0.827	0.828	0.723	1.136*
IR[zero]	1298	1249	1257	1257	0.897	1308	1214	1215	1138	1.496*
turnover	0.044	0.112	0.089	0.089	0.149	0.456	0.439	0.441		0.039
rend. acum.	171.91	162.43	166.06	165.95	125.06	267.91	232.45	233.01	186.51	402.34
2013-2015	Mvp	MvpP	MvpMS	MvpMS2	Tan	TanP	TanMS	TanMS2	ibov	1/N
média	2.215	−0.242	0.052	−0.322	4.779	4.983	7.865	7.600	−8.805	−8.604
sigma	16.519	16.621	16.659	16.677	15.952	19.953	19.934	19.956	21.663	21.440
SR	−0.457	−0.602	−0.583	−0.605	−0.313iv	−0.240	−0.096iv	−0.109iv	−0.858	−0.857
IR[zero]	0.134	−0.015	0.003	−0.019	0.300***	0.250	0.395iv	0.381iv	−0.406	−0.401
turnover	0.045	0.123	0.094	0.093	0.129	0.471	0.488	0.493		0.038
rend. acum.	2.67	−4.81	−3.97	−5.07	11.36	9.62	19.76	18.78	−28.88	−28.35

Nota: (1) Mvp, portfólio de variância mínima; Tan, portfólio tangente; MvpP, portfólio de variância mínima global com estratégia de probabilidade do regime; MvpMS, portfólio de variância mínima global com estimativas com mudança de regime; MvpMS2, portfólio de variância mínima global com variância esperada condicional aos estados; TanP, portfólio tangente com estratégia de probabilidade do regime; TanMS, portfólio tangente com estimativas com mudança de regime; TanMS2, portfólio tangente utilizando a média e variância esperada condicional aos estados. (2) As estatísticas de média, desvio padrão (sigma), razão de Sharpe (Sharpe ratio, SR), razão de informação em relação a zero (information ratio, IR[zero]) estão anualizadas. (3) SR é a razão de Sharpe (Sharpe ratio); IR é a razão de informação (information ratio). (4) É feito teste de hipótese de igualdade da SR e IR dos portfólios em relação a SR e IR do Ibovespa, onde:* representa nível de significância de 1%; ** representa nível de significância de 5%; *** representa nível de significância de 10%; iv representa nível de significância de 20%. (5) As estatísticas de média e desvio padrão estão anualizadas e são sobre retornos expressos em percentual. Rend. acum. se refere a rendimento acumulado percentual no período analisado.

Figura 3
Rendimento líquido acumulado (%) dos portfólios com restrição de posição máxima e rebalanceamento semanal



Nota: Mvp, portfólio de variância mínima; Tan, portfólio tangente; MvpP, portfólio de variância mínima global com estratégia de probabilidade do regime; MvpMS, portfólio de variância mínima global com estimativas com mudança de regime; MvpMS2, portfólio de variância mínima global com variância esperada condicional aos estados; TanP, portfólio tangente com estratégia de probabilidade do regime; TanMS, portfólio tangente com estimativas com mudança de regime; TanMS2, portfólio tangente utilizando a média e variância esperada condicional aos estados. O rendimento líquido acumulado está expresso em termos percentuais.

carteiras comparadas, superior apenas ao índice Ibovespa.

Pela análise da Figura 3 podemos observar que nos anos de 2012 e 2019 o maior rendimento acumulado foi obtido com o portfólio tangente com estratégia de probabilidade inferida do regime e restrição de posição máxima, que para o período de 2012 a 2019 teve o rendimento acumulado líquido de 303,30% de ganho. Podemos destacar também que os portfólios tangente com estimativas com mudança de regime e variância esperada dos regimes apresentaram rendimento acumulado anual resiliente, que foi positivo em todos os anos (embora caia ao longo do ano, terminou o ano superando o valor inicial observado no início do ano para todos os 8 anos estudados).

A maior rentabilidade obtida com os portfólios tangente com a abordagem de mudança de regime é caracterizada com elevada rotatividade da carteira, com ajuste de posições frequentes acompanhando mudanças entre alta e baixas no mercado, apresentando turnover aproximadamente três vezes do valor para o portfólio tangente com estimativas amostrais (Tabela 2). No portfólio de variância mínima o turnover também aumentou ao adotar estimativas

com mudança de regime, porém permanecendo em magnitude menor do que o portfólio tangente com estimativas amostral e com mudança de regime.

O maior rendimento dos portfólios tangente com mudança de regime, seja com estimativas com mudança de regime ou probabilidades inferidas, ocorre para o período completo e nos anos de queda do Ibovespa. Os portfólios tangente com mudança de regime tiveram melhor desempenho em situações com maior incerteza: tanto a amostra completa 8 anos de análise, com diversas transições entre os períodos de alta e de baixa; seja no período de 2013 à 2015, quando tivemos queda do Ibovespa no acumulado anual em três anos consecutivos. Apesar da predominância do regime de alta ocorrem muitas transições para o regime de baixa, a análise de portfólios com mudança de regime melhorou a rentabilidade do portfólio tangente.

O melhor desempenho dos portfólios tangente com mudança de regime em rebalancemento semanal não se mantêm se retirarmos a restrição de desigualdade superior (Tabela 3, painel a), pois acaba ocorrendo excesso de exposição em apenas um ativo. No problema de otimização com frequência de rebalanceamento semanal e sem restrição de peso máximo o melhor desempenho se torna do portfólio igualmente ponderado. Contudo os portfólios tangente com a abordagem de mudança de regime apresentam o melhor desempenho entre as carteiras baseadas em otimização para todas as frequências de rebalanceamento e com ou sem restrição de posição máxima.

Alterando para rebalanceamento mensal (Tabela 3, painéis b e c) o portfólio tangente também deixa de apresentar melhor desempenho, sendo superado pelo portfólio igualmente ponderado. Este resultado é semelhante ao encontrado a Mendes et al. (2018) que encontra melhor desempenho para regras de ordens de compra e venda de investimento definidas a partir de modelos de mudança de regime em frequência semanal.

Os portfólios com rebalanceamento mensal também apresentaram melhor performance com restrição de alocação máxima, obtendo maior retorno e menor risco do que nos problemas de otimização sem limite de posição nas ações individuais da carteira.

O portfólio tangente com mudança de regime tem melhores resultados em frequência semanal e com restrição de posição máxima. Em menores frequências de rebalanceamento os portfolios com mudança de regime com dependência da média performaram melhor, direcionando as atualizações de estimativas de mudança do estado do mercado financeiro a ajustes de composição do portfólio. A restrição de posição máxima contribui para melhoria do resultado, corrigindo excesso de posição em um ativo frente a mudanças dos parâmetros no tempo.

Tabela 3
Estatísticas descritivas dos retornos líquidos (%) dos portfólios com rebalanceamento com variação da frequência de rebalancemaneto e restrições

2012-2019	Mvp	MvpMsP	MvpMS	MvpMS2	Tan	TanMsP	TanMS	TanMS2	ibov	1/N
(a) Rebalanceamento semanal, sem restrição de posição máxima										
média	11.553	10.025	10.373	10.235	9.638	14.497	14.512	14.406	10.977	18.430
sigma	16.663	16.859	16.914	16.897	21.484	24.719	23.707	23.728	20.875	22.790
SR	0.158	0.066	0.086	0.078	0.034	0.226	0.236	0.231	0.099	0.417*
turnover	0.044	0.127	0.098	0.097	0.162	0.535	0.548	0.552		0.038
RendAcum	127.13	100.24	105.81	103.58	80.37	152.50	157.94	155.64	103.77	259.86
(b) Rebalanceamento mensal e restrição de posição máxima										
média	13.858	12.833	12.807	12.676	11.552	16.670	16.170	16.161	10.899	19.170
sigma	15.476	15.710	15.816	15.833	16.851	19.492	19.076	19.085	20.022	24.565
SR	0.312	0.242	0.239	0.230	0.150	0.392	0.374	0.374	0.093	0.413**
turnover	0.100	0.178	0.141	0.141	0.281	0.680	0.636	0.639		0.085
RendAcum	174.55	152.35	151.54	148.88	124.45	224.32	213.76	213.49	103.77	264.82
(c) Rebalanceamento mensal, sem restrição de posição máxima										
média	11.209	10.032	10.145	10.033	10.253	14.296	13.095	13.091	10.899	19.170
sigma	15.691	15.839	15.962	15.953	20.112	26.230	24.866	24.877	20.022	24.565
SR	0.139	0.063	0.070	0.063	0.061	0.201	0.163	0.163	0.093	0.413iv
turnover	0.098	0.194	0.153	0.152	0.320	0.778	0.757	0.760		0.085
RendAcum	121.87	101.66	103.18	101.41	92.32	138.63	123.42	123.30	103.77	264.82

Nota: (1) Mvp, portfólio de variância mínima; Tan, portfólio tangente; MvpP, portfólio de variância mínima global com estratégia de probabilidade do regime; MvpMS, portfólio de variância mínima global com estimativas com mudança de regime; MvpMS2, portfólio de variância mínima global com variância esperada condicional aos estados; TanP, portfólio tangente com estratégia de probabilidade do regime; TanMS, portfólio tangente com estimativas com mudança de regime; TanMS2, portfólio tangente utilizando a média e variância esperada condicional aos estados. (2) As estatísticas de média, desvio padrão (sigma) e razão de Sharpe (Sharpe ratio, SR), estão anualizadas. (3) É feito teste de hipótese de igualdade da SR dos portfólios em relação a SR do Ibovespa, onde:* representa nível de significância de 1%; ** representa nível de significância de 5%; *** representa nível de significância de 10%; iv representa nível de significância de 20%. (4) As estatísticas de média e desvio padrão estão anualizadas e são sobre retornos expressos em percentual. Rend. Acum. se refere a rendimento acumulado percentual no período analisado.

As carteiras com a variância esperada condicional aos estados performaram em todos os casos muito semelhantes ao emprego da estimativa da variância com mudança de regime, tanto para a frequência mensal ou semanal e o portfólio de variância mínima ou tangente.

As estimativas com mudança de regime tornaram os portfólios com maior magnitude de alteração das posições sobre as ações na carteira ao longo do tempo, em determinados períodos ficam mais concentrados e em outros mais diversificados em comparação as carteiras com estimativas amostrais. Os portfólios com probabilidades inferidas apresentam modificações mais pronunciadas em sua composição ao longo do tempo.

Embora a maior alteração da composição das carteiras ao longo do tempo possa implicar em maior custo de transação que reduziria o rendimento líquido, grandes operadores no mercado conseguem atuar com baixos custos de transação. Desta forma, os portfólios analisados são uma opção interessante principalmente para os grandes players no mercado.

6. Considerações finais

O mercado financeiro transita ao longo do tempo por períodos de alta e baixa dos preços das ações, comportamento que pode ser descrito pelos modelos de série de tempo com mudança de regime. O objetivo do artigo foi avaliar o efeito de estimativas com mudança de regime e de estratégias baseadas em probabilidades inferidas sobre o desempenho dos portfólios.

Duas estratégias para o uso das estimativas do risco e retorno dos ativos foram postuladas a partir dos modelos com mudança de regime. Uma plugava nos portfólios de variância mínima global e no portfólio tangente as estimativas com mudança de regime ou o valor esperado dos momentos ponderados pelas probabilidades previstas dos regimes. A outra considerava a probabilidade prevista do regime e inferia que o estado do mercado financeiro estava em alta quando a probabilidade prevista do regime fosse maior ou igual que 0,50 e em baixa caso contrário, usando na otimização do portfólio apenas os momentos associados ao estado previsto.

O mercado financeiro brasileiro durante o período se recuperou de queda, identificamos maior número de observações no estado de baixa em relação ao as observações no estado de alta. Este resultado é corroborado pela forte queda do Ibovespa durante o período 2009-2016, com recuperação apenas no final da série coincidindo com o estado de alta inferido com maior frequência para esta parte da amostra.

Os resultados encontrados indicaram que o portfólio tangente foi aprimo-

rado com uso de estimativas com mudança de regime. O portfólio de variância mínima global foi pouco afetado pelo uso das estimativas com mudança de regime. Isto pode ser explicado porque o portfólio tangente depende diretamente de estimativas dos retornos esperados, estimativas que são difíceis de serem obtidas principalmente com mudanças de comportamento dos retornos das ações entre os estados de alta e baixa do mercado financeiro.

Nos momentos de maior incerteza, com grande instabilidade do mercado de ações para maior horizonte de investimento e queda do mercado, os portfólio tangente propostos com estimativas com mudança de regime realizaram o maior rendimento. Também se destacaram comparativamente entre todos os portfólios otimizados, em especial os portfólios tangente com estimativas com mudança de regime superaram as carteiras de variância mínima - reverteram a performance superior recorrente na literatura da carteira de variância mínima em relação ao portfólio tangente com estimativas amostrais.

Embora a carteira igualmente ponderada tenha o melhor desempenho selecionando apenas os anos de alta, nos anos de baixa o seu resultado foi o pior entre todos os portfólios comparados. O portfólio tangente com estimativas com mudança de regime teve o resultado mais consistente a longo prazo em condições de incerteza e alterações entre alta e baixa do mercado ao longo do tempo.

Referências

Almeida, N. M. C. G. d. e Valls Pereira, P. L. (2000). *Modelos de mudança de regime: Uma aplicação em finanças empíricas*, Master's thesis, FEA/USP.
URL: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/12/12138/tde-29012002-230353/pt-br.php

Buckley, I., Saunders, D. e Seco, L. (2008). Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, *European Journal of Operational Research* **185**(3): 1434–1461.
URL: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.03.080

Chan, L. K. C., Karceski, J. e Lakonishok, J. (2015). On portfolio optimization: Forecasting covariances and choosing the risk model, *Review of Financial Studies* **12**(5): 937–974.
URL: https://doi.org/10.1093/rfs/12.5.937

Chang, T.-P. e Hu, J.-L. (2009). Incorporating a leading indicator into the trading rule through the Markov-switching vector autoregression model, *Applied Economics Letters* **16**(12): 1255–1259.
URL: https://doi.org/10.1080/13504850701367254

Clarke, R. G. e de Silva, H. (1998). State-dependent asset allocation, *Journal of Portfolio Management* **24**(2).
URL: http://doi.org/10.3905/jpm.24.2.57

Clarke, R. G., de Silva, H. e Thorley, S. (2006). Minimum-variance portfolios in the U.S. equity market, *Journal of Portfolio Management* **33**(1): 10–24.
URL: https://doi.org/10.3905/jpm.2006.661366

da Silva Filho, O. C., Ziegelmann, F. A. e Dueker, M. J. (2012). Modeling dependence dynamics through copulas with regime switching, *Insurance: Mathematics and Economics* **50**(3): 346–356.
URL: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.01.001

DeMiguel, V., Garlappi, L. e Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?, *Review of Financial Studies* **22**(5): 1915–1953.
URL: https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075

DeMiguel, V. e Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation, *Operations Research* **57**(3).
URL: https://doi.org/10.1287/opre.1080.0566

Franses, P. H. e Dijk, D. v. (2000). *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press.
URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511754067

Frühwirth-Schnatter, S. (2006). *Finite Mixture and Markov Switching Models*, Springer Series in Statistics, 1 ed., Springer, New York, NY.
URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-35768-3

Haas, M., Mittnik, S. e Paolella, M. S. (2004). A new approach to Markov-switching GARCH models, *Journal of Financial Econometrics* **2**(4): 493–530.
URL: https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbh020

Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica* **57**(2): 357–384.
URL: https://doi.org/10.2307/1912559

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

Hamilton, J. D. e Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime, *Journal of Econometrics* **64**(1): 307–333.
URL: https://doi.org/10.1016/0304-4076(94)90067-1

Jagannathan, R. e Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps, *Journal of Finance* **58**(4): 1651–1683.
URL: https://doi.org/10.1111/1540-6261.00580

Kim, C.-J. e Nelson, C. R. (2017). *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, The MIT Press.
URL: https://doi.org/10.7551/mitpress/6444.001.0001

Kirby, C. e Ostdiek, B. (2012). It's all in the timing: Simple active portfolio strategies that outperform naïve diversification, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **47**(2): 437–467.
URL: https://doi.org/10.1017/S0022109012000117

Klaassen, F. (2002). Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH, *Empirical Economics* **27**(2): 363–394.
URL: https://doi.org/10.1007/s001810100100

Krolzig, H.-M. (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1 ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-51684-9

Ledoit, O. e Wolf, M. (2004). Honey, i shrunk the sample covariance matrix, *Journal of Portfolio Management* **30**(4): 110–119.
URL: https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110

Ledoit, O. e Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio, *Journal of Empirical Finance* **15**(5): 850–859.
URL: https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2008.03.002

Mendes, F. H. d. P. e. S., Caldeira, J. F. e Moura, G. V. (2018). Evidence of bull and bear markets in the bovespa index: An application of Markovian regime-switching models with duration dependence, *Brazilian Review of Econometrics* **38**(1).
URL: https://doi.org/10.12660/bre.v99n992016.56135

Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal?, *Financial Analysts Journal* **45**(1): 31–42.
URL: https://doi.org/10.2469/faj.v45.n1.31

Michaud, R. O. e Michaud, R. O. (2008). *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, 2 ed., Oxford University Press.

Oliveira, A. B. e Valls Pereira, P. L. (2018). Asset allocation with Markovian regime switching: Efficient frontier and tangent portfolio with regime switching, *Brazilian Review of Econometrics* **38**(1).
URL: https://doi.org/10.12660/bre.v38n12018.66264

Rubesam, A. e Beltrame, A. L. (2013). Carteiras de variância mínima no Brasil, *Revista Brasileira de Finanças* **11**(1).
URL: https://doi.org/10.12660/rbfin.v11n1.2013.5830

Santos, A. A. P. e Tessari, C. (2012). Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro, *Revista Brasileira de Finanças* **10**(3).
URL: https://doi.org/10.12660/rbfin.v10n3.2012.3865

Scherer, B. (2011). A note on the returns from minimum variance investing, *Journal of Empirical Finance* **18**(4): 652–660.
URL: https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2011.06.001

Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis, *Management Science* **9**(2): 277–293.
URL: https://doi.org/10.1287/mnsc.9.2.277

Thomé Neto, C., Leal, R. P. C. e Almeida, V. d. S. (2011). Um índice de mínima variância de ações brasileiras, *Economia Aplicada* **15**(4).
URL: https://doi.org/10.1590/S1413-80502011000400002

Tsay, R. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3 ed., John Wiley & Sons.
URL: https://doi.org/10.1002/9780470644560