

Qual é a taxa de retirada sustentável para o Brasil?

What is the sustainable withdraw rate for Brazil?

Lucas Oliveira Pereira[†]

Marcelo S. Perlin[‡]

Resumo O consistente aumento da longevidade e a diminuição da natalidade da população brasileira tem agravado a solvência financeira de fundos previdenciários, ameaçando a aposentadoria de grande maioria da população. Este trabalho se propõe, a partir da metodologia de ALM (Asset Liability Management) e programação estocástica, uma adaptação do modelo de *Trinity* (Cooley et al., 1998) para o mercado brasileiro. Este propõe o uso de um *portfolio* de investimentos pessoais como fonte de recursos na aposentadoria. O estudo inova com o uso de modelos econométricos e simulação para contornar o problema típico de baixa disponibilidade de dados para ativos financeiros locais. Os resultados mostram que uma taxa de retirada de 5% é sustentável e relativamente segura para saques anuais em uma carteira composta majoritariamente por ativos de renda fixa.

Palavras-chave: Aposentadoria; ALM; Investimentos.

JEL: G11, G51.

Abstract The consistent increase in longevity and the decrease in birth rates in the Brazilian population have exacerbated the financial solvency of social security funds, threatening the retirement of a significant portion of the population. This study proposes an adaptation of the Trinity (Cooley et al., 1998) model for the Brazilian market, based on the ALM (Asset Liability Management) methodology and stochastic programming. It suggests using a personal investment portfolio as a source of funds during retirement. The study innovates by employing econometric models and simulation to address the typical problem of low data availability for local financial assets. The results indicate that a 5% withdrawal rate is sustainable and relatively safe for annual withdrawals from a portfolio composed primarily of fixed-income assets.

Keywords: Retirement; ALM; Investments; Withdraw rate.

JEL Code: G11, G51.

1. Introdução

Pensões por envelhecimento foram introduzidas pela primeira vez pela Alemanha em 1889, segundo Feldstein e Liebman (2002) que fizeram uma recapitulação histórica dos sistemas previdenciários. Estes foram popularizados e existem em praticamente todas as civilizações modernas. Demonstra

Submitted on March 8, 2023. Revised on July 14, 2023. Accepted on July 16, 2023. Published online in September, 2023. Editor in charge: Marcelo Fernandes.

[†]Warren Brasil, Brazil: lucasdeoliveirapereira@hotmail.com

[‡]EA/UFRGS, Brazil: marcelo.perlin@ufrgs.br

ainda, que os diferentes sistemas previdenciários são motivados pela necessidade de proteção da população quando a mesma está impedida, seja por idade avançada ou saúde, de obter recursos financeiros de forma ativa. Entretanto, essa proteção depende de uma troca, dado que os benefícios são gerados através de taxas impostas à população economicamente ativa.

Os sistemas previdenciários têm sofrido em todos os países devido às mudanças demográficas constantes. Localmente, conforme dados do [Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística \(2019\)](#), a pirâmide etária do Brasil continua com a tendência de inversão, colocando sob pressão a solvência financeira das previdências públicas. [Barreto de Oliveira e Beltrão \(2015\)](#) demonstram que a razão de contribuintes por beneficiários da população brasileira está em constante queda desde 1939. Em 1999, a razão era de 1,7 contribuintes/beneficiários. Segundo informações do [Governo Federal - Ministério do Trabalho e Previdência Social \(2022\)](#) essa razão em 2020 foi de 1,45 e em 2022 foi de 1,37. Pelas perspectivas de [Barreto de Oliveira e Beltrão \(2015\)](#), deve-se chegar à razão de 1:1 até 2030. Portanto, tem-se cada vez menos contribuintes ativos para pagar as pensões da população aposentada. Adicionalmente, os autores demonstram que a taxa cobrada de contribuição tem aumentado constantemente sobre os trabalhadores ativos durante as últimas décadas. Essa realidade justifica a importância de estudos sobre como montar portfólios que consigam complementar ou ser a principal fonte de subsistência após a aposentadoria.

Um dos estudos pioneiros sobre investimento e aposentadoria é o trabalho de referência de [Cooley et al. \(1998\)](#), também conhecido como *Estudo de Trinity (Trinity Study)*. Neste estudo, os pesquisadores analisaram dados históricos do mercado financeiro dos Estados Unidos da América para determinar a taxa de retirada sustentável ao longo de horizontes de até 25 anos. Os resultados deste estudo têm servido como base para a popular regra dos 4%, que sugere um saque anual de 4% do valor do portfólio como uma estratégia historicamente segura para uma aposentadoria de 25 anos.

O problema em extrapolar os resultados do estudo de Trinity, incluindo a regra dos 4%, para outros países é que os resultados do trabalho são condicionados a dinâmica histórica do mercado de ações americano, o qual é um dos mais estáveis internacionalmente. Claramente, diferentes volatilidades e rendimentos reais históricos irá resultar em diferentes taxas sustentáveis de retirada ([Scott et al., 2009](#)). Uma taxa de retirada baseada no mercado americano é, portanto, equivocada e perigosa, quando o investimento para a aposentadoria é local. Este erro pode resultar em surpresas bastante desagradáveis para recém-aposentados, podendo exigir a busca de fontes alternativas de renda justamente quando o indivíduo está mais fragilizado profissionalmente.

Isto posto, o objetivo geral deste estudo é adaptar o trabalho de [Cooley et al. \(2011\)](#) para o mercado Brasileiro e, assim, calcular as taxas locais de retiradas sustentáveis. O problema tratado consiste na otimização de ativos e passivos das pessoas físicas, com o intuito de maximizar as rentabilidades, por meio de investimentos em renda fixa e renda variável. Portanto, será definido o quanto o brasileiro pode sacar anualmente de seu portfólio sem a deterioração do mesmo, garantindo assim, a sua aposentadoria.

O trabalho contribui para a literatura de diferentes formas. Primeiro, o estudo é pioneiro no cálculo de uma taxa de retirada sustentável para aposentadoria no mercado brasileiro. Segundo, o trabalho contribui com a apresentação de uma metodologia baseada em simulação via modelos do tipo DCC-GARCH ([Engle, 2002](#)) para contornar o problema do deficit de dados históricos. O método desenvolvido pode ser facilmente aplicado à diferentes países que tenham os mesmos problemas de falta de dados históricos para as simulações de ativos financeiros.

Além disso, o estudo também desempenha um papel significativo na prática dos mercados financeiros, pois pode incentivar investidores a entrar nos mercados de renda fixa e renda variável, fornecendo ideias sobre alternativas de planejamento de aposentadoria, especialmente no que diz respeito à gestão de portfólios pessoais na aposentadoria. Considerando as deficiências do atual Regime Geral de Previdência Social, há uma motivação crescente para explorar soluções alternativas. Os resultados deste estudo têm como objetivo fornecer informações sobre as taxas sustentáveis de retirada que sejam realistas em relação à dinâmica local do mercado financeiro brasileiro, com o objetivo de evitar surpresas desagradáveis no futuro para a população em geral.

2. Referencial teórico

2.1 O sistema previdenciário brasileiro

Conforme [Costanzi et al. \(2018\)](#), os modelos de financiamento previdenciários se dividem em sistemas de repartição simples, sistemas de capitalização, ou ainda uma combinação entre os dois sistemas. O primeiro é geralmente operado por governos onde os trabalhadores ativos contribuem para o pagamento dos aposentados, existindo uma solidariedade entre gerações. Esse modelo tem-se demonstrado bastante desafiador, já que em caso de deficit desta relação a diferença do pagamento recai sobre a arrecadação tributária geral. O sistema de capitalização é composto por uma poupança que pertence ao trabalhador durante o período laboral. Esses valores acumulados são geridos por meio de uma gestão "semi-pública", dado que são geridos por ins-

tituições financeiras autorizadas pelo estado, sendo o Chile o maior exemplo desse modelo na América Latina (Pinheiro, 2007).

Segundo dados da [Organização Mundial da Saúde \(2015\)](#), a população mundial vem envelhecendo rapidamente em consequência da queda da taxa de fecundidade e elevação da expectativa de vida, salvo poucas exceções. Desde o início da transição demográfica do Brasil, que consta a partir da década de 1960, a taxa de fecundidade brasileira declinou de 6 para 1,78 filhos por mulher. Uma redução de mais de 70% na taxa de fecundidade, uma das taxas de queda mais aceleradas da América Latina. De acordo com as projeções realizadas por [Bonifácio e Guimarães \(2021\)](#), espera-se que a população brasileira diminua ao longo do tempo, chegando a ser menor em 2100 em comparação com o tamanho registrado em 2010. Essas projeções também revelam mudanças significativas no perfil demográfico do país. A proporção da população com 65 anos ou mais, que atualmente é de 9,8%, está prevista a atingir 21,9% da população em 2050 e 29,5% em 2100. O aumento da longevidade, combinado com a redução da taxa de fecundidade, cria desafios significativos para a sustentabilidade dos programas de seguridade social.

Passando por diversas alterações desde sua promulgação da Constituição em 1988, o Regime de Previdência Social no Brasil sofreu sua última grande alteração pela Emenda à constituição N°103 em 2019 ([Brasil, 2019](#)). Nesta última atualização ficou disposto as novas idades mínimas de aposentadoria. Após o período de transição, a idade mínima de aposentadoria para mulher passa a ser 62 anos, para os homens a idade mínima passa a ser 65 anos, além da exigência de contribuir ao fundo por 15 anos e 20 anos, respectivamente. O valor do benefício mínimo é de um salário-mínimo (R\$ 1320,00, conforme a Medida Provisória n° 1.172 da República (2023)) e o valor máximo é de R\$7.507,49 conforme disposto na Emenda N°103([Brasil, 2019](#)).

Para efeitos de comparação, a cesta básica no Brasil, segundo o [Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos \(2022\)](#) (Di-eese) que pesquisa os preços de varejo em 17 cidades brasileiras, foi de R\$669,03, ou 55,20% do salário mínimo (piso da aposentadoria). Portanto, somente para alimentação, é necessária a complementação da aposentadoria, dado que existem diversos outros gastos necessários além da alimentação.

Dado este cenário, a aposentadoria de uma grande parcela da população demanda a execução de alternativas de investimento. A gestão de um portfólio de investimento individual na aposentadoria torna-se, portanto, uma alternativa para garantir a uma aposentadoria segura. Desse modo, o foco deste trabalho será a adaptação do estudo de [Cooley et al. \(2011\)](#) para o determinar a taxa de retirada sustentável no mercado brasileiro, servindo como um complemento ou alternativa à aposentadoria tradicional.

2.2 ALM - *Asset Liability Modelling*

A gestão de carteiras com retiradas programadas é reconhecida na literatura como ALM (*Asset and Liability Management*) e surgiu da necessidade de gestão de riscos bancários de liquidez e solvência nos Estados Unidos, sendo [Chambers e Charnes \(1961\)](#) os pioneiros nesta discussão. Todavia, o tema se desenvolveu para os demais tipos de riscos e para vários campos da economia. Nos anos setenta, surgiram os primeiros modelos estocásticos. Esses modelos foram originários do modelo seminal de [Markowitz \(1952\)](#), conhecida como a teoria moderna de portfólio.

Para [Zenios e Ziemba \(2007\)](#), investidores institucionais e pessoas físicas enfrentam o mesmo problema de gerenciar seus ativos de forma a atingir determinados objetivos, levando em consideração suas responsabilidades. Atualmente, grande parte da literatura de ALM está voltada para fundos de pensão ([Dupačová e Polívka, 2009](#); [Josa-Fombellida e Rincón-Zapatero, 2010](#); [Duarte et al., 2017](#)). Entretanto, o problema é similar para as diversas aplicações. Um trabalho inicial nesta área começou com [Mulvey e Vladimirov \(1992\)](#) e, posteriormente, com [Zenios e Ziemba \(2007\)](#), demonstrando demais aplicações do ALM.

Para [Dempster e Medova \(2011\)](#), o ALM para indivíduos demonstra algumas limitações que não são consideradas por planejadores financeiros, até pela limitação da discussão ao investidor individual. O ALM reside, para qualquer aplicação, na alocação de uma certa quantidade de riqueza (aportes e patrimônio) em um número de ativos financeiros $1, \dots, n$, a fim de cobrir obrigações futuras. O modelo assume a forma de um modelo estocástico intertemporal de alocação devido à aleatoriedade dos preços dos ativos e da natureza da dependência das decisões de investimento.

[Han e Hung \(2017\)](#) estudaram a gestão de ativos, definindo um benefício mínimo como mecanismo de proteção contra o risco da inflação ao longo do tempo, não apenas durante a fase de acumulação, mas também na fase de usufruto. Introduziu a função utiliza CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) para orientar o processo de decisão. Demonstra que, quanto mais se aproxima da data de aposentadoria, mais privilegia ativos com menor risco, ao contrário do que acontece no período inicial de acumulação. O estudo fornece assim a dinâmica de um portfólio ótimo consistente com o conhecimento empírico. [Guan e Liang \(2015\)](#) também partem de um benefício mínimo garantido. A complexidade está na consideração de uma taxa de juro estocástica e de que as contribuições dos participantes são incertas, assim como o retorno das ações tem características de volatilidade estocástica. Também modelam a mortalidade, devido às regras dos fundos de pensão. Para maximizar a utilidade esperada do fundo é utilizada programação estocástica. Com as simulações

de Monte Carlo, concluem que mesmo em cenários extremos conseguem soluções consensuais com a prática estabelecida.

O trabalho de [Aouni et al. \(2014\)](#) utiliza a programação por metas e defendem que é a abordagem mais adequada para gestão otimizada de portfólios. Pois, permite agregar múltiplos objetivos e permite, assim, determinar portfólios que minimizam os desvios entre o que consegue se obter e a meta a alcançar, sendo um processo relativamente fácil. Existindo dois objetivos conflitantes, o portfólio ótimo deve realizar um *trade-off* para alcançar um equilíbrio global entre risco e retorno.

[Hilli et al. \(2007\)](#) utilizam programação estocástica como sendo a abordagem eficiente para a gestão otimizada de ativos e passivos, já que consegue tratar a complexidade inerente à dinâmica e às restrições neste tipo de problemas. Após várias experimentações do modelo, para obter um portfólio ótimo em uma gestora sediada na Finlândia, concluíram que conseguem fornecer estratégias com resultados superiores aos que seriam obtidos apenas com a gestão tradicional dos ativos e passivos. Observaram que a política ótima investe mais em ações quando o nível de solvência do fundo é bom ou com menores restrições, ou só em títulos de dívidas no caso oposto, o que é apropriado para fundos de pensão.

Portanto, o ALM tem evoluído a partir da preocupação inicial com o risco da taxa de juros nos anos sessenta, direcionado principalmente a instituições financeiras como bancos e seguradoras. Diversos modelos, como os de [Bradley e Crane \(1972\)](#), [Carino et al. \(1994\)](#), [Kusy e Ziemba \(1986\)](#) e [Doumpos et al. \(2002\)](#), têm apresentado resultados e implementações bem-sucedidas utilizando programação estocástica. Além disso, [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) discute várias aplicações e soluções práticas de ALM em diversas áreas.

No entanto, como ressaltado por [Adam \(2008\)](#), a gestão de ALM deve incorporar uma consideração cuidadosa dos riscos de solvência dos ativos. No contexto específico deste trabalho, assim como no artigo de referência de [Cooley et al. \(2011\)](#), é essencial descartar qualquer cenário em que os portfólios não sobrevivem ao período proposto, ou seja, taxas de retiradas que tornem o portfólio deficitário antes do período planejado. A falha em atender a esse requisito resulta no fracasso do portfólio, com implicações significativas para a subsistência do indivíduo, muitas vezes representando sua única ou principal fonte de renda na aposentadoria.

Uma das aplicações do ALM no Brasil é demonstrada por [Pinheiro \(2007\)](#) por meio de fundos de pensões ligados a empresas públicas, como PREVI/BB (Banco do Brasil), PETROS (Petrobras) e ELETROS (Eletrobrás). Os fundos de pensões são responsáveis por prover recursos financeiros para cumprir as obrigações futuras das aposentadorias a serem concedidas. Para que esses

passivos possam ser cumpridos é necessário a gestão dos ativos e o acompanhamento do comportamento do passivo. Isso significa que as contribuições dos funcionários deverão ser investidas em diversas classes do mercado financeiro, sempre em linha com as expectativas de resgates futuros. Por meio do ALM, o gestor então define a diversificação da carteira de investimentos a fim de obter um portfólio ótimo. Portanto, o objetivo é a maximização do valor do patrimônio do fundo para garantir as futuras retiradas, ao mesmo tempo que monitora o comportamento do passivo.

2.3 Taxa de retirada na aposentadoria

O estudo de taxas de retiradas sustentáveis não é novidade. Primeiramente, Bierwirth (1994) analisou o impacto das taxas de retirada ajustadas à inflação em diversos portfólios de ações, títulos públicos americanos de curto e longo prazo e concluiu que historicamente taxas de 2,66% a 5,19% são perfeitamente sustentáveis quando diretamente relacionadas à alocação de ações. Destacando a importância das ações para o sucesso dos portfólios de aposentadoria.

Em seguida, Bengen (1996) argumentou que, uma vez que os retornos reais dos ativos e as taxas de inflação eram historicamente voláteis, planos de aposentadoria com base em suas médias não eram realistas. Embora um aposentado queira a taxa de retirada mais alta possível, ele também quer sustentar seus gastos ao longo de seus anos de aposentadoria. Com isso, Bengen (1996) defendeu que todos os planos recomendados sejam sustentáveis historicamente. Assim, utilizando uma mistura de 50% e 75% ações concluiu que não se deve ter uma taxa de retirada maior que 4%. Aposentadorias mais longas exigem taxas de retiradas menores, enquanto aposentadorias mais curtas permitem taxas de retiradas mais altas. Ainda concluiu que, portfólios de ações que contêm entre 30% a 40% em *small caps* aumentavam a taxa de sucesso dos portfólios, porém a substituição desse peso por títulos americanos de longo prazo reduz a taxa de sucesso dos portfólios. Em seu artigo original, Bengen (1996) não tinha nível de confiança das suas análises, apenas considerava segura porque nunca tinha falhado historicamente.

Foi então que Cooley et al. (1998) publicaram a série de artigos que ficou conhecido como “*Trinity Study*”, que apresentou inicialmente uma taxa de sucesso histórica de 95% para um horizonte de 30 anos, com uma taxa de retirada de 4% e uma alocação de 50% entre ações e títulos. Esta taxa de sucesso aumentou para 98% quando o percentual de ações foi aumentado para 75%. Os autores calcularam as taxas de sucesso das carteiras com base em retiradas periódicas constantes ajustadas continuamente pela inflação e rebalancearam a carteira de ações e títulos públicos para períodos específicos

ou até o momento que essa carteira fizesse sentido.

Os autores também testaram para períodos de rolagem tradicionais de retornos carteiras de ações de grandes empresas e títulos corporativos, de alto grau de investimento, bem como simulações de Monte Carlo para testar a sustentabilidade das taxas de retiradas ajustadas à inflação anual. A carteira inicial tinha o valor de \$1000 dólares e foram testadas taxas de 3% a 12%. Os períodos analisados foram 15, 20, 25 ou 30 anos de pagamento. A taxa de sucesso é quando resta pelo menos um dólar ao fim do período. Investimentos em ações estrangeiras não trouxeram efeitos significativos para o estudo. Inflação anual ajustada, pagamentos longos e baixas alocações para ações foram associados no estudo a taxas de sucesso de portfólio mais baixas.

[Pye \(2000\)](#) reafirma os resultados de [Cooley et al. \(1998\)](#) de que a taxa de 4% é sustentável. Para isso, simulou carteiras utilizando o método de Monte Carlo, cujos retornos reais foram distribuídos log-normalmente com um retorno médio de 8% e um desvio padrão de 18%. Assim, concluiu que sua modificação na regra de 4% seria segura para um horizonte de 35 anos. A estratégia de [Pye \(2000\)](#) acaba por aumentar a expectativa do portfólio fazendo o ajuste nas taxas de retiradas quando o mercado apresenta desempenho ruim.

[Scott et al. \(2009\)](#) criticam a regra dos 4% de [Cooley et al. \(1998\)](#) e suas diversas variantes por estimularem um método de gastos constantes e não voláteis utilizando um método arriscado e de estratégia volátil de investimento. Demonstram pelos seus resultados que ou o aposentado não usufrui do portfólio superavitário, gerando excedentes não gastos, ou tende a ter um portfólio deficitário, pagando um preço alto por seguir a regra dos 4%. Os autores criticam a metodologia recomendada por [Bengen \(1996\)](#) e oferecem outro modelo que demonstra que opções de venda de call e put reduzem os custos das taxas de retiradas.

[Finke et al. \(2013\)](#) destacam que a literatura tem seguido três caminhos para a construção dos estudos sobre regras de retirada. A primeira abordagem é baseada apenas em dados históricos para suportar a regra dos 4% ([Cooley et al., 1998](#)). A segunda abordagem utiliza simulações de Monte Carlo que são parametrizadas com os mesmos dados históricos citados, construindo 30 anos de sequências de retornos que seguem distribuição normal ou lognormal. A terceira abordagem também utiliza as simulações de Monte Carlo, todavia utiliza os dados atuais de mercado diversamente dos métodos anteriores por entender que dados passados não tem capacidade de sustentarem carteiras, dado que existe uma diferença principalmente no mercado de renda fixa que experimenta taxas historicamente baixas.

Seguindo a terceira abordagem, [Finke et al. \(2013\)](#) demonstra em seus resultados que o fracasso dos portfólios são mais altos do que o encontrado em

estudos anteriores. "O estudo demonstra que quando calibradas as suposições de Monte Carlo para as condições atuais de mercado em razão das retiradas, a regra dos 4% (Cooley et al., 2011) é qualquer coisa menos segura". O autor também mostra que a taxa segura para retirada no mercado americano não deveria passar de 2,5% para um período estimado de 30 anos, com taxa de insucesso de 10% e que poucos clientes estariam satisfeitos com essa baixa taxa de retirada pelo montante que economizaram.

Complementando o que Finke et al. (2013) defendem sobre a análise de dados atuais de mercado, Pfau e Kitces (2013) demonstram que se o investidor está em um início de *bullmarket* quando começa a realizar suas retiradas regulares, seu portfólio irá ser beneficiado e sofrerá pouco impacto negativo, mesmo que os outros 15 anos estejam em um ciclo de *bearmarket*. Entretanto, o oposto é totalmente prejudicial ao aposentado. Se os retornos forem ruins na primeira metade da aposentadoria, a carteira é tão estressada que é ideal não realizar retiradas e manter as ações.

Conforme mencionado por Waring e Siegel (2015), a anualização das retiradas durante a aposentadoria deve levar em consideração as necessidades financeiras anuais dos aposentados. Além disso, é crucial atribuir importância ao risco da carteira de investimentos que o investidor está disposto a assumir, levando em consideração que cada investidor possui níveis de risco aceitáveis individuais. Ainda defende que, se os ativos caírem 10% as retiradas tem que ser reduzidas em 10% e que isso fará com que as taxas de insucesso se reduzam no horizonte de tempo.

Forsyth e Vetzal (2019) realizaram a comparação da alocação fixa contra a alocação adaptativa (variável). Em sua metodologia para estimação da simulação utilizou a metodologia *Bootstrap*. Em seus resultados, encontrou valores levemente superior para os portfólios variáveis, que são portfólios que se adaptam com o passar do tempo, contra os portfólios fixos, que nunca sofrem alterações. Portanto, o aumento da complexidade para o gerenciamento dos ativos não adiciona vantagens nítidas ao investidor. Manter a alocação fixa é simplificar para que o investidor pessoa física consiga aplicar o estudo, sem se preocupar com alocações táticas de investimento.

Por sua vez, Scruggs (2019) sugere que exista uma espécie de alavanca, onde seja possível flexibilizar a taxa de retirada. O autor cita que existem três escolhas que o investidor ou planejador financeiro deve fazer. A primeira escolha seria a composição da carteira que encaixe com a expectativa de retirada do investidor. A segunda é se o investidor aceita retiradas menores para aumentar as chances de sucesso do portfólio. Por fim, se prefere manter taxas fixas em todo o período. Scruggs (2019) encontrou evidências de melhoras quando a taxa de retirada é limitada em 2% para a preservação do portfólio.

Também discute a flexibilização a fim de aumentar a taxa para idades mais avançadas como compensação aos poupadores pelo início da aposentadoria terem reduzido suas retiradas.

Van Appel e Maré (2022) trouxeram recentemente a discussão para o cenário africano. O foco foi determinar a taxa segura de retirada para os aposentados sul-africanos, ao mesmo tempo que sugere alocações dinâmicas para diminuir o risco de falência dos portfólios com estratégia de derivativos, assim como Bengen (1996) sugere. As taxas sul-africanas demonstram certa similaridade com os resultados encontrados no Brasil. Diferentemente dos resultados americanos, os portfólios com maior percentual de renda fixa apresentaram taxa de sucesso maior do que os portfólios com renda variável para o período de 30 anos.

Asebedo e Browning (2020) extrapolaram a discussão do ponto técnico para o ponto psicológico. Em estudo nos Estados Unidos, americanos com mais de 50 anos demonstraram que existem perfis que se adaptam melhor com as taxas de retirada. Os resultados do modelo de equações estruturais revelaram que aqueles com maior consciência, extroversão, afeto positivo e autoeficácia financeira têm menor taxa de retirada; enquanto aqueles com maior abertura, amabilidade, neuroticismo e afeto negativo têm maior taxa de retirada. No geral, demonstra que as atitudes de poupar antes da aposentadoria são refletidas posteriormente. Este modelo pode trazer informações importantes para planejadores financeiros maximizarem a satisfação dos seus clientes, conforme a característica deles.

Os estudos realizados até o momento agregaram afirmações importantes que, em sua maioria, foram confirmadas pelos resultados obtidos. Inicialmente Bengen (1994), demonstrou em seus primeiros resultados que a inclusão de investimentos em ações é essencial para o sucesso dos portfólios durante a aposentadoria. O autor sugeriu que carteiras compostas por pelo menos 50% de ações poderiam sustentar taxas de retiradas de até 5,66%. Posteriormente, Cooley et al. (2011) apresentaram resultados mais abrangentes, fornecendo uma visão mais completa da questão. Seus estudos mostraram uma variedade de resultados, indicando que, dependendo do período de retirada e da composição da carteira, pode ser possível realizar retiradas acima de 4%. Eles reforçam a importância de carteiras com alocação entre 50% a 75% em ações, pois essas combinações apresentaram melhores resultados.

Entretanto, Scott et al. (2009) alertam para que não seja indiscriminado o uso da regra dos 4% de Cooley et al. (1998), demonstrando seus riscos como a volatilidade das carteiras. Porém, carteiras com alta concentração em renda fixa, apesar da sua previsibilidade e baixa volatilidade, tem alta probabilidade de fracassar mesmo com taxas de retiradas baixas. Finke et al. (2013)

com suas últimas atualizações demonstraram preocupações com os títulos públicos abaixo da média histórica, o que pode influenciar os resultados dos estudos anteriores. Por fim, [Waring e Siegel \(2015\)](#) foram além e sugerem que as taxas de retirada sejam revistas anualmente conforme o desempenho dos portfólios. [Forsyth e Vetzal \(2019\)](#) não encontraram vantagens em aplicar estratégias que mude o portfólio conforme alterações de mercado.

3. Dados

A pesquisa se baseia em dados provenientes de diversas fontes confiáveis e relevantes, como a ANBIMA (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais), BCB (Banco Central do Brasil), IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), IPEA (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada) e o SUS (Sistema Único de Saúde).

Segundo dados do [Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada \(2022\)](#), o rendimento mensal dos brasileiros em 2019 foi de 2.641 reais, enquanto a expectativa de vida no Brasil estimada pelo [Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística \(2019\)](#) é de 76,6 anos. Com base na última reforma da Previdência, estabelecida pela Emenda Constitucional N°103, de 12 de Novembro de 2019 ([Brasil, 2019](#)), houve um aumento na idade mínima para a aposentadoria tanto no setor público quanto no privado. Agora, a idade mínima é de 65 anos para homens e 62 anos para mulheres. Considerando as idades mínimas para a aposentadoria após a última reforma da Previdência, podemos utilizar essas informações para estimar o passivo que será necessário arcar com as aposentadorias. No estudo em questão, são utilizados prazos variados, sendo o menor de 10 anos. Essa referência de 11,6 anos para homens e 14,6 anos para mulheres é importante para contextualizar os prazos propostos.

O Índice de preços no consumidor amplo (IPCA) é calculado mensalmente pelo IBGE e é o índice oficial para acompanhamento da inflação no Brasil. O IPCA é constituído por nove categorias, conforme sua metodologia, sendo elas: alimentação e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transportes, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação.

Para o ativo de renda fixa, utilizou-se uma composição igualmente ponderada dos índices IMA-S, que representa a evolução de uma carteira de títulos públicos remunerados pela Selic e o IMA-B, o qual é composto por uma carteira de títulos atrelados ao IPCA. As séries de inflação, dólar, IMA-S e IMA-B foram obtidas através de consultas ao [Sistema de Séries Temporais do BCB](#) com os seguintes códigos:

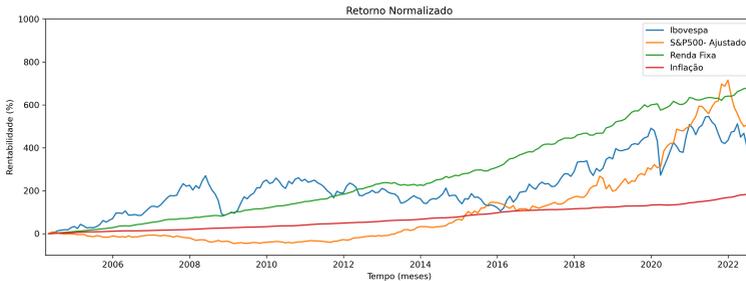
- Dólar - BCB/1

- IPCA - BCB/433
- IMA-S - BCB/12462
- IMA-B - BCB/12466

Para a composição da carteira de renda variável, foi utilizado o índice **Ibovespa**, o qual é o principal índice de referência de renda variável do Brasil.¹ Para ativos do exterior, foi utilizado o índice S&P500 em reais, que é composto pelas 500 maiores empresas dos Estados Unidos, ajustado em reais. Ambos índices são facilmente investíveis a baixo custo por pessoas físicas por meio de ETFs (*Exchange Traded Fund* que tenham a mesma composição dos índices. Os retornos dos índices Ibovespa e o S&P500 (em reais), utilizados para compor o portfólio, foram obtidos através de dados do **Yahoo Finance e Investing**.

O primeiro passo do estudo foi baixar as séries temporais de preços diários dos índices citados para a posterior manipulação dos dados. As séries temporais das cotações históricas dos índices tem periodicidade diária. Entretanto, como os dados de IPCA são mensais, todos os dados são utilizados no mesmo espaço temporal. Assim, todas estimações de modelos se darão a partir dos valores mensais. O período da amostra foi de 30/04/2004 a 30/08/2022, restrito pela disponibilidade conjunta dos dados.

Figura 1
Retorno normalizado dos índices financeiros



Na Figura 1 é possível verificar o retorno aritmético normalizado dos índices nos últimos 18 anos. Esta visualização demonstra o comportamento dos dados no período. Em comparação, ativos de renda fixa tendem a ter comportamento mais moderado, sem grandes oscilações de preços.

A Tabela 1 demonstra algumas características dos ativos utilizados. Os ativos de renda variável são os mais voláteis e foram os que tiveram os mai-

¹ Como nota metodológica, também utilizou-se o índice IBRA como alternativa, mas sem impacto significativo no resultado final do estudo.

Tabela 1**Tabela de volatilidade média, retorno total, retorno anual e máximo drawdown**

Carteiras	Volatilidade	Retorno Total	Retorno Anual	MDD
Ibovespa	23,38%	458,59%	9,83%	-54,9%
S&P500 em reais	16,56%	528,18%	10,54%	-53,4%
Renda Fixa	3,85%	686,79%	11,90%	-4,3%
IPCA	1,15%	180,32%	5,78%	-1,00%

ores *drawdowns* registrados no período. O máximo *drawdown* (MDD) mede a perda máxima que um ativo financeiro ou carteira já sofreu historicamente. É a diferença percentual do ponto máximo (valor máximo) e o ponto mínimo (valor mínimo). Ao investidor, é interessante evitar os *drawdowns* por meio da diversificação, ou pelo menos avaliar o risco que está sendo submetido. A Renda Fixa teve a menor volatilidade e o maior retorno anual, inclusive maior que o S&P500 em reais. Isso demonstra uma característica particular do mercado brasileiro onde, historicamente, a renda fixa entregou maior retorno com menor risco.

4. Metodologia

Um dos grandes obstáculos em estudar planos de investimento para o Brasil é a limitada disponibilidade de dados, o que impossibilita o uso da metodologia original do estudo de *Trinity* (Cooley et al., 1998). Apesar dos dados obtidos compreenderem 18 anos, o período de tempo é insuficiente para simular um processo de aposentadoria percorrendo mais de 30 anos, entre períodos de acumulação e uso do fundo financeiro.

A solução encontrada para o problema de falta de dados é basear-se em modelos de simulação. Assim, estima-se um modelo econométrico para os retornos dos índices financeiros para, depois, simular a evolução da série temporal quantos anos forem necessários. Aqui, dado que as séries financeiras não possuem variância constante e podem ter interligação entre suas volatilidades, optou-se pelo uso de um modelo do tipo GARCH Multivariado (DCC).

4.1 Modelos GARCH

O modelo Autoregressive Conditionally Heteroskedastic (ARCH) de Engle (1982) foi o primeiro artigo publicado a considerar um modelo paramétrico para volatilidade. O ARCH modela a volatilidade quadrática da variável

no tempo como uma média móvel dos retornos quadráticos passados. Assim, pode-se trabalhar com modelo estacionário de séries temporais para os retornos. O modelo ARMA é utilizado em conjunto para filtrar a autocorrelação da série, ou seja, captar a dependência dessa série com o seu passado.

O modelo ARCH pode ser representado pela seguinte equação:

$$R = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_2 R_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q R_{t-q}^2 \quad (1)$$

Bollerslev (1986) notou que era necessário estimar modelos ARCH com ordens muito altas para captar a variância condicional dos modelos. A partir disso, criou uma forma mais geral do modelo ARCH, conhecida atualmente como GARCH. A modelagem GARCH, portanto, complementa exatamente a dificuldade que o modelo ARCH apresenta. Os modelos da família GARCH, ARCH, utilizam a estimativa por máxima verossimilhança que é um método para estimação dos parâmetros. A equação 2 demonstra claramente a adição da volatilidade na estimação:

$$R = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i R_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2)$$

O Modelo eGARCH(p,q) desenvolvido por **Nelson (1991)** relaxa as restrições do modelo original, dado que os coeficientes podem ser negativos e permite que o modelo reaja de forma diferente a variações negativas e positivas dos preços. O modelo EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) é obtido através:

$$R = \sigma_t \varepsilon_t, \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (|R_{t-i}| + \delta_i R_{t-i} \sigma_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (3)$$

E, por fim, o modelo GJR-GARCH de **Glosten et al. (1993)** que também considera o impacto negativo maior em $t - 1$ do que impactos positivos. O modelo GJR-GARCH é obtido através:

$$R = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i N_{t-1} R^2 t - i + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma^2 t - j) \quad (4)$$

Andreou e Ghysels (2009) cita que há diversas formas para identificar os melhores modelos. Os critérios tradicionais de seleção de modelos são o critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiano (BIC), sendo o segundo o mais indicado para séries temporais longas ou curtas. O modelo que apresentar a menor estatística BIC é selecionado como melhor modelo. O BIC é dado pela equação 5:

$$BIC = -2 \log f(x_n | \theta) + p \log n, \quad (5)$$

em que $f(x_n|\theta)$ é o modelo escolhido, p é o número de parâmetros estimados e n é o número de observações da amostra.

O primeiro modelo de GARCH multivariado foi introduzido por [Bollerslev et al. \(1988\)](#) e foi chamado de VEC model. No VEC model, toda variância condicional e covariância é uma função de todas as variâncias condicionais defasadas. O modelo pode ser expresso pela equação 6:

$$vech(H_t) = c + \sum_{j=1}^q A_j vech(\varepsilon_{t-j}) + \sum_{j=1}^p B_j vech(H_{t-j}) \quad (6)$$

Entretanto, a modelagem necessita de um grande número de parâmetros na ordem de $(N+1) + \frac{1}{2}2N(N+1) + \frac{1}{4}N^2(N+1)^2(p+q)$, demandando uma grande potência computacional.

O modelo BEKK de [Bollerslev \(1990\)](#) criou uma nova definição com uma nova parametrização para matriz de covariância condicional H_t . É conhecida como uma versão restrita do modelo VEC. Ele define como positiva a covariância condicional, formulando de maneira que esta propriedade esteja implícita na estrutura do modelo. A equação 7 descreve o modelo:

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{kj} \varepsilon_{t-j} \varepsilon'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B' H_{t-j} B_{kj} \quad (7)$$

onde, A_{kj} , B_{kj} e C são matrizes de parâmetro $N \times N$ e C é uma matriz triangular inferior. O objetivo de decompor o termo em um produto de duas matrizes é garantir a semi-definição positiva de H_t . Toda vez que $K > 1$ é gerado, um problema de identificação é causado pelo motivo de não existir apenas uma parametrização que pode representar o modelo. O modelo BEKK, apesar de ter menos parametrizações que o primeiro modelo multivariado, ainda conta com um grande número de parâmetros. O número de parâmetros está na ordem de $(p+q)KN^2 + \frac{N(N+1)}{2}$.

Para [Dupačová e Polívka \(2009\)](#), os benefícios fornecidos por um modelo de estimação depende muito da qualidade e relevância que são gerados. Por esse motivo é importante utilizar um modelo que consiga simular retornos de forma adequada. Neste trabalho, optou-se pelo uso do modelo GARCH e sua generalização multivariada, o modelo Dynamic Conditional Correlation-GARCH (DCC-GARCH) proposto por [Engle \(2002\)](#). O objetivo é simular a volatilidade dos ativos financeiros para períodos futuros. Esse modelo considera distribuições de probabilidade assimétricas e leptocúrticas para os erros, o que reflete a presença de caudas nos movimentos dos retornos do mercado acionário. Essa abordagem de estimação é relevante, pois permite modelar a

correlação condicional com a variação do tempo, aspecto essencial na criação de portfólios.

Assim, como nos modelos univariados, a função densidade de probabilidade dos retornos pode ser obtida a partir dos erros. Dado que mais de um ativo é usado na simulação, devemos levar em consideração os erros correlacionados dos retornos entre os diferentes ativos [Dempster e Medova \(2011\)](#). [Engle \(2002\)](#) citam que as correlações são dados essenciais da gestão financeira. Os *hedges*, por exemplo, exigem estimativas da correlação entre os retornos dos ativos. Se as correlações e volatilidades estão mudando, então o *hedge* precisa ser ajustado conferindo valores mais recentes. Assim, uma previsão de correlações e volatilidades futuras são a base de qualquer fórmula de precificação.

O modelo DCC-GARCH tem a flexibilidade de um modelo univariado, mas é menos complexo que os demais GARCH multivariados. O número de parâmetros a serem estimados é na ordem de $(N + 1) \times (N + 4) / 2$, relativamente menor que o modelo BEKK. Quando N é grande, a estimação pode ser realizada por um procedimento de duas etapas que diminui a complexidade. O primeiro passo é simplesmente a estimação com método univariado, onde a variância condicional é estimada para cada variável. O próximo passo é exatamente estimar os parâmetros para a correlação condicional.

$$r_t = \mu_t + H_t^{1/2} \varepsilon_t = \ln(p_n/p_{n-1}) \quad (8)$$

O modelo DCC pode ser formulado conforme a matriz de correlação condicional, demonstrada na equação 9.

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (9)$$

onde H_t representa a matriz de covariância condicional e R_t a matriz de correlação condicional. D_t é visto como os modelos univariados de GARCH, mas não restrito a isso. O modelo pode, também, incluir funções de outras variáveis.

$$D_t = \text{diag} \sqrt{h_{i,t}} \quad (10)$$

Os elementos D_t são escritos como modelos univariados de GARCH:

$$h_{i,t} = \omega_i + \sum_{p=1}^p \alpha_{ip} r_{it-p}^2 + \sum_{q=1}^{q=1} \beta_{iq} h_{i,t-q} \quad (11)$$

onde r_t é o log-retorno do ativo no tempo t ; $h_{i,t}$ é a variância condicional no tempo t ; p, q indicam a ordem do modelo, e; ω, α, β são parâmetros do modelo.

A matriz de correlação condicional, R_t é dada pela equação 12:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (12)$$

A estacionaridade do modelo é garantida pelas restrições de $a, b > 0$ e $a + b < 0$. O modelo DCC utilizado neste trabalho é representado pela equação

$$Q_t = (1 - a - b)R + a\xi_{t-1}\xi'_{t-1} + bQ_{t-1} \quad (13)$$

As vantagens do DCC-GARCH para Celik (2012) é que o modelo estima os coeficientes de correlação dos resíduos padronizados, e por isso, explica diretamente a heterocedasticidade. É um modelo que detecta possíveis mudanças nas correlações condicionais ao longo do tempo. Outro ponto é que a volatilidade é ajustada, a correlação não tem viés de volatilidade.

Para Engle (2002) a principal vantagem dessa versão bivariada é que o modelo fornece um aproximação para uma variedade de processos de correlação com variação no tempo. Portanto, o modelo DCC é competitivo com as especificações GARCH multivariadas e superiores aos métodos de médias móveis. Podemos com isso verificar a correlação dos ativos utilizados neste estudo para construção do portfólio e assumir que os ativos terão comportamento conforme suas correlações.

Portanto, após as estimações e simulação será realizada a verificação da hipótese do modelo de Trinity para o Brasil. A gestão por meio de portfólios pré-determinados e a simulações de ativos de renda fixa, renda variável e inflação, Por meio de processos estocásticos os portfólios garantem um modelo de aposentadoria real e que pode ser aplicado sem grandes dificuldades pelos investidores individuais que estão perto da aposentadoria, por planejadores financeiros e por aqueles que desejam ter uma aposentadoria precoce.

4.2 Variáveis do estudo

A taxa de retirada representa o valor percentual sacado do saldo atualizado dos investimentos. Neste trabalho as retiradas são realizadas mensalmente por entender que este fluxo é o que se adapta melhor para grande parte dos aposentados. Nos resultados é apresentada a taxa anualizada por se tratar do padrão mais utilizado.

$$Saque_n = \text{Patrimônio}_{n0} \times \text{Taxa de Retirada} \times (1 + \text{Inflação Acumulada}_n),$$

onde $Saque_n$ é o valor do saque no período n ; Patrimônio_{n0} é o valor inicial do patrimônio no período $n = 0$; Taxa de Retirada é a porcentagem do patrimônio a ser retirada a cada período, e; $\text{Inflação Acumulada}_n$ é o fator de ajuste para a inflação acumulada até o período n .

A taxa de retirada de sucesso é quando o portfólio, ao final do período de saques, têm valor residual positivo. Isto indica que foi possível realizar retiradas durante todo o período. Então, a taxa de retirada sustentável é quando em todas as simulações é possível realizar retiradas sem que isso acarrete risco de falência.

$$\text{Taxa de Sucesso} = \frac{\text{Portfólios com Resíduo}}{\text{Simulações}}, \quad (14)$$

onde *Taxa de Sucesso* é a taxa de sucesso dos portfólios, indicando a proporção de portfólios com valor final maior que 0; *Portfólios com Resíduo* é o número de portfólios que apresentam valor maior que zero ao final do período proposto, e; *Simulações* é o número total de simulações realizadas para avaliar o desempenho dos portfólios.

Os prazos propostos para verificação das taxas de retiradas sustentáveis são de 10, 15, 20, 25 e 30 anos. Atualmente a diferença entre a expectativa de vida do brasileiro é de 76,6 anos, ou 11,6 ano superior a idade de aposentadoria da previdência brasileira. As taxas de retirada testadas vão de 0% (portfólio sem retirada) até 10% ao ano retiradas mensalmente. É realizado, para que não haja perda do poder de compras do aposentado, ajuste da retirada pelo Índice de preços no consumidor amplo (IPCA). Os resultados apresentados posteriormente são baseados em 5000 simulações de trajetórias de preços dos ativos.

Adicionalmente, foram testadas taxas de retiradas dinâmicas para os primeiros cinco anos de aposentadoria. As retiradas dinâmicas reduzem em metade a taxa de retirada sempre que o patrimônio no tempo t for inferior ao patrimônio $t - 1$ inicial. Isto serve para amenizar efeitos que o *bear market* pode ter nos primeiros anos de acumulação.

5. Resultados

5.1 Estimação dos parâmetros

A primeira etapa do estudo é a estimação de parâmetros dos modelos GARCH univariados para posterior uso dos mesmos na estimação do modelo DCC-GARCH. Para isso, utiliza-se o critério BIC para identificar os melhores modelos GARCH para cada uma das nossas séries temporais de retornos logarítmicos. Foram considerados três dos principais modelos univariados, através do uso do pacote rugarch de [Ghalanos \(2022\)](#) pelo software R. Os modelos univariados testados foram: o GARCH(p,q) original de [Bollerslev \(1986\)](#), o eGARCH(p,q) desenvolvido por [Nelson \(1991\)](#), e o GJR-GARCH de [Glosten et al. \(1993\)](#).

A Figura 2, adaptada de [Perlin et al. \(2020\)](#), mostra todos os testes e valores de BICs para cada estimação dos parâmetros através das séries temporais. Os pontos em asterisco demonstram o menor valor de BIC para cada série temporal. No total, 48 modelos foram estimadas para definir a melhor especificação econométrica dos retornos dos ativos. Os melhores modelos univariados de GARCH para cada série, conforme a Figura 2 foram:

- Ibovespa - ARMA(0,0)+eGARCH(1,1) com distribuição normal.
- S&P500 em reais - ARMA(0,0)+sGARCH(1,1) com distribuição normal.
- Renda Fixa - ARMA(0,0) + eGARCH(1,1) com distribuição t-student.
- Inflação - ARMA(1,0)+sGARCH (1,1) com distribuição normal.

A partir da obtenção de nossos parâmetros univariados, conseguimos então seguir para a estimação do modelo DCC-GARCH. Foram testadas diversas ordens e distribuições para identificar o melhor modelo. O modelo que apresentou menor BIC foi o modelo DCC-GARCH de ordem (1,1), com distribuição normal. A Tabela 2 demonstra os valores dos parâmetros estimados.

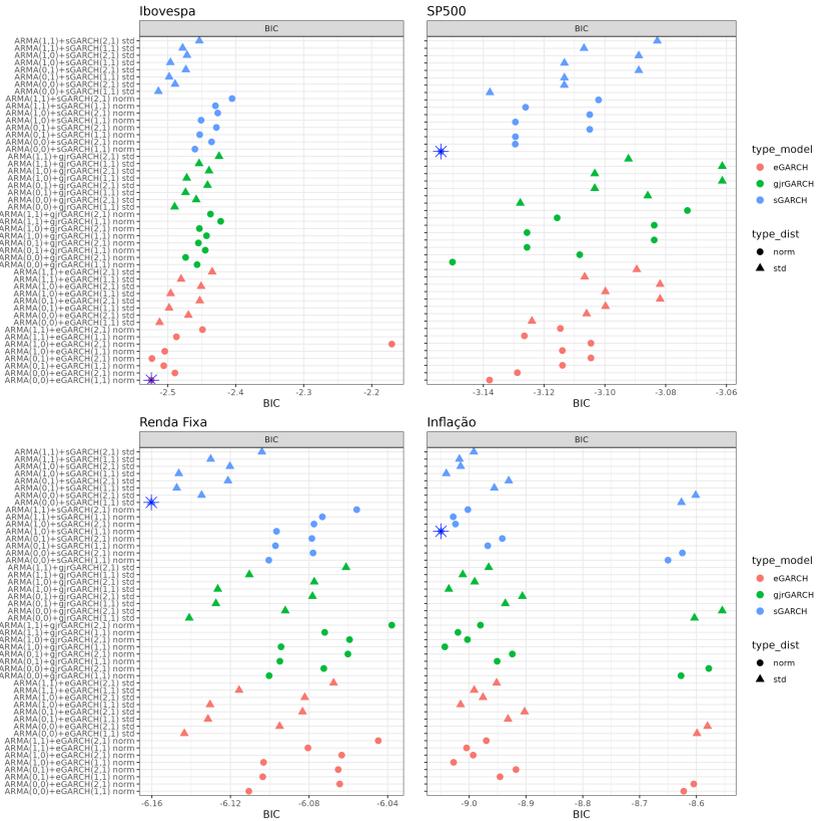
Os resultados da estimação do modelo DCC-GARCH são expostos na Tabela 2. A tabela está ordenada por cada classe de ativo. Os coeficientes, AR1 e MA1 correspondem aos valores da equação da média; os valores de Omega (ω), alpha1 (α) e beta1 (β) representam a variância condicional da primeira diferença entre os ativos, que são modelados por modelos GARCH-univariados já demonstrados. Os valores de DCC α e dcc β representa a avaliação conjunta da heterocedasticidade condicional dos ativos.

Os parâmetros da equação da média (μ ou μ) AR1 e MA1 são, respectivamente, coeficientes de intercepto, autoregressivo e de média móvel. Os valores de AR1 e MA1 (quando existente) são estatisticamente significativo ao nível de 5% a todas as séries, exceto a série do índice Ibovespa.

Os coeficientes β dos modelos GARCHs univariados são estatisticamente significativos para todas as séries ao nível de 5%, Entretanto os coeficientes α não apresentaram significância nas estimações. Por fim, é verificada a significância das estimativas do DCC-GARCH para o β ao nível de 5% e para α ao nível de α 10%. Ou seja, que a correlação condicional entre os dados de índice de renda variável brasileira, índice de renda variável americana em reais, índice de renda fixa remunerados pela Selic e o IPCA podem ser assumidos como altamente dinâmicos e que variam com o tempo.

Os valores de α e β para correlação dinâmica dos ativos, apresentam valores de $a + b$ menores que um, uma condição necessária para que a variância seja finita. Isso permite considerar em nossa simulação uma persistência da

Figura 2
GARCH univariado para cada série temporal



volatilidade na inter-relação dos entre as séries analisadas, com o modelo GARCH-DCC(1,1) medindo as correlações condicionais variantes.

5.2 Taxa de sucesso

A taxa de sucesso é obtida quando o portfólio no final do período planejado tem pelo menos valor residual positivo após a realização das diversas retiradas (saques) ao longo do tempo. Ou seja, se o valor terminal do portfólio é positivo, este obteve sucesso em seu objetivo de cumprir com o passivo. Em todos os testes foram consideradas retiradas mensais, com ajustes, também mensais, de inflação para manter o poder de compra do aposentado. Para simplificar, não foram adicionados os custos de transação e a tributação em

Tabela 2
Tabela de parâmetros estimados

	Estimativa	Erro padrão	Teste T	Pr(> t)
[IBOV].mu	0.007884	0.004371	1.8037e+00	0.071275
[IBOV].omega	0.000006	0.000003	2.0585e+00	0.039539
[IBOV].alpha1	0.000000	0.002354	0.0000e+00	1.000000
[IBOV].beta1	0.999000	0.000183	5.4614e+03	0.000000
[SP500Ajust].mu	0.008039	0.002999	2.6806e+00	0.007349
[SP500Ajust].omega	0.000004	0.000000	1.5970e+01	0.000000
[SP500Ajust].alpha1	0.000000	0.001062	3.6000e-05	0.999971
[SP500Ajust].beta1	0.999000	0.000047	2.1333e+04	0.000000
[Renda Fixa].mu	0.010593	0.001449	7.3094e+00	0.000000
[Renda Fixa].omega	-0.692516	0.356466	-1.9427e+00	0.052049
[Renda Fixa].alpha1	-0.069648	0.082586	-8.4335e-01	0.399033
[Renda Fixa].beta1	0.922142	0.038585	2.3899e+01	0.000000
[Renda Fixa].gamma1	0.257631	0.214513	1.2010e+00	0.229749
[Renda Fixa].shape	4.228040	1.919628	2.2025e+00	0.027628
[IPCA].mu	0.004557	0.000402	1.1340e+01	0.000000
[IPCA].ar1	0.616285	0.055235	1.1158e+01	0.000000
[IPCA].omega	0.000000	0.000001	4.1165e-02	0.967164
[IPCA].alpha1	0.055874	0.036542	1.5290e+00	0.126260
[IPCA].beta1	0.942758	0.038600	2.4424e+01	0.000000
[Joint]dcca1	0.019890	0.011092	1.7932e+00	0.072942
[Joint]dccb1	0.901271	0.029721	3.0324e+01	0.000000
Bayes Information Criteria:	-20.983			

todos os cenários.

É possível observar na Tabela 3 que os portfólios com menor volatilidade tem resultados melhores que portfólios com volatilidades elevadas. Isso corrobora com os resultados encontrados por [Pfaue e Kitces \(2013\)](#) que mostrou que portfólios em *bear market* no início da fase de resgates têm dificuldades de ter sucesso. Uma grande volatilidade e retornos negativos no início das retiradas pode ocasionar, então, em uma perda do poder futuro de acumulação, fazendo com que os resgates pesem cada vez mais nas retiradas do portfólio.

A taxa de retirada, percentual de consumo do ativo, ideal para o mercado brasileiro demonstra resultados similares aos encontrados por [Cooley et al. \(2011\)](#). Entretanto, destaca-se que no Brasil, portfólios compostos somente por renda fixa têm resultados superiores e contrastantes com os encontrados nos estudos originais, como demonstrado pela Figura 3. O Brasil tem uma anomalia, que vem se reduzindo com o tempo, que é o prêmio de risco po-

Tabela 3
Tabela de volatilidade média, retorno total médio das simulações, taxa de crescimento anual e máximo drawdown médio das carteiras

Carteiras	Volatilidade Média	Retorno Total Médio	Retorno Anual Médio	MDD Médio
100% RV	26,52%	1587,38%	9,89%	66,37%
75% RV 25% RF	20,53%	2038,90%	10,76%	50,03%
50% RV 50% RF	14,64%	2612,55%	11,63%	31,79%
25% RV 75% RF	9,05%	3348,17%	12,52%	15,49%
100% RF	4,86%	4295,60%	13,44%	6,61%
33% RV 33% RF 33% S&P500	11,44%	2238,64%	11,08%	22,64%
50% IMAS 25% RV 25% RF	9,07%	2645,82%	11,67%	15,45%
50% RF 50% S&P500	10,49%	2674,12%	11,71%	18,89%
IPCA	2,30%	425,27%	5,68%	7,39%

RF: Renda Fixa. RV: Renda Variável (Ibovespa).

sitivo para ativos livres de risco. Ou seja, investir em títulos soberanos no país gera retorno acima da inflação ao investidor. O investidor, por sua vez, sempre optará por minimizar a razão de risco e retorno de seu portfólio.

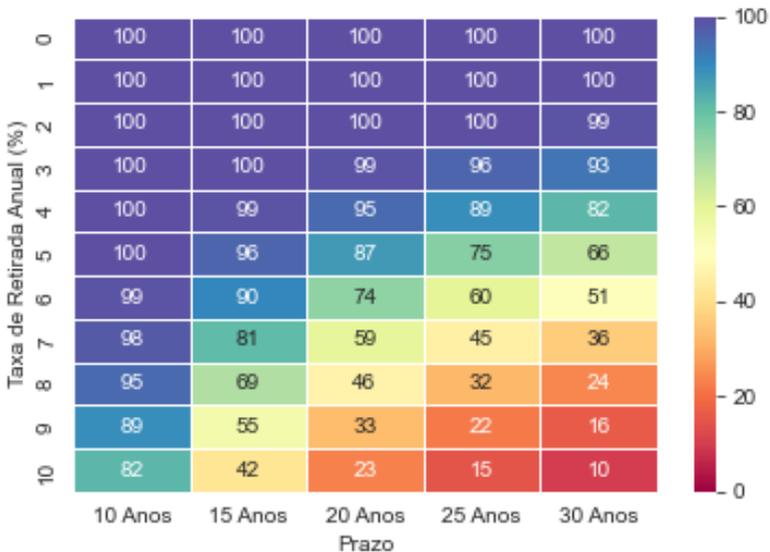
Figura 3
Carteira 100% renda fixa



Observando os resultados na Figura 3, nota-se que, para prazos menores de 10 anos, uma taxa de retirada de 10% apresenta 100% de sucesso. A medida que o prazo de aposentadoria aumenta, as taxas de retiradas sustentáveis diminuem. Portanto, planejamentos de aposentadorias mais longas necessitam de mais prudência, por parte do investidor, quanto a realização de resgates. Observa-se também que, uma taxa de retirada de 5% apresenta 100% de sucesso em todos os prazos.

Pensando em diversificação de carteiras e que essa anomalia dos títulos públicos brasileiros possa diminuir com o tempo, tendendo a assemelhar-se com países desenvolvidos. É necessário compor portfólios com outras classes de ativos.

Figura 4
Carteira 50% renda variável e 50% renda fixa

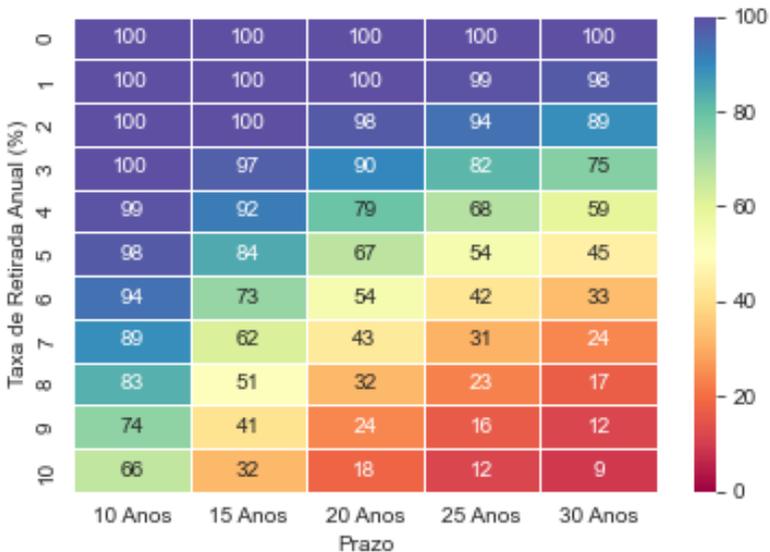


A Figura 4 demonstra uma carteira com 50% para renda fixa e 50% renda variável brasileira. Os resultados são bem inferiores aos resultados encontrados na 3, mostrando que a maior volatilidade do portfólio pela inclusão de ativos de renda variável impacta fortemente o resultado. As taxas de retiradas possíveis se limitam a 5% para portfólios de até 10 anos, e de 1% para o prazo de 30 anos. Os resultados são inferiores aos resultados originais de [Coley et al. \(2011\)](#), onde carteiras compostas por renda variável tem resultados melhores que carteiras compostas apenas por renda fixa. Aqui, conforme o

aumento de renda variável no portfólio, menor as taxas possíveis de retirada. Apesar da volatilidade menor e retorno anual maior que os citados por [Pye \(2000\)](#), não foi possível alcançar as taxas de retiradas maiores que 4% citados pelo autor.

Para uma das composições de portfólio, 75% de renda variável e 25% de renda fixa, com maiores taxas de retiradas com sucesso por [Cooley et al. \(2011\)](#) e por grande parte da literatura apresentada na [Figura 5](#). Têm-se que para o mercado brasileiro não suporta retirada para prazos longos. Apesar de ser possível realizar retiradas de até 3% para o prazo de 10 anos, os horizontes de 25 e 30 anos não estão sujeitos a retirada sem que isto incorra necessariamente em risco de falência.

Figura 5
Carteira 75% renda variável e 25% renda fixa



O cenário com composição inversa, demonstrado pela [Figura 6](#), continua trazendo resultados melhores conforme a concentração em ativos de renda fixa aumenta.

Neste cenário, obteve-se taxas de retirada sustentáveis de 8% para o horizonte de 10 anos de aposentadoria e de 4% para horizontes de 15 anos. Para horizontes de 20 e 25 anos a taxa de retirada diminuiu para 3%. Para 30 anos é possível retirar apenas 2% do portfólio, isso pode ser considerado insatisfatório para a maioria dos investidores, já que demanda um alto patrimônio para

Figura 6
Carteira 25% renda variável e 75% renda fixa



garantir um valor mensal bruto que seja satisfatório ou que consiga garantir a subsistência do aposentado.

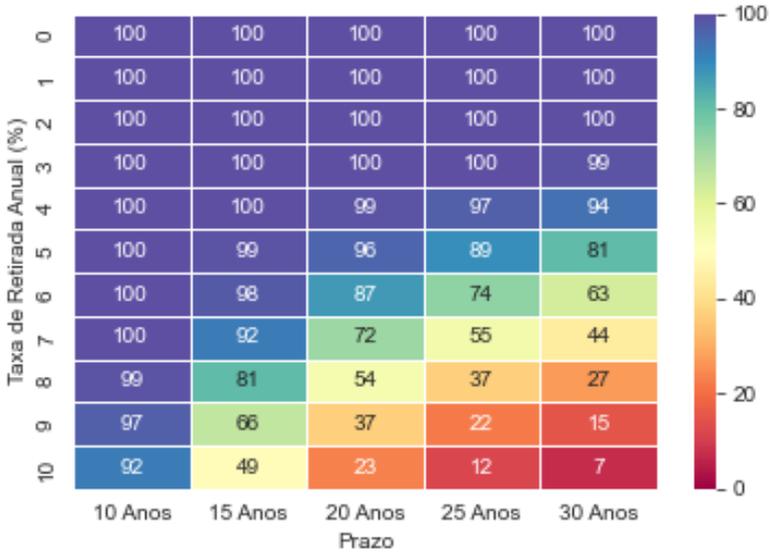
Para o portfólio composto com índice S&P500 em reais e renda fixa brasileira, temos o resultado conforme a Figura 7.

Percebe-se que as taxas de sucesso maiores que o portfólio da Figura 4 e similares ao portfólio da Figura 6. Aqui é possível retirar até 7% do portfólio ao ano para um horizonte de 10 anos, enquanto o portfólio com mesma composição de renda variável brasileira, este percentual é de 5%. Para prazos de 20 anos e 25 anos é possível realizar retiradas de 3% para ambos cenários. Entretanto, o prazo mais longo a taxa de retirada limita-se em 2%.

A Figura 8 demonstra uma carteira composta pelos três ativos analisados com pesos iguais, temos como taxa de retirada o valor de 6% ao ano para o prazo de 10 anos e para prazos mais longos de 25 anos e 30 anos, a taxa de retirada limita-se a 2%. Portanto, não foi obtido ganhos em adicionar mais ativos na carteira.

Os resultados aqui favorecem os portfólios mais concentrados em renda fixa, ao contrário do discutido pela literatura acerca da regra de 4% que foi popularizada por Cooley et al. (1998). Dado isso, não é necessário, no caso brasileiro, investir em portfólios com volatilidades mais altas para compensar

Figura 7
Carteira 50% S&P500 em Reais e 50% renda fixa



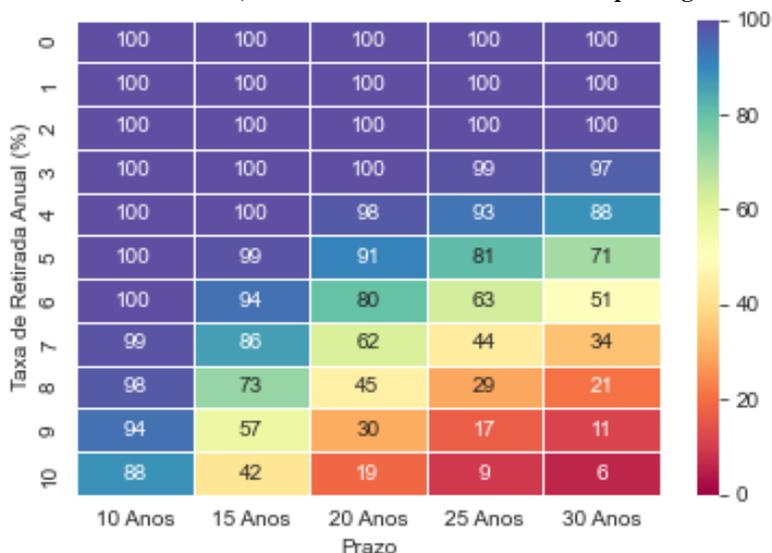
retiradas futuras, e ter que observar como [Scott et al. \(2009\)](#) se o estado de mercado é de *bear market*.

Portanto, é possível afirmar que existe uma taxa de retirada sustentável no Brasil, mas o portfólio, diferentemente da literatura americana, é composta essencialmente por ativos de renda fixa. Todos portfólios com exceção aos portfólios compostos total ou majoritariamente com ativos de renda fixa nacionais têm taxas de retiradas bem baixas, forçando ou ao investidor ter grande patrimônio para conseguir sobreviver com retiradas relativamente baixas, ou correr riscos de fracassar e ficar sem dinheiro até o final do período projetado. Portanto, uma gestão dos ativos aqui, passa necessariamente a investir majoritariamente em renda fixa, e, calibrar as exposições em renda variável.

6. Taxa de retirada dinâmica

Alguns autores sugerem que a taxa de retirada deve ser revista devido às condições de mercado ou ao desempenho do portfólio. Como é o caso de [Scruggs \(2019\)](#) que limita as retiradas em 2% quando o portfólio não apresenta desempenho desejado. [Pfau e Kitces \(2013\)](#), por sua vez, demonstram preocupação com a acumulação de recursos quando a carteira do investidor por motivos de aposentadoria começa a receber resgates em momentos de *be-*

Figura 8
Carteira renda variável, S&P500 em Reais e renda fixa com pesos iguais



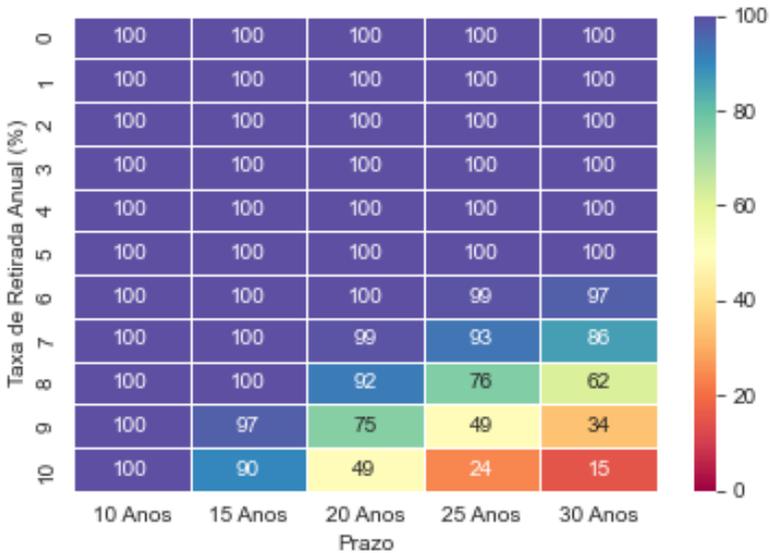
armarket. [Waring e Siegel \(2015\)](#) também sugere que as taxas de retiradas sejam revistas anualmente conforme o desempenho dos portfólios. Destaca-se a importância da previsibilidade que o aposentado deve ter para que sua aposentadoria não dependa exclusivamente das oscilações de mercado.

Dado que no momento de definição de prazo e taxa, o investidor não deve mais ser surpreendido com retiradas menores do que planejadas no momento de sua aposentadoria. É importante a definição de regras claras para mudanças de resgates durante o período de usufruto. Como [Pfau e Kitecs \(2013\)](#) demonstra, os primeiros anos são importantes para acumulação e, portanto, é razoável que neste primeiro período haja certa flexibilização do investidor com suas retiradas iniciais, a fim de não prejudicar seu portfólio e poder, no futuro, retirar taxas maiores.

Pode-se observar que, para o portfólio da [Figura 9](#), composto em sua totalidade por títulos públicos, não houve mudanças nas taxas possíveis de retiradas em nenhum prazos propostos. Uma hipótese desse fenômeno pode ser dar pela característica do ativo.

Já para uma carteira composta parcialmente por ativos de renda variável nacional ([Figura 10](#)) é possível ver melhora para o menor prazo de resgate, 10 anos. Com a taxa fixa de resgate o investidor poderia realizar retiradas de

Figura 9
Carteira 100% de renda fixa com resgate variável



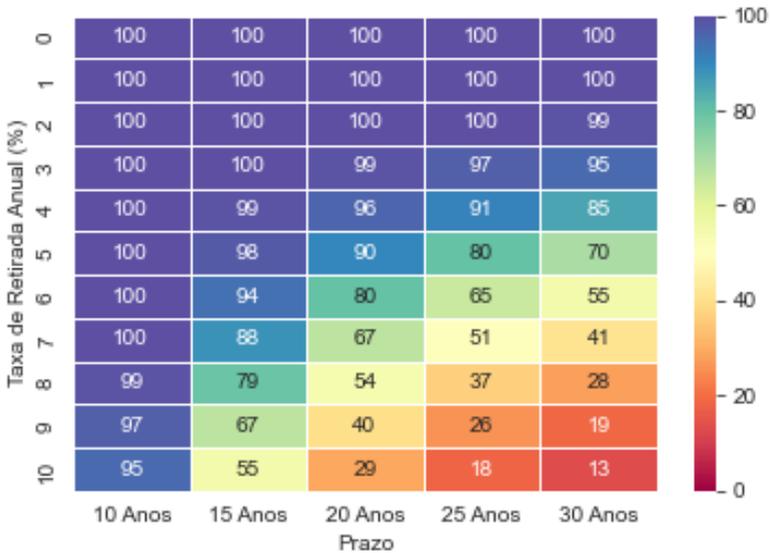
no máximo 5% ao ano. Enquanto, para o cenário de taxa de retirada variável o investidor pode aumentar sua taxa de retirada para até 7% ao ano. Entretanto, não foi identificado aumento da taxa de resgate em nenhum dos demais prazos propostos, apenas da diminuição significativa das taxas de fracassos observadas.

Para a carteira com pesos iguais entre todos ativos testados, novamente apenas o vértice mais curto do prazo de pagamento teve melhoras significativas. A taxa de retirada aumentou de 6% para 8% ao ano. Todos os demais vértices não tiveram melhoras significativas que justifiquem os investidores adotarem essa restrição.

Para todos os portfólios testados, não foi possível verificar melhoras que justifiquem a alteração da taxa fixa para taxa variável. As melhorias ficaram restritas, quando existente, em todos os cenários analisados aos vértices mais curtos. Portfólios compostos exclusivamente por títulos públicos não identificaram melhoras devido a sua característica de retornos com menor volatilidade.

Os resultados de [Scruggs \(2019\)](#) demonstraram melhora significativa nas taxas de sucesso dos portfólios com taxas de retiradas dinâmicas (flexíveis). Tal resultado está de acordo com a taxa de retirada dinâmica que foi aqui pro-

Figura 10
Carteira 50% de renda fixa e 50% de renda variável com resgate variável



posta. Onde se reduziu nos primeiros anos as taxas de retirada pela metade, caso o patrimônio inicial esteja inferior ao patrimônio atual, afim da preservação de capital. Entretanto, apesar de inserirmos restrições parecidas com o estudo de [Scruggs \(2019\)](#), que limitava a taxa de retirada em 2%, não foi obtidos aqui resultados que aumentem de forma impactante as taxas de sucessos. É interessante observar que o estudo de [Van Appel e Maré \(2022\)](#) resulta em uma composição de portfólio semelhante a aquela encontrada no presente estudo.

Buscando robustez, foram realizados testes considerando uma taxa de juros descontada, levando em consideração a premissa de que as taxas de juros no Brasil não serão tão altas nos próximos anos como no passado. Os valores simulados neste estudo foram reduzidos em 20% para refletir essa perspectiva. O portfólio composto por 75% de renda fixa e 25% de renda variável apresentou alterações mínimas. Para o prazo de 20 anos, a taxa de retirada foi reduzida de 4% para 3%, enquanto para o prazo de 25 anos não houve alteração, permanecendo em 3%. Portanto, é importante ressaltar que, caso ocorra uma mudança estrutural na taxa de juros do país, é necessário readequar o modelo, ajustando os resgates para se adequarem à nova realidade imposta.

Figura 11
Carteira renda variável, S&P500 em Reais e renda fixa com pesos iguais e
retirada variável



7. Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo encontrar uma taxa de retirada sustentável, conforme os estudos de [Cooley et al. \(2011\)](#) para o mercado brasileiro. A gestão dos ativos e passivos variam conforme as expectativas dos investidores quanto ao horizonte de tempo que gostariam de usufruir de seu patrimônio, ou o quanto gostariam de retirar mensalmente de seus portfólios.

Para este estudo, foram selecionadas três classes de ativos que são acessíveis para qualquer investidor atualmente: índice Ibovespa 100, SP500 dolarizado e uma carteira de renda fixa com IMA-S e IMA-B. Para ser considerada uma taxa de retirada sustentável, o portfólio não pode, a qualquer momento, ter valor negativo ou igual a zero para seu cenário de retiradas. Para todos os cenários a taxa de retirada foi ajustada pela inflação simulada do período, a fim de manter o poder de compra do investidor aposentado.

Foram realizadas 5000 mil simulações para cada classe de ativo, a fim de trazer robustez aos cenários hipotéticos. Para realizar as simulações foi utilizada a estimação dos parâmetros conforme o modelo multivariado DCC-GARCH de [Engle \(2002\)](#). Portanto, foi considerada a relação entre os ativos

para modelar seus comportamentos futuros.

Os resultados no Brasil privilegiaram portfólios compostos majoritariamente por ativos de renda fixa, em detrimento a ativos de renda variável. Resultados estes, inversos aos propostos por grande parte da literatura que testou a regra dos 4% de [Cooley et al. \(1998\)](#). Carteiras com ativos de renda fixa no Brasil inclusive tem taxas de retiradas superiores, de até 5% para portfólios de 25 e 30 anos. Carteiras compostas por ativos *offshore*, aqui representados pelo S&P500 em reais, demonstraram resultados similares aos encontrados pelos autores, mostrando-se, diferentemente da análise feita em outros países que não viam vantagens na criação de portfólios com ativos estrangeiros, uma boa ferramenta para composição de portfólios com objetivo de aposentadoria.

As taxas de retiradas dinâmicas nos primeiros cinco anos de aposentadoria não obtiveram alterações significativas para portfólios mais longos, apenas para os portfólios mais curtos. Isto sugere que não existe um benefício significativo para adoção de tal restrição.

As contribuições deste estudo apresentam algumas restrições, principalmente em relação à série de dados disponível para modelagem dos ativos. Enquanto os estudos em outros países têm dados de mais de 70 anos de diversas classes de ativos, no Brasil esse valor diminui consideravelmente. Neste estudo foram utilizados dados mensais de 18 anos para a estimação dos parâmetros e posterior simulação de 30 anos.

Apesar da restrição destacada, a gestão de ativos e passivos para aposentadoria é um assunto de extrema relevância, uma vez que influencia diretamente o bem-estar de uma população que demandará, cada vez mais, soluções previdenciárias para conseguir sua subsistência com tranquilidade. Portanto, são necessários mais estudos aprofundados na área, que investiguem diversos comportamentos dos ativos e momentos de mercados, a fim de encontrar soluções e hipóteses para a discussão.

A principal contribuição deste estudo é a investigação de uma taxa de retirada sustentável para aposentadoria no Brasil, considerando a gestão efetiva de ativos e passivos. Esse estudo visa fornecer informações relevantes para a população, permitindo um planejamento financeiro acessível e personalizado para a aposentadoria.

Apesar das metodologias e estatísticas impostas neste trabalho, é fundamental reconhecer que os resultados da pesquisa são influenciados pelo passado. A estimação foi realizada em um cenário onde a renda fixa brasileira teve desempenho superior aos ativos de risco. Não existia, portanto, a necessidade do investidor se expor a outros fatores de risco. Caso o cenário futuro seja significativamente diferente do passado, as taxas de rentabilidade e os cenários de composição de portfólio podem não se confirmar apesar das

diversas simulações realizadas. No futuro, é necessária uma revisão deste trabalho para que, com o amadurecimento do mercado financeiro brasileiro, seja possível utilizar a taxa de retirada sustentável como ferramenta robusta para a aposentadoria.

Por fim, apesar deste estudo fornecer informações sobre a estratégia de investimento em si, é importante reconhecer que os vieses comportamentais desempenham um papel fundamental nos resultados e na tomada de decisão dos investidores. Futuros estudos e pesquisas podem se aprofundar nessa área, explorando os vieses comportamentais específicos dos investidores brasileiros e suas implicações na implementação da estratégia do Trinity Study.

Referências

- Adam, A. (2008). *Handbook of asset and liability management: from models to optimal return strategies*, John Wiley & Sons.
- Andreou, E. e Ghysels, E. (2009). Structural breaks in financial time series, *Handbook of financial time series* pp. 839–870.
- Aouni, B., Colapinto, C. e La Torre, D. (2014). [Financial portfolio management through the goal programming model: Current state-of-the-art](#), *European Journal of Operational Research* **234**(2): 536–545.
- Asebedo, S. D. e Browning, C. M. (2020). The psychology of portfolio withdrawal rates., *Psychology and Aging* **35**(1): 78.
- Barreto de Oliveira, F. E. e Beltrão, K. I. (2015). Brazilian social security system, *Technical report*, Discussion Paper.
- Bengen, W. P. (1994). Determining withdrawal rates using historical data, *Journal of Financial Planning* **7**(4): 171–180.
- Bengen, W. P. (1996). Asset allocation for a lifetime, *Journal of Financial Planning* **9**(4): 58.
- Bierwirth, L. (1994). Investing for retirement: Using the past to model the future., *Journal of Financial Planning* **7**(1).
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* **31**(3): 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model, *The Review of Economics and Statistics* pp. 498–505.

- Bollerslev, T., Engle, R. F. e Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy* **96**(1): 116–131.
- Bonifácio, G. M. d. O. e Guimarães, R. R. d. M. (2021). Projeções populacionais por idade e sexo para o Brasil até 2100, *Technical report*, Texto para Discussão.
- Bradley, S. P. e Crane, D. B. (1972). A dynamic model for bond portfolio management, *Management Science* **19**: 139–151.
- Brasil (2019). Emenda constitucional nº 103, de 12 de novembro de 2019.
URL: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/emendas/emc/emc103.htm
- Carino, D. R., Kent, T., Myers, D. H., Stacy, C., Sylvanus, M., Turner, A. L., Watanabe, K. e Ziemba, W. T. (1994). The russell-yasuda kasai model: An asset/liability model for a Japanese insurance company using multistage stochastic programming, *Interfaces* **24**(1): 29–49.
- Celik, S. (2012). The more contagion effect on emerging markets: The evidence of dcc-garch model, *Economic Modelling* **29**(5): 1946–1959.
- Chambers, D. e Charnes, A. (1961). Inter-temporal analysis and optimization of bank portfolios, *Management Science* **7**(4): 393–410.
- Cooley, P. L., Hubbard, C. M. e Walz, D. T. (1998). Retirement savings: Choosing a withdrawal rate that is sustainable, *AALJ Journal* **20**(2): 16–21.
- Cooley, P. L., Hubbard, C. M. e Walz, D. T. (2011). Portfolio success rates: Where to draw the line, *Journal of Financial Planning* **24**(4): 48–60.
- Costanzi, R. N., Amaral, A. D., Dias, C. R., Ansiliero, G., Afonso, L. E. e Sidone, O. J. G. (2018). Reforma da previdência social.
- da República, B. P. (2023). Medida provisória nº 1.172.
URL: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2023/mpv/mpv1172.htm
- Dempster, M. e Medova, E. (2011). Planning for retirement: Asset liability management for individuals, *Asset and Liability Management Handbook*, Springer, pp. 409–432.

- Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (2022). Análise da cesta básica de junho de 2022.
 URL: <https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2022/202206cestabasica.pdf>
- Doumpos, M., Kosmidou, K., Baourakis, G. e Zopounidis, C. (2002). Credit risk assessment using a multicriteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis, *European journal of operational research* **138**(2): 392–412.
- Duarte, T. B., Valladão, D. M. e Veiga, Á. (2017). Asset liability management for open pension schemes using multistage stochastic programming under solvency-ii-based regulatory constraints, *Insurance: Mathematics and Economics* **77**: 177–188.
- Dupačová, J. e Polívka, J. (2009). Asset-liability management for czech pension funds using stochastic programming, *Annals of Operations Research* **165**(1): 5–28.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business & Economic Statistics* **20**(3): 339–350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation, *Econometrica: Journal of the econometric society* pp. 987–1007.
- Feldstein, M. e Liebman, J. B. (2002). Social security, *Handbook of public economics* **4**: 2245–2324.
- Finke, M. S., Pfau, W. D. e Blanchett, D. (2013). The 4 percent rule is not safe in a low-yield world, *Available at SSRN 2201323* .
- Forsyth, P. A. e Vetzal, K. R. (2019). Optimal asset allocation for retirement saving: Deterministic vs. time consistent adaptive strategies, *Applied Mathematical Finance* **26**(1): 1–37.
- Ghalanos, A. (2022). rugarch: Univariate garch models. R package version 1.4-9.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. e Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The journal of finance* **48**(5): 1779–1801.

Governo Federal - Ministério do Trabalho e Previdência Social (2022). Previdência Social - Regime Geral (INSS) - Dados Abertos. Acesso em 11 de junho de 2023.

URL: https://www.gov.br/trabalho-e-previdencia/p-t-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/dados-abertos-previdencia/previdencia-social-regime-geral-inss/arquivos/beps122022_final.pdf

Guan, G. e Liang, Z. (2015). Mean–variance efficiency of dc pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns, *Insurance: Mathematics and Economics* **61**: 99–109.

Han, N.-W. e Hung, M.-W. (2017). Optimal consumption, portfolio, and life insurance policies under interest rate and inflation risks, *Insurance: Mathematics and Economics* **73**: 54–67.

Hilli, P., Koivu, M., Pennanen, T. e Ranne, A. (2007). A stochastic programming model for asset liability management of a finnish pension company, *Annals of Operations Research* **152**(1): 115–139.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2019). Em 2019, expectativa de vida era de 76,6 anos.

URL: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-a-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/29502-em-2019-expectativa-de-vida-era-de-76-6-anos>

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (2022). Retrato dos rendimentos do trabalho – resultados da pnad contínua do segundo trimestre de 2022.

URL: https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/wp-content/uploads/2022/09/220901_cc_56_nota_17_rendimentos_e_horas_trabalhadas.pdf

Josa-Fombellida, R. e Rincón-Zapatero, J. P. (2010). Optimal asset allocation for aggregated defined benefit pension funds with stochastic interest rates, *European Journal of Operational Research* **201**(1): 211–221.

Kusy, M. I. e Ziemba, W. T. (1986). A bank asset and liability management model, *Operations research* **34**(3): 356–376.

Markowitz, H. (1952). **Portfolio selection**, *The Journal of Finance* **7**(1): 77–91.

- Mulvey, J. M. e Vladimirov, H. (1992). Stochastic network programming for financial planning problems, *Management science* **38**(11): 1642–1664.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica: Journal of the econometric society* pp. 347–370.
- Organização Mundial da Saúde (2015). Relatório mundial de envelhecimento e saúde.
URL: https://apps.who.int/iris/bitstream/handle/10665/186468/WHO_FWC_ALC_15.01_por.pdf?sequence=6
- Perlin, M. S., Mastella, M., Vancin, D. F. e Ramos, H. P. (2020). A garch tutorial with R, *Revista de Administração Contemporânea* **25**.
- Pfau, W. D. e Kitces, M. (2013). Reducing retirement risk with a rising equity glide-path, *Available at SSRN 2324930*.
- Pinheiro, R. P. (2007). *A demografia dos fundos de pensão*, Vol. 24, Ministério da Previdência Social Brasília, DF.
- Pye, G. B. (2000). Sustainable investment withdrawals, *The Journal of Portfolio Management* **26**(4): 73–83.
- Scott, J. S., Sharpe, W. F. e Watson, J. G. (2009). The 4% rule—at what price?, *Journal of Investment Management* **3**: 31.
- Scruggs, J. T. (2019). Asset allocation and withdrawal strategies: Three levers for managing retirement outcomes, *Journal of Financial Planning* **32**(6): 39–49.
- Van Appel, V. e Maré, E. (2022). Determining safe retirement withdrawal rates using forward-looking distributions, *South African Journal of Science* **118**(3-4): 1–7.
- Waring, M. B. e Siegel, L. B. (2015). The only spending rule article you will ever need, *Financial Analysts Journal* **71**(1): 91–107.
- Zenios, S. A. e Ziemba, W. T. (2007). *Handbook of Asset and Liability Management: Applications and case studies*, Elsevier.