Evidências de um *risk-free rate puzzle* na economia brasileira

Rafael Nogueira do Prado[†,a]

Alex Luiz Ferreira[‡,b]

[a]GO Associados, Brasil

[b]Universidade de São Paulo, Brasil

Resumo

A taxa livre de risco é utilizada conceitualmente em muitas aplicações em finanças e macrofinanças. Enquanto em muitos trabalhos teóricos essa taxa é assumida como constante, em trabalhos empíricos é comum utilizar o retorno de títulos públicos como *proxy* para ela, embora existam evidências contrárias a esse uso. O objetivo deste artigo é estimar uma taxa livre de risco para o Brasil com base na equação fundamental de apreçamento de ativos, que utiliza um fator estocástico de desconto. Para isso, empregam-se diferentes abordagens econométricas e, ao final, as taxas estimadas são comparadas com a taxa DI, principal referência de taxa livre de risco na economia brasileira. A taxa DI e as taxas estimadas se distanciaram durante boa parte do período analisado, de 2002 a 2022, sugerindo a existência de um *risk-free rate puzzle* para a economia brasileira.

Palavras-chave: Taxa livre de risco; Fator estocástico de desconto; *Risk-free rate puzzle*

Códigos JEL: E44.

1. Introdução

O *risk-free rate puzzle* documentado por Weil (1989) mostra que, em modelos estruturais baseados em consumo calibrados para os Estados Unidos, a taxa livre de risco implícita tende a ser superior à taxa observada historicamente. Para o Brasil, os resultados não são conclusivos. Bonomo e Domingues (2002) encontram evidência de um *risk-free rate puzzle* invertido, no qual a taxa

Como citar: Prado, R. N. & Ferreira, A. L. (2026). Evidências de um *risk-free rate puzzle* na economia brasileira. *Revista Brasileira de Finanças,* 24, e202609. https://doi.org/10.12660/rbfin.v24n1.2026.97841

Submetido em 27 de março de 2026. Publicado *on-line* em 11 de junho de 2026.

Editor responsável: Bruno Giovannetti.

[†]rafael.nogueiraprado@gmail.com

[‡]alexferreira@usp.br

2026 – Os Autores, sob uma licença Creative Commons Attribution 4.0 International.

implícita é inferior aos retornos dos títulos públicos, enquanto o trabalho de Cysne (2006) não corrobora essa evidência ao analisar especificações alternativas. Essa heterogeneidade sugere que os resultados podem depender da forma como a taxa livre de risco é identificada e das restrições impostas ao processo de precificação.

Este artigo investiga duas questões relacionadas ao *risk-free rate puzzle* no Brasil. A primeira é se a identificação empírica da taxa livre de risco na economia brasileira é robusta à estrutura de precificação adotada. A segunda é se a taxa tradicionalmente utilizada como referência — a taxa DI — é compatível com as restrições impostas por modelos estruturais de apreçamento de ativos. Em conjunto, essas questões permitem avaliar se o *puzzle* emerge de forma robusta ou se depende das restrições de identificação impostas ao modelo. Essas questões são relevantes porque a taxa livre de risco ocupa posição central na equação fundamental de apreçamento: os retornos em excesso são definidos relativamente a ela e sua dinâmica é determinada pelo fator estocástico de desconto (SDF). Além disso, a taxa livre de risco é amplamente utilizada como parâmetro de referência em decisões de política monetária, avaliação de custo de capital e modelagem macroeconômica.

Em aplicações empíricas, utiliza-se frequentemente o retorno de títulos públicos de curto prazo como *proxy* para a taxa livre de risco (Dimson et al., 2008; Gomes et al., 2013), assumindo-se que tais ativos geram *payoffs* independentes do estado futuro da natureza. No entanto, títulos públicos podem incorporar prêmios de risco associados a condições macroeconômicas, política monetária, expectativas de inflação e risco soberano (Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen, 2012; Van Binsbergen et al., 2022). Em economias emergentes, esses fatores tendem a ser mais relevantes, o que coloca em questão a interpretação estrita desses retornos como livres de risco.

Para responder às questões propostas, o artigo estima o fator estocástico de desconto por diferentes abordagens baseadas na equação fundamental de apreçamento. Inicialmente, utiliza-se a metodologia não paramétrica de Araujo et al. (2005), seguindo Simonassi (2006). Em seguida, o SDF é estimado via Generalized Method of Moments (GMM) (Hansen, 1982) e Generalized

Empirical Likelihood (GEL) (Newey e Smith, 2004), permitindo avaliar a sensibilidade da taxa implícita às restrições econométricas impostas. O ambiente macroeconômico é descrito por um modelo de apreçamento baseado em consumo (CCAPM), com função utilidade CRRA. Para aproximar a relação de equilíbrio de longo prazo implícita no modelo, utiliza-se o método de suavização de baixa frequência proposto por Müller e Watson (2017), evitando as distorções associadas a filtros tradicionais (Hamilton, 2018).

Como complemento, estima-se uma taxa de juros de zero beta. A noção de taxa de zero beta remonta à versão do CAPM sem ativo livre de risco proposta por Black (1972), na qual o intercepto da relação risco-retorno corresponde ao retorno de um portfólio com beta nulo. Em termos empíricos, a taxa de zero beta pode ser interpretada como o retorno de um portfólio cuja covariância com os fatores sistemáticos é nula (Fama e MacBeth, 1973). Essa taxa não requer a existência de um ativo negociável estritamente livre de risco e pode ser identificada diretamente a partir das restrições de precificação impostas sobre os momentos dos retornos. No contexto da equação fundamental de apreçamento, a taxa de zero beta está relacionada às condições de ortogonalidade do SDF e às restrições de não arbitragem (Hansen e Jagannathan, 1991; Cochrane, 2005). Neste artigo, sua estimação é implementada por meio de um sistema de condições de momento via GEL, permitindo avaliar se a taxa implícita derivada da estrutura de covariâncias dos retornos é consistente tanto com aquela obtida a partir do SDF quanto com a taxa DI utilizada como *benchmark* no Brasil.

Antecipando os resultados, encontra-se que a taxa livre de risco implícita não é invariável à estrutura de identificação: diferentes procedimentos de estimação do SDF produzem níveis distintos, e a taxa de zero beta é sensível ao conjunto informacional utilizado. Em consequência, a taxa DI não se mostra sistematicamente compatível com as restrições de precificação analisadas, podendo emergir evidência de *risk-free rate puzzle* clássico ou invertido a depender da especificação. A implicação é que, para a economia brasileira, a utilização de uma única *proxy* como "taxa livre de risco" não é neutra;

por isso, pode-se tratar a taxa livre de risco como um objeto identificado condicionalmente ao conjunto de restrições do modelo.

Além desta introdução, o trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta uma breve revisão da literatura. A Seção 3 descreve o modelo econômico e a metodologia de estimação. A Seção 4 discute os dados e os resultados empíricos, incluindo a estimação da taxa de zero beta. Por fim, a Seção 5 conclui.

2. Taxa livre de risco e fator estocástico de desconto

A literatura de macrofinanças, que se fundamenta na Equação Fundamental de Apreçamento de Ativos, relaciona flutuações macroeconômicas e precificação de ativos por meio do Fator Estocástico de Desconto (SDF) (Hansen e Jagannathan, 1991; Harrison e Kreps, 1979; Hansen e Richard, 1987). O SDF pode ser derivado de funções utilidade, como na formulação de Rubinstein (1976), mas seu uso empírico em modelos semi-paramétricos enfrenta críticas devido a potenciais problemas de especificação (Horowitz, 2009; Mehra e Prescott, 1985; Brown e Gibbons, 1985; Campbell, 1993). Nesse contexto, o GMM (*Generalized Method of Moments*) (Hansen, 1982; Hansen e Singleton, 1982, 1983) emerge como abordagem econométrica central para estimar essas relações.

Visando contornar esses problemas, a literatura empírica buscou outras formas de estimar o fator estocástico de desconto. Rosenberg e Engle (2002) e Araujo et al. (2005), por exemplo, desenvolvem modelos semelhantes para o cálculo do SDF, sem o uso de uma função utilidade, nos quais ele é definido como função dos preços e retornos dos ativos existentes na economia, consistindo em estimações não paramétricas. Utilizando essa última abordagem, Simonassi (2006) estima a taxa livre de risco para o Brasil a partir de uma modelagem não paramétrica do SDF, a fim de compará-la à Selic, e encontra valores divergentes entre a taxa estimada e a observada.

Além desses trabalhos, na literatura empírica mais recente em macrofinanças, cresce o número de estudos que utilizam abordagens não paramétricas

para apreçamento de ativos, entre elas o modelo GEL (*Generalized Empirical Likelihood*) (Newey e Smith, 2004; Noda, 2011; Ito e Noda, 2012; Almeida e Garcia, 2012; Pereira, 2016).

O presente trabalho contribui para a literatura ao estimar a taxa livre de risco para o Brasil utilizando uma abordagem baseada no Fator Estocástico de Desconto (SDF), com estimações via *Generalized Method of Moments* (GMM), *Generalized Empirical Likelihood* (GEL) e seguindo Issler e Piqueira (2000). Diferentemente de estudos anteriores, que frequentemente assumem uma estrutura paramétrica rígida baseada em funções utilidade pré-definidas, este trabalho adota um modelo mais flexível, comparando diferentes técnicas econométricas para avaliar sua robustez e consistência com os dados da economia brasileira. Em particular, a aplicação do modelo GEL permite testar a sensibilidade das estimações da taxa livre de risco a erros de especificação do modelo, um problema recorrente na literatura. Até onde se sabe, este é o primeiro estudo a empregar essa abordagem metodológica para estimar a taxa livre de risco no Brasil, oferecendo uma análise comparativa entre métodos e contribuindo para a melhor compreensão do comportamento dessa taxa em um contexto de país emergente.

3. Modelo econômico e abordagem metodológica

Parte-se de um modelo baseado em Breeden (1979), que se utiliza do ambiente econômico descrito por Lucas (1978):

$$\begin{aligned} \max_{C_t} \quad & \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \right\} \\ \text{s.t.} \quad & C_t + p_t q_t \leqslant x_t q_{t-1} + W_t \quad \forall t, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $u_t(\cdot)$ (com $u_t'(\cdot) > 0$ e $u_t''(\cdot) < 0$) é a função de utilidade no período t, $0 < \beta < 1$ é a taxa de desconto intertemporal subjetiva, C_t é o nível de consumo do indivíduo, p_t é o preço de um ativo genérico no período t, q_t é a quantidade comprada desse ativo em t, x_t é o *payoff* do ativo em t obtido pela compra desse ativo em $t-1$ e W_t é uma renda exógena recebida pelo indivíduo na data t. Conforme argumentado por Cochrane (2009), para o caso de um ativo

arriscado com preço p_t, tem-se que o payoff desse ativo é $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, em que d_{t+1} são os dividendos pagos no período $t+1$, e para o caso do ativo livre de risco, tem-se que $p_t = 1$ e $x_{t+1} = R^f_{t+1}$.

A solução do problema em (1) resulta na equação de Euler

$$p_t = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} x_{t+1} \right\} .$$

Ao se definir $\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \equiv M_{t+1}$ como o fator estocástico de desconto (SDF) em $t+1$, obtém-se

$$\mathbb{E}_t \{ M_{t+1} R_{t+1} \} = 1, \tag{2}$$

em que $R_{t+1} \equiv \frac{x_{t+1}}{p_t}$ é o retorno bruto do ativo genérico, e serve para precificar qualquer ativo da economia.

O ativo livre de risco. Como a equação (2) é válida para qualquer tipo de ativo, em particular ela é válida também para o ativo livre de risco. Denotando-se então R^f_{t+1} como o retorno bruto do ativo livre de risco e assumindo a hipótese fundamental:

$$\text{Cov}(M_{t+1}, R^f_{t+1}) = 0,$$

com $\mathbb{E}_t \left\{ R^f_{t+1} \right\} = R^f_{t+1}$, obtém-se $\mathbb{E}_t \left\{ M_{t+1} R^f_{t+1} \right\} = R^f_{t+1} \mathbb{E}_t \{ M_{t+1} \} = 1$ e, portanto,

$$R^f_{t+1} = \frac{1}{\mathbb{E}_t \{ M_{t+1} \}}. \tag{3}$$

Ao supor que $\text{Cov}(M_{t+1}, R^f_{t+1}) = 0$, abstrai-se do risco relacionado ao ciclo econômico para R^f_{t+1}. A hipótese acima é amplamente aceita na literatura e normalmente é dada em modelos de apreçamento de ativos (Farnsworth et al., 2002; Campbell, 2014; Araujo et al., 2005). Como $R^f_{t+1} = \frac{1+i^f_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}$, da equação

(3), obtém-se que

$$i^{\mathrm{f}}_{t+1} = \frac{1}{\mathbb{E}_t \left\{ \frac{M_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} \right\}} - 1, \tag{4}$$

em que π_{t+1} representa a inflação entre t e $t+1$ e i^{f}_{t+1} é a taxa nominal livre de risco de covariância a ser estimada.

A taxa implícita na equação (4) será obtida a partir da estimativa do SDF, utilizando três abordagens distintas. A primeira emprega o modelo desenvolvido por Araujo et al. (2005), doravante denominado AIF. Em seguida, utiliza-se o modelo GMM, proposto por Hansen (1982), e, por fim, o modelo GEL, desenvolvido por Newey e Smith (2004). A escolha por esses métodos se deve ao fato de dispensarem uma abordagem totalmente paramétrica para a estimação do SDF. Conforme argumentado no capítulo introdutório, o uso de modelos paramétricos está sujeito a erros de especificação, o que justifica a adoção de modelos não-paramétricos e semi-paramétricos para mitigar tais problemas. Posteriormente, os valores de $\mathbb{E}_t \{M_{t+1}\}$ serão estimados conforme o modelo a seguir:

$$M_{t+1} = \alpha + \gamma X_t + \lambda \ln \left(\frac{C_t}{Y_t} \right) + \varepsilon_{t+1}, \tag{5}$$

em que X_t representa uma variável que captura fatores financeiros relevantes para o modelo, como retornos agregados ou fatores de risco sistemáticos. O termo $\ln \left(\frac{C_t}{Y_t} \right)$ corresponde ao logaritmo da razão consumo/PIB, enquanto ε_{t+1} representa o termo de erro do modelo. Seguindo Simonassi (2006), a escolha dessas variáveis se deve ao fato de que o SDF pode ser interpretado como uma função dos fundamentos econômicos, refletindo informações relevantes sobre a dinâmica intertemporal do consumo e dos retornos financeiros.

Para a estimação da taxa implícita na equação (4), utiliza-se três abordagens distintas para calcular o SDF: AIF, GMM e GEL. A escolha dessas metodologias decorre da necessidade de lidar com a incerteza na modelagem do SDF, evitando o risco de especificação incorreta que surge ao assumir uma forma funcional

rígida para a função de utilidade. Além disso, essas abordagens permitem explorar os dados de forma mais flexível, especialmente em cenários onde a presença de heteroscedasticidade e a alta frequência dos retornos financeiros podem comprometer a eficiência de métodos totalmente paramétricos. Dessa forma, garante-se maior robustez na estimação do SDF e na avaliação da taxa livre de risco.

AIF. Este modelo propõe uma abordagem não-paramétrica para o cálculo do SDF sem o uso de uma função utilidade, em que o estimador é uma função dos retornos de ativos. O principal benefício disso é a ausência de risco de especificação incorreta para a forma funcional adequada para estimar-se o SDF. Ademais, o estimador proposto não depende de dados de consumo para ser construído. É dispensada também a hipótese de homoscedasticidade para a construção do estimador. Ou seja, pode-se fazer o uso de dados de alta e altíssima frequência, que normalmente possuem heteroscedasticidade, e a um custo computacional baixo. O estimador proposto é

$$M_t^{AIF} = \frac{\overline{R}_t^G}{\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\left(\overline{R}_j^G \overline{R}_j^A\right)}, \tag{6}$$

em que $\overline{R}_t^G = \prod_{i=1}^{N} R_{i,t}^{\frac{-1}{N}}$ e $\overline{R}_t^A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_{i,t}$ representam a média geométrica e a média aritmética dos N ativos, respectivamente[1].

Ainda de acordo com Araujo et al. (2005), é importante que seja escolhida uma quantidade suficientemente grande de ativos, com o objetivo de diversificar a carteira analisada. Isso pois, ao passo que cresce o número de ativos utilizado, o grau de correlação dos retornos diminui. Tal medida é importante devido ao fato de que muita correlação pode levar à não convergência em probabilidade de $\hat{M}_t$ para M_t.

[1] Este estimador é consistente e sob homoscedasticidade, também é eficiente. Para mais detalhes, consulte Araujo et al. (2005).

GMM. Uma vantagem do GMM é que ele possui boas propriedades assintóticas, ao passo que permite uma estimação consistente dos parâmetros na presença de heteroscedasticidade condicional e autocorrelação serial nas condições de ortogonalidade, e tendo em vista que o estimador proposto possui distribuição assintoticamente normal (Hansen, 1982). Como não são impostas restrições de linearidade sobre essas condições, o GMM consegue lidar de maneira direta com modelos não lineares (Campbell, 2014). Para uma matriz de ponderação W e condições de momentos amostrais $g_T(x_t,\beta_0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(x_t,\beta_0)$, o problema é dado por (Cochrane, 2009)

$$\min_{\beta_0} g_T(x_t,\beta_0)' W g_T(x_t,\beta_0). \tag{7}$$

Neste modelo, existe um teste de sobre-identificação para se testar o quão próximas as condições de ortogonalidade amostrais estão de zero. Seja R o número de condições de ortogonalidade e Q o número de parâmetros a serem estimados. A estimação do modelo é feita ao se igualar Q combinações lineares das R condições de ortogonalidade a zero. Assim, para o caso em que $R > Q$, existem $R - Q$ combinações lineares independentes das condições de ortogonalidade que deveriam ser zero, mas não o são. O teste de sobre-identificação proposto por Hansen (1982) consiste em uma extensão do teste J de Sargan (Sargan, 1958, 1959) e é dado por

$$J = g_T(x_t,\beta_0)' W g_T(x_t,\beta_0) \sim \chi^2_{R-Q}, \tag{8}$$

em que a hipótese nula é $H_0 : \mathbb{E}[f(x_t,\beta_0)] = 0$. Neste teste, rejeitar a hipótese nula indica que o modelo está mal especificado.

Para que as condições de ortogonalidade utilizadas na estimação em (7) sejam satisfeitas apenas no vetor verdadeiro de parâmetros, é necessário que seja escolhida uma matriz de ponderação simétrica, positiva definida e de dimensão $R \times R$, e a escolha dessa matriz define a métrica de distância utilizada para aproximar $g_T(\cdot)$ de zero (Hansen, 1982; Hansen e Singleton, 1982). Como exposto em Hansen e Singleton (1982), a estimação de uma matriz de

covariância ótima pode ser feita em dois estágios. Essa estratégia de estimação é conhecida como *Two-Step GMM* e seu primeiro estágio consiste em uma escolha sub-ótima da matriz W para se encontrar um estimador $\hat{\beta}_1$ para β_0 em (7), sendo comum o uso da matriz identidade I_R (Cochrane, 2009).

Conforme argumentam Hansen e Singleton (1982), pode-se entender as condições de ortogonalidade $\mathbb{E}[f(x_t, \beta_0)] = 0$ como equações de Euler estocásticas resultantes de um problema de maximização de utilidade de um consumidor representativo em um ambiente com incerteza. Assim, para o caso específico deste trabalho, considere $u_t = \beta \frac{u'(C_{t+1};\beta_0)}{u'(C_t;\beta_0)} R_{t+1} - 1$ e z_t um conjunto de variáveis observadas em t. As condições de ortogonalidade populacionais podem então ser escritas como

$$\mathbb{E}\left\{\left(\beta \frac{u'(C_{t+1};\beta_0)}{u'(C_t;\beta_0)} R_{t+1} - 1\right) \otimes z_t\right\} = 0,$$

Seja $\beta_0 = (\beta, \sigma)$. Ao assumir uma função utilidade do tipo CRRA e SDF $\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \equiv M_{t+1}$, tem-se que

$$g_T(x_t, \beta_0) = g_T(\beta, \sigma) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \left\{\left[\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} R_{t+1} - 1\right] \otimes z_t\right\},$$

em que o vetor x_t foi omitido de $g_T(\beta, \sigma)$ para fins de simplificação de notação. Após a estimação dos parâmetros $\hat{\beta}^{GMM}$ e $\hat{\sigma}^{GMM}$, obtém-se

$$M_{t+1}^{GMM} = \hat{\beta}^{GMM} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\hat{\sigma}^{GMM}}. \tag{9}$$

GEL. Embora o estimador de GMM possua boas propriedades assintóticas, há evidências de um viés alto nas estimações em amostras pequenas (Smith, 1997). De acordo com Newey e Smith (2004), uma desvantagem do GMM é que o viés[2] do estimador costuma aumentar conforme aumentam as condições

[2] Os autores argumentam que uma das principais fontes desse viés se dá pela correlação das funções de momentos com seus Jacobianos na presença de endogeneidade. Para modelos com dados em painel, outra importante fonte de viés surge da estimação da matriz de ponderação ótima.

de momento utilizadas na estimação. Essa é uma propriedade importante corrigida pelos modelos da classe *Generalized Empirical Likelihood Estimators* (GEL), uma vez que é comum o uso de muitos instrumentos em modelos econométricos, e conforme o número de instrumentos aumenta, cresce a quantidade de condições de ortogonalidade a serem testadas. É o caso, por exemplo, do trabalho de Hansen e Singleton (1982), que testam o modelo utilizando diferentes instrumentos, sendo eles 1, 2, 4 ou 6 defasagens das variáveis observadas.

Desenvolvida no trabalho de Newey e Smith (2004), a classe de estimadores GEL sugere alternativas para o GMM em um esforço de aprimorar as propriedades em amostras pequenas desses estimadores, mas que possuem as mesmas propriedades assintóticas. Para construir o modelo GEL, considere uma função $\rho(\upsilon)$ estritamente côncava que satisfaça as seguintes condições: $\rho(0) = 0$, $\frac{\partial \rho(0)}{\partial \upsilon} = \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial \upsilon^2} = -1$. O estimador GEL $\hat{\beta}_0$ é obtido ao se resolver

$$\min_{\beta_0} \sup_{\lambda \in \Lambda_T} \sum_{t=1}^{T} \rho(\lambda' g_t(\beta_0)),$$

em que $\Lambda_T = \{\lambda : \lambda' g_t(\beta_0) \in \Upsilon\}$, Υ é algum conjunto aberto que contém zero e $g_t(\beta_0) \equiv f(x_t, \beta_0)$, em que $f(x_t, \beta_0)$ é definida da mesma maneira que no GMM (Newey e Smith, 2004).

De acordo com os autores, essa é uma abordagem genérica, uma vez que diferentes escolhas para $\rho(\upsilon)$ levam a casos especiais de estimadores alternativos ao GMM (Kitamura e Stutzer, 1997; Hansen et al., 1996; Owen, 1988; Imbens, 1997). Conforme argumenta Smith (1997), este problema pode ser resolvido por verossimilhança empírica, com o objetivo de suavizar o modo como o modelo lida com as condições de momentos impostas, ao associar pesos a cada uma delas. Assim, o problema se torna:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}, \beta_0} \quad & \tfrac{1}{T} \textstyle\sum_{t=1}^{T} \log(p_t) \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{t=1}^{T} p_t g_t(\beta_0) = 0 \\ & \textstyle\sum_{t=1}^{T} p_t = 1, \end{aligned}$$

Após resolver as condições de primeira ordem, tem-se que

$$\hat{\beta}_0 = \arg\max_{\beta_0} \min_{\lambda} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} - \log(1 + \lambda' g_t(\beta_0)).$$

A equação de momentos utilizada é a mesma do GMM, e após a estimação dos parâmetros, obtém-se

$$M_{t+1}^{GEL} = \hat{\beta}^{GEL} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\hat{\sigma}^{GEL}} . \tag{10}$$

Uma outra vantagem do modelo GEL é que ele conta com o mesmo teste de especificação do modelo GMM, especificado na equação (8), dadas as equivalências das propriedades assintóticas desses estimadores (Anatolyev e Gospodinov, 2011; Smith, 2011).

***Low Frequency Econometrics*.** Como a construção do CCAPM (Breeden, 1979) se baseia no ambiente econômico descrito por Lucas (1978), este modelo implica em uma relação de equilíbrio de longo prazo. Dessa forma, é importante que a modelagem empírica desse modelo seja feita utilizando-se dados relativos à tendência de longo prazo da série de consumo, para que o modelo empírico seja capaz de recuperar a relação de equilíbrio imposta pelo modelo teórico.

De maneira a extrair apenas este componente de longo prazo da série de consumo, utilizou-se o método de suavização desenvolvido por Müller e Watson (2017). Essa necessidade se dá uma vez que a série de consumo costuma apresentar um padrão sazonal, muito ligado a componentes cíclicos (de curto prazo) da economia. Um exemplo disso é a representação da utilidade marginal do consumo como um passeio aleatório com tendência (Hall, 1978). Tais oscilações de curto prazo podem se dar, por exemplo, quando há um choque temporário no preço de ações de uma economia. Conforme argumenta Hamilton (2018), preços de ações possuem alguma habilidade em antecipar mudanças no consumo agregado. Dessa forma, um choque temporário de preços de ações leva a mudanças de curto prazo no consumo agregado.

O método proposto por Müller e Watson (2017) conta com projeções da série temporal em um número pequeno de funções trigonométricas para extrair o componente de tendência da série analisada, que os autores denominam de variabilidade de baixa frequência.

De acordo com os autores, o uso de métodos de projeção é justificado pelo baixo custo computacional da aplicação de tais métodos, e pela simplicidade da inferência estatística resultante dessa aplicação. Seja x_t uma série temporal observada em $t = 1, \ldots, T$, e $\Psi_j(s) = \sqrt{2}\cos(js\pi)$. $\Psi_j(t/T)$ possui então período $2T/j$. Seja $\Psi(s) = \left[\Psi_1(s), \ldots, \Psi_q(s)\right]' \in \mathbb{R}^q$. Além disso, $\Psi_T = \left[\Psi\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{T}\right), \Psi\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{T}\right), \ldots, \Psi\left(\frac{T-\frac{1}{2}}{T}\right)\right]'$, uma matriz $T \times q$ obtida ao se avaliar $\Psi(\cdot)$ em $s = \frac{t-\frac{1}{2}}{T}$. As projeções de baixa frequência (a tendência de longo prazo) são os valores ajustados da seguinte regressão em MQO (Mínimos Quadrados Ordinários):

$$\hat{x}_t = \overline{x} + \Psi\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{T}\right)' X_T,$$

em que $\overline{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$ e $X_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \Psi((t-1/2)/T)x_t$ é o vetor de coeficientes da regressão. O j-ésimo coeficiente, X_{jT}, é a chamada j-ésima transformada de cosseno de $[x_1, x_2, \ldots, x_T]'$.

A taxa de zero beta. Esta seção introduz uma abordagem alternativa para a estimação da taxa livre de risco no Brasil, baseada no conceito de *taxa de zero beta*. O objetivo é complementar os resultados obtidos anteriormente a partir da equação fundamental de apreçamento de ativos e da estimação do fator estocástico de desconto (SDF), oferecendo uma medida adicional de taxa livre de risco.

A taxa de zero beta surge como uma alternativa conceitualmente consistente, pois corresponde ao retorno de um portfólio que é, por construção, ortogonal aos fatores de risco sistemático que precificam os ativos.

Diferentemente da taxa livre de risco tradicional, a taxa de zero beta não exige a existência de um ativo livre de risco negociável. Ela é identificada

diretamente a partir da estrutura de covariâncias dos retornos dos ativos e de suas relações fatoriais.

A abordagem utilizada nesta seção segue a metodologia utilizada por Di Tella et al. (2023). Dado um conjunto de K fatores, considere um conjunto de N ativos cujos excessos de retorno podem ser modelados como:

$$R_{i,t+1} - R_{0,t} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{K} \beta_{ij} F_{j,t+1} + \varepsilon_{i,t+1},$$

em que F_{t+1} é um vetor K de fatores, α_i e β_i são os coeficientes da regressão, e $\varepsilon_{i,t+1}$ é um erro idiossincrático com média condicional zero.

O primeiro fator é o excesso de retorno de mercado em relação à taxa de zero beta $R_{0,t}$:

$$F_{1,t+1} = R_{m,t+1} - R_{0,t}.$$

Os demais fatores podem incluir variáveis macroeconômicas ou fatores tradicionais de mercado.

A taxa de zero beta é modelada como uma função linear de L preditores observáveis $Z_{l,t}$ para $l \in \{1, \ldots, L\}$, o vetor denotado por Z_t. Para simplificar a notação, define-se $Z_{0,t} = 1$ e centraliza-se (retira-se a média de) $Z_{l,t}$ para $l \geqslant 1$. Assim:

$$R_{0,t}(\gamma) = \gamma' Z_t,$$

em que $\gamma \in \mathbb{R}^{L+1}$ é um vetor de constantes.

Aqui, o SDF é descrito como:

$$\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} = R_{0,t}^{-1} + \sum_{j=1}^{K} \omega_{j,t} \left(F_{j,t+1} - \mathbb{E}_t \left[F_{j,t+1} \right] \right) + \zeta_{t+1},$$

com

$$\mathbb{E}_t[\zeta_{t+1}] = 0,$$

ζ_{t+1} não correlacionado com retornos condicionais em t.

A principal distinção conceitual entre o SDF especificado nesta seção e aquele adotado inicialmente reside no grau de estrutura econômica imposto ao processo de precificação. O SDF derivado do modelo CCAPM implica uma formulação estrutural derivada diretamente de um problema de otimização intertemporal do consumidor representativo. Nesse caso, o SDF é inteiramente determinado por preferências, consumo e fator de desconto intertemporal, e sua dinâmica é restrita pela forma funcional da utilidade marginal.

Em contraste, o SDF utilizado na modelagem da taxa de zero beta não impõe uma estrutura explícita de preferências nem vincula diretamente o desconto intertemporal ao consumo agregado. Em vez disso, captura uma série de fatores macroeconômicos precificados de maneira heterogênea ao longo do tempo ($\omega_{j,t}$).

Ainda de acordo com os autores, substituindo na equação de apreçamento:

$$1 = \mathbb{E}_t\left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} R_{i,t+1}\right] = \mathbb{E}_t\left[\left(R_{0,t}^{-1} + \sum_{j=1}^{K} \omega_{j,t}\left(F_{j,t+1} - \mathbb{E}_t[F_{j,t+1}]\right)\right) R_{i,t+1}\right].$$

Os resíduos da equação se tornam então:

$$\hat{\varepsilon}_{i,t+1}(\theta) = R_{i,t+1} - \alpha_i(\theta) - (1 - \beta_{i1}(\theta))\left(\gamma'(\theta) Z_t\right) - \beta_{i1}(\theta) R_{m,t+1} - \sum_{j=2}^{K} \beta_{ij}(\theta) F_{j,t+1}$$

A estimação da taxa de zero beta baseia-se em um sistema de restrições de momento que explora simultaneamente a estrutura fatorial dos retornos e a propriedade definidora de portfólios zero beta. Seja $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ o vetor de parâmetros. O primeiro conjunto de momentos decorre das regressões em

série temporal dos excessos de retorno sobre fatores de risco:

$$\mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_{t+1}(\theta) \otimes F_{t+1}(\theta)] = 0,$$

o qual impõe ortogonalidade entre resíduos idiossincráticos e fatores sistemáticos. Essas condições identificam os parâmetros (α,β) associados à estrutura fatorial dos retornos.

O segundo conjunto de momentos incorpora a hipótese fundamental de que todos os portfólios zero beta possuem retorno esperado igual à taxa de zero beta condicional. Para formalizar essa restrição, define-se a matriz de projeção ortogonal

$$H(\theta) = I_N - \beta(\theta)\beta(\theta)^{+},$$

em que $(\cdot)^{+}$ denota a pseudo-inversa de Moore–Penrose. Essa matriz projeta qualquer vetor de pesos no subespaço ortogonal ao espaço gerado pelos betas, garantindo que apenas combinações zero beta sejam consideradas. As condições de momento associadas são

$$\mathbb{E}[H(\theta)\,(R_{t+1} - \iota\,\gamma'(\theta)Z_t) \otimes Z_t] = 0,$$

as quais impõem que o retorno esperado de qualquer portfólio zero beta seja igual à taxa de zero beta modelada como função linear dos instrumentos.

Reunindo ambos os blocos, o vetor de momentos é dado por

$$g_{t+1}(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{t+1}(\theta) \otimes F_{t+1}(\theta) \\ H(\theta)\,(R_{t+1} - \iota\gamma'(\theta)Z_t) \otimes Z_t \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{E}[g_{t+1}(\theta)] = 0.$$

Para obter identificação eficiente da taxa de zero beta, utiliza-se um portfólio zero beta específico: o portfólio de investimento unitário de mínima variância. Dada a matriz de covariância dos retornos $\Sigma_R(\theta)$, seus pesos são obtidos pela

solução do problema de minimização quadrática

$$\min_{w} \; w'\Sigma_R(\theta)w \quad \text{sujeito a} \quad w'\beta(\theta) = \vec{0}, \quad w'\iota = 1,$$

cuja solução fechada é

$$w(\theta) = \Sigma_R(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}\iota & \beta(\theta)\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\iota' \\ \beta(\theta)'\end{bmatrix}\Sigma_R(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}\iota & \beta(\theta)\end{bmatrix}\right)^{+}\begin{bmatrix}1 \\ \vec{0}\end{bmatrix}.$$

A estimação é conduzida via GEL, que generaliza o GMM ao construir estimadores baseados em funções de verossimilhança empírica associadas às restrições de momento. A matriz de ponderação adotada é

$$W(\theta) = \begin{bmatrix} I_{N(K+1)} & 0 \\ 0 & w(\theta)w(\theta)' \otimes I_{L+1} \end{bmatrix},$$

a qual pondera o segundo bloco de momentos pelo portfólio zero beta de mínima variância, garantindo identificação exata do sistema.

Embora a formulação original da literatura utilize o GMM, a escolha do GEL neste artigo decorre de suas propriedades econométricas superiores em amostras finitas e maior robustez a erros de especificação. Em particular, estimadores GEL apresentam menor viés de pequena amostra, melhores propriedades de invariância e distribuição assintótica mais estável quando o conjunto de momentos é altamente não linear ou potencialmente redundante. Essas características são especialmente relevantes neste contexto, dado que a taxa de zero beta depende simultaneamente de parâmetros fatoriais, instrumentos macroeconômicos e restrições de projeção ortogonal.

Por fim, como o sistema é exatamente identificado, condicionalmente a γ, as estimativas pontuais de (α_i,β_{ij}) coincidem com as estimativas usuais de MQO. A ressalva é necessária porque a construção dos excessos de retorno e do fator de mercado requer previamente uma estimativa da própria taxa de zero beta.

Assim como nos métodos anteriores, este procedimento requer um conjunto de retornos de portfólios de ações ($R_{i,t}$), um conjunto de fatores ($F_{k,t}$) e um conjunto de instrumentos ($Z_{l,t}$).

4. Resultados

Amostra de Dados. O período de coleta foi do primeiro trimestre de 2002 ao segundo trimestre de 2022. Utilizou-se dados de consumo final das famílias e PIB a preços de mercado, ambos com frequência trimestral, encadeados a preços de 1995, e retirados do Sistema IBGE de Recuperação Automática (SIDRA) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os dados da razão consumo/PIB foram utilizados na equação (5). Para o cálculo do crescimento do consumo (C_{t+1}/C_t) foram utilizados dados dessazonalizados do consumo final das famílias encadeados a preços de 1995, também retirados do SIDRA. Estes dados foram utilizados no cálculo do SDF extraído da utilidade CRRA. Os dados de expectativa de inflação (expectativa média de inflação, medida pelo IPCA e acumulada para os próximos doze meses) foram retirados do Banco Central do Brasil, Boletim, Seção Atividade Econômica (Bacen / Boletim / Ativ. Ec.) e foram utilizados na equação (4). Os dados da taxa DI foram retirados do Sistema Gerador de Séries Temporais (SGS) do Banco Central do Brasil.

Para representar estatísticas de retornos de ativos, coletou-se dados trimestrais dos retornos das 150 ações mais bem posicionadas na B3. As ações foram classificadas em ordem decrescente de acordo com o volume de negociação médio durante o período de análise. Em seguida, foram retirados os papéis cujos retornos não estavam disponíveis para algum sub-período da amostra. Ao final, restaram 76 papéis. Os retornos do Ibov (Índice Bovespa) foram retirados da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima)[3]. Para o cálculo dos retornos reais, utilizou-se dados de inflação, medidos pelo IPCA acumulado em 12 meses, que foram retirados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Sistema Nacional de Índices de Preços ao

[3]Foram utilizadas médias trimestrais dos retornos do Ibovespa.

Consumidor (IBGE/SNIPC). Todos os dados de inflação, retornos e o da taxa DI foram anualizados.

Para a estimação do modelo MQO (Mínimos Quadrados Ordinários) na equação (5), foram utilizados dados do logaritmo natural da razão consumo/PIB e, no vetor X_t, foram testadas quatro combinações de retornos. Essas combinações consistiram em utilizar-se: os retornos do Ibovespa, a média das cinco, das dez e das quinze ações de melhor *performance* no período, de acordo com o volume médio de negociação. Foram elas: PETR4, VALE3, ITUB4, BBDC4, BBAS3, PETR3, ABEV3, ITSA4, GGBR4, USIM5, CSNA3, CMIG4, ELET3, ELET6, EMBR3. Estas carteiras foram utilizadas também nas condições de momentos do GMM e do GEL e nos seus respectivos vetores de instrumentos.

A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas das séries de retornos reais utilizadas. Para ilustrar as dinâmicas das demais variáveis ao longo do tempo, apresentam-se as Figuras 1 e 2.

Tabela 1
Estatísticas dos ativos utilizados

Ativo	Retorno real médio (% a.a.)	Desvio-padrão (p.p.)
Média TOP5	−0,64	14,81
Média TOP10	−0,52	14,89
Média TOP15	−0,57	14,50
IBOV	18,54	60,29

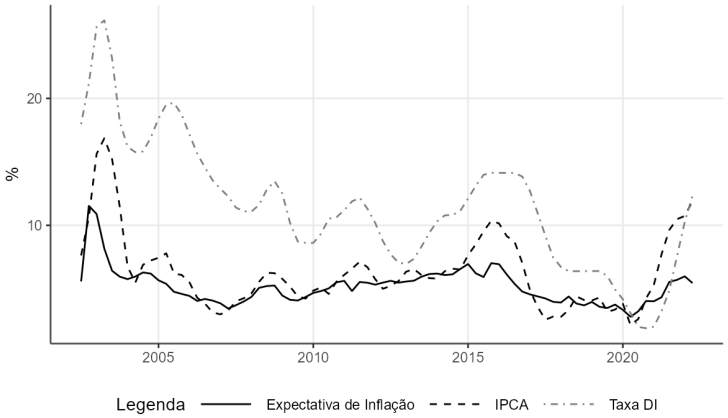
Fontes: Economatica e Anbima

A Figura 1 ilustra o comportamento da taxa DI, da expectativa de inflação e do IPCA ao longo do tempo. Os dados foram transformados da frequência mensal para a trimestral utilizando a média do período referente a um trimestre.

O crescimento (bruto) do consumo foi utilizado para representar o termo C_{t+1}/C_t nas equações (9) e (10) e nos instrumentos z_t do GMM e GEL.

A Figura 2 mostra um choque abrupto no crescimento do consumo em 2020, refletindo os impactos imediatos da pandemia de COVID-19, seguido de uma recuperação rápida à medida que restrições foram flexibilizadas e estímulos econômicos foram implementados. Teoricamente, mesmo diante da volatilidade extrema do consumo nesse período, a taxa livre de risco deveria

Figura 1
Expectativa de inflação, IPCA e DI trimestrais (% a.a.)



Fontes: Banco Central do Brasil e IBGE

Figura 2
Crescimento do consumo



Fonte: SIDRA IBGE

permanecer estável, uma vez que pela hipótese de covariância zero, ela não é afetada por choques econômicos.

Estimação do SDF. Serão apresentados os resultados da estimação do modelo MQO da equação (5) para os três modelos em questão, bem como as estimativas dos parâmetros β e σ nos modelos GMM e GEL, e as taxas livres de risco estimadas por cada um dos três modelos.

Na equação (5), o vetor X_t foi construído de forma a conter algum dos seguintes retornos: $\overline{RET5}_t$, $\overline{RET10}_t$, $\overline{RET15}_t$, que são, respectivamente, a média dos cinco, dez e quinze retornos das ações mais bem posicionadas no *ranking* de ativos, ou $Ibov_t$, que são os retornos do Ibovespa. A escolha do modelo de MQO que foi levado adiante se deu com base no seu R^2 ajustado e/ou na significância dos coeficientes, ou seja, no p-valor de cada um deles.

Na estimação do modelo AIF, o termo $\overline{R}_t$ incluiu os 76 papéis que fizeram parte do *ranking* de ativos para a construção de $\overline{R}_t^A$ e $\overline{R}_t^G$. Após a construção de $\overline{R}_t$, os valores encontrados para M_t^{AIF} de acordo com a equação (6) foram utilizados na regressão em (5) para estimar-se $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}$. A Tabela 2 representa os resultados dessa regressão em MQO para o modelo AIF.

Tabela 2
Resultados do modelo MQO - AIF

	MQO 1		MQO 2		MQO 3		MQO 4	
	Est.	p	Est.	p	Est.	p	Est.	p
$\overline{RET5}_t$	−0,0004	0,997						
$\overline{RET10}_t$			−0,02	0,838				
$\overline{RET15}_t$					−0,03	0,792		
$Ibov_t$							−0,02	0,460
$\ln(C_t/PIB_t)$	0,2465	<0,001***	0,25	<0,001***	0,25	<0,001***	0,25	<0,001***
R^2 ajustado	0,9814		0,9814		0,9814		0,9815	

Nota: * $p < 0{,}05$; ** $p < 0{,}01$; *** $p < 0{,}001$. Fonte: Elaboração própria.

Pela Tabela 2, nota-se que em nenhum modelo os retornos foram significantes, mas em todos eles a variável $\ln(C_t/PIB_t)$ apresentou p-valor < 0,05. Os modelos também apresentaram bons valores para o R^2 ajustado, todos acima de 0,98. Com base no p-valor de $\ln(C_t/PIB_t)$ e no R^2 das quatro regressões, escolheu-se então o modelo MQO 4 para prosseguir com as estimativas da taxa livre de risco no modelo AIF.

Para a estimação dos parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}$ nos modelos GMM e GEL, foram testadas diferentes combinações de carteiras para representar o termo R_{t+1} nas

condições de momentos. Estas carteiras foram as mesmas testadas nos modelos de MQO da equação (5), isto é, $\overline{RET5}_{t+1}$, $\overline{RET10}_{t+1}$, $\overline{RET15}_{t+1}$ ou $Ibov_{t+1}$. Para o vetor de instrumentos, testou-se os modelos com $z = (1, R_t, C_t/C_{t-1})$, $z = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2})$ e $z = (1, C_t/C_{t-1})$.

No vetor z, o termo R_t representa $\overline{RET5}_t$, $\overline{RET10}_t$, $\overline{RET15}_t$ ou $Ibov_t$. As combinações de retornos foram feitas considerando-se tanto as quatro carteiras em conjunto quanto apenas uma delas, ou ainda combinações entre duas e três carteiras. Para fins de ilustração, considere os casos:

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= (\overline{RET5}_{t+1}, \overline{RET10}_{t+1}, \overline{RET15}_{t+1}, Ibov_{t+1}), \\ R_t &= (\overline{RET5}_t, \overline{RET10}_t, \overline{RET15}_t, Ibov_t). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= (\overline{RET5}_{t+1}, \overline{RET10}_{t+1}), \\ R_t &= (\overline{RET5}_t, \overline{RET10}_t). \end{aligned}$$

A mesma lógica aplica-se aos casos em que se utilizam três carteiras ou apenas uma delas.

As escolhas para R_{t+1} e z se deram com base no critério de significância econômica dos parâmetros estimados. Isto é, procurou-se identificar combinações de retornos e instrumentos que gerassem estimativas de β tais que $\hat{\beta} \in (0,1)$ e estimativas de σ tais que $\hat{\sigma} > 0$. Para o GMM, a combinação que gerou os resultados mais aderentes foi $R_{t+1} = Ibov_{t+1}$ e $z = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2})$. Para o GEL, as escolhas para os retornos foram $R_{t+1} = \overline{RET15}_{t+1}$, e para o vetor de instrumentos, utilizou-se $z = (1, \overline{RET15}_t, C_t/C_{t-1})$. A Tabela 3 ilustra as estimações realizadas para β e σ para os modelos GMM e GEL, bem como os resultados para o Teste J de sobreidentificação.

Nota-se pela Tabela 3 que não há evidência de especificação incorreta para os modelos estimados, pois não se rejeita a hipótese nula para o teste J ao nível 0,05. Entretanto, apenas o estimador $\hat{\beta}$ foi ao mesmo tempo estatisticamente e economicamente significativo em ambos os modelos. O estimador $\hat{\sigma}$, por outro lado, não foi estatisticamente significativo em nenhum deles, e foi econo-

Tabela 3
Parâmetros estimados dos modelos GMM e GEL

	GMM		GEL	
	Estim.	*p*-valor	**Estim.**	**p-valor**
$\hat{\beta}$	0,8593	<0,0010***	0,9869	<0,0010***
$\hat{\sigma}$	1,3526	0,9080	−2,1872	0,1710
Estatística J	2,5121		0,33384	
DF	1		1	
p-valor (J)	0,11297		0,174	

Nota: * $p < 0{,}05$; ** $p < 0{,}01$; *** $p < 0{,}001$. DF: graus de liberdade para a construção da estatística J. Fonte: Elaboração própria.

micamente significativo apenas no modelo GMM. Para fins de comparação com alguns resultados da literatura, observa-se que Cysne (2006) encontra valores para σ entre 14,15 e 19,12. Para o fator de desconto, o autor encontra $\beta = 0{,}995$ em simulações com $\sigma > 7$, e $\beta = 0{,}9740$ em simulações com $\sigma > 9$. Já Issler e Piqueira (2000) encontram um valor mediano de 0,96 para β considerando dados anualizados em frequência trimestral e 1,70 para σ.

As comparações com estes trabalhos na literatura brasileira indicam que os modelos não apresentaram resultados robustos. Para o GMM, embora o coeficiente de aversão ao risco estimado esteja próximo ao da literatura, ele não é significante, e o valor para o fator de desconto subjetivo se mostrou muito baixo. Para o GEL, embora o fator de desconto tenha se mostrado significante e em linha com a literatura, o coeficiente de aversão ao risco não foi significante e possui sinal negativo, indicando um comportamento de afinidade ao risco do investidor brasileiro.

Com as estimativas acima, os valores calculados para M_{t+1}^{GMM} e M_{t+1}^{GEL} de acordo com as equações (9) e (10), respectivamente, foram utilizados na regressão em (5) para estimar $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}$. As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados dos modelos MQO para o GMM e para o GEL, respectivamente.

Tabela 4
Resultados do modelo MQO - GMM

	MQO 1		MQO 2		MQO 3		MQO 4	
	Est.	p	Est.	p	Est.	p	Est.	p
$\overline{RET5}_t$	−0,06	0,001**						
$\overline{RET10}_t$			−0,06	<0,001***				
$\overline{RET15}_t$					−0,06	<0,001***		
$Ibov_t$							−0,01	0,014*
$\ln(C_t/PIB_t)$	0,22	<0,001***	0,22	<0,001***	0,22	<0,001***	0,21	<0,001***
R^2 ajustado	0,9993		0,9994		0,9994		0,9993	

Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
Fonte: Elaboração própria.

Tabela 5
Resultados do modelo MQO - GEL

	MQO 1		MQO 2		MQO 3		MQO 4	
	Est.	p	Est.	p	Est.	p	Est.	p
$\overline{RET5}_t$	0,13	<0,001***						
$\overline{RET10}_t$			0,14	<0,001***				
$\overline{RET15}_t$					0,14	<0,001***		
$Ibov_t$							0,03	<0,001***
$\ln(C_t/PIB_t)$	0,21	<0,001***	0,21	<0,001***	0,21	<0,001***	0,23	<0,001***
R^2 ajustado	0,9984		0,9985		0,9985		0,9983	

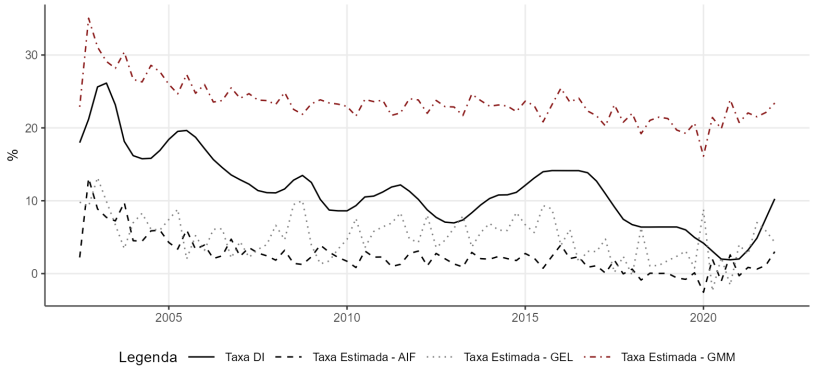
Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
Fonte: Elaboração própria.

Os coeficientes de todos os retornos e de $\ln(C_t/PIB_t)$ foram estatisticamente significantes para todos os modelos de MQO, tanto para o GMM quanto para o GEL, e apresentaram bons valores para o R^2 ajustado, todos acima de 0,99. Com base no R^2 e no p-valor, para o GMM o modelo que foi levado adiante foi o MQO 3, e para o GEL a escolha foi o MQO 2.

Finalmente, com os resultados de $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}$ encontrados pelas três abordagens (AIF, GMM e GEL), estimou-se a taxa livre de risco nominal da equação (4). A Figura 3 ilustra o comportamento das taxas estimadas pelos três modelos e o comportamento da DI ao longo do tempo, para fins de comparação entre os resultados.

Os resultados encontrados pelos modelos AIF e GEL vão ao encontro dos resultados de Bonomo e Domingues (2002), que encontram evidências de um

Figura 3
DI vs. Taxas estimadas (% a.a.)



Nota. Fonte: Elaboração própria

risk-free rate puzzle invertido para o Brasil, em que as taxas estimadas pelos modelos são menores que aquelas observadas na economia. No modelo dos autores, essa discrepância entre a taxa resultante do modelo e a taxa observada surge ao se utilizar um fator de desconto subjetivo (β) compatível com dados trimestrais anualizados, isto é, no intervalo entre 0,9 e 1.

Por outro lado, o modelo GMM vai ao encontro do *risk-free rate puzzle* clássico de Weil (1989), em que as taxas estimadas pelo modelo são maiores que aquelas observadas na economia. No modelo do autor, para encontrar taxas livres de risco estimadas próximas às observadas, seria necessário ajustar o fator de desconto subjetivo para algo maior que 1, o que contraria as hipóteses do modelo teórico.

A Tabela 6 ilustra o comportamento médio dessas taxas, bem como o desvio-padrão de cada uma delas.

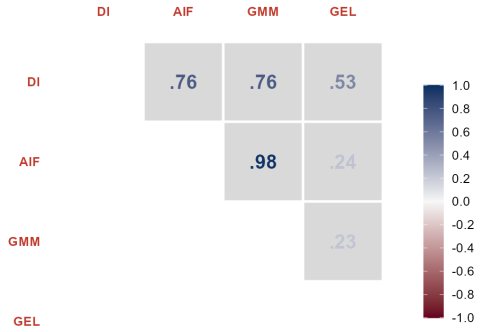
Apesar das divergências com a literatura, nota-se pela Figura 4, que as taxas estimadas foram positivamente correlacionadas entre si e com a DI, o que reforça a robustez das metodologias empregadas nas estimações. Mesmo assim, pela Figura 3 e pela Tabela 6, nota-se que essas taxas diferem muito entre si.

Tabela 6
Médias e desvios-padrão das taxas estimadas e da DI

	Média (% a.a.)	Desvio-padrão
AIF	2,4700	2,4500
GMM	23,5200	2,8000
GEL	5,0300	2,9400
DI	11,5400	5,1400

Fonte: Elaboração própria

Figura 4
Correlações entre as diferentes taxas



Fonte: Elaboração própria

Resultados da taxa de zero beta. Foi necessário reduzir o escopo amostral de retornos utilizados na estimação. Essa decisão decorre de restrições econométricas impostas pela metodologia, em particular a necessidade de que matrizes como a matriz de covariância dos retornos e a matriz associada às condições de momento sejam bem condicionadas e invertíveis.

Em amostras finitas relativamente curtas, a inclusão de muitos ativos tende a gerar matrizes próximas de singularidade, prejudicando a estabilidade numérica e a identificação dos parâmetros. Assim, optou-se por restringir a amostra às dez ações com maior volume médio de negociação no período, garantindo maior liquidez, menor ruído idiossincrático e melhor comportamento estatístico das matrizes envolvidas.

Os fatores de risco utilizados foram o excesso de retorno do mercado acionário e o crescimento do consumo agregado. O primeiro é representado pelos retornos do índice Ibovespa e corresponde ao fator de mercado tradicional em modelos de apreçamento de ativos, refletindo a componente sistemática comum aos retornos. O segundo decorre da hipótese de que a precificação de ativos depende do risco associado a variações intertemporais no consumo agregado. A inclusão simultânea desses fatores permite capturar tanto o canal financeiro quanto o canal macroeconômico de risco sistemático.

No que se refere aos instrumentos, utilizou-se o vetor de constantes, a taxa DI contemporânea, as expectativas de inflação e a taxa DI defasada em um trimestre. O vetor de constantes garante a identificação do componente médio das condições de momento. A taxa DI e sua defasagem atuam como variáveis de informação do conjunto informacional disponível aos agentes, capturando o estado corrente e recente das condições monetárias. Já as expectativas de inflação funcionam como proxy para expectativas macroeconômicas prospectivas, frequentemente associadas ao prêmio de risco e à dinâmica intertemporal das taxas de juros reais.

Os resultados empíricos indicam elevada sensibilidade da taxa de zero beta estimada à escolha do conjunto de instrumentos. Em especificações que utilizam apenas o vetor de constantes, a taxa DI contemporânea e sua defasagem, a trajetória estimada da taxa de zero beta apresenta comportamento bastante semelhante ao da própria taxa DI.

Esse resultado constitui evidência favorável à adequação desse conjunto instrumental, pois indica que o modelo é capaz de reproduzir a dinâmica temporal dos movimentos da taxa observada, preservando simultaneamente a interpretação estrutural da taxa de zero beta como retorno livre de exposição aos fatores de risco sistemático.

Conforme ilustrado na Figura 5, as duas séries exibem variações semelhantes ao longo do tempo, com diferenças persistentes de nível entre elas. Essas diferenças podem ser interpretadas como uma medida empírica do prêmio de risco embutido na taxa DI, refletindo a compensação exigida pelos agentes

Figura 5
Taxa de zero beta (instrumentos: DI e sua defasagem)



Fonte: Elaboração própria

para se exporem aos riscos macroeconômicos e financeiros característicos da economia brasileira.

Por outro lado, quando as expectativas de inflação substituem a defasagem da taxa DI no conjunto de instrumentos, as estimativas passam a exibir trajetórias inconsistentes com a dinâmica observada das taxas de juros.

Figura 6
Taxa de zero beta (instrumentos: DI e expectativas de inflação)



Fonte: Elaboração própria

Uma possível explicação para esse resultado reside no fato de que expectativas de inflação podem introduzir ruído adicional ao sistema de momentos, seja por erro de mensuração, seja por desalinhamento temporal entre expectativas reportadas e variáveis efetivamente relevantes para a precificação de ativos. Além disso, expectativas inflacionárias frequentemente apresentam alta persistência e forte correlação com a própria taxa DI, o que pode reduzir a informação incremental trazida por esse instrumento e deteriorar a condição de posto das matrizes de momento. Em termos econométricos, isso pode amplificar problemas de multicolinearidade e enfraquecer a identificação, resultando em estimativas instáveis.

Esses achados reforçam a importância da escolha criteriosa de instrumentos em modelos estimados por métodos baseados em momentos. Como a identificação da taxa de zero beta depende diretamente do conteúdo informacional das variáveis instrumentais, especificações que utilizam instrumentos mais alinhados com a estrutura dinâmica do sistema econômico tendem a produzir resultados mais estáveis e economicamente interpretáveis.

5. Conclusão

Com base em dados trimestrais de retornos de ações da B3, retornos do Ibovespa e consumo (em nível e como proporção do PIB) entre o primeiro trimestre de 2002 e o segundo trimestre de 2022, este estudo estimou a taxa livre de risco para o Brasil no contexto do modelo CCAPM com utilidade CRRA e sob diferentes abordagens econométricas. As estimativas obtidas pelos métodos AIF, GMM e GEL diferiram entre si e em relação à taxa DI — usualmente adotada como *proxy* para a taxa livre de risco no país —, embora tenham apresentado correlação positiva com ela. O modelo GMM gerou, em média, uma taxa livre de risco superior à taxa DI, sugerindo a existência de um *risk-free rate puzzle* na economia brasileira, similar ao identificado por Weil (1989) para os Estados Unidos. Já os modelos AIF e GEL resultaram, em média, em taxas inferiores à taxa DI, indicando um *risk-free rate puzzle* invertido, em linha com o documentado por Bonomo e Domingues (2002) para o Brasil. Além disso, as estimativas dos parâmetros β e σ nos modelos GMM e GEL mostraram

pouca aderência dos dados brasileiros ao CCAPM, especialmente quando comparadas a estudos anteriores na literatura de macrofinanças nacional.

A estimação da taxa de zero beta acrescenta uma dimensão adicional à análise. Observou-se que os resultados são sensíveis à escolha dos instrumentos: especificações que utilizam apenas o vetor de constantes, a taxa DI contemporânea e sua defasagem produzem trajetórias da taxa de zero beta bastante próximas à dinâmica observada da própria DI. Tal evidência sugere que esse conjunto de instrumentos capta adequadamente a variação temporal dos componentes sistemáticos do fator de desconto estocástico, permitindo identificar com maior clareza o prêmio de risco embutido na taxa DI ao longo do tempo. Em contraste, especificações que substituem a defasagem da DI por expectativas de inflação geram séries estimadas menos consistentes com a trajetória observada das taxas de juros, possivelmente refletindo violações das condições de ortogonalidade exigidas para a identificação robusta dos parâmetros.

A existência de discrepâncias persistentes entre as taxas estimadas e a taxa DI reforça a hipótese de que os títulos públicos domésticos não são percebidos como livres de risco no sentido usual empregado nas aplicações de macrofinanças. Por essa ótica, os resultados favorecem a interpretação de um *risk-free rate puzzle* invertido, em consonância com as evidências obtidas pelo modelo GEL. Do ponto de vista de políticas públicas, os agentes podem exigir prêmios adicionais para deter tais ativos, elevando o custo de financiamento e potencialmente enfraquecendo canais de transmissão da política monetária, o que dificulta o controle inflacionário e a estabilização do ciclo econômico.

A metodologia empregada pode ser aprimorada em diversas direções. Pesquisas futuras podem explorar especificações alternativas para a função utilidade, incluindo heterogeneidade entre agentes, restrições de liquidez e mercados incompletos. Também seria útil segmentar o consumo entre bens duráveis, não duráveis e serviços, ampliar a base de ativos para aumentar a representatividade da carteira e investigar formalmente se o diferencial entre a taxa DI e as medidas estimadas de taxa livre de risco e taxa de zero beta possui preço de risco nulo. Esses avanços podem contribuir para uma compreensão

mais profunda da estrutura de prêmios de risco na economia brasileira e da validade empírica de modelos de precificação intertemporal no contexto de mercados emergentes.

Nota Este trabalho deriva, em parte, da dissertação de mestrado de Rafael Nogueira do Prado, intitulada "Modelagem da taxa de juros de covariância zero para a economia brasileira".

Agradecimentos Os autores agradecem ao Prof. Marco Lyrio e ao Prof. João Victor Issler pelas valiosas sugestões e comentários sobre uma versão preliminar deste trabalho, que contribuíram para o seu aprimoramento. Agradecem também aos participantes do XXV Encontro Brasileiro de Finanças pelos comentários e sugestões. Eventuais erros e omissões remanescentes são de inteira responsabilidade dos autores.

Financiamento Rafael Nogueira do Prado agradece o apoio financeiro da CAPES, Código de Financiamento 001.

Conflitos de interesse Os autores declaram que não há conflitos de interesse.

Disponibilidade de dados Os dados utilizados no estudo são de duas naturezas. Os dados de fontes públicas podem ser obtidos diretamente pelo leitor seguindo as instruções descritas na Seção 4. Os dados de retorno de ações foram extraídos da plataforma Economatica, cujo acesso é proprietário e sujeito a licenciamento; em razão disso, não nos é possível compartilhá-los diretamente.

Disponibilidade de código O código-fonte utilizado para as estimações e geração das tabelas e figuras está disponível mediante solicitação aos autores.

Inteligência artificial Esta pesquisa utilizou ferramentas de inteligência artificial (IA) para auxiliar na análise de dados, redação do manuscrito e

geração de figuras. Todo o conteúdo gerado por IA foi criteriosamente revisado e validado pelos autores, a fim de garantir a precisão e a conformidade com a integridade científica do estudo. O uso de IA seguiu diretrizes éticas, assegurando transparência e conformidade com os padrões acadêmicos. Eventuais vieses ou limitações inerentes às ferramentas de IA foram cuidadosamente considerados na interpretação dos resultados. Os autores afirmam que o uso de IA não comprometeu a originalidade nem a integridade do trabalho.

Referências

Almeida, C. e Garcia, R. (2012). Assessing misspecified asset pricing models with empirical likelihood estimators, *Journal of Econometrics*, *170*(2), 519–537.

Anatolyev, S. e Gospodinov, N. (2011). *Methods for Estimation and Inference in Modern Econometrics*, CRC Press.

Araujo, F., Issler, J. V. e Fernandes, M. (2005). Estimating the stochastic discount factor without a utility function, *Ensaios Econômicos da EPGE*, *583*.

Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing, *The Journal of Business*, *45*(3), 444–455.

Bonomo, M. e Domingues, G. B. (2002). Os Puzzles Invertidos no Mercado Brasileiro de Ativos, *Finanças aplicadas ao Brasil*, FGV Editora, pp. 105–120.

Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics*, *7*(3), 265–296.

Brown, D. P. e Gibbons, M. R. (1985). A simple econometric approach for utility-based asset pricing models, *The Journal of Finance*, *40*(2), 359–381.

Campbell, J. Y. (1993). Intertemporal asset pricing without consumption data, *American Economic Review*, *83*(3), 487–512.

Campbell, J. Y. (2014). Empirical asset pricing: Eugene Fama, Lars Peter Hansen, and Robert Shiller, *The Scandinavian Journal of Economics*, *116*(3), 593–634.

Cochrane, J. H. (2005). *Asset Pricing: Revised Edition*, Princeton University Press.

Cochrane, J. H. (2009). *Asset Pricing: Revised Edition*, Princeton University Press.

Cysne, R. P. (2006). Equity-premium puzzle: Evidence from Brazilian data, *Economia Aplicada*, *10*(2), 161–180.

Di Tella, S., Hébert, B. M., Kurlat, P. e Wang, Q. (2023). The zero-beta interest rate, *Technical report*, National Bureau of Economic Research.

Dimson, E., Marsh, P. e Staunton, M. (2008). The Worldwide Equity Premium: A Smaller Puzzle, *Handbook of the Equity Risk Premium*, Elsevier, pp. 467–514.

Fama, E. F. e MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests, *Journal of Political Economy*, *81*(3), 607–636.

Farnsworth, H., Ferson, W. E., Jackson, D. L. e Todd, S. (2002). Performance evaluation with stochastic discount factors, *The Journal of Business*, *75*(3), 473–583.

Gomes, F. A. R., Costa, L. d. A. e Pupo, R. C. R. (2013). The equity premium puzzle: Analysis in Brazil after the Real Plan, *BAR-Brazilian Administration Review*, *10*(2), 135–157.

Hall, R. E. (1978). Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: Theory and evidence, *Journal of Political Economy*, *86*(6), 971–987.

Hamilton, J. D. (2018). Why you should never use the Hodrick-Prescott filter, *Review of Economics and Statistics*, *100*(5), 831–843.

Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *50*(4), 1029–1054.

Hansen, L. P., Heaton, J. e Yaron, A. (1996). Finite-sample properties of some alternative GMM estimators, *Journal of Business & Economic Statistics*, *14*(3), 262–280.

Hansen, L. P. e Jagannathan, R. (1991). Implications of security market data for models of dynamic economies, *Journal of political economy*, *99*(2), 225–262.

Hansen, L. P. e Richard, S. F. (1987). The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *55*(3), 587–613.

Hansen, L. P. e Singleton, K. J. (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *50*(5), 1269–1286.

Hansen, L. P. e Singleton, K. J. (1983). Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns, *Journal of Political Economy*, *91*(2), 249–265.

Harrison, J. M. e Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, *20*(3), 381–408.

Horowitz, J. L. (2009). *Semiparametric and Nonparametric Methods in Econometrics*, Vol. 12, Springer.

Imbens, G. W. (1997). One-step estimators for over-identified generalized method of moments models, *The Review of Economic Studies*, *64*(3), 359–383.

Issler, J. V. e Piqueira, N. S. (2000). Estimating relative risk aversion, the discount rate, and the intertemporal elasticity of substitution in consumption for Brazil using three types of utility function, *Brazilian Review of Econometrics*, *20*(2), 201–239.

Ito, M. e Noda, A. (2012). The GEL estimates resolve the risk-free rate puzzle in Japan, *Applied Financial Economics*, *22*(5), 365–374.

Kitamura, Y. e Stutzer, M. (1997). An information-theoretic alternative to generalized method of moments estimation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *65*(4), 861–874.

Krishnamurthy, A. e Vissing-Jorgensen, A. (2012). The aggregate demand for Treasury debt, *Journal of Political Economy*, *120*(2), 233–267.

Lucas, R. E. (1978). Asset prices in an exchange economy, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *46*(6), 1429–1445.

Mehra, R. e Prescott, E. C. (1985). The equity premium: A puzzle, *Journal of Monetary Economics*, *15*(2), 145–161.

Müller, U. K. e Watson, M. W. (2017). Low-Frequency Econometrics, *Advances in Economics and Econometrics*, Cambridge University Press, pp. 53–94.

Newey, W. K. e Smith, R. J. (2004). Higher order properties of GMM and generalized empirical likelihood estimators, *Econometrica*, *72*(1), 219–255.

Noda, A. (2011). Testing the "Catching Up with the Joneses" model with consumption externality in Japan, *Economics Bulletin*, *31*(2), 1648–1658.

Owen, A. B. (1988). Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional, *Biometrika*, *75*(2), 237–249.

Pereira, C. A. V. (2016). *Portfolio efficiency tests with conditioning information using empirical likelihood estimation*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.

Rosenberg, J. V. e Engle, R. F. (2002). Empirical pricing kernels, *Journal of Financial Economics*, *64*(3), 341–372.

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options, *The Bell Journal of Economics*, *7*(2), 407–425.

Sargan, J. D. (1958). The estimation of economic relationships using instrumental variables, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *26*(3), 393–415.

Sargan, J. D. (1959). The estimation of relationships with autocorrelated residuals by the use of instrumental variables, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, *21*(1), 91–105.

Simonassi, A. G. (2006). Estimando a Taxa de Retorno Livre de Risco no Brasil, *In: VI Encontro Brasileiro de Finanças, Vitória, Anais*, Encontro Nacional de Economia.

Smith, R. J. (1997). Alternative semi-parametric likelihood approaches to generalised method of moments estimation, *The Economic Journal*, *107*(441), 503–519.

Smith, R. J. (2011). GEL criteria for moment condition models, *Econometric Theory*, *27*(6), 1192–1235.

Van Binsbergen, J. H., Diamond, W. F. e Grotteria, M. (2022). Risk-free interest rates, *Journal of Financial Economics*, *143*(1), 1–29.

Weil, P. (1989). The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, *Journal of Monetary Economics*, *24*(3), 401–421.