



UM MODELO PARA O DIMENSIONAMENTO DE FROTA DE METRÔ

Sidnei Cardoso
IAG PUC-Rio

Gabriela Gonzalez Espinosa
IAG PUC-Rio

RESUMO

O investimento de capital na aquisição da frota necessária para a operação de uma linha de metrô tem impactos relevantes no custo total do sistema. Os métodos tradicionais utilizados para determinar a frota ótima envolvem tipicamente modelos estáticos que não consideram as incertezas de demanda de passageiros nem as incertezas técnicas da operação. O problema fundamental consiste em saber a quantidade específica e necessária de trens para cada circuito existente antes de um planejamento do CAPEX de material rodante. Neste artigo apresentamos um modelo dinâmico para o dimensionamento da frota de um sistema de metrô. O artigo propõe estabelecer o número de trens necessários para uma operação eficiente do sistema metroviário diante de uma flutuação da quantidade de passageiros ao longo do dia. O modelo dinâmico é projetado com base em dois tipos de análise: de acordo com o tempo do carrossel e a quantidade de trens que, por sua vez, depende da demanda existente de passageiros. Os resultados indicam que o modelo dinâmico oferece informações mais próximas da realidade pois considera as incertezas existentes. O modelo estático, por outro lado, considera apenas parâmetros baseados nas médias do setor, o que permite inconsistências. A abordagem exposta pode auxiliar governo ou outras autoridades envolvidas no planejamento de transporte urbano e mais especificamente sistemas de metrô a determinar valores mais precisos para o planejamento de CAPEX e o custo/benefício da aquisição de material rodante, levando em consideração a satisfação do usuário.

Palavras-chave: metrô, dimensionamento de frota, demanda de passageiros.

ABSTRACT

Capital investment in acquiring the fleet required for a subway line has relevant impacts on the system's total cost. Nonetheless, the traditional methods used to determine the optimal fleet typically involve static models that do not consider the uncertainties of shifting passenger demand or the technical uncertainties of the operation. The fundamental problem is knowing the specific and necessary number of trains for each circuit before planning the CAPEX of rolling stock. This article presents a dynamic model for the fleet sizing of a subway system. We propose establishing the number of trains needed for an efficient operation of the subway system to match the fluctuation in the number of passengers throughout the day. The dynamic model is devised based on two types of analysis: the time trains run through the carousel and the number of trains per day conditioned on the existing passengers' demand. The results indicate that the dynamic model offers information closer to reality considering the existing uncertainties. On the other hand, the static model only considers parameters based on means and averages, allowing inconsistencies. The presented approach can help the government or other authorities in better planning of subway systems and determining more accurately CAPEX values planning and the cost/benefit of rolling stock acquisition, considering the passengers' comfort and convenience.

Keywords: subway, fleet sizing, passenger demand.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de metrô constituem um elo fundamental do sistema de transporte público nos grandes centros urbanos mundiais. É um mecanismo eficiente que otimiza o tempo das pessoas, pois tem a função fundamental de trazer ou levar os indivíduos aos seus principais destinos de forma rápida, segura e eficiente. Cada composição possui uma capacidade fixa que não pode ser superada e cada cliente possui uma demanda conhecida que deve ser totalmente atendida. Cada cliente deve ser atendido por exatamente uma visita de um único trem e cada trem deve deixar o pátio e retornar após completar um número de ciclos no respectivo carrossel (Rahimi-Vahed, Crainic, Gendreau, & Rei, 2015). Um dos componentes de um sistema metroviário é o carrossel, circuito circular que passa sequencialmente por todas as estações e depois faz o retorno no sentido inverso até chegar ao ponto de início completando assim um ciclo. O correto funcionamento de um sistema metroviário leva em consideração algumas variáveis essenciais que devem ser ajustadas para se obter um funcionamento ótimo e eficiente para o público, tais como horários de saída e de chegada, quantidade de passageiros, extensão da linha, número de estações, quantidade e capacidade dos carros, período de operação contínua e tempo de parada em cada estação.

Usualmente, de acordo com L. Liu, Sun, Chen, and Ma (2019) o processo de planejamento de tráfego consiste em cinco etapas: estudo de demanda latente, projeto de rota, projeto de rede, desenvolvimento de cronograma e programação das composições. A primeira dessas etapas é a premissa e a base das demais etapas que, por sua vez, afetam o comportamento de escolha de viagem dos passageiros. Ao mesmo tempo Schöbel (2017) considera que o processo de planejamento no

transporte público geralmente pode ser dividido em três etapas: planejamento da linha, programação dos horários e programação dos veículos. Em qualquer sistema de transporte o dimensionamento da frota é decisão relevante, em função do significativo investimento de capital exigido e por isso, o objetivo é sempre determinar a frota mínima necessária para atender à demanda de passageiros. Tradicionalmente essa análise é realizada através de modelos estáticos que consideram apenas os valores fixos apresentados no projeto, o que apresenta muitas limitações. Nesse artigo apresentamos um modelo dinâmico para o dimensionamento de frota de metrô urbano onde incertezas são explicitamente modeladas e mostramos como esse modelo contribui para uma solução mais adequada. Além disso, trabalha-se em função do número de minutos que um trem leva para completar o ciclo para voltar ao início do carrossel, o número de viagens de trem necessárias por dia, o número máximo de trens que devem estar no carrossel nos momentos de pico e o tempo máximo de espera que um passageiro leva para embarcar nestes períodos de pico de demanda.

Este artigo apresenta a análise de um estudo de caso simulado de um sistema de metrô. A modelagem é realizada para definir o tamanho da frota de trens que leva em conta os atrasos aleatórios e incertezas que podem ocorrer. Alguns dos aspectos a ter em conta são: atrasos nas plataformas, problemas de sinalização, paradas inesperadas entre as estações e fluxo de passageiros. Assim sendo, a seguinte questão é definida como um problema de pesquisa: Qual a frota de trens necessária para a operação de um sistema metroviário, dado um aumento na demanda de passageiros ou um possível atraso entre estações? Pretende-se também estabelecer

as bases de conhecimento do número de trens necessários no planejamento de CAPEX, para analisar os custos que devem ser considerados na compra do número total de trens. Para atender à demanda de viagens e à satisfação dos passageiros, uma programação dos horários deve ser o mais compacta e flexível possível. Muitos sistemas de metrô precisam de subsídios do governo para cobrir as despesas operacionais. Os planejadores, às vezes, concentram-se mais nos custos operacionais do que nos fatores dos passageiros ao projetar uma programação ou horário (Robenek, Maknoon, Azadeh, Chen, & Bierlaire, 2016).

O problema analisado é de grande relevância hoje, pois o sistema de metrô constitui um transporte fundamental e um dos mais frequentados pela população. Portanto, seu funcionamento eficiente e eficaz é uma premissa básica tanto para o governo quanto para os cidadãos. No caso do governo, a correta especificação e gerenciamento de todas as variáveis que influenciam o funcionamento do sistema metroviário lhe permite examinar os custos de cada frota, bem como os custos gerais. Ao mesmo tempo, ajuda a esclarecer através da análise financeira o custo-benefício que se deve levar em conta e pode estar implícito na possibilidade de um contrato do tipo público-privado, o que é benéfico para todas as entidades econômicas. Já para os cidadãos otimiza o tempo no transporte de um local para outro. Além disso, mostra-se que, no modelo tradicional em que esse tipo de análise geralmente é realizado, os resultados são inferiores ao esperado contrariamente ao que acontece com a análise realizada com um modelo dinâmico que leva em consideração diversas incertezas.

A organização deste trabalho aparece da seguinte forma: após esta introdução é feita uma revisão da literatura, e em seguida é realizada uma descrição do problema de pesquisa. Nas seções 2 e 3 são apresentados os modelos e os resultados obtidos, e em seguida concluímos.

1.1 Revisão da literatura

1.1.1 Operação e otimização do sistema metroviário.

Inúmeros autores abordam na literatura o problema da operação e otimização do sistema metroviário. Por sua vez, existem outros estudos, explicados a seguir, que visam obter a melhor capacidade operacional do sistema metroviário por meio da combinação precisa de todas as variáveis envolvidas, ajustando-se mais à análise do estudo de caso abordado. Por exemplo, o modelo *Periodic Event Scheduling Problem* (PESP) é usado para resolver o problema de programações ferroviárias cíclicas introduzido por Serafini and Ukovich (1989). Por sua vez, L. G. Kroon and Peeters (2003) dinamizaram e desenvolveram o modelo PESP para obter um maior tempo de resposta através de alguns desvios no período de um ciclo permanente. O PESP considera o problema como um conjunto de eventos periodicamente recorrentes sob restrições de tempo. Também Voorhoeve (1993) utiliza o mesmo modelo para resolver o problema de programações ferroviárias periódicas para reduzir e controlar os custos operacionais. Outros autores como: Nachtigall (1994) e Odijk (1996) utilizam o mesmo modelo de análise PESP nas perspectivas de seus estudos. No caso particular de Nachtigall (1994), busca-se minimizar o tempo de espera dos passageiros diante de um aumento da demanda baseado em um modelo de regularidade do ciclo em conjunto com as limitações do modelo PESP para a criação do procedimento periódico dos horários de cada trem.

Khmelnitsky (2000) e R. R. Liu and Golovitcher (2003) desenvolveram análises e simulações com o uso de variáveis como os limites de velocidade e os gradientes de cada uma delas com base no Princípio de Pontryagin, utilizado na teoria do monitoramento otimizado para encontrar o melhor controle possível para a mudança de sistemas dinâmicos

de um estado para outro, especialmente na presença de restrições nos controles de estado ou de acesso. Albrecht and Oettich (2002) utilizam o mesmo princípio mencionado acima como solução para o problema de controle específico de trens em um carrossel. Além disso, fornecem uma proposta para resolver o cronograma de tempo de viagem recomendado para cada trem. O projeto de tabelas de horários cíclicas e robustas é uma conquista nesta área para enfrentar atrasos estocásticos, que podem agravar o fluxo de passageiros devido ao aumento da demanda nas estações. Alguns dos estudos que abordam essas dinâmicas de diferentes perspectivas são L. Kroon et al. (2008), Shafia et al. (2012) e Jamili et al. (2012). Pascual et al. (2013) estudaram a gestão de ativos para calcular o tamanho de uma frota de material rodante e a capacidade de manutenção que pode ser ajustada a um sistema metroviário. O modelo analítico proposto usa a taxa de custo global, disponibilidade e desempenho como indicadores de lucro. Dentro dos componentes de custo global envolvem: o custo de oportunidade associado à falta de operação no tempo correto, o custo do tempo de inatividade do veículo (pode ser ajustado para a frota de trens) e o custo do tempo de inatividade dos recursos de manutenção. Tudo com o objetivo de criar um equilíbrio de comando para poder identificar as principais compensações do sistema.

Gomes e Aguiar and Vils (2018) concordam que a velocidade dos trens interfere em grande medida no consumo de energia e otimização do sistema metroviário. Vários autores estudam essa dinâmica de diferentes maneiras e consideram que a otimização da velocidade é benéfica para o melhor funcionamento do sistema de metrô por meio da: otimização da frota de trens (Yin, Yang, Tang, Gao, & Ran, 2017) (Xu, Li, & Li, 2016), controle preciso da frota de trens (Su, Tang, & Wang, 2016) (Douglas, Roberts, & Hillmansen, 2016), sincronização entre a frota de trens (Tian,

Weston, Hillmansen, Roberts, & Zhao, 2016) (L. Li, Wang, Liu, & Chen, 2017) e a diferenciação das distribuições das linhas ferroviárias (Popescu, Bitoleanu, Deaconu, & Dobriceanu, 2016). Uma premissa fundamental do sistema de metrô, também conhecido como CBTC (*Communication Based Train Control*), é que o ATP (*Automatic Train Protection*), como sistema de segurança fundamental de todas as linhas de metrô, no trem reconhece sua localização e a comunica diretamente por meio de comunicação de dados (Wi-Fi ou rádio) para o ATP, que controla o tráfego e a rota, conforme demonstrado por Yu (2015). À medida que o sistema de controle interpreta a localização do trem, o mapa dos trilhos e seu destino, pode gerenciar suas curvas de aceleração e frenagem, bem como paradas e intervalos nas estações. Zafar, Khan and Araki (2012) sugerem que a partir da análise adequada dessas variáveis uma sincronização propícia pode ser obtida no sistema geral.

A utilização eficiente do material rodante (programação de veículos) é um objetivo importante a ser perseguido por uma empresa ferroviária devido ao investimento requerido ser intensivo em capital (Robenek et al., 2016). Com esse objetivo Lai, Fan, and Huang (2015) desenvolvem um modelo de otimização para melhorar a eficiência do uso de material rodante considerando as regulamentações e limitações práticas necessárias, onde um processo heurístico híbrido é projetado para melhorar a qualidade e eficiência da solução. Haahr, Wagenaar, Veelenturf, and Kroon (2016), usam CPLEX (software de otimização da IBM) e uma abordagem de coluna e linha para atribuir unidades de material rodante para agendar serviços em linhas ferroviárias de passageiros, preparar cronogramas diários e verificar sua aplicabilidade em tempo real testando diferentes cenários de interrupção. O CPLEX é usado para construir um Limite de Pareto de objetivos contraditórios. O princípio de Pareto afirma que, para

muitos eventos, aproximadamente 80% dos efeitos vêm de 20% das causas. E assim com o uso do software de otimização pretende-se encontrar os pontos de sensibilidade do sistema de trens para um melhor funcionamento. S. Li, Dessouky, Yang and Gao (2017) combinam as regras dinâmicas de trens e controles de passageiros para minimizar tempos e desvios na prestação de serviço das linhas de metrô, reduzindo assim a perda de faturamento do operador e os atrasos dos passageiros.

K. Li, Huang, and Schonfeld (2018) propõem um algoritmo de otimização contínua para obter horários não cíclicos considerando a demanda de passageiros que varia ao longo do tempo e os efeitos do congestionamento nas estações. Integra metas no planejamento da linha (frequência), programação (metas conflitantes, incluindo espera do passageiro / tempo e potência do veículo) e programação do veículo (custo do trem). Modelam especificamente a evolução dinâmica da quantidade de passageiros nos trens em cada estação, considerando as taxas de chegada de passageiros, a capacidade limitada dos trens e as taxas reais de embarque / desembarque de passageiros associadas à aglomeração. Também demonstram que os tempos de permanência são principalmente causados pelo número de passageiros embarcando e desembarcando e suas respectivas taxas, associadas ao congestionamento nas estações. Portanto, devem ser considerados como parâmetros que dependem de outras variáveis de decisão, ou seja, os tempos de saída da primeira estação e os tempos de viagem do segmento.

1.1.2 Satisfação do usuário no sistema metroviário

Ao mesmo tempo existem muitos modelos de pesquisas que abordam a satisfação do usuário a partir da análise de diferentes variáveis que influenciam no eficaz funcionamento do sistema de

metroviário. Börjesson and Rubensson (2019), por exemplo, analisam a interação entre a satisfação e a importância para novos atributos de qualidade nos dados de Estocolmo e exploram a interação entre a satisfação e o desempenho. O foco principal está em aglomeração e a confiabilidade. Uma das descobertas é que a aglomeração está entre os atributos com a menor satisfação, e o único atributo no qual a satisfação diminui ao longo do tempo. Ainda assim, a aglomeração é menos importante do que os atributos cognitivos: confiabilidade e frequência. Quanto maior a confiabilidade e menor aglomeração, mais satisfeitos são os passageiros com esses atributos. Um resultado intrigante deste estudo é que, embora a importância de aglomeração seja pequena, a menos que atinja níveis muito altos, ainda é o atributo com os menores níveis de satisfação.

Yap and Cats (2021), estimam um modelo de escolha discreta baseado em alternativas de rota observadas para inferir como os passageiros valorizam o tempo de espera após ser negado o embarque em redes de transporte público lotadas. Isso oferece uma indicação quantitativa de como o tempo de espera é percebido pelos passageiros, em comparação com o tempo inicial de espera para o primeiro veículo que chega, bem como em comparação com o tempo no interior do veículo. A análise permite uma melhor compreensão do impacto da superlotação no transporte público nas experiências de viagem dos passageiros e nas decisões de escolha da rota. Os resultados confirmam que o tempo de espera após o embarque negado é percebido de forma mais negativa em comparação com o tempo inicial de espera.

Björklund and Swärdh (2017) estimam os valores para o conforto, definidos pela obtenção de um assento, e para a redução da lotação a bordo do transporte público local na Suécia. Usam dados de preferência declarada e apresentam o *crowding* como um

nível de aglomeração neutro entre os viajantes em pé retratados em imagens apresentadas aos entrevistados. Analisam se há diferenças na vontade de pagar para ter mais conforto e redução de aglomeração. Em geral, discutem que as preferências variam de acordo com o modo de deslocamento, renda e propósito da viagem. Soza-Parra, Raveau, Muñoz, and Cats (2019) avaliam que a principal fonte de insegurança é encontrada no progresso da confiabilidade do serviço, que também afeta os tempos de espera e distribui os passageiros de forma desigual entre veículos. Investigam a existência de não linearidade na satisfação dos usuários causada por ambos os níveis de aglomeração e o número de embarques recusados utilizando um levantamento de usuários de ônibus e metrô que avalia a satisfação pós-serviço. Indicam que a confiabilidade do tempo de espera e os níveis de concorrência têm um impacto muito forte na avaliação da satisfação dos usuários. Além de que o impacto da falta de confiabilidade e o excesso de pessoas na experiência do passageiro é ainda mais exacerbado pela relação não linear entre satisfação e nível de aglomeração.

No evento particular do caso de estudo implementado, o foco concentra-se no tempo de espera do usuário e outras variáveis para a obtenção da quantidade de trens necessária no horário de pico e ótimo funcionamento do sistema de metrô.

1.2 Caso de Estudo

Para obter um equilíbrio e uma qualidade efetiva na mobilidade urbana é necessária uma rede de transportes públicos. Para isso, é necessária uma distribuição adequada entre a rede de ônibus e o transporte coletivo formado por trens

e metrô. Os trens e metrôs apresentam um benefício importante na mobilidade urbana. Algumas das vantagens são o fato de o passageiro passar pela roleta de ingresso antes de chegar à plataforma de embarque, que se encontra no mesmo nível do piso dos vagões. Ganha-se tempo e agilidade também porque, quando o transporte, chega todas as pessoas entram e saem praticamente de uma vez só. Por esses motivos algumas cidades com sistemas integrados de ônibus urbanos utilizam essa solução para melhorar o tráfego da região. Dessa forma o cidadão pode locomover-se com agilidade nos grandes centros urbanos.

O estudo de caso concentra-se na análise de uma linha em um sistema de metrô. Os principais agentes envolvidos são o governo e a concessionária. O primeiro terá interesse em obter um serviço ótimo com o menor custo possível para o usuário final, atendendo a todos os parâmetros de exigência de qualidade, confiabilidade e segurança. O segundo, enquanto isso, tentará obter o maior lucro possível ao prestar esse serviço. O maior desafio na operação do metrô é quando o sistema apresenta um funcionamento irregular, pois nos horários de pico, quando o número de passageiros aumenta, muitas vezes não há composições suficientes para suprir a demanda; ocorrendo, dessa forma, aglomerações devido ao tempo de espera nas plataformas pelos indivíduos e à falta de circulação contínua dos trens. Para analisar os problemas existentes, fizemos uma análise operacional a partir de dois modelos: um estático tradicional e outro dinâmico. Levando em consideração que a diferença entre um e outro são as flexibilidades das variáveis onde se concentram as maiores incertezas.

2. MODELO ESTÁTICO TRADICIONAL

Analizamos o dimensionamento e operação de um sistema metroviário através do modelo tradicional, que considera os valores estáticos dos parâmetros da operação. Dessa forma, não são levadas em consideração possíveis variações que

modifiquem o funcionamento do sistema. Os parâmetros do modelo foram baseados em dados típicos do setor e informações de peritos. As especificações básicas e premissas adotadas no estudo de caso da linha de metrô são os seguintes:

Tabela 1 - Parâmetros e premissas para um modelo de uma linha metroviária

Extensão do trajeto	18 Km
Número de estações	16
Número médio de usuários ao dia	600.000 passageiros
Velocidade média entre as estações	36 Km/h
Horário de funcionamento	06:00 às 23:00 h
Tempo médio de parada nas estações	30 segundos
Capacidade máxima da composição	1.650 passageiros
Nº médio de passageiros por composição	1175 passageiros
Intervalo médio entre composições	240 segundos

Assim calculamos o número de composições (trens) necessários para a operação neste modelo:

- 1) Carrossel:** um trem a 36Km/h demora uma hora se deslocando, sem contar as paradas nas estações, ao longo do carrossel – o sistema de ida e volta no trajeto da linha de metrô – e chega novamente ao ponto de partida e está pronto para reiniciar o percurso.

Parando em média 30 segundos em cada uma das 16 estações, tanto na ida quanto na volta temos o equivalente a $30s \times (2 \times 16) = 960s = 16$ minutos. Somado ao tempo de deslocamento esse trem completa o ciclo em 76 minutos.

- 2) Número de Trens:** com o cálculo de tempo no carrossel feito acima e com

um intervalo de 240 segundos (4 minutos) entre um trem e outro, temos que simultaneamente $76/4 = 19$ trens viajam no carrossel e ao longo do dia completarão 255 viagens ou ciclos inteiros nessa linha.

- 3) Tempo de espera:** com esse modelo estático, uma das principais medidas de qualidade do serviço, o tempo máximo que um passageiro precisa aguardar para embarcar já está dado, que é o intervalo fixo de 240 segundos entre os trens (4 minutos).

Com todos esses valores tomados pela média chegamos à conclusão de que 19 trens são suficientes para suportar a demanda deste sistema metroviário e assim fica definido o total de material rodante para o CAPEX – de maneira simples demais para não dizer equivocada – necessário para a operação.

3. MODELO DINÂMICO

A modelagem dinâmica permite incorporar algumas incertezas das atividades diárias de um sistema de transporte metroviário. Para chegar ao mesmo objetivo do modelo discutido anteriormente, definir o número mínimo de trens necessários à operação do metrô, acrescentamos fontes de incerteza que influenciam o modelo e dividimos a análise também em três partes: (1) incertezas referentes ao tempo para percorrer o carrossel, (2) o número de trens em atividade dentro do carrossel ao mesmo tempo e (3) a qualidade do serviço prestado refletido no tempo de espera que um passageiro consome aguardando para embarcar em uma estação.

Para executar essas modelagens utilizamos o software Microsoft Excel com o complementar (add-on) @Risk versão 8.1.1 desenvolvido pela empresa Palisade LLC e através dele conduzimos simulações de Monte Carlo com 100.000 interações para cada modelo.

3.1 Tempo no carrossel

Esse é o tempo que uma composição permanece no carrossel. Esse tempo é influenciado pelas incertezas: i) tempo de parada nas estações para o embarque e desembarque de passageiros, (ii) o número de segundos acelerando a composição para se chegar à velocidade de cruzeiro desde o momento da partida e (iii) da mesma forma o tempo de frenagem quando a composição sai da velocidade de cruzeiro até a parada total dos vagões na próxima estação.

Para o tempo nas estações e os processos de aceleração e frenagem levamos em conta valores mínimos, médios e máximos em uma distribuição triangular conforme a Tabela 2. Já a velocidade de cruzeiro segue uma distribuição Normal com média de 10m/s (36Km/h) e desvio padrão σ de 1,5m/s (5,4Km/h). Como a distribuição Normal tem as extremidades infinitas, fizemos uma limitação forçada em 2m/s (7,0Km/h) na parte inferior e a máxima em 22,22m/s (80Km/h). Esses valores estão mais bem descritos na Tabela 2.

Tabela 2 – Incertezas ao percorrer o carrossel e respectivas distribuições.

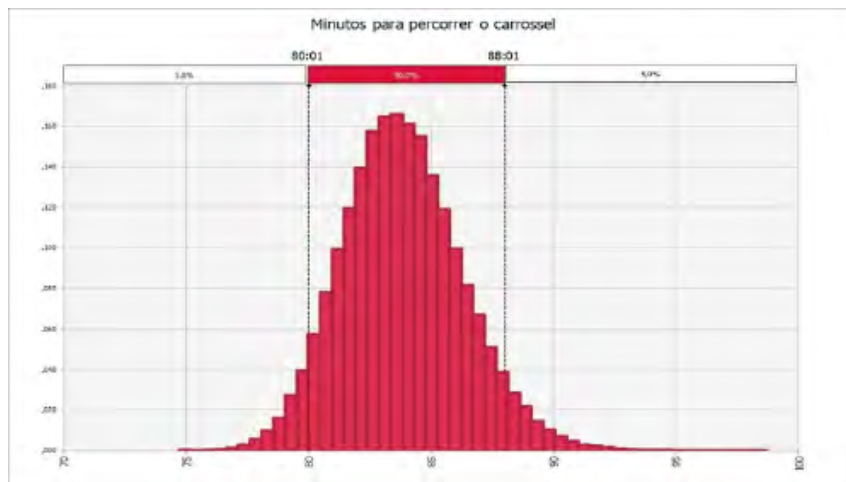
TEMPO	NA ESTAÇÃO		EM DESLOCAMENTO	
	Parado	Aceleração	Vel. de Cruzeiro	Frenagem
Mínimo	00:20 s	0,50m/s ²		0,50m/s ²
Médio	00:30 s	0,85m/s ²	10m/s	0,85m/s ²
Máximo	00:40 s	1,00m/s ²		1,00m/s ²
Desvio padrão σ			1,5m/s	
Distribuição	Triangular	Triangular	Normal	Triangular

Considerando as variações destes parâmetros obtivemos o resultado mostrado na Figura 1.

A simulação mostra o número de minutos que um trem necessita para completar um ciclo do carrossel. Em 95% das vezes existe a possibilidade de um trem demorar até 88:01 minutos e estar pronto para reiniciar o próximo ciclo no carrossel. A média é

83:49 minutos, valor 7:49 minutos superior ao cálculo tradicional. E o valor mínimo de todas essas medições, 74:43 minutos é apenas 1:17 inferior à média de 76 minutos do modelo estático. É importante ressaltar que em cem mil simulações menos de 1% das vezes os trens percorreram o carrossel em até 76 minutos.

Figura 1 – Resultado de medir o quanto de tempo uma composição necessita para percorrer um ciclo completo no carrossel, repetido 100.000 vezes.



3.2 Número de trens por dia

O número de trens necessário depende da quantidade de passageiros ao longo do dia. Por isso antes de calcular o número de trens precisamos calcular qual a sua demanda provocada pela necessidade de transporte das pessoas. O público a ser transportado na linha metroriária pode ser representado como a superposição de três curvas distintas, cada uma delas com suas incertezas quanto ao total de passageiros e ao instante em que alcançam o pico de demanda: (1) demanda “base” que abrange o dia inteiro, (2) a hora de maior afluência de pessoas formando um pico na parte da manhã e (3) a hora do rush na parte da tarde.

Cada uma dessas curvas segue uma distribuição Normal e a quantificação desses passageiros ao longo do tempo se dá através da função densidade de $N(\mu, \sigma^2)$. Para saber quantos passageiros (PAX) chegam às estações em um determinado intervalo de tempo, digamos entre a hora h_0 e a hora h_1 , o cálculo para cada uma dessas curvas é feito com a seguinte integral que no Excel é resolvida por aproximação numérica:

$$PAX(h_0 < X < h_1) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad \text{1}$$

O valor obtido em cada curva (base, pico da manhã, pico da tarde) é somado e representa a demanda total de passageiros neste intervalo $[h_0, h_1]$.

Os passageiros “base” distribuem-se através de uma curva Normal $N(\mu_b, \sigma_b^2)$ ao longo do intervalo de operação do metrô tendo seu desvio padrão σ_b fixado em $2h50min = 170$ minutos e pico μ_b como mostra a Tabela 3. A curva “base” segue uma distribuição Normal, mas sua média, o ponto de maior afluxo de passageiros, varia a cada dia em uma distribuição triangular. Como a distribuição Normal admite que seus extremos, tanto o inferior quanto o superior sejam infinitos, os valores que estiverem antes do horário de abertura e após o horário de fechamento da operação da linha do metrô serão alocados tanto no primeiro quanto no último trem, respectivamente.

Tabela 3 - Definição da média μ_b da demanda de passageiros “base”, distribuição triangular.

Desvio padrão σ_b	Mínimo	Mais provável	Máximo
2h50min	11:40	14:30	17:20

Para definir os horários de pico da manhã e da tarde, o modelo faz duas distribuições triangulares como se pode ver na Tabela 4:

uma para achar a média μ e outra para encontrar o desvio padrão σ dos respectivos períodos.

Tabela 4 - Horários de pico em distribuição triangular.

	Mínimo	Mais provável	Máximo
Pico da manhã			
Horário μ_m	8:15	8:30	8:45
Desvio padrão σ_m	0:20	0:30	0:40
Pico da tarde			
Horário μ_t	18:00	18:30	19:30
Desvio padrão σ_t	0:20	0:30	0:40

A soma destes três afluxos de passageiros, base, manhã e tarde, pode ser representada matematicamente por

$$PAX(h_0, h_1) = \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_b, \sigma_b^2) + \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_m, \sigma_m^2) + \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad 2$$

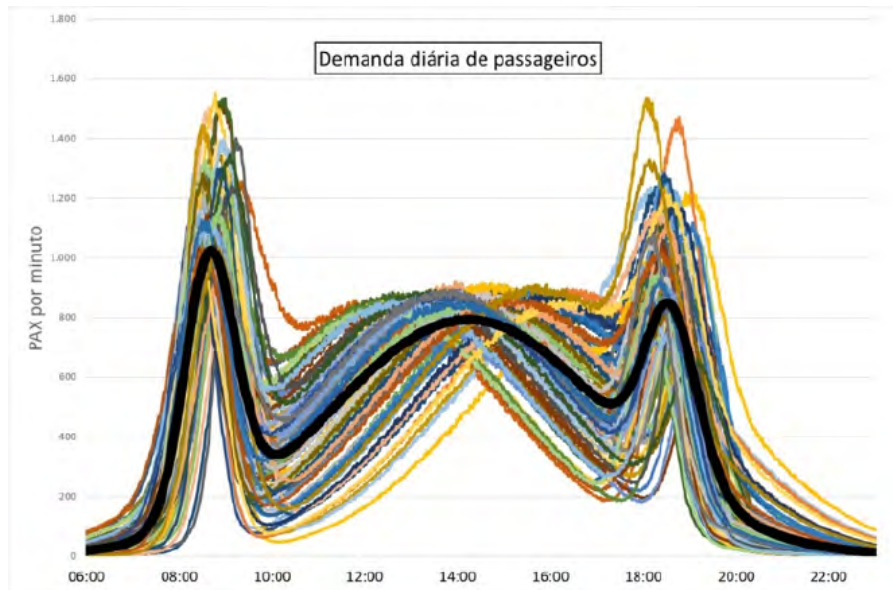
totalizada na Tabela 6 e gera a curva de proporção de demanda diária da Tabela 5 que, distribuída ao longo do dia, pode ser vista na Figura 2.

Tabela 5 - Divisão de demanda diária dos passageiros (PAX) da linha de metrô.

Base Diária PAX	75%
PAX manhã	15%
PAX tarde	10%

Tabela 6 - Demanda de passageiros, distribuição Normal.

Média diária de PAX	600.000
(Desvio padrão σ)	18.000 (3%)

Figura 2- Demanda diária de passageiros (PAX).

Definimos também uma taxa de rotatividade – *turnover* – de 1,25 passageiros por lugar individual no trem por viagem. *Turnover* é quando um passageiro chega à sua estação de destino, desce do trem completando a viagem e outro passageiro toma o seu lugar. Neste caso o mesmo lugar é utilizado mais de uma vez na mesma viagem e essa taxa indica que a cada cinco passageiros, apenas um desce do trem dando lugar a outro passageiro nessa mesma viagem.

Introduzimos uma condição para os intervalos (Tabela 7) entre os trens com dois limiares relativos à lotação de passageiros. Quanto maior o número de passageiros, menor será o intervalo entre as composições com o consequente aumento da frequência de trens para atender mais rapidamente à demanda do sistema. E, quando esse número de passageiros diminui, o intervalo entre os trens aumenta.

Tabela 7- Intervalos entre os trens

Mínimo	120 segundos
Médio	240 segundos
Máximo	360 segundos

Quando a quantidade de passageiros está abaixo de 40% da lotação máxima, o intervalo é de 6 minutos entre as composições (360 segundos). Ao passar de 70%, o intervalo é de 2 minutos (120 segundos). Taxas de lotação intermediárias entre 40% e 70% causam o respectivo decréscimo de 8 segundos a cada 1% a mais de lotação como mostra a Tabela 8. Para o

cálculo do intervalo entre os trens utilizamos a média da lotação dos dois últimos trens onde l é a taxa de lotação do trem.

Lotação para intervalo calculado =

$$40\% \leq \left(\frac{l_{-2} + l_{-1}}{2} \right) \leq 70\% \quad 3$$

Então o intervalo entre os trens é calculado em segundos como:

$$\text{intervalo} = 360s - 8s \left(\frac{l_{-2} + l_{-1}}{2} \right) \quad 4$$

Tabela 8 - Capacidade da composição e limiares

Máxima:	1,650 PAX
Limiar de baixa demanda:	40% da capacidade do trem
Limiar de alta demanda:	70% da capacidade do trem
Fator de redução de intervalo:	-8 segundos a cada 1%

Nos horários de pico, quando a capacidade do trem não é suficiente para atender ao número de passageiros nas estações, esse número acumula-se esperando pelo próximo trem e durante esses períodos o intervalo entre os trens é sempre o mínimo (120 segundos) desde que haja composições disponíveis para entrar no carrossel e permanece assim até que a ocupação média de dois trens subsequentes seja menor que 70% como mostrado nas Equações (3) e (4).

Caso não haja mais composições disponíveis no pátio, t_x será o tempo necessário para o primeiro trem que já está no carrossel completar o ciclo e então tornar-se disponível para outra viagem. Caso haja trens no pátio, $t_x = 0h00min$, no modelo, o primeiro intervalo é sempre de 360 segundos e com isso l_{-2} e l_{-1} ,

taxas de ocupação dos dois trens anteriores, ficam definidos para a fórmula que calcula o número de viagens de trem ao longo de um dia, o somatório dos intervalos:

$$\text{viagens por dia} = 1 + \sum_{06.00.00}^{23.00.00} \left[t_x + 360s - 8s \left(\frac{l_{-2} + l_{-1}}{2} \right) \right] \quad 5$$

Com as variações de todas estas incertezas apresentadas nesta seção obtivemos os resultados das Figuras 3, 4 e 5:

A simulação mostra o número de viagens de trem necessárias por dia. O intervalo até 284 viagens atende a 95% da demanda de giros no carrossel por dia. A média é de 269,9 ciclos de trem por dia.

Figura 3 - Viagens por dia



Esta experiência (Figura 4) revela o número máximo de trens que circulam no carrossel ao mesmo tempo e que, com uma frota de 40 trens, é possível transportar até 95% da quantidade de passageiros no horário de pico. A média é de 34,5 trens e a moda

é 33 trens. Este número é extremamente superior ao obtido no cálculo pelas “médias” que determinou uma frota de 19 trens. Aqui se percebe a importância da modelagem das incertezas já que naquele caso o CAPEX estaria subdimensionado.

Figura 4 - Número máximo de trens simultaneamente no carrossel

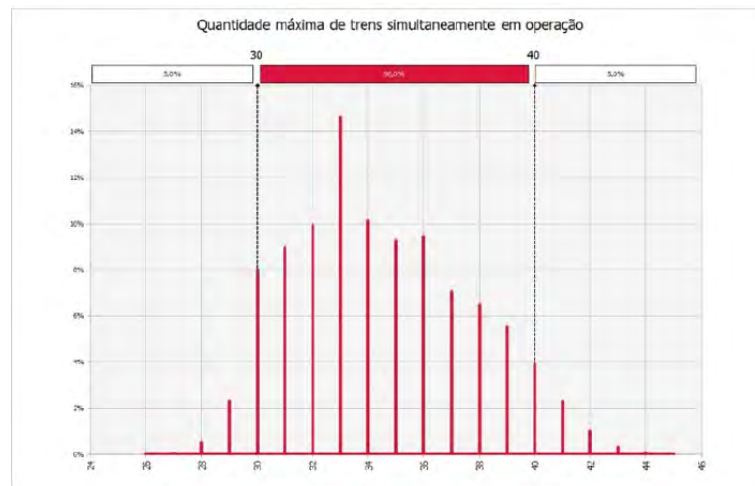
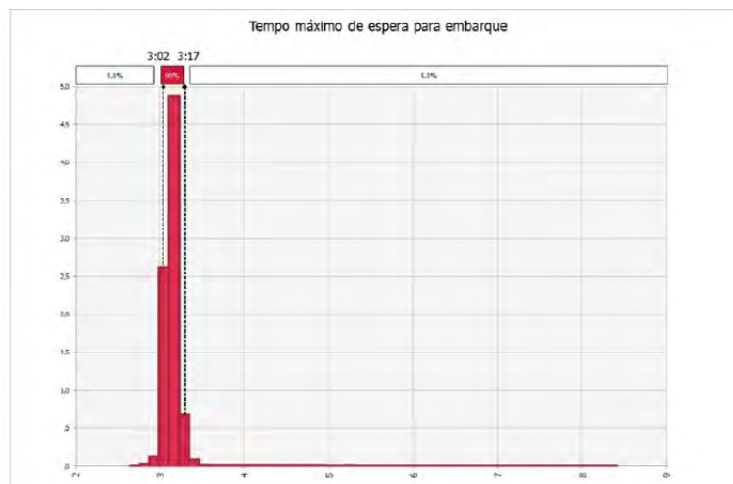


Figura 5 - Tempo máximo de espera para embarcar



A Figura 5 reproduz o tempo máximo de espera que um passageiro leva para embarcar nos momentos de pico de demanda. Em 95% das vezes os passageiros têm que esperar no máximo 3:17 minutos para poder embarcar, com média de 3:11 minutos.

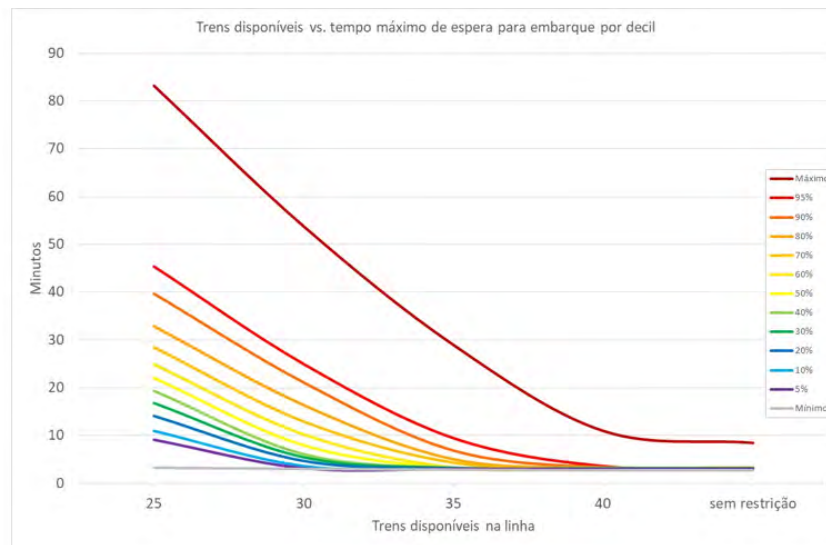
Esta modelagem dinâmica tem por objetivo trazer o máximo de conforto para o passageiro com o menor tempo

de espera para embarcar. E assim como a modelagem estática vista anteriormente, também pode levar a conclusões simples e equivocadas uma vez que pressupõe não haver limitação no número de trens no pátio, como se o dinheiro necessário ao CAPEX de material rodante fosse infinito. Por isso fizemos de maneira complementar uma análise de sensibilidade para perceber qual a relação entre a quantidade de

composições e o tempo máximo que um passageiro precisa aguardar antes de embarcar. E partindo dessas ideias contraditórias e com estes objetivos mutuamente excludentes entre o poder concessionário e a empresa que efetiva

a operação metroviária mostramos que se pode chegar a um equilíbrio entre a quantidade de material rodante e a satisfação do usuário final com o tempo de espera para embarcar. Algo que seja satisfatório para ambos.

Figura 6 – Trens disponíveis e o tempo de espera na plataforma de embarque



Como se pode ver na Figura 6, o tempo de espera pouco se altera quando existe uma limitação de 40 composições na linha de metrô. Pela análise com os decis parece que por volta de 35 composições seja um CAPEX razoável porque 95% das vezes a espera será de até 9:27 minutos. Já com 30 trens a mesma curva de 95% consumirá até 24:58 minutos do tempo de espera por um embarque enquanto a mediana será de 7:56 minutos. Por outro lado, para 25 trens o tempo de espera é de 45:39 minutos para a mesma curva percentual. Desse modo, verifica-se que, à medida que diminui o limite de composições disponíveis na linha

de metrô, aumenta o tempo de espera por um embarque, demonstrando uma relação inversamente proporcional que acaba afetando a satisfação do usuário no sistema de metrô. Fica evidenciado o possível conflito entre a satisfação do usuário, por meio de um metrô pontual, em relação à quantidade de material rodante. É importante ter sempre presente nestas projeções que quanto maior o nível de confiança e menor o número de pessoas aglomeradas ou à espera para embarcar na estação, os passageiros com estes tipos de atributos ficam mais satisfeitos em situações imprevistas.

4. CONCLUSÕES

O artigo apresenta uma análise de como melhor ajustar a quantidade de trens em um sistema metroviário. Diferentes parâmetros são levados em conta para projetar várias simulações considerando incertezas a partir da situação original. O principal objetivo do estudo de caso é estabelecer o número de trens necessários para uma frota eficiente do sistema metroviário e a consequente qualidade do serviço, medida pela espera do passageiro que aguarda para embarcar, diante de uma demanda variável de indivíduos ao longo das horas de um dia de operação, para satisfazer o usuário ao mesmo tempo.

A Análise Estática mostra que uma frota de 19 trens, de maneira equivocada, é o número necessário para uma operação do sistema de metrô, sem levar em conta a possibilidade de variações nos parâmetros. A Análise Dinâmica, pelo contrário, mostra que é necessária uma frota maior, por volta 35 trens para transportar até 95% da quantidade de passageiros no horário de pico para um funcionamento aceitável do sistema metroviário, quase o dobro da média calculada pela análise estática. Dessa forma o modelo dinâmico é mais relevante, pois leva em consideração as diferentes variações dos parâmetros, as incertezas existentes e a quantidade de material rodante necessário para cumprir com a satisfação do usuário.

A satisfação do usuário é um elemento importante que define a operação eficiente

de um sistema de metrô. O estudo de caso mostra que para atender a esse padrão é necessário ter uma disponibilidade por volta de 35 trens, para se conseguir um tempo razoável de espera dos passageiros. No entanto, é aconselhável, sem ultrapassar os custos do concessionário, contar com alguns materiais circulantes acima do limite inferior, em caso de qualquer avaria ou imprevisto. Tudo isso para atender aos níveis de confiança e satisfação das pessoas.

O artigo contribui ao usar os dois métodos de análise para obter a quantidade do material rodante necessário para o funcionamento ideal do sistema de metrô nos horários de pico. Mostra-se também a imprecisão e conclusão errônea da análise estática em comparação com a análise dinâmica que leva em consideração as incertezas existentes e demonstra maior semelhança com a realidade. Além disso, se demonstra-se que o poder público possui uma ferramenta de auxílio à decisão que define a quantidade de trens que o concessionário precisa suprir, porque o modelo dinâmico prevê gargalos nas estações. Para estudos futuros recomenda-se que o modelo dinâmico seja melhorado ao ampliar a análise para cada estação do metrô e que também leve em conta a otimização da energia como mais um parâmetro base nos dois modelos desenvolvidos. Também se pode levar em conta a análise de outros parâmetros na satisfação do usuário como as viagens das pessoas sentadas ou em pé.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albrecht, T., & Oettich, S. (2002). A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control. *WIT Transactions on The Built Environment*, 61.
- Batarce, M., Muñoz, J. C., & de Dios Ortúzar, J. (2016). Valuing crowding in public transport: Implications for cost-benefit analysis. *Transportation research Part A: policy and practice*, 91, 358-378.
- Björklund, G., & Swärdh, J.-E. (2017). Estimating policy values for in-vehicle comfort and crowding reduction in local public transport. *Transportation research Part A: policy and practice*, 106, 453-472.
- Börjesson, M., & Rubensson, I. (2019). Satisfaction with crowding and other attributes in public transport. *Transport policy*, 79, 213-222.
- Douglas, H., Roberts, C., & Hillmansen, S. (2016). Optimising energy saving in metro systems through characteristic evaluation.
- Gomes, F. M., e Aguiar, A. d. O., & Vils, L. (2018). The influence of trains control system modernization on the energy consumption in the Sao Paulo subway. *Energy for Sustainable Development*, 47, 1-8.
- Haahr, J. T., Wagenaar, J. C., Veelenturf, L. P., & Kroon, L. G. (2016). A comparison of two exact methods for passenger railway rolling stock (re) scheduling. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 91, 15-32.
- Haywood, L., Koning, M., & Monchambert, G. (2017). Crowding in public transport: Who cares and why? *Transportation research Part A: policy and practice*, 100, 215-227.
- Jamili, A., Shafia, M. A., Sadjadi, S. J., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2012). Solving a periodic single-track train timetabling problem by an efficient hybrid algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(4), 793-800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.01.020>
- Khmelnitsky, E. (2000). On an optimal control problem of train operation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7), 1257-1266. doi: 10.1109/9.867018
- Kroon, L., Maróti, G., Helmrigh, M. R., Vromans, M., & Dekker, R. (2008). Stochastic improvement of cyclic railway timetables. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(6), 553-570. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2007.11.002>
- Kroon, L. G., & Peeters, L. W. (2003). A variable trip time model for cyclic railway timetabling. *Transportation science*, 37(2), 198-212.
- Lai, Y.-C., Fan, D.-C., & Huang, K.-L. (2015). Optimizing rolling stock assignment and maintenance plan for passenger railway operations. *Computers & Industrial Engineering*, 85, 284-295.
- Li, K., Huang, H., & Schonfeld, P. (2018). Metro timetabling for time-varying passenger demand and congestion at stations. *Journal of Advanced Transportation*, 2018.
- Li, L., Wang, X., Liu, Y., & Chen, C. (2017). *Optimization of Single Train Operations Information Technology and Intelligent Transportation Systems* (pp. 665-675): Springer.
- Li, S., Dessouky, M. M., Yang, L., & Gao, Z. (2017). Joint optimal train regulation and passenger flow control strategy for high-frequency metro lines. *Transportation Research Part B: Methodological*, 99, 113-137.
- Liu, L., Sun, L., Chen, Y., & Ma, X. (2019). Optimizing fleet size and scheduling of feeder transit services considering the influence of bike-sharing systems. *Journal of Cleaner Production*, 236, 117550.
- Liu, R. R., & Golovitcher, I. M. (2003). Energy-efficient operation of rail vehicles. *Transportation research Part A: policy and practice*, 37(10), 917-932.
- Nachtigall, K. (1994). A branch and cut approach for periodic network programming: *Inst. für Mathematik*.

- Odiijk, M. A. (1996). A constraint generation algorithm for the construction of periodic railway timetables. *Transportation Research Part B: Methodological*, 30(6), 455-464.
- Pascual, R., Martínez, A., & Giesen, R. (2013). Joint optimization of fleet size and maintenance capacity in a fork-join cyclical transportation system. *Journal of the Operational Research Society*, 64(7), 982-994. doi: 10.1057/jors.2012.103
- Popescu, M., Bitoleanu, A., Deaconu, I., & Dobriceanu, M. (2016). Improvement of power quality and energy efficiency in Bucharest metrô traction substations. Paper presented at the 2016 IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC).
- Rahimi-Vahed, A., Crainic, T. G., Gendreau, M., & Rei, W. (2015). Fleet-sizing for multi-depot and periodic vehicle routing problems using a modular heuristic algorithm. *Computers & Operations Research*, 53, 9-23.
- Robenek, T., Maknoon, Y., Azadeh, S. S., Chen, J., & Bierlaire, M. (2016). Passenger centric train timetabling problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 89, 107-126.
- Schöbel, A. (2017). An eigenmodel for iterative line planning, timetabling and vehicle scheduling in public transportation. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 74, 348-365.
- Serafini, P., & Ukovich, W. (1989). A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(4), 550-581.
- Shafia, M. A., Aghaee, M. P., Sadjadi, S. J., & Jamili, A. (2012). Robust Train Timetabling Problem: Mathematical Model and Branch and Bound Algorithm. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 13(1), 307-317. doi: 10.1109/TITS.2011.2169961
- Soza-Parra, J., Raveau, S., Muñoz, J. C., & Cats, O. (2019). The underlying effect of public transport reliability on users' satisfaction. *Transportation research Part A: policy and practice*, 126, 83-93.
- Su, S., Tang, T., Li, X., & Gao, Z. (2013). Optimization of multitrain operations in a subway system. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(2), 673-684.
- Su, S., Tang, T., & Wang, Y. (2016). Evaluation of strategies to reducing traction energy consumption of metrô systems using an optimal train control simulation model. *Energies*, 9(2), 105.
- Tian, Z., Weston, P., Hillmansen, S., Roberts, C., & Zhao, N. (2016). System energy optimisation of metro-transit system using Monte Carlo Algorithm. Paper presented at the 2016 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT).
- Tirachini, A., Hensher, D. A., & Rose, J. M. (2013). Crowding in public transport systems: effects on users, operation and implications for the estimation of demand. *Transportation research Part A: policy and practice*, 53, 36-52.
- Voorhoeve, M. (1993). Rail scheduling with discrete sets. Unpublished report, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- Wardman, M., Shires, J., Lythgoe, W., & Tyler, J. (2004). Consumer benefits and demand impacts of regular train timetables. *International Journal of Transport Management*, 2(1), 39-49.
- Wardman, M., & Whelan, G. (2011). Twenty years of rail crowding valuation studies: evidence and lessons from British experience. *Transport reviews*, 31(3), 379-398.
- Xu, X., Li, K., & Li, X. (2016). A multi-objective subway timetable optimization approach with minimum passenger time and energy consumption. *Journal of Advanced Transportation*, 50(1), 69-95.
- Yap, M., & Cats, O. (2021). Taking the path less travelled: Valuation of denied boarding in crowded public transport systems. *Transportation research Part A: policy and practice*, 147, 1-13.
- Yin, J., Yang, L., Tang, T., Gao, Z., & Ran, B. (2017). Dynamic passenger demand oriented metrô train scheduling with energy-efficiency and waiting time minimization: Mixed-integer linear programming approaches. *Transportation Research Part B: Methodological*, 97, 182-213.
- Yu, F. R. (2015). *Advances in communications-based train control systems*: CRC Press.
- Zafar, N. A., Khan, S. A., & Araki, K. (2012). Towards the safety properties of moving block railway interlocking system. *Int. J. Innovative Comput., Info & Control*, 8(7), 5677-5690.



A SUBWAY FLEET SIZING MODEL

Sidnei Cardoso
IAG PUC-Rio

Gabriela Gonzalez Espinosa
IAG PUC-Rio

RESUMO

O investimento de capital na aquisição da frota necessária para a operação de uma linha de metrô tem impactos relevantes no custo total do sistema. Os métodos tradicionais utilizados para determinar a frota ótima envolvem tipicamente modelos estáticos que não consideram as incertezas de demanda de passageiros nem as incertezas técnicas da operação. O problema fundamental consiste em saber a quantidade específica e necessária de trens para cada circuito existente antes de um planejamento do CAPEX de material rodante. Neste artigo apresentamos um modelo dinâmico para o dimensionamento da frota de um sistema de metrô. O artigo propõe estabelecer o número de trens necessários para uma operação eficiente do sistema metroviário diante de uma flutuação da quantidade de passageiros ao longo do dia. O modelo dinâmico é projetado com base em dois tipos de análise: de acordo com o tempo do carrossel e a quantidade de trens que, por sua vez, depende da demanda existente de passageiros. Os resultados indicam que o modelo dinâmico oferece informações mais próximas da realidade pois considera as incertezas existentes. O modelo estático, por outro lado, considera apenas parâmetros baseados nas médias do setor, o que permite inconsistências. A abordagem exposta pode auxiliar governo ou outras autoridades envolvidas no planejamento de transporte urbano e mais especificamente sistemas de metrô a determinar valores mais precisos para o planejamento de CAPEX e o custo/benefício da aquisição de material rodante, levando em consideração a satisfação do usuário.

Palavras-chave: metrô, dimensionamento de frota, demanda de passageiros.

ABSTRACT

Capital investment in acquiring the fleet required for a subway line has relevant impacts on the system's total cost. Nonetheless, the traditional methods used to determine the optimal fleet typically involve static models that do not consider the uncertainties of shifting passenger demand or the technical uncertainties of the operation. The fundamental problem is knowing the specific and necessary number of trains for each circuit before planning the CAPEX of rolling stock. This article presents a dynamic model for the fleet sizing of a subway system. We propose establishing the number of trains needed for an efficient operation of the subway system to match the fluctuation in the number of passengers throughout the day. The dynamic model is devised based on two types of analysis: the time trains run through the carousel and the number of trains per day conditioned on the existing passengers' demand. The results indicate that the dynamic model offers information closer to reality considering the existing uncertainties. On the other hand, the static model only considers parameters based on means and averages, allowing inconsistencies. The presented approach can help the government or other authorities in better planning of subway systems and determining more accurately CAPEX values planning and the cost/benefit of rolling stock acquisition, considering the passengers' comfort and convenience.

Keywords: subway, fleet sizing, passenger demand.

1. INTRODUCTION

Subway systems are a vital link in public transportation systems in major urban hubs all over the world. This is an efficient mechanism that optimizes people's time, as it plays a vital role in taking people to and from their main destinations quickly, safely, and efficiently. Each train has a fixed capacity that cannot be exceeded, and each client has a known demand that must be met in full. Each client must be served by exactly one visit by a single train, and each train must leave the yard and return after completing a number of cycles on the respective loop (Rahimi-Vahed, Crainic, Gendreau, & Rei, 2015). One of the components of the subway system is the loop, a circular circuit that runs sequentially through all the stations and then returns in the opposite direction until reaching its starting point, thus completing a cycle. The correct functioning of the subway system takes some essential variables into consideration, which must be adjusted in order to obtain efficient, optimum functioning for the public, such as departure and arrival times, number of passengers, length of lines, number of stations, number and capacity of car, continuous operating period, and time halted at each station.

According to L. Liu, Sun, Chen, and Ma (2019), the traffic planning process is usually divided into five phases: study of latent demand, route design, network design, schedule development and train programming. The first of these phases is the assumption that underpins all the others; in turn, they affect the way in which passenger trips are selected. At the same time, Schöbel (2017) believes that the public transportation planning process may generally be divided into three phases: line planning, timetable programming and vehicle scheduling. In any transit system, sizing the fleet is

a major decision, due to the significant capital investments required. The purpose is always to define the minimum fleet needed to respond to passenger demands. Traditionally, this analysis is performed through static models considering only the fixed values presented in the project design, which is subject to many constraints. In this paper, we present a dynamic urban subway fleet sizing model, where uncertainties are explicitly modeled, and we show how this model contributes to a more suitable solution. Furthermore, this is based on the number of minutes that a train takes to complete the cycle, returning to the start of the loop, the number of train trips needed each day, the maximum number of trains that should be on the loop at peak periods, and the maximum time that a passenger should wait to board during these peak demand periods.

This paper presents an analysis of a simulated subway system case study. The modeling is handled through defining the train fleet size, taking random delays and uncertainties into account, which may occur. Some of the aspects to be borne in mind are: delays on platforms, signaling problems, unexpected halts between stations, and passenger flows. Consequently, the following question is defined as a research problem: what is the train fleet needed to operate a subway system, given an increase in passenger demands, or a possible delay between stations?

It is also intended to establish the knowledge basis for the number of trains needed for CAPEX planning, in order to analyze the costs that must be taken into consideration when purchasing the total number of trains. In order to respond to trip demands and ensure passenger satisfaction, the timetable must be as

compact and flexible as possible. Many subway systems need government subsidies to cover their operating expenses. Sometimes planners focus more on the operating costs rather than passenger factors, when drawing up a schedule or timetable (Robenek, Maknoon, Azadeh, Chen, & Bierlaire, 2016).

The problem under analysis is very significant today, as subway systems are a fundamental means of transportation, and one of the most heavily used by the population. Consequently, their efficient and efficacious functioning is a basic assumption for both governments and citizens. For governments, the correct specification and management of all the variables influencing subway system operations allows them to examine the cost of each fleet, as well as the overhead. At the same time, it helps explain the cost-benefit through financial analysis, which must be taken into consideration, and may be implicit in the possibility of a public-private agreement, which is beneficial for all the economic entities involved. For citizens, this shortens travel times between one place and another. Moreover, it shows that, in the traditional model where this type of analysis is generally performed, the outcomes fall below expectations, in contrast to what occurs with an analysis performed on a dynamic model that takes a variety of uncertainties into account.

This paper is organized as follows: this Introduction is followed by a Review of the Literature; then comes a description of the research problem. Sections 2 and 3 present the models and outcomes, ending with the Conclusions.

1.1 1.1 Review of the Literature

1.1.1 Subway system operation and optimization

In the literature, countless authors address the problem of subway system operations and optimizations. In turn, there are other studies, mentioned below, that seek the best operating capacity for subway

systems through accurate combinations of all the variables involved, which is more relevant for the analysis of the case study presented. For example, the Periodic Event Scheduling Problem (PESP) model is used to solve the cyclic rail scheduling problem introduced by Serafini and Ukovich (1989). Meanwhile, L. G. Kroon and Peeters (2003) developed the PESP model and made it more dynamic, in order to obtain a better response time through some deviations in a permanent cycle period. The PESP considers the problem as a set of events that recur periodically, under time constraints. Also the Voorhoeve (1993) uses the same model to solve the problem of periodical rail scheduling in order to lower and control operating costs. Other authors such as: Nachtigall (1994) and Odijk (1996) use the same PESP analysis model for the standpoints adopted in their studies. In the particular case of Nachtigall (1994), efforts are made to minimize passenger waiting time resulting from higher demands, based on a cycle regularity model, together with the PESP model constraints, in order to create a periodic procedure for the timetables of each train.

Khmelnitsky (2000) and R. R. Liu and Golovitcher (2003) performed analysis and simulations using variables such as the speed limits and gradients of each of them, based on the Pontryagin Principle, used in the optimized monitoring theory to find the best possible control for the shift in dynamic systems between one state and another, particularly when subject to constraints on status or access controls. Albrecht and Oettich (2002) use the same principle as a solution to the specific problem of controlling trains on a loop. Furthermore, they offer a proposal for solving the recommended trip time schedule for each train. A robust cyclic timetable design is an accomplishment in this field, for addressing stochastic delays that may clog passenger flows, due to rising demands at stations. Some of the studies addressing these dynamics from different standpoints are L. Kroon

et al. (2008), Shafia et al. (2012) and Jamili et al. (2012). Pascual et al. (2013) studied asset management in order to calculate the size of a rolling stock fleet, and the maintenance capacity that must be adjusted to a subway system. The proposed analytical model uses the global cost rate, with availability and performance as profit indicators. The global cost components include: opportunity costs associated with not operating at the correct times, the time cost of vehicles out of operation (may be adjusted for the train fleet), and the time cost for inactive maintenance resources. All this is intended to create a well-balanced command that can identify the main system offsets.

Gomes e Aguiar and Vils (2018) agree that train speed intervenes to a significant extent in subway system optimization and energy consumption. Several authors have studied this dynamic in different ways, and believe that speed optimization is beneficial for the upgrading subway system functioning through: train fleet optimization (Yin, Yang, Tang, Gao, & Ran, 2017) (Xu, Li, & Li, 2016), accurate train fleet control (Su, Tang, & Wang, 2016) (Douglas, Roberts, & Hillmansen, 2016), train fleet synchronization (Tian, Weston, Hillmansen, Roberts, & Zhao, 2016) (L. Li, Wang, Liu, & Chen, 2017), distinguishing railroad line distributions (Popescu, Bitoleanu, Deaconu, & Dobriceanu, 2016).

A fundamental assumption for a subway system, also known as Communication Based Train Control (CBTC) is that the Automatic Train Protection (ATP) as a fundamental security system for all subway lines, fitted to the trains, recognizes their locations and communicates directly through data communications (Wi-Fi or radio) with the ATP, which controls both traffic and route, as demonstrated by Yu (2015). As the control system interprets the train location, the track map and its destination, it can manage its acceleration and braking curves, as well as halts and lengths of time

spent at stations. Zafar, Khan and Araki (2012) suggests that a suitable analysis of these variables, which may be obtained from the general system, may lead to better synchronization.

Efficient use of rolling stock (vehicle scheduling) is an important goal to be pursued by any railroad company, due to the capital-intensive investments required (Robenek et al., 2016). For this purpose, Lai, Fan, and Huang (2015) developed an optimization model for grading efficient rolling stock use, taking into account the regulations and necessary practical limitations, where a hybrid heuristic process is designed to enhance the quality and efficiency of the solution. Haahr, Wagenaar, Veelenturf, and Kroon (2016) use CPLEX (IBM optimization software) and a column and line approach to assign rolling stock units for scheduling services on passenger railroad lines, drawing up daily timetables, and checking their applicability in real-time by testing different interruption scenarios. The CPLEX software is used to construct Pareto Front of contradictory goals. The Pareto principle affirms that, for many events, some 80% of the effects come from 20% of the causes. Consequently, the use of the optimization software is intended to help identify sensitivity points in the train system, for better operations. S. Li, Dessouky, Yang and Gao (2017) combined dynamic train and passenger control rules in order to minimize times and deviations in rendering subway line services, thus reducing lost revenues for the operator, with fewer passenger delays.

K. Li, Huang, and Schonfeld (2018) propose a continuous optimization algorithm for obtaining non-cyclic timetables based on passenger demands that vary over time, and the effects of crowding at stations. This integrates targets into line planning (frequency), scheduling (conflicting targets, including passenger waiting times and vehicle power), and vehicle scheduling (train cost). They specifically model the dynamic

evolution of the number of passengers on trains at each station, taking into account: passenger arrival rates, limited train capacities, and real passenger boarding / offboarding rates associated with crowding. They also demonstrate that the lengths of each halt are due mainly to the number of passengers boarding and leaving the trains, and their respective rates, associated with crowding at stations. Consequently, they should be considered as parameters that depend on other decision variables, meaning departure times from the first station and trip travel along the segment.

1.1.2 Subway system user satisfaction

At the same time, there are many research models that address user satisfaction by analyzing different variables that influence the efficacious functioning of subway systems. For example, Börjesson and Rubensson (2019) analyze interactions between satisfaction and importance for new quality attributes in data on Stockholm, exploring the interaction between satisfaction and performance. The main focus is on crowding and reliability. One of the discoveries is that crowding is among the attributes with the lowest satisfaction, and is the only attribute where satisfaction drops over time. Nevertheless, crowding is less important than two cognitive attributes: reliability and frequency. The higher the reliability and the less crowding, the more satisfied the passengers are with these attributes. An intriguing finding of this study is that, although the importance of crowding is minor, unless reaching very high levels, it is still the attribute with the lowest satisfaction levels.

Yap and Cats (2021) estimate a discrete choice model based on alternative routes observed in order to infer how passengers rate waiting time, after being unable to board at public transportation networks. This offers a quantitative indication of how waiting times are perceived by passengers, in comparison with the initial waiting time for the first vehicle that

arrives, as well as in comparison with time in the vehicle. The analysis allows a better understanding of the impacts of overcrowding on public transportation for passenger trip experiences and route selection decisions. The findings confirm that waiting times after being unable to board are perceived more negatively, compared to initial waiting times.

Björklund and Swärdh (2017) estimate the values for comfort, defined by getting a seat and less crowding on local public transport options in Sweden. They use declared preference data and present crowding as a neutral crowding level among standing passengers, portrayed in pictures presented to the respondents. They analyze whether there are differences in the wish to pay for more comfort, with less crowding. In general, they discuss how preferences vary according to the commuting model, income and purpose of the trip. Soza-Parra, Raveau, Muñoz, and Cats (2019) assess that the main source of insecurity lies in the progress of reliability of the service, which also affects waiting times and distributes passengers unequally among vehicles. They investigate the existence of non-linearity in user satisfaction caused by both the crowding levels and number of times they were unable to board, using a bus and subway user survey assessing post-service satisfaction. They indicate that the dependability of waiting times and competition levels have very strong impacts on user satisfaction assessments. In addition to the impact of a lack of reliability and too many people on passenger experiences, this is exacerbated even more by the non-linear relation between satisfaction and crowding levels.

In the particular event addressed by the case study, the focus is on user waiting time and other variables for obtaining the number of trains needed at peak periods for the optimal functioning of the subway system.

1.2 Case Study

In order to obtain an effective balance and even quality in urban mobility, a public transit network is needed. To do so, proper distribution is required between the bus network and the collective transportation system consisting of trains and subways. Trains and subways offer major benefits for urban mobility. Some of these advantages are the fact that passengers pass through the turnstile before reaching the boarding platform, which is at the same level as the car floors. This offers gains in time and agility, because when the means of transport arrives, everyone enters and leaves at practically the same time. This is why some cities with integrated urban bus systems use this solution for improving local traffic. This allows citizens to move around more easily in major urban hubs.

The case study focuses on analyzing a subway system line. The main agents involved are the government and concessionaire. The former is eager to obtain an excellent service at the lowest possible cost for end-users, complying with all requirement parameters for quality, reliability and safety. In parallel, the latter attempts to obtain the highest possible profits through rendering these services. The main challenge in subway operations is when the system presents an operating irregularity, as there are often not enough trains to meet rush hour demands, when the number of passengers increases. This gives rise to crowding, due to platform waiting times and the lack of continuous circulation by the trains. In order to analyze these problems, we conducted an operating analysis based on two models; one traditional static, and the other dynamic, bearing in mind that the difference between them is the flexibility of the variables where the main uncertainties are clustered.

2. TRADITIONAL STATIC MODEL

We analyzed the sizing and operations of a subway system through a traditional model working with static values for operating parameters. Consequently, possible variations are not taken into consideration that modify the functioning

of the system. The model parameters were based on typical data for this sector and information from experts. The basic specifications and assumptions adopted in the subway line case study are the following:

Table 1 - Parameters and assumptions for a subway line model

Length of route	18 Km
Nº of stations	16
Mean Nº of users x day	600,000 passengers
Mean speed between stations	36 Km/h
Operating hours	06:00 - 23:00 h
Mean length of halts at stations	30 seconds
Maximum train capacity	1,650 passengers
Mean Nº of passengers x train	1,175 passengers
Mean interval between trains	240 seconds

We thus calculated the number of trains needed to operate in this model:

- 1) Loop:** a train travels for an hour around the loop at 36Km/h, without including station halt at the station - the outbound and inbound system on the subway line route - coming back to its starting point and ready to start out again on the next trip.

Halting for an average of 30 seconds at each of the 16 stations on the outbound and inbound trips gives the equivalent of $30s \times (2 \times 16) = 960s = 16$ minutes. Adding this to the travel time, this train completes the cycle in 76 minutes.

- 2) Nº of Trains:** with the calculation of the time on the loop as shown above and with an interval of 240 seconds

(4 minutes) between one train and the next, there are simultaneously $76/4 = 19$ trains traveling on the loop that complete 255 trips or full cycles along on this line during the day.

- 3) Waiting time:** with the static model, one of the main service quality measurements is the maximum length of time that a passenger must wait to board, which is the fixed interval of 240 seconds between the trains (4 minutes).

Taking the mean of all these values leads to the conclusion that nineteen trains are sufficient to meet the demands imposed on this subway system, thus defining the total rolling stock for the CAPEX - in an overly simple or even mistaken way - as required for the operation.

3. DYNAMIC MODEL

Dynamic modeling allows some uncertainties to be included from the daily activities of a subway transportation system. In order to reach the same goal as the model described above, the minimum number of trains is defined as required for the subway operations, increased by sources of uncertainty that influence the model, with the analysis split into three parts: (1) uncertainties related to the length of time traveling round the loop, (2) the number of trains in action on the loop at the same time; and (3) the quality of the services rendered reflected in passenger waiting times prior to boarding at stations.

In order to perform these modeling exercises, we used Microsoft Excel software with the @Risk version 8.1.1 (add-on) developed by the Palisade LLC company. Through this, we drew up Monte Carlo simulations with 100,000 interactions for each model.

3.1 Time on the loop

This is the time that a train spends on the loop, which is influenced by the following uncertainties: i) time halted at stations for passenger leaving and boarding the train, (ii) number of seconds that the train speeds up in order to reach cruising speed, from departure time; and (iii) similarly, the braking time when the train slows down from cruising speed until the cars halt completely at the next station.

For time spent at the stations and the acceleration and braking times, minimum, mean and maximum values were used, in a triangular distribution as shown in Table 2. Cruising speed follows a Normal distribution with a mean of 10m/s (36Km/h) and a standard deviation σ of 1.5m/s (5.4Km/h). As the Normal distribution has infinite ends, a forced limitation was established at 2m/s (7.0Km/h) in a lower part and a maximum of 22.22m/s (80Km/h). These figures are described in greater detail in Table 2.

Table 2 - Uncertainties while traveling round the loop and their respective distributions.

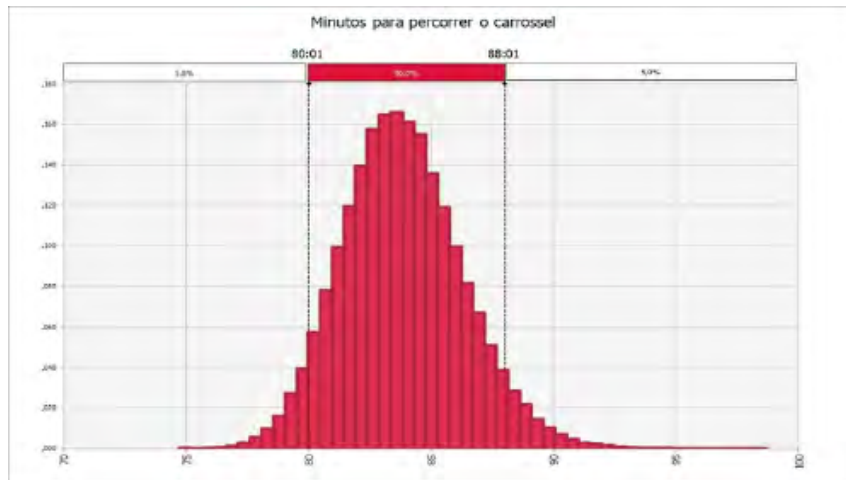
TIME	AT THE STATION		IN MOVEMENT	
	Halted	Acceleration	Cruising speed	Braking
Minimum	00:20 s	0.50m/s ²		0.50m/s ²
Mean	00:30 s	0.85m/s ²	10m/s	0.85m/s ²
Maximum	00:40 s	1.00m/s ²		1.00m/s ²
Standard deviation σ			1.5m/s	
Distribution	Triangular	Triangular	Normal	Triangular

Considering the variations in these parameters, the following findings were obtained, as shown in Figure 1.

The simulation shows the number of minutes that a train needs to complete a cycle round the loop. For 95% of the time, there is a possibility of the train taking up to 88:01 minutes and being ready to enter the next cycle on the loop. The mean

is 83:49 minutes, which is 7:49 minutes higher than the traditional calculation. The minimum value for all these measurements is 74:43 minutes, which is only 1:17 minutes shorter than the mean of 76 minutes found through the static model. It is important to stress that in 100,000 simulations, the trains traveled round the loop in up to 76 minutes less than 1% of the time.

Figure 1 - Results of measuring how long a train needs to travel through a complete cycle in the loop, repeated 100,000 times.



3.2 N° trains each day

The number of trains needed depends on the number of passengers in the course of the day. Consequently, before calculating the number of trains, we must calculate the demand arising from people's needs for transportation. The public to be carried on the subway line may be represented as three separate overlapping curves, each of them with its own uncertainties regarding the total passengers and the time at which peak demand occurs: (1) baseline demand that encompasses the whole day; (2) the time when the largest number of people travel, forming a peak during the morning; and (3) the afternoon rush hour.

Each of these curves follows a Normal distribution, and the quantification of these passengers over time is handled through the $N(\mu, \sigma^2)$ density function. In order to know how many passengers (PAX) reach the stations during a specific period of time, say between h_0 and h_1 hours, the calculation for each of these curves is performed with the following integral, which is resolved through numerical approximation on the Excel spreadsheet:

$$PAX(h_0 < X < h_1) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad 1$$

The value obtained for each curve (baseline, morning rush hour, afternoon rush hour) is added together, representing total passenger demands during this period $[h_0, h_1]$.

The baseline passengers are distributed through a $N(\mu_b, \sigma_b^2)$ Normal curve during the subway operating hours, with a σ_b standard deviation set at 2h50min = 170 minutes and μ_b peak as shown in Table 3. The baseline curve follows a Normal distribution, but its mean - the peak passenger inflow - varies each day, by a triangular distribution. As the Normal distribution accepts that its upper and lower ends are infinite, the values before the opening time and after the closing time of the subway line are allocated to the first and last trains, respectively.

Table 3 – Definition of the μ_b mean for the passenger demands baseline, triangular distribution.

Standard deviation σ_b	Minimum	Most probable	Maximum
2h50min	11:40	14:30	17:20

In order to define the morning and afternoon rush hours, the model prepares two triangular distributions, as shown in

Table 4: one for finding the μ mean and the other for finding the σ standard deviation for the respective periods.

Table 4 – Peak periods in triangular distribution.

	Minimum	Most probable	Maximum
Morning rush hour			
Time μ_m	8:15	8:30	8:45
Standard deviation σ_m	0:20	0:30	0:40
Afternoon rush hour			
Time μ_t	18:00	18:30	19:30
Standard deviation σ_t	0:20	0:30	0:40

The sum of these three passenger inflows (baseline, morning and afternoon) may be represented mathematically by

$$PAX(h_0, h_1) = \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_b, \sigma_b^2) + \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_m, \sigma_m^2) + \int_{h_0}^{h_1} N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad 2$$

whose totals are presented in Table 6, and generating the daily demand proportion curve shown in Table 5 which, distributed throughout the day, is presented in Figure 2.

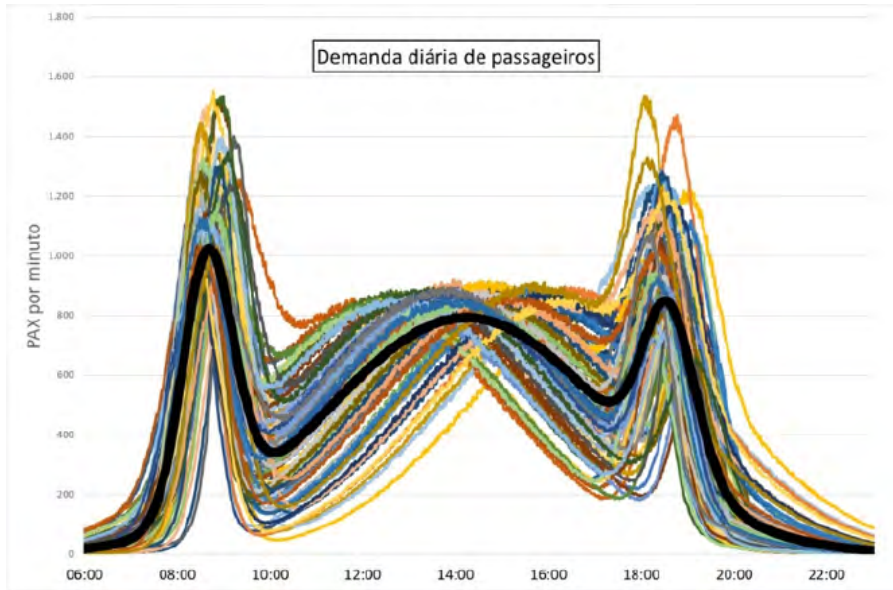
Table 5 – Division of daily demands from subway line passengers (PAX).

Daily baseline PAX	75%
Morning PAX	15%
Afternoon PAX	10%

Table 6 – Passenger demands, Normal distribution.

Daily mean – PAX	600,000
(Standard deviation σ)	18,000 (3%)

Figure 2 – Daily passenger (PAX) demands.



We also define a *turnover* rate of 1.25 passengers per seat per trip on the train. *Turnover* is when the passenger reaches their destination station, and leaves the train, completing their trip, while their place is taken by another passenger. In this case, the same seat is used more than once on a single trip, and this rate indicates that for Every five passengers, only one gets off the train and makes way for another, during this trip.

We introduce a condition for the intervals (Table 7) between the trains, with two thresholds related to passenger capacity. The higher the number of passengers, the shorter the interval between trains, resulting in increased train frequency in order to respond faster to system demands. As the number of passengers drops, the interval between trains increases.

Table 7- Intervals between trains

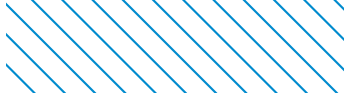
Minimum	120 seconds
Mean	240 seconds
Maximum	360 seconds

When the number of passengers falls below 40% of the maximum capacity, the interval is 6 minutes between trains (360 seconds). When passengers rise to more than 70%, the interval drops to 2 minutes (120 seconds). Intermediate capacity rates between 40% and 70% lead to a respective drop of 8 seconds for each 1% more in passenger use, as shown in Table 8. In order to calculate the

interval between trains, we use the mean number of passengers for the last two trains where this is the train capacity rate.

Passengers carried for calculated interview =

$$40\% \leq \left(\frac{I_{-2} + I_{-1}}{2} \right) \leq 70\% \quad 3$$



ARTICLE 4

So the interval between trains is calculated in seconds, as shown below:

$$\text{intervalo} = 360s - 8s \left(\frac{l_{-2} + l_{-1}}{2} \right) \quad 4$$

Table 8 - Train capacity and threshold

Maximum:	1,650 PAX
Low demand threshold:	40% of train capacity
High demand threshold:	70% of train capacity
Interval reduction factor:	-8 seconds for each 1%

During rush hours, when the train capacity is not enough to service the number of passengers at the stations, this figure builds up as they wait for the next train. During these periods, the interval between trains is always the minimum (120 seconds), provided that there are trains available to enter the loop and this continues until the mean occupancy of the two subsequent trains falls below 70%, as shown in Equations (3) and (4).

Should there be no more trains available in the yard, t_x will be the time needed for the first train that is already on the loop to complete the cycle and become available for another trip. If there are trains in the yard, $t_x = 0h00min$, in the model, the first interval is always 360 seconds and with this l_{-2} and l_{-1} ,

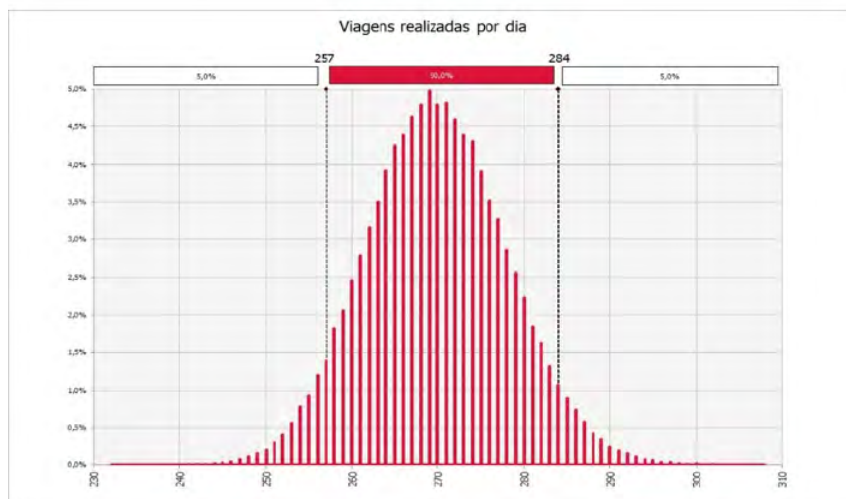
occupancy rates for the two previous trains, this defines the formula for calculating the number of train trips during a day, with the sum of the intervals:

$$\text{viagens por dia} = 1 + \sum_{06.00.00}^{23.00.00} \left[t_x + 360s - 8s \left(\frac{l_{-2} + l_{-1}}{2} \right) \right] \quad 5$$

With the variations for all these uncertainties presented in this section, we reached the findings shown in Figures 3, 4 and 5:

This simulation shows the number of train trips needed each day. The interval of up to 284 trips responds to 95% of turnaround demands on the loop each day. The mean is 269.9 train cycles each day.

Figure 3 - Trips each day



This experience (Figure 4) discloses the maximum number of trains circulating on the loop at the same time and which, with a fleet of 40 trains, can carry 95% of the number of passengers at peak periods. The mean is 34.5 trains, and the mode is

33 trains. This figure is far higher than that obtained through calculating the “means” that indicated a fleet of 19 trains. This underscores the importance of modeling uncertainties as in this case, the CAPEX would have been undersized.

Figure 4 -Maximum number of trains simultaneously on the loop

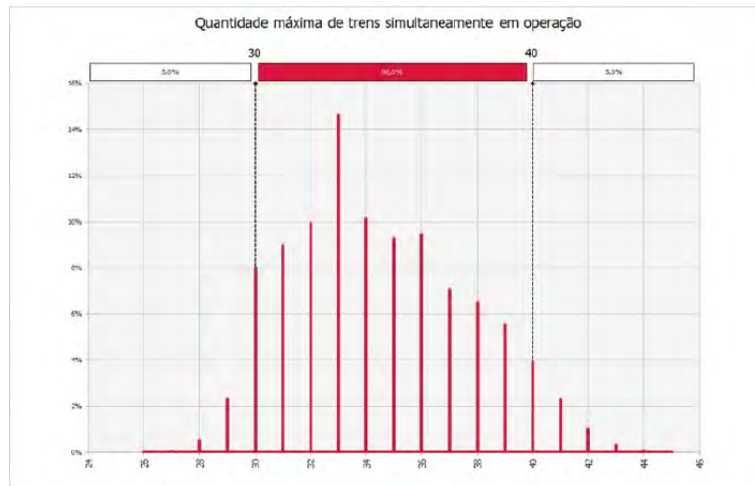


Figure 5 -Maximum time spent waiting to board

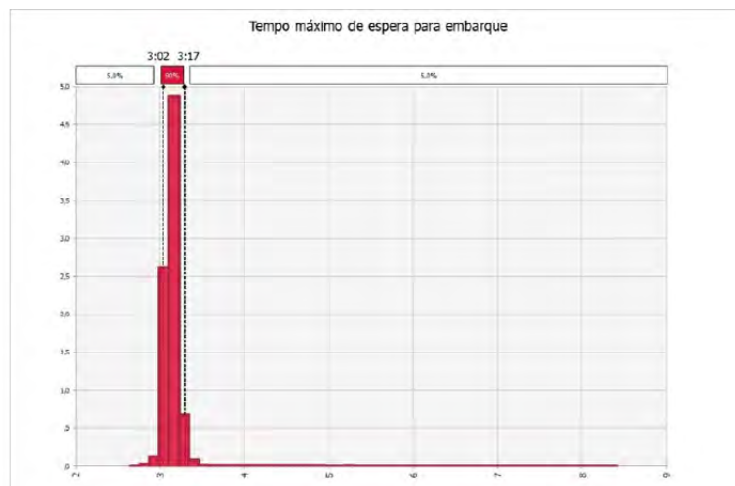


Figure 5 reproduces the maximum waiting time before a passenger boards at peak demand time. For 95% of the time, passengers must wait no more than 3:17 minutes in order to board, with a mean of 3:11 minutes.

This dynamic modeling is intended to ensure the maximum comfort for passengers, with the shortest waiting times to board. Similar to the static modeling

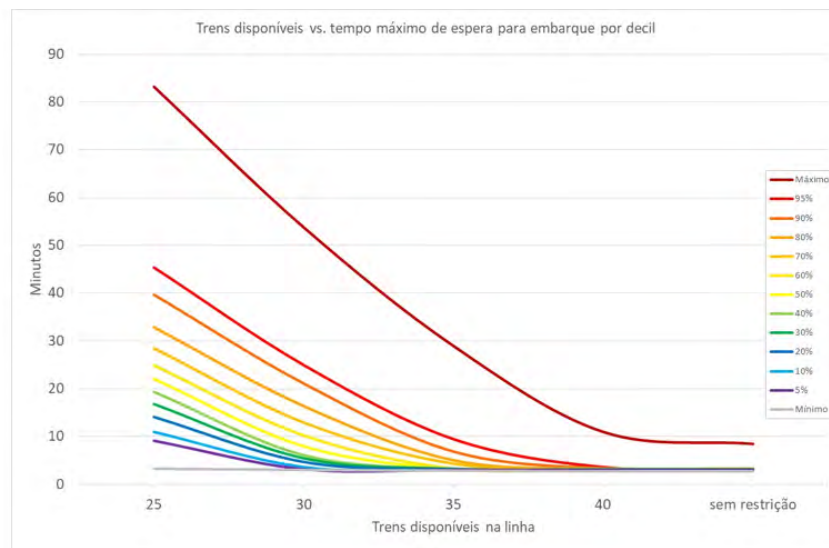
examined previously, this may also lead to simple but mistaken conclusions, as it assumes that there is no limit on the number of trains on the yard, as though the money needed to fund rolling stock CAPEX were infinite. This is why we drew up a supplementary sensitivity analysis, noting the link between the number of trains and the maximum time that passengers must wait before boarding. Based on



these contradictory ideas and with these mutually exclusive goals between the concessionaire authority and the company running the subway operations, we show that an even balance may be reached

between rolling stock quantities and end-user satisfaction with the waiting time to board. Something that would be satisfactory to both sides.

Figure 6 - Available trains and waiting time on the boarding platform



As shown in Figure 6, waiting times barely alter, when there is a limit of 40 trains on the subway line. Through an analysis with the deciles, it seems that about 35 trains would be a reasonable CAPEX, because the waiting time would be up to 9:27 minutes, in 95% of the time. With 30 trains, this 95% curve would take up to 24:58 minutes of waiting to board, while the median would be 7:56 minutes. On the other hand, with 25 trains, the waiting time reaches 45:39 minutes for the same percentage curve.

It is thus quite clear that as the limit on the number of trains available on the subway line drops, the waiting time to board increases, demonstrating an inverse proportional relation that adversely affects user satisfaction with the subway system. There is clearly a possible conflict between user satisfaction with a punctual subway, in terms of the amount of rolling stock. It is important to always bear in mind in these forecasts, that the higher the level of confidence and the smaller the crowds or the shorter the waiting time to board at the station, the higher the passenger satisfaction, in unforeseen situations.

4. CONCLUSIONS

This paper presents an analysis of how to better adjust the number of trains in a subway system. Different parameters are taken into account in order to project several simulations using uncertainties drawn from the original situation. The main purpose of this case study is to establish the number of trains needed for an efficient subway system fleet, the consequent service quality, measured by passenger time spent waiting to board, within a variable demand from individuals during the course of a day's operations, in order to satisfy the user at the same time.

Statistical Analysis shows (mistakenly) that a fleet of nineteen trains is enough to operate a subway system, without taking into account the possibility of variations in the parameters. In contrast, Dynamic Analysis shows that a larger fleet of around 35 trains is needed to carry up to 95% of rush hour passengers, for acceptable functioning by the subway system. This is almost double the mean calculated through the statistical analysis. Consequently, the dynamic model is more relevant, as it takes the different variations in the parameters into account, together with uncertainties and the amount of rolling stock needed to ensure user satisfaction.

User satisfaction is a crucial element that defines the efficient operations of a subway system. The case study shows

that, in order to meet this standard, around 35 trains need to be available, in order to attain a reasonable passenger waiting time. Consequently, without pumping up concessionaire costs, it is recommended that some rolling stock should be available above the threshold level, in case of any damage or unforeseen event. All this ensures meeting the confidence levels and satisfaction of passengers.

This paper contributes to the use of two analysis models in order to obtain the amount of rolling stock needed for the ideal functioning of a subway system during rush hours. It also shows the inaccuracy and the mistaken conclusion reached by statistical analysis, compared to dynamic analysis, which takes existing uncertainties into consideration and proves to be more similar to reality. Furthermore, it shows that the government has a tool that assists in making decisions that define the number of trains that a concessionaire must supply, as the dynamic model forecasts bottlenecks at stations. For future studies, it is recommended that the dynamic model be improved, by expanding the analysis to each subway station, and that energy optimization should also be taken into account as yet another baseline parameter in both developed models. Another matter that may be borne in mind is analyzing other user satisfaction parameters, such as trips by seated or standing passengers.

5. REFERENCES

- Albrecht, T., & Oettich, S. (2002). A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control. *WIT Transactions on The Built Environment*, 61.
- Batarce, M., Muñoz, J. C., & de Dios Ortúzar, J. (2016). Valuing crowding in public transport: Implications for cost-benefit analysis. *Transportation research Part A: policy and practice*, 91, 358-378.
- Björklund, G., & Swärdh, J.-E. (2017). Estimating policy values for in-vehicle comfort and crowding reduction in local public transport. *Transportation research Part A: policy and practice*, 106, 453-472.
- Börjesson, M., & Rubensson, I. (2019). Satisfaction with crowding and other attributes in public transport. *Transport policy*, 79, 213-222.
- Douglas, H., Roberts, C., & Hillmansen, S. (2016). Optimising energy saving in metro systems through characteristic evaluation.
- Gomes, F. M., e Aguiar, A. d. O., & Vils, L. (2018). The influence of trains control system modernization on the energy consumption in the Sao Paulo subway. *Energy for Sustainable Development*, 47, 1-8.
- Haahr, J. T., Wagenaar, J. C., Veelenturf, L. P., & Kroon, L. G. (2016). A comparison of two exact methods for passenger railway rolling stock (re) scheduling. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 91, 15-32.
- Haywood, L., Koning, M., & Monchambert, G. (2017). Crowding in public transport: Who cares and why? *Transportation research Part A: policy and practice*, 100, 215-227.
- Jamili, A., Shafia, M. A., Sadjadi, S. J., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2012). Solving a periodic single-track train timetabling problem by an efficient hybrid algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(4), 793-800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.01.020>
- Khmelnitsky, E. (2000). On an optimal control problem of train operation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7), 1257-1266. doi: 10.1109/9.867018
- Kroon, L., Maróti, G., Helmrich, M. R., Vromans, M., & Dekker, R. (2008). Stochastic improvement of cyclic railway timetables. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(6), 553-570. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2007.11.002>
- Kroon, L. G., & Peeters, L. W. (2003). A variable trip time model for cyclic railway timetabling. *Transportation science*, 37(2), 198-212.
- Lai, Y.-C., Fan, D.-C., & Huang, K.-L. (2015). Optimizing rolling stock assignment and maintenance plan for passenger railway operations. *Computers & Industrial Engineering*, 85, 284-295.
- Li, K., Huang, H., & Schonfeld, P. (2018). Metro timetabling for time-varying passenger demand and congestion at stations. *Journal of Advanced Transportation*, 2018.
- Li, L., Wang, X., Liu, Y., & Chen, C. (2017). Optimization of Single Train Operations *Information Technology and Intelligent Transportation Systems* (pp. 665-675): Springer.
- Li, S., Dessouky, M. M., Yang, L., & Gao, Z. (2017). Joint optimal train regulation and passenger flow control strategy for high-frequency metro lines. *Transportation Research Part B: Methodological*, 99, 113-137.
- Liu, L., Sun, L., Chen, Y., & Ma, X. (2019). Optimizing fleet size and scheduling of feeder transit services considering the influence of bike-sharing systems. *Journal of Cleaner Production*, 236, 117550.
- Liu, R. R., & Golovitcher, I. M. (2003). Energy-efficient operation of rail vehicles. *Transportation research Part A: policy and practice*, 37(10), 917-932.
- Nachtigall, K. (1994). A branch and cut approach for periodic network programming: *Inst. für Mathematik*.

- Odiijk, M. A. (1996). A constraint generation algorithm for the construction of periodic railway timetables. *Transportation Research Part B: Methodological*, 30(6), 455-464.
- Pascual, R., Martínez, A., & Giesen, R. (2013). Joint optimization of fleet size and maintenance capacity in a fork-join cyclical transportation system. *Journal of the Operational Research Society*, 64(7), 982-994. doi: 10.1057/jors.2012.103
- Popescu, M., Bitoleanu, A., Deaconu, I., & Dobriceanu, M. (2016). Improvement of power quality and energy efficiency in Bucharest metrô traction substations. Paper presented at the 2016 IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC).
- Rahimi-Vahed, A., Crainic, T. G., Gendreau, M., & Rei, W. (2015). Fleet-sizing for multi-depot and periodic vehicle routing problems using a modular heuristic algorithm. *Computers & Operations Research*, 53, 9-23.
- Robenek, T., Maknoon, Y., Azadeh, S. S., Chen, J., & Bierlaire, M. (2016). Passenger centric train timetabling problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 89, 107-126.
- Schöbel, A. (2017). An eigenmodel for iterative line planning, timetabling and vehicle scheduling in public transportation. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 74, 348-365.
- Serafini, P., & Ukovich, W. (1989). A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(4), 550-581.
- Shafia, M. A., Aghaee, M. P., Sadjadi, S. J., & Jamili, A. (2012). Robust Train Timetabling Problem: Mathematical Model and Branch and Bound Algorithm. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 13(1), 307-317. doi: 10.1109/TITS.2011.2169961
- Soza-Parra, J., Raveau, S., Muñoz, J. C., & Cats, O. (2019). The underlying effect of public transport reliability on users' satisfaction. *Transportation research Part A: policy and practice*, 126, 83-93.
- Su, S., Tang, T., Li, X., & Gao, Z. (2013). Optimization of multitrain operations in a subway system. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(2), 673-684.
- Su, S., Tang, T., & Wang, Y. (2016). Evaluation of strategies to reducing traction energy consumption of metrô systems using an optimal train control simulation model. *Energies*, 9(2), 105.
- Tian, Z., Weston, P., Hillmansen, S., Roberts, C., & Zhao, N. (2016). System energy optimisation of metro-transit system using Monte Carlo Algorithm. Paper presented at the 2016 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT).
- Tirachini, A., Hensher, D. A., & Rose, J. M. (2013). Crowding in public transport systems: effects on users, operation and implications for the estimation of demand. *Transportation research Part A: policy and practice*, 53, 36-52.
- Voorhoeve, M. (1993). Rail scheduling with discrete sets. Unpublished report, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- Wardman, M., Shires, J., Lythgoe, W., & Tyler, J. (2004). Consumer benefits and demand impacts of regular train timetables. *International Journal of Transport Management*, 2(1), 39-49.
- Wardman, M., & Whelan, G. (2011). Twenty years of rail crowding valuation studies: evidence and lessons from British experience. *Transport reviews*, 31(3), 379-398.
- Xu, X., Li, K., & Li, X. (2016). A multi-objective subway timetable optimization approach with minimum passenger time and energy consumption. *Journal of Advanced Transportation*, 50(1), 69-95.
- Yap, M., & Cats, O. (2021). Taking the path less travelled: Valuation of denied boarding in crowded public transport systems. *Transportation research Part A: policy and practice*, 147, 1-13.
- Yin, J., Yang, L., Tang, T., Gao, Z., & Ran, B. (2017). Dynamic passenger demand oriented metrô train scheduling with energy-efficiency and waiting time minimization: Mixed-integer linear programming approaches. *Transportation Research Part B: Methodological*, 97, 182-213.
- Yu, F. R. (2015). *Advances in communications-based train control systems*: CRC Press.
- Zafar, N. A., Khan, S. A., & Araki, K. (2012). Towards the safety properties of moving block railway interlocking system. *Int. J. Innovative Comput., Info & Control*, 8(7), 5677-5690.